arXiv:2303.02654v1 [quant-ph] 5 Mar 2023

采用非理想解复用器进行亚瑞利源判别的实用检验

KonradSchlichtholz,[1] Tomasz Linowski,[1] MattiaWalschaers,[2]Nicolas Treps,[2] Łukasz Rudnicki,[1,3] 和 Giacomo Sorelli[2,4]1国际量子技术理论中心，格但斯克大学，波兰格但斯克，*80-308*2卡斯特勒-布罗塞尔实验室，索邦大学，巴黎高等师范学院-巴黎文理研究大学，法国国家科学研究中心，法兰西公学院，法国巴黎 *Jussieu* 广场 *4* 号，*75252*3理论物理中心，波兰科学院，波兰华沙，*02-668*4弗劳恩霍夫光学、系统技术与图像处理研究所，德国埃特林根，*Gutleuthausstr. 1*，*76275*

通过理想的空间模式解复用，只需监测是否有光子在单个反对称模式中被探测到，即可实现对两个间距很近的光源与单个光源的量子最优判别。然而，我们表明，解复用器无论存在多么微小的不完美因素，这种简单的统计检验在实际中都会变得毫无用处，也就是说，其效果不比抛硬币更好。虽然我们确定了一类与间距无关的检验，在探测到的光子数量趋于无穷时其错误概率会趋于零，但除这一极限情形外，这类检验通常并不可靠。作为一种实用替代方案，我们提出了一种简单的半间距无关检验，可通过任意控制最大错误概率，为设计可靠的实验提供方法。

引言 – 统计假设检验是分析科学数据的重要工具。光学成像中的典型假设检验问题是光源判别，即确定图像源自一个还是两个光源 [1]。这与天文学相关，例如高效探测系外行星和双星 [2–8]，以及荧光显微镜，例如精确计数样品中的分子数量 [9–11]。当光源间距小于光学设备点扩散函数的宽度时，基于空间分辨强度测量（即直接成像）的光源判别方案效率会显著降低 [12, 13]。在此亚瑞利 区域内，可借助量子启发测量技术进行光源判别 [14]。

近期，受空间解复用（SPADE）在密切相关的光源间距估计问题中展现出的超分辨能力启发 [15, 16], ，研究表明，即使光源不是点状的，SPADE 在光源判别中也具有量子最优性 [17], 。此外，研究还证明，由于问题具有对称性，只需在固定反对称模式中探测到一个光子，就能以零错误概率接受其中一个假设，从而实现近乎最优且与间距无关的决策策略 [17]。然而，这些发现是在假设测量理想的前提下得出的。实际上，实验缺陷会显著影响所得结果 [19–27]。尤其是在 SPADE 中，失准、解复用器制造缺陷及其他不完美因素会导致探测到光子出现在错误输出端的概率不为零，即产生串扰 [28–30]。

在这封信函中，我们展示了串扰会对 SPADE 产生显著影响，使其难以区分一个与

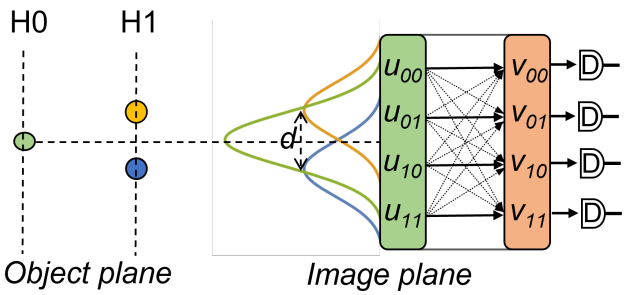


图1：测量场景示意图。根据假设的不同，物平面中存在一个（H0）或两个（H1）弱光源，从而在像平面中形成衍射展宽的空间场分布。为判断H0还是H1为真，通过受串扰影响的空间模式解复用后进行光子计数，分析像平面空间场分布。

两个亮度相同、处于实际相关的小间距范围内的光源。具体而言，我们证明，上文讨论的简单与间距无关的检验，在理想情况下是量子最优的，而只要存在任意微小的串扰，其效果就会退化到如同抛硬币一般。此外，我们发现，尽管即使存在串扰，也可以设计一类有意义的与间距无关的检验，但若事先不知道光源间距，就很难预测相应的错误概率。作为替代方案，我们提出了一种半间距无关检验，其最大错误概率易于确定。

假设与测量设置 – 我们关注于区分两个假设 H0 和 H1，如图 1所示。根据假设 H1，两个亮度相等的微弱非相干光源

（例如遥远的热源）在物平面中相距 d 。坐标系的选取方式使得光源的位置表示为 $\pm\vec{r}_0 = \pm(d/2,0)$。我们考虑具有高斯点扩散函数的衍射极限成像系统 $u_{00}(\vec{r}) = \sqrt{2/(\pi w^2)}\exp\{-r^2/w^2\}$，因此，像平面中来自位置 $\pm\vec{r}_0$ 处光源的电磁场空间分布为$u_{00}(\vec{r}\mp\vec{r}_0)$ [31]。对于微弱光源，大多数光子探测事件都是单光子事件。因此，像平面中的结果实际上可描述为对 N 份单光子态进行重复测量 [15]

$$\hat{\rho}_{\mathrm{H1}}(d) \approx \frac{1}{2}\Big(|\phi(d)\rangle\langle\phi(d)| + |\phi(-d)\rangle\langle\phi(-d)|\Big), \quad (1)$$

其中 $|\phi(\pm d)\rangle = \int d\vec{r}\ u_{00}(\vec{r}\mp\vec{r}_0)|\vec{r}\rangle$ 和 $|\vec{r}\rangle$ 表示像平面中的单光子位置本征态。根据假设 H0，物平面中只有一个光源，位于坐标系原点，且其总亮度与假设 H1 中的两个光源相同。在这种情况下，测量结果可有效地描述为对以下状态进行重复测量

$$\hat{\rho}_{\mathrm{H0}} = \lim_{d\to 0}\hat{\rho}_{\mathrm{H1}}(d) = |\phi(0)\rangle\langle\phi(0)|. \quad (2)$$

判断两个假设中哪一个为真的策略，其有效性可用平均错误概率表示

$$P_{\mathrm{e}}(N) = P_{\mathrm{H0}}\alpha(N) + P_{\mathrm{H1}}\beta(N), \quad (3)$$

其中 $P_{\mathrm{H0(1)}}$ 是相应假设的先验概率， $\alpha(N)$、 $\beta(N)$ 分别是第一类和第二类错误概率，即在 H0 正确时假定 H1 成立，反之亦然；样品大小为 N。如果没有可用的先验信息，就没有理由赋予任何一个假设更高的概率。为清楚起见，我们将重点讨论 $P_{\mathrm{H0}} = P_{\mathrm{H1}} = 1/2$ 的情况。请注意，放弃这一假设不会对我们的结果产生定性影响。

渐近错误概率 – 要有效地判别亚瑞利间距下的光源，即对于$x := d/2w < 1$，需要大量 N 样本。当 $N \gg 1$ 时，针对特定测量，在所有可能的决策策略中使错误概率最小的策略，其错误概率会以指数速度衰减为 $P_{\mathrm{mine}} \sim \exp\{-N\xi\}$，其中

$$\xi = -\ln\left(\min_{0\le s\le 1}\sum_k p(k|\mathrm{H0})^s p(k|\mathrm{H1})^{1-s}\right). \quad (4)$$

是切尔诺夫指数[32]。这里，$p(k|\mathrm{H0})(p(k|\mathrm{H1}))$表示在假设 H0（H1）成立的条件下，获得测量结果 k 的概率。对4式中的所有可能的测量进行优化后，我们得到量子切尔诺夫指数[33]。研究表明，对于所考虑的假设检验问题（涉及弱非相干光源），量子切尔诺夫指数为 $\xi_Q = x^2$ ，并且可以通过在以我们的坐标系原点为中心的厄米-高斯模式 u_{nm}中进行空间解复用（SPADE）达到 [17]。

然而，在实验条件下，任何测量都不可避免地受到仪器失准、解复用器的设计和制造缺陷以及其他不完美因素的影响。因此，串扰概率很小，但并非为零；也就是说，测得的光子可能被传输到错误的模式（见图 1）。因此，实际的测量基会偏离理想测量基，如下所示 $v_{nm} = \sum_{k,\ l=0}^{D-1} C_{nm,\ kl}u_{kl}$，其中 C 表示（酉）串扰矩阵，而 D 限制测量模式的数量 [34]。对于小间距，只需$D = 2$即可达到最优错误概率；以下均采用这一假设 [17]。为量化不完美因素的严重程度，我们采用串扰强度 ϵ^2，其定义为串扰矩阵非对角元素的绝对值平方的均值 [28, 34]。

现在，我们开始评估串扰对 SPADE 的影响。我们重点关注实际中相关的小间距区域， $x \ll 1$以及较弱的串扰$\epsilon \ll 1$。因此，我们可以用这些参数的级数展开来近似切尔诺夫指数（4）。与先前关于间距估计的研究结果类似 [30]，，我们发现该展开取决于比值 x/ϵ [34]:

$$\xi \approx \begin{cases} \{1 - [\ln\ln q(x) - 1]/\ln q(x)\}\, x^2 & x \gg \epsilon, \\ x^4/(8p_0), & x \ll \epsilon, \end{cases} \quad (5)$$

其中，我们仅保留了 x andϵ 中的主导项。此处， $q(x) := x^2/p_0$ and $p_0 := |C_{10,00}|^2 \sim \epsilon^2$ 是模式 u_{00} 到模式 v_{10} 的串扰概率。请注意，对于 $x \approx \epsilon$ ，所得级数收敛过慢，无法构成可靠的近似。在范围$x \ll \epsilon$内，串扰将 ξ 的标度从 x^2 改变为仅有 x^4。我们注意到，理想直接成像的切尔诺夫指数为 $\xi_{\mathrm{DI}} = x^4$ [34]。然而，尽管标度相同，由于标度系数更大，SPADE 仍优于直接成像（对于较弱的串扰， $1/(8p_0) \gg 1$）。更令人惊讶的是，即使在间距相对较大的范围 $x \gg \epsilon$内，串扰也会显著影响切尔诺夫指数。事实上，尽管式 (5) 的上方曲线在串扰趋于零时趋近于理想标度 x^2，但这一过程按对数速度缓慢进行。这表明，在任何间距尺度下，串扰对假设检验都至关重要。图 2 对比了亚瑞利区内受串扰影响的 SPADE ξ、理想直接成像 ξ_{DI} 和量子界 ξ_{Q} 的切尔诺夫指数。

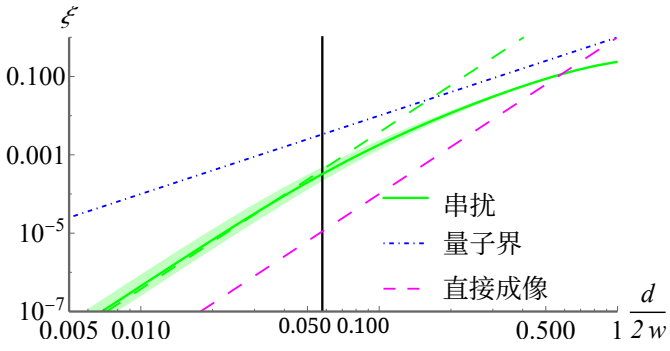


图 2：比较 SPADE 的切尔诺夫指数中位数 ξ，计算所用样品为 500 个随机酉串扰矩阵（绿色，阴影区域表示四分位距）、近似切尔诺夫指数（5） $x \ll \epsilon$ （绿色虚线）、理想直接成像的渐近切尔诺夫指数 ξ_{DI} （粉色虚线）和量子界 ξ_{Q} （蓝色点划线）随x 变化：$= d/2w$。计算采用 $\epsilon^2 = 0.0033$和 $D = 2$。黑色竖线表示 $x = \epsilon$。

统计检验的实用性 – 对于特定测量，最优决策策略由似然比检验 [35]，给出，根据该检验，仅当满足以下条件时才接受 H1

$$\prod_{nm}\left(\frac{p(nm|d,D)}{p(nm|0,D)}\right)^{N_{nm}} > 1, \tag{6}$$

其中 N_{nm} 表示在模式v_{nm} 中测得的光子数，且 $p(nm|d,D)$ 表示在间距为 d时，在该模式中测得光子的概率。不幸的是，似然比检验存在一些缺点。由于假定间距固定，该检验必须首先使用数据对间距进行估计，例如采用矩估计法 [29]。这种估计中的误差不可避免地会使该决策策略偏离最优性，更重要的是，还可能导致对错误概率的低估，而错误概率本身也难以计算。最后，最优检验（6）要求在许多模式中进行测量，这在实验中并不总是可行。

文献 [17]提出了一种看似更实用的检验。该检验背后的关键观察是，在理想测量的假设下，$p(10|0) = 0$，而$p(10|x) > 0$。换句话说，只有当假设 H1 为真时，才能在模式 v_{10} 中测得光子。这便得到以下检验：

$$N_{10} \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} 0, \tag{7}$$

在等号成立时，均假设 H0。容易计算得，对于此类检验，$\alpha(N) = 0$ 且$\beta(N) = [1-p(10|x)]^N$ [17]。显然，$\alpha(N)$ 和 $\beta(N)$ 会在光子数较大时消失，N 无论 x为何，因此总错误概率也会消失。由此，我们得到一种检验：它简单、不依赖间距，且只需在一个模式中进行测量。此外，对于小间距 $x \ll 1$，这种简单检验也是量子最优的，因为我们可以证明，在此情形下，式（7）实际上等价于式（6） [34]。遗憾的是，正如我们接下来将要证明的，只要存在任何程度的串扰——无论多么微弱——这种检验就会从最优变得完全无用。

为此，我们注意到，即使串扰 $\epsilon \ll 1$非常微弱，在假设 H0 下，于模式 v_{10} 测得一个光子的概率也不再为零，而是等于 $p(10|0) = p_0 > 0$。更一般地，我们记 $p_x := p(10|x)$。然而，只要 p_0 不为零，无论多么小，渐近错误概率都会发生显著变化。容易看出，N_{10} 检验（7）的结果是一个服从二项分布的随机变量，其概率为

$$p(N_{10} = k|x) = \binom{N}{k} p_x^k \left(1-p_x\right)^{N-k}, \tag{8}$$

其中，假设 H0 对应的概率可通过令 $x = 0$ 得到。直接可知，当 H0 为真时，误判为 H1 的概率 $\alpha(N)$ 不再为零。根据该检验，只要模式v_{10}中有哪怕一个光子，我们就应假设 H1；这意味着，为了得到 $\alpha(N)$，必须对式（8）关于$0 < k \leqslant N$求和，得到 $\alpha(N) = 1-(1-p_0)^N$。类似地，考虑式（8）中的 $k = 0$，即模式 v_{10}中没有光子，可得$\beta(N) = (1-p_x)^N$。式（7）中的检验的总错误概率现在为

$$P_{\mathrm{e}}(N) = \frac{1}{2}\left(1-(1-p_0)^N\right) + \frac{1}{2}\left(1-p_x\right)^N. \tag{9}$$

显然，只要 $p_0 \neq 0$，当 $N \to \infty$ 时，该值就趋近于 $1/2$：引入任何实验误差都会使检验从近乎最优变得和抛硬币一样糟糕。

检验 (7) 失效，并不意味着所有与间距无关的检验都不适用。事实上，可以设计一类利用非理想解复用器进行光源判别的与间距无关的检验，使其满足$\lim_{N\to\infty} P_{\mathrm{e}}(N) = 0$ [34]。这类检验具有如下形式：

$$N_{10} \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} Np_0 + \zeta(N), \tag{10}$$

其中 $\zeta(N) > 0$ 是 x-独立函数，其增长速度快于 $\sqrt{N}$，但慢于 N。这类检验的错误概率可仿照式（9）[34]的情形，利用二项分布类似地计算。请注意，式（7）给出的检验的自然推广形式，即式（10），在 $\zeta(N) = 0$ 下会导致次优的 $\lim_{N\to\infty} P_{\mathrm{e}}(N) = 1/4$ [34]。遗憾的是，族（10）在实用性上似乎仅略胜一筹

于原始检验（7），因为错误概率收敛至零的相应速率随 x 变化很大，从近乎最优到差几个数量级不等（见图 3 a））。因此，尽管这些检验具有 x-独立性，要在给定探测到的光子数 N 的情况下合理估计其错误概率，仍需对 x有所了解，这严重削弱了它们的实用价值。

这些发现促使我们寻找更实用的光源判别检验。为实现这一目标，我们回到最优似然比检验（6）。鉴于关于单个光源（H0）与两个间距很近的光源（H1）图像差异的大部分信息都包含在模式 v_{10}中，我们将式（6）改写为仅包含两种结果：光子处于模式v_{10} 中，以及光子处于任何其他模式中。由此得到

$$\left(\frac{p(10|x)}{p(10|0)}\right)^{N_{10}}\left(\frac{1-p(10|x)}{1-p(10|0)}\right)^{N-N_{10}}>1, \qquad (11)$$

求解 N_{10} 并将 x 和ϵ展开至二阶，我们得到

$$N_{10}\underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} N\left(p_0+\gamma x^2/2\right), \qquad (12)$$

其中 $\gamma = 1-\mathcal{O}(\epsilon^2)$。修正检验（12）尤其具有吸引力，因为（在间距较小且串扰较弱时）它继承了似然比检验的最优性，同时又简单易行，并且像式（7）和（10）[34]中的检验一样，基于单模测量。其不足之处在于，式（12）并非与间距无关。

为解决这个问题，我们将 x （12）右侧的 $x_{\min}$ 替换为某个值，然后检验修正假设：（H0）只有一个光源，或（H1）有两个光源，间距为 $x \geqslant x_{\min}$。在这种情况下，我们仍将得到$\lim_{N\to\infty} P_e = 0$ [34]。此外，对于固定的 N 和 $x_{\min}$，P_e 会随着 x增大而减小，这意味着该算法的错误概率有一个上界，即 P_e 用$x = x_{\min}$计算得到的值。因此，检验（12）在一定程度上独立于间距：对于固定的 $x_{\min}$，尽管它对 x的每个取值都不是最优的，却能轻松求得一个最大错误概率，且该概率不依赖于对间距的任何先验知识。特别是，这避免了对实际错误概率 P_e的任何可能低估。此外，对于修正假设 H1，在无需估计间距的决策策略中，所考虑的检验近乎最优。所有这些为规划实验提供了一种可靠的方法：只需将最小间隔 $x_{\min}$ 代入公式（12），即可确定需要检测的光子 N 数量，从而确保不会超过预先设定的已确定可容忍的最大错误概率。图3b）展示了该检验的实际错误概率与其上界的比较。

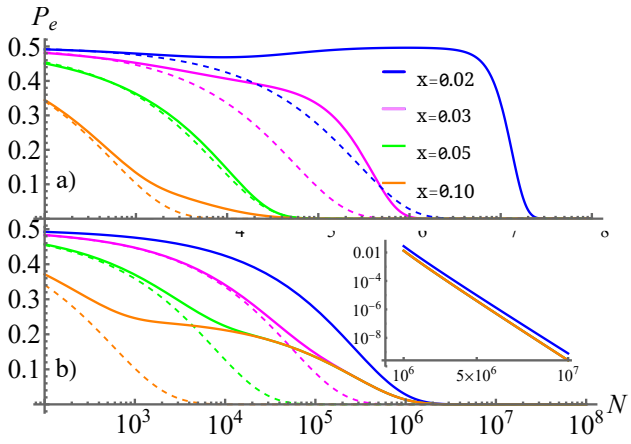


图3：错误概率与 N （假设均匀串扰） [34]，其中 $\epsilon^2 = 0.01$ ，并对二项分布采用高斯近似。在这两幅图中，从右到左，虚线对应于最优检验（ $x = 0.02$）在 0.03、0.05、0.10 时的结果（蓝色、洋红色、绿色、橙色）。a）相应颜色的实线表示与距离无关的检验（ $\zeta = N^{4/5}/100$）的结果。可以看出，与距离无关的检验效果受到 x实际取值的严重影响，见 [34]。b）实线表示修正检验（ $x_{\min} = 0.02$）的结果。因此，$x = 0.02$ （蓝色）曲线为所有其他曲线提供了一个上界。插图展示了在 $P_e < 0.05$区域内，b）中的所有实线曲线具有近似相同的收敛速率。

结论 – 我们仔细研究了现实条件下基于SPADE的判别在区分一个和两个紧密分离的光源时的有效性。我们通过解析推导表明，串扰的存在会严重影响成功判别的概率，导致该概率随光源间距 d 呈次优尺度变化，即使 d的值相对较大时也如此。同样，任何串扰都会使间距无关的假设检验在实践中无法实现。为此，我们提出了一种基于似然比检验的简单半间距无关算法，即使使用非理想解复用器，也能在无需估计间距的情况下获得最大错误概率。

我们的结果表明，在 [29, 36]，基于 SPADE 的光源判别中，必须考虑串扰以及其他实验缺陷，例如电子噪声。尤其值得研究的是，在多重假设检验中，实验缺陷会产生多大影响 [37]，，以及在考虑光源亮度可能不等的情况下会产生什么影响 [30]。

致谢 – ApresSF项目由波兰国家科学中心（合同编号：UMO- 2019/32/Z/ST2/00017）和ANR通过QuantERA

计划资助；该计划获得了欧盟地平线2020研究与创新计划的资助。

[1] J. L. Harris，美国光学学会期刊 54，606（1964）。[2] C. O. Acuna 和 J. Horowitz，J. App. Stat. 24，421（1997）。[3] M. Shahram 和 P. Milanfar，IEEE信息论汇刊 52，3411（2006）。[4] A. Labeyrie、S. G. Lipson 和 P. Nisenson，《光学恒星干涉测量导论》（剑桥大学出版社，2006）。[5] J. T. Wright 和 B. S. Gaudi，载于《行星、恒星与恒星系统》第3卷：太阳系与恒星行星系统，T. D. Oswalt、L. M. French 和 P. Kalas 编（施普林格，Dordrecht，2013），第489页。[6] D. A. Fischer、A. W. Howard、G. P. Laughlin、B. Macintosh、S. Mahadevan、J. Sahlmann 和 J. C. Yee，载于《原恒星与行星VI》，H. Beuther、R. S. Klessen、C. P. Dullemond 和 T. Henning 编（亚利桑那大学出版社，2014），第715页，arXiv:1505.06869 [天体物理学：地球与行星天体物理学]。[7] Z. Huang 和 C. Lupo，物理评论快报 127，130502（2021）。[8] U. Zanforlin、C. Lupo、P. W. R. Connolly、P. Kok、G. S. Buller 和 Z. Huang，《自然·通讯》13，5373（2022）。[9] S.-H. Lee、J. Y. Shin、A. Lee 和 C. Bustamante，《美国国家科学院院刊》109，17436（2012）。[10] X. Nan、E. A. Collisson、S. Lewis、J. Huang、T. M. Tamgüney、J. T. Liphardt、F. McCormick、J. W. Gray 和 S. Chu，《美国国家科学院院刊》110，18519（2013）。[11] D. Baddeley 和 J. Bewersdorf，《生物化学年度评论》87，965（2018）。[12] A. J. den Dekker 和 A. van den Bos，美国光学学会期刊A 14，547（1997）。[13] J. W. Goodman，《傅里叶光学导论》（Roberts and Company Publishers，2005）。[14] C. Helstrom，IEEE信息论汇刊 19，389（1973）。[15] M. Tsang、R. Nair 和 X.-M. Lu，Phys. Rev. X 6，031033（2016）。[16] M. Tsang，Contemp. Phys. 60，279（2019）。[17] X.-M. Lu、H. Krovi、R. Nair、S. Guha 和 J. H. Shapiro，npj Quantum Information 4，64（2018）。[18] M. R. Grace 和 S. Guha，物理评论快报 129，180502（2022）。[19] V. Giovannetti、S. Lloyd 和 L. Maccone，Nat. Photonics 5，2733（2011）。[20] J. Kołodyński 和 R. Demkowicz-Dobrzański，New J. Phys. 15，073043（2013）。[21] R. Nichols、T. R. Bromley、L. A. Correa 和 G. Adesso，物理评论A 94，042101（2016）。[22] C. Oh、S. Zhou、Y. Wong 和 L. Jiang，物理评论快报 126，120502（2021）。[23] G. Sorelli、M. Gessner、M. Walschaers 和 N. Treps，物理评论快报 127，123604（2021）。[24] C. Lupo，物理评论A 101，022323（2020）。[25] Y. L. Len、C. Datta、M. Parniak 和 K. Banaszek，《国际量子信息杂志》18，1941015（2020年）。[26] J. O. de Almeida、J. Kołodyński、C. Hirche、M. Lewenstein 和 M. Skotiniotis，《物理评论A》103，022406（2021年）。[27] M. R. Grace、Z. Dutton、A. Ashok 和 S. Guha，《美国光学学会期刊A》37，1288（2020年）。[28] M. Gessner、C. Fabre 和 N. Treps，《物理评论快报》125，100501（2020年）。[29] G. Sorelli、M. Gessner、M. Walschaers 和 N. Treps，《物理评论A》104，033515（2021年）。[30] T. Linowski、K. Schlichtholz、G. Sorelli、M. Gessner、M. Walschaers、N. Treps 和 Ł. Rudnicki，“受串扰影响的空间解复用在分辨不平衡光源间距方面的适用范围”（2022年）。[31] J. W. Goodman，《统计光学》（威利出版社，纽约，1985年）。[32] H. Chernoff，《数理统计年刊》23，493（1952年）。[33] T. Ogawa 和 M. Hayashi，《IEEE信息论汇刊》50，1368（2004年）。[34] 有关串扰的更多细节、我们论断的详细证明和补充图，请参见《补充材料》.[35] H. L. Van Trees，《检测、估计与调制理论》第一部分（约翰·威利父子公司，2001年）。[36] Y. L. Len、C. Datta、M. Parniak 和 K. Banaszek，《国际量子信息杂志》18，1941015（2020年）。[37] M. R. Grace 和 S. Guha，《物理评论快报》129，180502（2022年）。

补充材料

在第一节中，我们回顾受串扰影响的 SPADE 测量的基本信息。在第二节中，我们计算受串扰影响的 SPADE 和理想直接成像在小间距下的切尔诺夫指数。在第三节中，我们推导并讨论正文中的与间距无关的检验。最后，在第四节中，我们推导半间距无关检验，并给出其直观解释。

I. 受串扰影响的 SPADE

让我们回顾一下存在串扰时基于 SPADE 的测量的一些基本信息 [28]。在某个基 k中进行理想光子计数时，测量处于正文公式 (1) 所示状态的光子并得到第 v_k 模式的概率为：

$$p(nm|d) = \frac{1}{2}\left(|f_{+k}(d)|^2 + |f_{-k}(d)|^2\right), \tag{S1}$$

其中

$$f_{\pm k}(d) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{r}\, v_k^*(\vec{r})\, u_{00}(\vec{r} \mp \vec{d}) \tag{S2}$$

是测量基函数$v_{nm}(\vec{r})$与由位于 $\pm\vec{r}_0$ 的光源产生的空间场分布之间的重叠积分。

考虑由厄米-高斯模式构成的基：

$$u_{nm}(\vec{r}) := \frac{H_n(\sqrt{2}r_x/w)H_m(\sqrt{2}r_y/w)}{w\sqrt{2^{n+m-1}\pi n!m!}} e^{-(r_x^2+r_y^2)/w^2}, \tag{S3}$$

其中 $\vec{r} = (r_x,\ r_y)$ 和 $H_n(z)$: $= (-1)^n e^{z^2}\partial_z^n e^{-z^2}$ 为厄米多项式，w 是成像系统点扩散函数的宽度。对于此基上的理想测量，即 $v_k(\vec{r}) = u_{nm}(\vec{r})$，重叠积分（S2）等于 [28]

$$f_{\pm nm}(d) = \beta_{\pm nm}(d) = \\ = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\pm\frac{d}{2w}\right)^n e^{-d^2/8w^2}\delta_{0m}, \tag{S4}$$

其中 δ_{0m} 表示克罗内克δ。

然而，正如正文所述，实际中 SPADE 会受到串扰的影响。这会使重叠积分（S2）变为

$$f_{\pm nm}(d) = \sum_{k,l=0}^{D-1} C_{nm,kl}\beta_{\pm kl}, \tag{S5}$$

其中 C 是串扰矩阵。请注意，由于仅限于有限的 D，相应的测量概率(S1)必须重新归一化：

$$p(nm|d,D) = \frac{p(nm|d)}{\sum_{n,m}^{D-1} p(nm|d)}. \tag{S6}$$

在设计良好的实验中，串扰相对较弱。由于 C 是酉的，因此可以写成 [28]

$$C = e^{-i\mu\vec{\lambda}\cdot\vec{G}}, \tag{S7}$$

其中 $\mu \geqslant 0$，$\vec{G}$ 表示由所有 D^4-1 个尺寸为 $D^2\times D^2$ 的广义盖尔曼矩阵构成的向量，$\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^{D^4-1}$ 是某个归一化向量。如果 $\mu \ll 1$，则矩阵 C 接近恒等矩阵，因此描述了测量装置的不完美因素较小的情况。

不完美因素的严重程度可以通过串扰强度 [28]量化：

$$\epsilon^2 := \frac{1}{D^2(D^2-1)} \sum_{\substack{n,m,k,l=0 \\ nm\neq kl}}^{D-1} |C_{nm,kl}|^2. \tag{S8}$$

对于较弱的串扰矩阵，即对于 $\mu \ll 1$，可以发现其平均值为 [30]：

$$\epsilon^2(\mu) \approx \frac{2}{D^4-1}\mu^2. \tag{S9}$$

由于串扰强度 ϵ^2 可直观地解释为每个模式的平均串扰概率，并且在实验中易于获取，因此我们使用串扰强度 ϵ^2 而不是抽象参数 μ。这提供了一种生成随机一般串扰矩阵的方法，即从 (D^4-1)-球面的均匀分布中随机选取 λ 。

对于定性分析，可以使用简化的均匀串扰 模型来展示基于 SPADE 的测量的一般行为：

$$(C_{\mathrm{u}})_{nm,kl} = \\ \delta_{nk}\delta_{ml}\sqrt{1-(D^2-1)\epsilon^2} + (1-\delta_{nk}\delta_{ml})\,\epsilon. \tag{S10}$$

请注意，均匀串扰矩阵（S10）完全由测量模式的数量 D^2-1 和串扰强度 ϵ^2定义。

II. 小间距下的切尔诺夫指数

在此，我们计算了受串扰影响的 SPADE 和直接成像在小间距极限下的近似切尔诺夫指数。

A. SPADE

对于 SPADE，我们首先观察到

$$\xi = -\ln\left(\min_{0\leq s\leq 1}\sum_{n,m=0}^{D-1} p(nm|0,D)^s p(nm|d,D)^{1-s}\right) \\ \equiv -\ln\left(\min_{0\leq s\leq 1} Q_s\right). \tag{S11}$$

由于在我们关注的情形中，$x \ll 1$ 和 $\epsilon \ll 1$都成立，因此我们可以将 Q_s 按这些参数展开。

请注意，与任何二元函数一样，原则上结果可能取决于展开的顺序。我们在这里确实发现了这种情况：

$$Q_s \approx \begin{cases} 1+(s-1+(p_0/x^2)^s)x^2, & x \gg \epsilon, \\ 1+(s-1)sx^4/(2p_0), & x \ll \epsilon. \end{cases} \tag{S12}$$

此处，上面一行是先对 ϵ展开，对应于 $x \gg \epsilon$；而下面一行是先对 x 展开，对应于 $x \ll \epsilon$。对方程（的S12）关于 s 求导，并令其等于零，再求解 s，可得 Q_s 的最小值位于

$$s_{\min} = \begin{cases} -\ln\left(-\ln\left(x^2/\epsilon^2\right)\right)/\ln\left(x^2/\epsilon^2\right), & x \gg \epsilon, \\ 1/2, & x \ll \epsilon. \end{cases} \tag{S13}$$

将此结果代入近似切尔诺夫指数（S11），并再次对 x 进行级数展开，即得正文中的公式（5）：

$$\xi \approx \begin{cases} \left\{1-\left[\ln\ln q(x)-1\right]/\ln q(x)\right\}x^2 & x \gg \epsilon, \\ x^4/(8p_0), & x \ll \epsilon. \end{cases} \tag{S14}$$

如正文所述，我们所有的解析分析均基于以下假设：$D = 2$，这对于亚瑞利间距而言应该足够了，$x = d/2w \ll 1$。为确认情况确实如此，我们定义一个新参数 $q_c := \epsilon^2(D^2-1)$，它表示单个模式的平均总串扰概率。在图 S1中，我们比较了 SPADE 在随机串扰情况下的切尔诺夫指数中位数，取 $D = 2$、3、4 和 $q_c = 0.01$。可以看出，在总串扰概率相同的情况下，测量更多模式对小间距时的切尔诺夫指数没有显著影响。

B. 直接成像

对于理想的（即连续且无噪声的）直接成像，切尔诺夫指数为

$$\xi_{\mathrm{DI}}(d) = -\ln\left[\min_{0\le s\le 1}\int_{\mathbf{R}^2} d\vec{r}\, p(\vec{r}|0)^s p(\vec{r}|d)^{1-s}\right], \tag{S15}$$

其中

$$p(\vec{r}|d) = \frac{1}{2}\left(|u_{00}(\vec{r}-\vec{d})|^2 + |u_{00}(\vec{r}+\vec{d})|^2\right) \tag{S16}$$

表示在位置 $\vec{r}$测量到光子的概率。将被积函数在 d 中展开，并在极坐标下积分，可得

$$\xi_{\mathrm{DI}} \approx -\ln\left[\min_{0\le s\le 1} 1+4(s-1)sx^4\right]. \tag{S17}$$

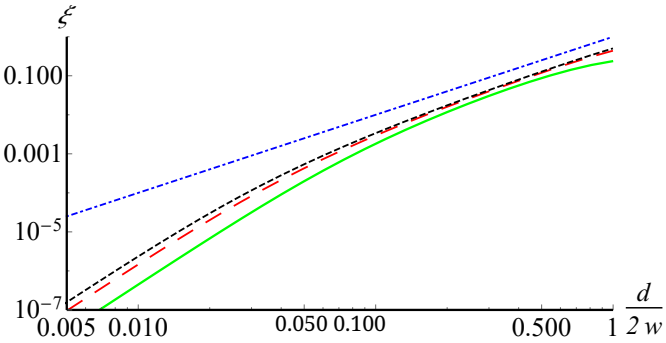


图 S1：对于 $D = 2$（绿色，实线）、$D = 3$（红色，长虚线）、$D = 4$（黑色，虚线）和量子界（蓝色，点划线），随机抽取 500 个酉串扰样本所得切尔诺夫指数中位数与 x 的比较。

最小化得到 $s_{\min} = 1/2$，再将其按 x 的最低阶展开后，结果为

$$\xi_{\mathrm{DI}} \approx x^4. \tag{S18}$$

III. 距离无关检验

A. 理想情况下距离无关检验的最优性

我们先来说明，与距离无关的检验

$$N_{10} \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} 0, \tag{S19}$$

在小间距下，确实等价于不存在串扰时的最优检验。注意，由于对于$x \ll 1$m，两个假设下的光子探测概率主要分布在模式 v_{10} 和v_{00}中，因此，对于探测到的光子总数 N，有$N \approx N_{00}+N_{10}$。相应地，忽略所有其他模式后，我们可以将似然比检验（6）改写为

$$p(10|x)^{N_{10}}[1-p(10|x)]^{N-N_{10}} > p(10|0)^{N_{10}}[1-p(10|0)]^{N-N_{10}}. \tag{S20}$$

注意，由于 $p(10|x) > 0$，左侧始终严格介于 0 和 1 之间。另一方面，由于$p(10|0) = 0$，右侧要么在 $N_{10} > 0$ 时等于 0，此时接受 H1；要么在 $N_{10} = 0$ 时等于 1，此时拒绝 H1。显然，这等价于所讨论的与距离无关的检验。

然而，正如我们在正文中详细讨论的那样，在所讨论的问题中，不能忽略串扰。如果将串扰考虑在内，我们还能通过完全与间距无关的检验来区分这两个假设吗？

B. 存在串扰时对检验式 (S19) 的朴素推广

我们先来考虑对原算法的一种自然推广：

$$N_{10} \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} Np_0. \tag{S21}$$

这一新算法基于这样一个事实：对于单个源，即 H0，模式 10 中光子的期望数量等于 Np_0；而对于两个光源，这一数量（略微）更多。显然请注意，对于 $p_0 \to 0$，可以得到原来的远距离无关检验。

然而，正如我们将看到的，虽然这一改进后的算法优于原算法，但其错误概率在渐近情况下仍不趋于零，因此不能算作良好的检验。为此，我们注意到，在这种情况下，α 和 β 均为：

$$\begin{aligned} \alpha(N) &= 1 - F_0(Np_0), \\ \beta(N) &= F_x(Np_0). \end{aligned} \tag{S22}$$

其中，$F_x(k)$ 表示成功概率为 p_x 的二项分布的累积分布函数（CDF）。根据中心极限定理，当样本数量较大时，该二项分布的累积分布函数近似等于均值为 Np_x、标准差为 $\sqrt{Np_x(1-p_x)}$ 的正态分布的累积分布函数，并且当 $N \to \infty$ 时二者相等。利用这一近似，可以很容易地看出：

$$\begin{aligned} \alpha(N) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{Np_0 - Np_0}{\sqrt{Np_0(1-p_0)}}\right) = \Phi(0) = 1/2, \\ \beta(N) &\approx \Phi\left(\frac{Np_0 - Np_x}{\sqrt{Np_x(1-p_x)}}\right), \end{aligned} \tag{S23}$$

其中 $\Phi(k)$ 表示标准正态分布的累积分布函数：

$$\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-z^2/2} dz. \tag{S24}$$

注意，对于小间距，我们有：

$$p_x \approx p_0 + \gamma x^2, \tag{S25}$$

其中

$$\gamma = |C_{10,10}|^2 - p_0 + \frac{2}{\sqrt{2}} \mathrm{Re}\{C_{10,00} (C_{10,20})^*\} \tag{S26}$$

为正。注意，对于 $D = 2$, $C_{10,20} = 0$。因此，对于小间距，我们有 $p_x > p_0$，从而

$$\lim_{N\to\infty} \beta(N) = \Phi(-\infty) = 0. \tag{S27}$$

这意味着总错误概率趋近于

$$\lim_{N\to\infty} P_e(N) = 1/4, \tag{S28}$$

这远非理想情况。

C. 存在串扰时与间距无关的检验

现在我们来考虑正文中公式（10）给出的更一般的算法：

$$N_{10} \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} Np_0 + \zeta(N). \tag{S29}$$

对于该算法，我们类似地得到：

$$\begin{aligned} \alpha(N) &\approx 1 - \Phi_0\left(\frac{Np_0 + \zeta(N) - Np_0}{\sqrt{Np_0(1-p_0)}}\right), \\ \beta(N) &\approx \Phi\left(\frac{Np_0 + \zeta(N) - Np_x}{\sqrt{Np_x(1-p_x)}}\right). \end{aligned} \tag{S30}$$

我们来考虑 $\zeta(N)$ 的不同可能性。

- If $|\zeta(N)|$ increases slower than $\sqrt{N}$ i.e.

$$\lim_{N\to\infty} |\zeta(N)|/\sqrt{N} = 0 \tag{S31}$$

可以看出，$\lim_{N\to\infty} \alpha(N) = 1/2$。

- 如果 $\zeta < 0$ 且 $|\zeta(N)|$ 增长快于 $\sqrt{N}$，那么 $\lim_{N\to\infty} \alpha(N) = 1$。
- 如果 $\zeta > 0$ 且其增长快于 N，那么 $\lim_{N\to\infty} \beta(N) = 1$。
- 如果 $\zeta > 0$ 且其按 N 的尺度变化，即 $\zeta(N) = \eta N$，那么若 $\eta < \gamma x^2$，错误概率将趋于零。然而，若 $\eta > \gamma x^2$，则有 $\lim_{N\to\infty} \beta(N) = 1$；而对于 $\eta = \gamma x^2$，则有 $\lim_{N\to\infty} \beta(N) = 1/2$。因此，此类检验并非与距离无关，因为它并不适用于任意 x。
- 最后，如果 $\zeta > 0$ 且其增长速度快于$\sqrt{N}$，但慢于 N，则对于任意x，我们有 $\lim_{N\to\infty} P_e = 0$。

因此，最后一种情况定义了一类与间距无关的检验，我们将在正文中讨论这一类检验。在正文中，我们论证了，由于其总错误概率的收敛速率不可预测，这一类检验似乎几乎没有实际意义。我们在 $\zeta = N^{4/5}$ 上的图 3 a)中说明了这种行为。关于 $\zeta = \{N^{2/3}/100, N^{3/4}/100, N^{4/5}/100\}$ 的类似结果见图 S2。

IV. 半分离无关检验

最后，我们考虑正文中的检验（12）

$$N_{10} \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} N\left(p_0 + \gamma x^2/2\right), \tag{S32}$$

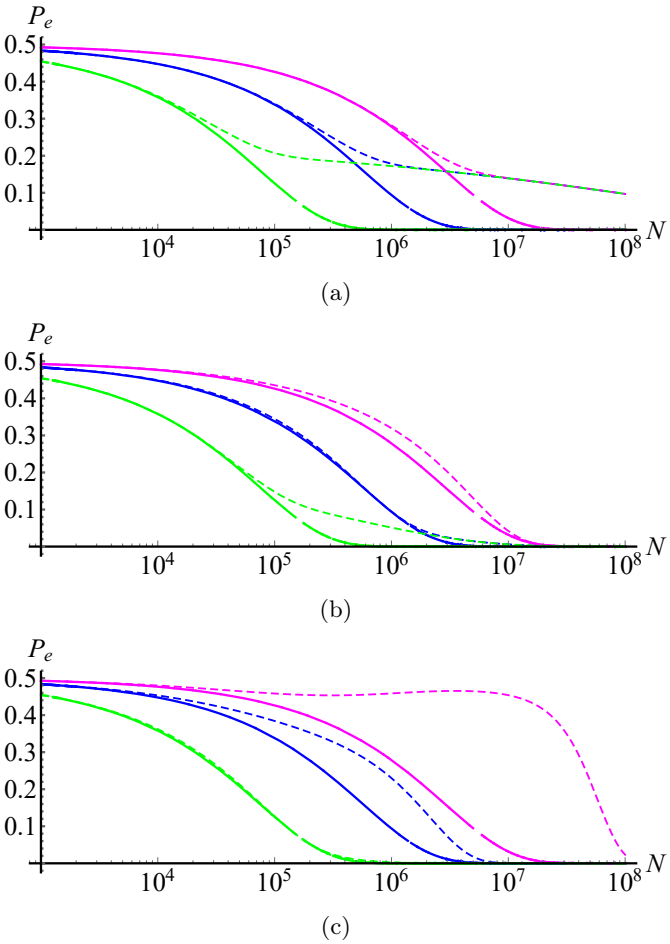


图 S2：使用二项分布的正态近似得到的错误概率与 N for$\zeta = \{N^{2/3}/100, N^{3/4}/100, N^{4/5}/100\}$（从上到下）之间的关系，其中对 $\epsilon^2 = 1/15$采用均匀串扰。洋红色（上方曲线）、蓝色（中间曲线）和绿色（下方曲线）分别表示 $x = \{0.02, 0.03, 0.05\}$，实线对应最优检验，虚线对应与距离无关的检验。可以观察到，对于某些间距，与距离无关的检验表现得几乎达到最优；而对于另一些间距，为达到

其错误概率与最优检验相同。

具有 $x = x_{\min}$。此时第一类和第二类错误概率为：

$$\alpha(N) = 1 - \sum_{k \leqslant N(p_0+\gamma x_{\min}^2/2)} \binom{N}{k} p_0^k (1-p_0)^{N-k},$$
$$\beta(N) = \sum_{k \leqslant N(p_0+\gamma x_{\min}^2/2)} \binom{N}{k} p_{x_{\min}}^k (1-p_{x_{\min}})^{N-k}. \tag{S33}$$

不难看出，这一检验与上一节讨论的$\zeta(N) = \eta N < N\gamma x_{\min}^2$情形相似。

因此，根据同样的论证，当 $N \to \infty$趋于极限时，错误概率趋于零。

现在，我们继续证明，在极限 $N \to \infty$ 下，对于任意间距 $x > x_{\min}$，只要处于近似式（S25）有效的范围内，或者一般而言，只要$p_x > p_{x_{\min}}$，总错误概率也会消失。为此，考虑将算法应用于 $x = x_{\min}$，并对具有 $x > x_{\min}$的假设 H1 进行检验时，错误概率所发生的变化。按照设计，阈值点不会改变，仍由 $N\left(p_0 + \gamma x_{\min}^2/2\right)$给出。然而，在假设 H1 下测量到模式 10 中的光子的概率将从 $p_{x_{\min}}$ 变为 p_x。由于该概率不参与 α，因此该错误保持不变。然而，β 变为

$$\beta(N,x) = \sum_{k \leqslant N(p_0+\gamma x_{\min}^2/2)} \binom{N}{k} p_x^k (1-p_x)^{N-k}. \tag{S34}$$

值得注意的是，$\beta(N, x) < \beta(N, x_{\min})$：注意，$\beta(N, x)$ 正是点 $c = \lfloor N(p_0 + \gamma x_{\min}^2/2)\rfloor$处的累积分布函数，对于二项分布的情形可将其写为

$$\begin{aligned}\beta(N,x) &= I_{1-p_x}(N-c, c+1) \\ &= (N-c)\binom{N}{c}\int_0^{1-p_x} dt\, t^{N-c-1}(1-t)^c \end{aligned} \tag{S35}$$

其中，$I_z(\cdot,\cdot)$ 表示正则化贝塔函数。基于此，我们得到：

$$\begin{aligned}&\beta(N, x_{\min}) - \beta(N,x) = \\ &\qquad (N-c)\binom{N}{c}\int_{1-p_x}^{1-p_{x_{\min}}} dt\, t^{N-c-1}(1-t)^c \end{aligned} \tag{S36}$$

其中 $\beta(N, x_{\min})$ 正是该检验的第二类错误，其中假设 H1 中的间距等于 $x_{\min}$。由于被积函数在积分上下限内严格为正，并且 $p_x > p_{x_{\min}}$ [根据公式（S25）], 以及初始假设 $x \geqslant x_{\min}$，公式（S36）是非负的。

总而言之，我们证明了：如果使用由间距 $x_{\min}$ 定义的阈值点来区分间距为 $x \geqslant x_{\min}$ 的一个或两个光源，α 不变，但 β 会变小。这意味着，对于固定的 N，这种情况下的总错误概率实际上小于光源间距为 $x_{\min}$ 时的情形：

$$P_e(N,x) = \frac{1}{2}\left(\alpha(N) + \beta(N,x)\right) \leqslant P_e(N), \tag{S37}$$

其中，$P_e(N) = \frac{1}{2}(\alpha(N) + \beta(N, x_{\min}))$ 表示在间距为 $x_{\min}$ 时，完全依赖间距的检验所产生的错误概率。

值得指出的是，算法 (12) 也可以通过令二项

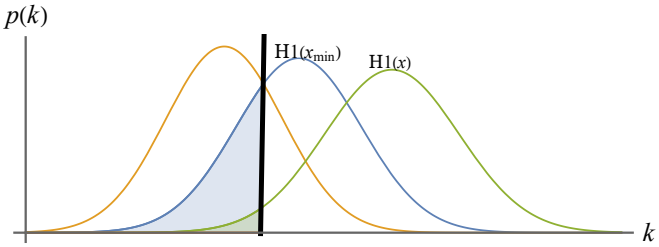


图 S3：使用二项分布的高斯近似，得到 k 个光子处于模式 10 的概率分布。橙色（最左侧曲线）代表 H0，蓝色（中间曲线）代表间距为$x_{\min}$时的 H1，绿色（最右侧曲线） $H1$ 代表 $x > x_{\min}$。我们的简化判据近似等价于将检测阈值设在间距为$x_{\min}$ 时 H0 和 H1 的概率分布交点处（黑色竖线）。总错误概率就是这两个分布的重叠面积。增大 N 会使高斯分布的宽度相对于峰值中心间距变小，因此重叠面积也会减小。如果 $x > x_{\min}$ 高斯分布的中心向较大的 k 方向偏移（绿色曲线），因此阈值落在该高斯分布更靠左的尾部，使这种分布对半距离无关检验中错误概率的贡献更小（绿色阴影区域）。不过，从图中也可以看出，对于 $x > x_{\min}$的情况，这种检验并非最优。注意，所考虑的检验（S32）在极限 $p_0 \to 0$下不会退化为原来的距离无关检验（S19），这表明有串扰和无串扰时的检验存在根本差异。从这幅直观图示中可以清楚地看到这种定性差异：在无串扰的情况下，H0 的概率分布由狄拉克δ函数给出 $\delta(k)$，因此无法找到两个假设的概率密度相等的点。

对应于 H0 和 H1 的分布，并求解k 至 的二次阶 $x_{\min}$。这使得我们能够直观地理解这种半距离无关检验，如图 S3 所示。