arXiv:2303.02656v2 [math.GN] 5 Jun 2023

投影 Hurewicz 性质是 t-不变的

Alexander V. Osipov

乌拉尔联邦大学克拉索夫斯基数学与力学研究所，俄罗斯叶卡捷琳堡

摘要

空间 X 是投影 Hurewicz 的，当且仅当 X 的每个可分度量连续像都是 Hurewicz 的。

本文证明，投影 Hurewicz 性质具有 t-不变性，即，如果 $C_p(X)$ 与 $C_p(Y)$ 同胚，且 X 是投影 Hurewicz 的，那么 Y 也具有投影 Hurewicz 性质。

关键词：投影 Hurewicz 空间，选择原理， t-不变，C_p-空间 2010 数学学科分类：54C35，54D20，54C05

1. 引言

设 $\mathcal{P}$ 是一种拓扑性质。A.V. Arhangel'skii 将 X 称为投影$\mathcal{P}$ ，如果 X 的每个第二可数连续像都是 $\mathcal{P}$ [1, 3]。投影选择原理由 [5]引入并首次得到研究。Lj.D.R. Koˇcinac 用连续像刻画了 Menger、Rothberger、Hurewicz 和 Gerlits-Nagy 的经典覆盖性质，见 $\mathbb{R}^{\omega}$。文献 [4]给出了经典覆盖性质的刻画，其依据是限制在余零集可数覆盖上的选择原理。在 [8, 9] 中，我们给出了 Scheepers 图中所有投影版本选择性质的函数刻画。

回顾一下，若对于 X 的每个开覆盖序列 $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$，都存在一个序列 $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N})$，使得对于每个 n， $\mathcal{V}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的有限子族，并且 X 中的每个点除有限多个 n 外都属于 $\bigcup \mathcal{V}_n$ ，则称拓扑空间具有 Hurewicz 性质。

电子邮件地址：OAB@list.ru（Alexander V. Osipov）

预印本提交至.....

2023年6月6日

回顾一下，若 $C_p(X)$ 与 $C_p(Y)$ 同胚（线性同胚、一致同胚），则称空间 X 和 Y 是 t-等价的（l-等价的、 u-等价的）。在 t-等价（l-等价、 u-等价）下保持不变的性质，称为 t-不变（l-不变、 u-不变） [2]。

以下是得到的有趣结果：

• (Lj.D.R. Koˇcinac) 一个空间是 Hurewicz 空间，当且仅当它是 Lindel¨of 空间且具有投影 Hurewicz 性质 [5]。

• (L. Zdomskyy) Hurewicz性质具有 l-不变性（见[12]中的推论 7）。

•(N.V. Velichko) Lindel¨of 性质具有 l-不变性 [11]。

• (M. Krupski) 射影Hurewicz性质具有 l-不变性（见 [7]中的定理 1.5）。

在本文中，我们证明了投影 Hurewicz 性质具有 t-不变性。

2. 主要定义与记号

本文中，所有空间均假设为蒂霍诺夫空间。正整数集记为 $\mathbb{N}$。令 $\mathbb{R}$ 为实数直线，设 $\mathbb{I} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$，并令 $\mathbb{Q}$ 为有理数。对于空间 X，我们用 $C_p(X)$ 表示定义在 X 上、赋予逐点收敛拓扑的全体实值连续函数构成的空间。符号 0 表示恒为 0 的常值函数。由于 $C_p(X)$ 是齐性空间，研究该空间的局部性质时，我们总可以考虑点 0。

0 的一个基本开邻域具有如下形式： $[F, (-\epsilon, \epsilon)] = \{f \in C(X) : f(F) \subset (-\epsilon, \epsilon)\}$，其中 F 是 X 的有限子集，且 $\epsilon > 0$。

回顾一下， X 的一个子集若是某个从 $C(X)$ 出发的函数的零的完全原像，则称为零集。若子集 $O \subseteq X$ 满足 $X \setminus O$ 是零集，则称其为 X 的余零集（或函数开集）。

许多拓扑性质都可以用以下经典选择原理来刻画。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是由无限集 X 的子集族组成的集合。则：

$S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是选择假设：对于 $\mathcal{A}$ 中元素的每个序列（$A_n : n \in \mathbb{N}$），都存在一个有限集的序列（$B_n : n \in \mathbb{N}$），使得对于每个 n、 $B_n \subseteq A_n$ 和 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$，均成立。

$U_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是如下选择假设：每当 $\mathcal{U}_1$、 $\mathcal{U}_2$、 $\ldots \in \mathcal{A}$ 且均不包含有限子覆盖时，存在有限集 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}_n$、 $n \in \mathbb{N}$，使得$\{\bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$。

本文中，覆盖指非平凡覆盖，即当且仅当 $X=\bigcup\mathcal{U}$ 且 $X\notin\mathcal{U}$ 时， $\mathcal{U}$ 是 X 的一个覆盖。

空间 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$ 是:

- 若每个 X 的有限子集都包含在 $\mathcal{U}$ 的某个成员中，则称为 ω-覆盖。
- 若其为无限集，且每个 $x\in X$ 都属于 $\mathcal{U}$ 中除有限多个元素外的所有元素，则称为 γ-覆盖。
- γ_F-可缩小的，若 $\mathcal{U}$ 是余零 γ-覆盖，且存在一个由 X 的零集构成的 γ-覆盖 $\{F_U:U\in\mathcal{U}\}$，使得对每个 $U\in\mathcal{U}$ 都有 $F_U\subset U$。
- ω-可分组的，若该覆盖可划分为有限部分，使得对于每个有限集 $F\subseteq X$ 以及该划分中除有限多个部分 $\mathcal{P}$ 外的所有部分，都存在集合 $U\in\mathcal{P}$，满足 $F\subseteq U$ [6]。

对于拓扑空间 X，记:

- $\mathcal{O}$ — X 的所有开覆盖构成的族;
- $\mathcal{O}^{\omega}_{cz}$ —空间 X 的所有可数余零点覆盖构成的族;
- Γ —空间 X 的所有开 γ覆盖构成的族;
- Γ_{cz} —空间 X 的所有余零 γ覆盖构成的族;
- Ω^{gr} —空间 X 的开 ω-可分组覆盖构成的族;
- Γ_F —空间 X 的所有余零 γ_F-可缩覆盖构成的族 .

由于 γ-覆盖的任何无限子集也是 γ-覆盖，我们进一步假设所有 γ_F-可缩覆盖都是可数的。

回顾一下，若拓扑空间 X 满足性质 $U_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)$，则称其为 Hurewicz 空间。

3. 投影 Hurewicz 性质

如果空间 X 的每个可分可度量连续像 X 都是 Hurewicz 空间，则称该空间为投影 Hurewicz。

在（[4], 定理 30）中，M. Bonanzinga、F. Cammaroto 和 M. Matveev 证明了

定理 3.1. 对于空间 X，以下条件等价:

1. X 是射影 U_{fin}（$\mathcal{O}$， Γ） $[projectively Hurewicz]$; 2. X 的每个 Lindelöf 连续像都是 Hurewicz 空间; 3. 对于每个连续映射 f: $X\mapsto\mathbb{R}^{\omega}$， f（X）都是 Hurewicz 空间; 4. 对于每个连续映射 f: $X\mapsto\mathbb{R}^{\omega}$， f（X）都是有界的; 5. X 满足 U_{fin}（$\mathcal{O}^{\omega}_{cz}$， Γ）。

命题 3.2。（ *[4]*中的命题 31）

1. 每个 σ-伪紧空间都是投影 Hurewicz 的。 2. 每个基数小于 $\mathfrak{b}$ 的空间都是投影 Hurewicz 的。 3. 投影 Hurewicz 性质在连续像、可数并、C^*-嵌入零集以及余零集下保持不变。

定义 3.3. 设 $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是空间 X的子集族，且 $x \in X$。那么，如果对于 x的每个邻域 W，都存在一个序列 $(s_n : n \in \mathbb{N})$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $s_n \in S_n$，并且存在 n'，使得对每个 $n > n'$都有 $s_n \in W$，则称 $\mathcal{S}$ 弱收敛于 x。

回顾一下，若 A 是无限集，$x \notin A$，且对于 x的每个邻域 U，$A \setminus U$都是有限集，则称空间 X 的子集 A 收敛于 x。我们记作 $x = \lim A$，如果 A收敛于 x。考虑以下集族:

- $\Gamma_x = \{A \subseteq X : x = \lim A\}$;
- $w\Gamma_x =$ 所有子集的族，其中每个子集 X 都存在一个划分 $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得对每个 n，集合 S_n 都是有限的，且 $\mathcal{S}$ 弱收敛到x。

定理 3.4. 对于空间 X，以下条件等价:

1. $C_p(X)$ 满足 $S_{fin}(\Gamma_0, w\Gamma_0)$；2. X 满足 $S_{fin}(\Gamma_F, \Omega^{gr})$；3. X 满足 $U_{fin}(\Gamma_F, \Gamma)$；4. X 满足 $U_{fin}(\mathcal{O}^{\omega}_{cz}, \Gamma)$；5. X 是投影 Hurewicz。

证明。(3) $\Leftrightarrow$ (2)。根据 [10], 中的定理 3.4，等式 $U_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma) = S_{fin}(\Gamma, \Omega^{gr})$在可分度量空间类中成立。设 X 满足 $U_{fin}(\Gamma_F, \Gamma)$。根据 [9] 中的定理 5.4和定理 3.1，$U_{fin}(\Gamma_F, \Gamma) = U_{fin}(\mathcal{O}^{\omega}_{cz}, \Gamma)$，即 X 是投影 Hurewicz。

设 $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ 是 X 的一列可数的 γ_F-可缩覆盖。对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $U \in \mathcal{U}_n$，固定一个连续函数 $f_U : X \to \mathbb{R}$，使得 $U = f_U^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$。令 $h = \prod\{f_U : U \in \mathcal{U}_n, n \in \mathbb{N}\}$。那么$h$ 是从 X 到 $h(X) \subseteq \mathbb{R}^{\omega}$ 的连续映射，因此 $h(X)$ 满足$U_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma) = S_{fin}(\Gamma, \Omega^{gr})$。令 $h(\mathcal{U}_n) = \{h(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$。由于 $(h(\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N})$ 是 $h(X)$ 的一列 γ-覆盖，我们得到 (2)。由于满足性质 $S_{fin}(\Gamma_F, \Omega^{gr})$ 的空间的连续可度量化像也是一个空间

具有此性质，并且对于可度量化空间，$S_{fin}(\Gamma_F, \Omega^{gr}) = S_{fin}(\Gamma, \Omega^{gr})$，因此可类似地证明蕴含关系 (2) ⇒(3)。

(4) ⇔ (5)。由定理 3.1。(5) ⇒ (3)。由 [9] 中的定理 5.4（或 [8]中的定理 4.1）。（）

3 ⇒ (4)。令 $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ 为X的一列可数余零点覆盖。枚举 $\mathcal{U}_n = \{U_m^n : m \in \mathbb{N}\}$。

对于 n、$m \in \mathbb{N}$，固定一个连续函数$f_{n,m} : X \to [0,1]$，它表明U_m^n是余零，即 $f^{-1}[0,1] = U_m^n$。对于每个 n、m、$i \in \mathbb{N}$，定义 $W_{m,i}^n = f_{n,m}^{-1}[0, \frac{1}{i+1}]$ 和 $H_{m,i}^n = f_{n,m}^{-1}[\frac{1}{i+1}, 1]$。

显然，集合 $W_{m,i}^n$ 是余零集，而 $H_{m,i}^n$ 是零集。注意 $W_{m,i}^n \subseteq H_{m,i}^n \subseteq W_{m,i+1}^n \subseteq U_m^n$ 且 $U_m^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{m,i}^n$。

对于 $k \in \mathbb{N}$，记 $W_k^n = \bigcup\{W_{m,i+1}^n : i, m \le k\}$ 并令 $\mathcal{W}_n = \{W_1^n, W_2^n, ...\}$。注意到 $\mathcal{W}_n \in \Gamma_F$，因为 $H_k^n = \bigcup\{H_{m,i}^n : i, m \le k\}$ 是包含于 W_k^n 中的零集。此外，族 $\{H_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 γ-覆盖，因为容易验证族 $\{\bigcup\{W_{m,i}^n : i, m \le k\} : k \in \mathbb{N}\}$ 是一个 γ-覆盖，且 $\bigcup\{W_{m,i}^n : i, m \le k\} \subseteq H_k^n$。现在将性质 $U_{fin}(\Gamma_F, \Gamma)$ 应用于序列 $(\mathcal{W}_n : n \in \mathbb{N})$，并结合以下事实：$\mathcal{W}_n$ 是比 $\mathcal{U}_n$ 更细的覆盖，对所有 n 均成立。

(1) ⇒ (2)。令 $\{\mathcal{V}_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\Gamma_F]^{\omega}$。注意，我们假设所有$\gamma_F$-可缩覆盖都是可数的。

由于 $\mathcal{V}_i = \{V_{i,j} : j \in \mathbb{N}\} \in \Gamma_F$，存在 $\{F_{i,j} : j \in \mathbb{N}\} \in \Gamma$，使得 $F_{i,j}$ 是 X 中的一个零集，并且对每个 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $F_{i,j} \subset V_{i,j} \in \mathcal{V}_i$。令 $T_i = \{f_{i,j} \in C_p(X) : f_{i,j}(F_{i,j}) = 0$，并且对每个 $i, j \in \mathbb{N}\}$ 都有 $f_{i,j}(X \setminus V_{i,j}) = 1$。由于 $\{F_{i,j} : j \in \mathbb{N}\}$ 是一个 γ-覆盖，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们有 $\lim_{j\to\infty} T_i = \mathbf{0}$。根据 (1)，存在 T_i 的有限子集T_i'，并且集合 $\bigcup T_i'$ 有一个划分，使得该划分由有限部分组成；对于函数 0 的每个邻域 $O = [K, (-\epsilon, \epsilon)]$（其中 K 是 X 的有限子集，且 $\epsilon > 0$），以及该划分中除有限多个部分 $\mathcal{P}$ 以外的每个部分，都存在一个函数 $g \in \mathcal{P}$，使得 $g \in O$。

令 $\mathcal{P} = \{\{g_{l,1}, ..., g_{l,k_l}\} : l \in \mathbb{N}\}$。由于 $g_{l,m} = f_{i_s,j_s}$，其中某些 $i_s, j_s \in \mathbb{N}$，我们可以考虑 $Q = \{V_{l,m} : V_{l,m} = V_{i_s,j_s}, f_{i_s,j_s}(X \setminus V_{i_s,j_s}) = 1, f_{i_s,j_s} = g_{l,m}, l \in \mathbb{N}\}$。于是 Q 有一个划分 $\mathcal{Q} = \{\{V_{l,1}, ..., V_{l,k_l}\} : l \in \mathbb{N}\}$，并且对于任意有限子集 K of X，除有限多个划分部分 $\mathcal{Q}$ 外，都存在$V_{l,k}$，使得 $K \subseteq V_{l,k}$。因此，$Q \in \Omega^{gr}$。

(2) ⇒ (1)。对每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $T_i \in \Gamma_{\mathbf{0}}$。通过取一个可数无限子集，不妨假设每个 T_i 都是可数的。枚举 $T_i = \{f_{i,j} \in C_p(X) : j \in \mathbb{N}\}$。

对于 i、j，定义 $V_{i,\ j} = f_{i\,j}^{-1}$, $((-\frac{1}{i},\ \frac{1}{i}))$（不妨假设每个 $V_{i,\ j}$ 都非空），并令 $\mathcal{V}_i = \{V_{i,j}:\ j \in \mathbb{N}\}$。

注意，对于每个 $i, j \in \mathbb{N}$，$V_{i,j}$ 都是 X 中的余零集。

因此，我们有一个映射 Φ：$\bigcup \mathcal{V}_i \to \bigcup T_i$，使得对于$i, j \in \mathbb{N}$，$\Phi(V_{i,j}) = f_{i,j}$。

由于 $\lim\limits_{j\to\infty} T_i = \mathbf{0}$，对于 X 的任意有限子集 F 以及 $\epsilon > 0$（我们可以假设 $\epsilon < \frac{1}{i}$），存在 $j' \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $j > j'$，$f_{i,j} \in [F, (-\epsilon, \epsilon)]$。因此，对于每个 $j > j'$，$F \subset V_{i,j}$。因此，$\mathcal{V}_i \in \Gamma_{cz}$。

对于 i, j，定义 $F_{i,j} = f_{i\,j}^{-1}$,$([-\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1}])$，并令 $\mathcal{F}_i = \{F_{i,j}:\ j \in \mathbb{N}\}$。

那么，对于每个 $j \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{F}_i \in \Gamma$，$F_{i,j} \subset V_{i,j}$。还需注意，$F_{i,j}$ 是一个零集，而 $V_{i,j}$ 是 X 中的余零集，对于每个 $j \in \mathbb{N}$ 都成立。由此可得 $\mathcal{V}_i \in \Gamma_F$。

由（2），对每个 $i \in \mathbb{N}$，存在有限子集 $D_i \subset \mathcal{V}_i$，使得 $\bigcup D_i$ 是空间 X 的一个余零 ω-可分组覆盖。

令 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_k:\ k \in \mathbb{N}\}$ 是覆盖 $\bigcup D_i$ 的一个划分，划分成有限部分，使得对每个有限集合 $F \subset X$，以及除有限多个部分$\{\mathcal{P}_k:\ k \in \mathbb{N}\}$ 之外的划分中的所有部分，都存在集合 $V_{i(k),\ j(k)} \in \mathcal{P}_k$，满足 $F \subset V_{i(k),\ j(k)}$。

对每个 k，定义 $S_k = \{f_V:\ \Phi(V) = f_V,\ V \in \mathcal{P}_k\}$。族 $\mathcal{S} = \{S_k:\ k \in \mathbb{N}\}$ 是 $\bigcup\{f_{i,j}:\ V_{i,\ j} \in D_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ 的一个划分。于是，对每个有限集合$F \subset X$ 和 $\epsilon > 0$，以及除有限多个划分部分 $\mathcal{S}$之外的所有部分，都存在函数 $f_{i(k),\ j(k)} \in \mathcal{S}_k$，满足 $f_{i(k),\ j(k)} \in [F,\ (-\epsilon,\ \epsilon)]$。因此，$\bigcup\{f_{i,j}:\ f_{i,\ j} \in T_i,\ V_{i,\ j} \in D_i,\ i \in \mathbb{N}\} \in w\Gamma_{\mathbf{0}}$ 和 $C_p(X)$ 满足 $S_{fin}(\Gamma_{\mathbf{0}},\ w\Gamma_{\mathbf{0}})$。 □

注意，性质 $S_{fin}(\Gamma_x, w\Gamma_x)$ 是一种拓扑性质。因此，若 $C_p(X)$ 与 $C_p(Y)$ 同胚，且 $C_p(X)$ 满足 $S_{fin}(\Gamma_{\mathbf{0}}, w\Gamma_{\mathbf{0}})$，那么对于每个 $g \in C_p(Y)$，$C_p(Y)$ 都满足 $S_{fin}(\Gamma_g, w\Gamma_g)$。

定理 3.5. 设 $C_p(X)$ 与 $C_p(Y)$ 同胚。那么，X具有投影 Hurewicz 性质，当且仅当 Y 具有投影 Hurewicz 性质。

问题. 设 $\mathcal{P} \in \{Menger, Rothberger, Scheepers, S_1(\Gamma, \mathcal{O})\}$。投影 $\mathcal{P}$ 性质是否为 t-不变量?

猜想. 投影斯希珀斯图是 t-不变量，即，斯希珀斯图中的每个投影选择性质都是 t-不变量。

如果该猜想成立，那么应用 Velichko 的结果，斯希珀斯图是 l-不变量。

致谢。作者谨向审稿人致谢，感谢其仔细审阅并提出宝贵建议。

参考文献

[1] A.V. Arhangel'skii, 《一般拓扑学中的若干问题与研究方向》, Comment. Math. Univ. Carolinae，29，(1988) 611–629。[2] A.V. Arhangel'skii, 《拓扑函数空间》，Kluwer Academic Pub- lishers, 1992。[3] A.V. Arhangel'skii, 《投影 σ-紧致性、 ω_1-caliber 与 C_p-空间》, Topology and its Applications，157，(2000) 874–893。[4] M. Bonanzinga、F. Cammaroto、M. Matveev, 《选择原理的投影版本》, Topology and its Applications，157，(2010) 874–893。[5]Lj.D.R. Koˇ cinac, 《选择原理与连续像》，Cubo Math. J.，8:2 (2006) 23–31, MR. 2007e:54030，Zbl. 1116.54013。[6] Lj.D.R. Koˇcinac、M. Scheepers, 《开覆盖的组合学（VII）：可群化性》，Fundamenta Mathematicae，179，(2003) 131–155。[7] M. Krupski, 《函数空间的线性同胚与空间在其紧化中的位置》，arXiv:2208.05547。[8] A.V. Osipov, 《Hurewicz性质的函数刻画》，Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics，17(1)，(2022) 99–109。[9] A.V. Osipov, 《斯希珀斯图中的性质的投影版本》，Topology and its Applications，278，(2020) 107232。[10]B. Tsaban, 《选择原理与来自"圣书"的证明》，arXiv:2301.13158。[11] N.V. Velichko, 《Lindel ¨of 性质是 l-不变的》，Topology Appl.，89 (1998) 277–283。[12] L.Zdomskyy, 《Tychonoff空间上的自由对象的 o-有界性》，Mat. Stud.，25 (2006) 10–28。