arXiv:2303.02676v2 [math.DS] 2 May 2023

多线性 Wiener-Wintner 型遍历平均及其应用

RONGZHONG XIAO

ABSTRACT. 本文在多线性遍历平均逐点收敛的假设下，将 Host 和 Kra 建立的广义 Wiener–Wintner 定理推广到了多线性情形。特别地，我们有如下结果：

设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 是一个保测系统。设 a 和 b 是两个不同的非零整数。那么，对于任意 $f_1,f_2\in L^\infty(\mu)$，存在一个满测度子集 $X(f_1,f_2)$，使得对于任意 $x\in X(f_1,f_2)$ 以及任意幂零序列 $\mathsf{b}=\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}b_nf_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)$$

存在。

1. INTRODUCTION

全文中，保测系统或系统是指带有可逆保测变换T: $X\to X$的勒贝格空间$(X,\mathcal{B},\mu)$。我们将一个系统记为$(X,\mathcal{B},\mu,T)$。若$(X,\mathcal{B},\mu,T)$中唯一的 T-不变子集在 $\mathcal{B}$ 中测度为 0 或 1，则称该系统$(X,\mathcal{B},\mu,T)$是遍历的。

1941年，维纳和温特加强了经典的 Birkhoff 逐点遍历定理。

定理 1.1. ([21])对于一个系统$(X,\mathcal{B},\mu,T)$以及任意 $f\in L^\infty(\mu)$，存在 $X(f)$的一个满测度子集 X，使得对于任意 $x\in X(f)$以及任意 $t\in\mathbb{R}$，该极限

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi int}f(T^nx)$$

存在。

Wiener–Wintner定理的核心是， $X(f)$与 t的选择无关。由于 $\mathbb{R}$ 是不可数的，这一结果促使研究者关注遍历理论中的一般现象，即对于不可数多个系统，取样都具有良好的性质。此外，对于某些多项式遍历平均的收敛行为，Wiener–Wintner定理也有助于我们理解。

2020年数学学科分类。主要分类：37A30；次要分类：37A46。关键词和短语：多线性维纳-温特型遍历平均、幂零序列、三次平均、多项式遍历平均、Furstenberg 系统。

2009年，Host 和 Kra 建立了以下结果，称为广义 Wiener–Wintner 定理。

定理 1.2. ([13, 定理 2.22])对于一个系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$，以及任意 $f \in L^\infty(\mu)$，存在 X 的一个满测度子集 $X(f)$，使得对于任意 $x \in X(f)$ 以及任意幂零序列（定义见第 2.2 小节）$\mathbf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，极限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_n f(T^n x)$$

存在。

注意，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$\{e^{2\pi i n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 都是幂零序列，因为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是一个 1 步幂零流形。因此，上述结论推广了 Wiener-Wintner 定理。此外，Host 和 Kra 在[14]中指出了以下结果。

定理 1.3. ([14, 定理 23.5])给定 $d \in \mathbb{N}$，设 $a_1, \cdots, a_d$ 为互不相同的非零整数。设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是一个保测系统。那么对于任意 $f_1, \cdots, f_d \in L^\infty(\mu)$ 以及任意幂零序列 $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \prod_{j=1}^{d} f_j(T^{a_j n} x)$$

存在于 $L^2(\mu)$中。

上述定理中提到的平均称为多线性维纳-温特型遍历平均。上述定理保证了多线性维纳-温特型遍历平均的范数收敛。关于上述定理的更多结果，可参见 [16, 定理 B.4]。

基于定理1.2 和定理1.3，自然会产生一个问题：在多线性遍历平均逐点收敛的假设下，能否将定理1.2 推广到多线性版本?

关于双线性情形，可参见一些结果 [4, 2]。对于一般情形，我们得到如下结果。

定理 1.4。给定 $d \in \mathbb{N}$，设 a_1、$\cdots$、a_d 是互不相同的非零整数。设（X、$\mathcal{B}$、μ、T）是一个保测系统。那么对于任意 h_1、$\cdots$、$h_d \in L^\infty$（μ），

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{j=1}^{d} h_j(T^{a_j n} x)$$

几乎处处存在，当且仅当对于任意 $f_1, \cdots, f_d \in L^\infty(\mu)$，存在 X 的满测度子集 $X(f_1, \cdots, f_d)$，使得对于任意 $x \in X(f_1, \cdots, f_d)$ 以及任意幂零序列 $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \prod_{j=1}^{d} f_j(T^{a_j n} x)$$

存在。

2015年，Zorin-Kranich [22, 推论 1。4] 曾指出上述定理适用于遍历系统，并通过调和分析的方法给出了归纳证明。本文作者将基于 Host-Kra 因子，为上述定理提供一个纯粹的遍历理论证明，并确定相关的特征因子。

基于上述定理，[5, 定理], [15, 定理 C] 和 [13, 定理 2.24]，我们得到以下两个推论。

推论 1.5. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是一个保测系统。设 a 和 b 是两个不同的非零整数。则对任意 $f_1, f_2 \in L^\infty(\mu)$，存在 $X(f_1, f_2)$ 的一个满测度子集，其中 X，使得对任意 $x \in X(f_1, f_2)$ 以及任意幂零序列 $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_n f_1(T^{an}x) f_2(T^{bn}x)$$

存在。

推论1.6. 给定 $d \in \mathbb{N}$，设 $a_1, \cdots, a_d$ 是互不相同的非零整数。设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是一个遍历远侧保测系统（定义见 [15,定义 5.4]）。则对任意 $f_1, \cdots, f_d \in L^\infty(\mu)$，存在 $X(f_1, \cdots, f_d)$ 的一个满测度子集，其中 X，使得对任意 $x \in X(f_1, \cdots, f_d)$，我们有

(1) 对任意幂零序列 $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \prod_{j=1}^{d} f_j(T^{a_j n}x)$$

存在；

(2) 对任意系统 $(Y, \mathcal{D}, \nu, S)$、任意 $k \geq 1$，以及任意 $g_1, \cdots, g_k \in L^\infty(\nu)$，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{j=1}^{d} f_j(T^{a_j n}x) \prod_{i=1}^{k} S^{in} g_i(y)$$

存在于 $L^2(\nu)$ 中。

我们指出，对于推论 1.6 的 (2)，Assani 和 Moore [3, 定理 1。5] 在不要求满足遍历远侧条件的情况下，构建了相应的结果 $d = 2$ 。

接下来，我们应用定理 1.4 研究缺乏完全交换性的多个保测变换下的一些多项式遍历平均。由于缺乏完全交换性，我们必须对变换施加一些限制，例如零熵，这有助于我们利用零熵与完全正熵之间的不交性来处理某些多项式遍历平均。定理 1.4 之所以能适用于某些多项式遍历平均，是因为 ∞步因子的特征行为（定义见注 2.3）。

最近，Frantzikinakis 和 Host 建立了一个关于某些多项式遍历平均范数收敛的结果。

定理 1.7。（[9, 定理 1.1]）设 T, S 是作用于勒贝格空间（$X, \mathcal{B}, \mu$）上的可逆保测变换，且（$X, \mathcal{B}, \mu, T$）具有零熵。设 $p(n)$ 是一个非常数、非线性的整数系数多项式。那么对于任意 $f, g \in L^\infty(\mu)$，极限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n x) g(S^{p(n)} x)$$

在 $L^2(\mu)$中存在。

上述结果中对 T 的零熵假设是必要的。若对 T没有零熵限制，则可以从 [9, 命题 1 的证明4]中找到一个反例。受上述定理启发，我们建立以下结果。

定理 1.8. 给定 $d \in \mathbb{N}$，设 $T, S_1, \cdots, S_d$是作用在勒贝格空间$(X, \mathcal{B}, \mu)$上的可逆保测变换，使得$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$具有零熵，且 $S_1, \cdots, S_d$彼此可交换；设 $p_1(n)$ $\cdots, p_d(n)$ 是次数互异的非常数非线性整系数多项式。令 a 和 b 为两个互异的非零整数。那么对任意 $f_1, f_2, g_1, \cdots, g_d \in L^\infty(\mu)$，极限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(T^{an} x) f_2(T^{bn} x) \prod_{j=1}^{d} g_j(S_j^{p_j(n)} x)$$

在 $L^2(\mu)$中存在。

论文结构。 在第 2 节中，我们回顾一些概念和所需结果。在第 3 节中，我们介绍两个有用的估计。在第 4 节和第 5 节中，我们分别证明定理 1.4和定理 1.8 。

2. Preliminaries

本节回顾一些基本概念和结果。

2.1. 因子与粘合。系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 的一个因子是 T-不变的 σ 子代数 $\mathcal{B}$。从 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 到 $(Y, \mathcal{D}, \nu, S)$ 的一个因子映射是一个可测映射 π： $X_0 \to Y_0$，满足 $\pi \circ T = S \circ \pi$，并且 ν 是 μ 在 π 下的像，其中 X_0 是 T-不变的 X 的满测度子集，而 Y_0 是 S-不变的 Y 的满测度子集。在这种情况下，$\pi^{-1}(\mathcal{D})$ 是 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 的一个因子，并且 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 的每个因子都可以通过这种方式得到。

两个系统（X、$\mathcal{B}$、μ、T）和（Y、$\mathcal{D}$、ν、S）的粘合，是 $X \times Y$上的一个概率测度 λ，在 $T \times S$ 下保持不变，且其在 X 和 Y 上的投影分别为 μ 和 ν。类似地，我们可以定义多个系统的粘合。

为了研究 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 上的非传统遍历平均，引入了 Furstenberg 的自粘合。

首先，说明一些记号。给定 $d \in \mathbb{N}$，令 X^d 表示空间 $X \times \cdots \times X(d\ times)$，其中 X^d 的一个元素可写为 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d)$，且 $\mathcal{B}^{\otimes d}$ 表示乘积 σ-代数。

设 $\mathcal{A} = \{a_1 n, \cdots, a_d n\}$，其中 a_1、$\cdots$、a_d 是互不相同的非零整数。我们在 $(X^d, \mathcal{B}^{\otimes d})$ 上定义测度 $\mu_d^{\mathcal{A}}$ 如下：

$$\mu_d^{\mathcal{A}}(A_1 \times \cdots \times A_d) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_X \prod_{i=1}^{d} T^{a_i n} 1_{A_i} d\mu$$

其中 $A_i \in \mathcal{B}$，$1 \le i \le d$。根据 [12,定理 11]，可以保证上述极限存在。我们将 $\mu_d^{\mathcal{A}}$称为相对于多项式族 X，$\mathcal{B}$，μ，T的 ($\mathcal{A}$ ，鉴于其历史渊源——Furstenberg 在关于 Szemer´édi 定理的遍历论证明中所作的工作 [11]。通过简单观察，我们得到以下结果。

命题 2.1. $(X^d, \mathcal{B}^{\otimes d}, \mu_d^{\mathcal{A}}, T^{a_1} \times \cdots \times T^{a_d})$ 是一个保测系统 .

2.2. 幂零系统与幂零序列。设 $k \in \mathbb{N}$。A k 步幂零流形 X 是商空间 G/Γ，其中 G 是一个 k 步幂零李群，且 Γ 是 G的余紧离散子群。群 G 通过左平移作用于 X。在该作用下，X 上唯一的不变博雷尔概率测度称为 X 的 Harr 测度，记作 m_X。若 $a \in G$ 且 $T_a\colon X \to X$ 是平移 $x \mapsto a \cdot x$，则系统 $(X, \mathcal{B}_X, T_a, m_X)$ 是一个 k 步幂零系统，其中 $\mathcal{B}_X$ 是 X 的博雷尔 σ 代数。

一个基本的 k 步幂零序列是序列 $\{f(a^n \cdot x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$，其中 $f \in C(X)$ $a \in G$，$x \in X$。k 步幂零序列是基本 k 步幂零序列的一致极限。显然，所有 k 步幂零序列在平移下构成 $l^\infty(\mathbb{Z})$ 的一个不变代数。（更多详情请参见 [14,第 11] 章）。

2.3. Host-Kra 半范数与局部半范数。2005 年，Host 和 Kra 在研究 [12] 中非传统遍历平均的范数收敛性时，在 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 上引入了 Host-Kra 半范数。

首先，我们介绍一些记号。给定 $k \in \mathbb{N}$，令 $V_k = \{0,1\}^k$，其中 V_k 中的一个元素可写为 $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k)$，$X^{[k]} = X^{2^k}$，其中 $X^{[k]}$ 中的一个元素可写为 $\underline{x} = (x_{\underline{\epsilon}}\colon \underline{\epsilon} \in V_k)$，$T^{[k]} = T \times \cdots \times T(2^k\ times)$ 以及 $\mathcal{B}^{\otimes[k]} = \mathcal{B}^{\otimes 2^k}$。给定 $N \in \mathbb{N}$，令 $[N]^k = \{\underline{h} = (h_1, \cdots, h_k)\colon 0 \le h_1, \cdots, h_k \le N-1\}$。

现在，我们通过 $\mu^{[k]}$ 归纳来定义。设 $(\Omega\ \mathcal{F}, m, S)$ 表示与$\mathcal{I}(T)$相关联的因子，其中 $\mathcal{I}(T)$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个子 -σ- 代数，由所有 T- 不变子集组成。设

$$\mu^{[1]} = \int_\Omega \mu_w \times \mu_w dm(w)$$

其中

$$\mu = \int_\Omega \mu_w dm(w)$$

是相对于 T 的 μ 遍历分解。于是我们得到一个保测系统（$X^{[1]}$，$\mathcal{B}^{\otimes[1]}$，$\mu^{[1]}$，$T^{[1]}$）。令 $k \in \mathbb{N}$。如果我们已经定义了 $\mu^{[k]}$，就可以定义

$\mu^{[k+1]}$ 如下。设（Ω_k， $\mathcal{F}_k$， m_k， S_k）表示与 $\mathcal{I}$（$T^{[k]}$）相关联的因子，其中$\mathcal{I}$（$T^{[k]}$）是 $\mathcal{B}^{\otimes[k]}$ 的一个子σ-代数，由所有 $T^{[k]}$-不变子集组成。令

$$\mu^{[k+1]} = \int_{\Omega_k} \mu_w^{[k]} \times \mu_w^{[k]} dm_k(w)$$

其中

$$\mu^{[k]} = \int_{\Omega_k} \mu_w^{[k]} dm_k(w)$$

是关于 $T^{[k]}$ 的 $\mu^{[k]}$ 的遍历分解。

对于任意 $f \in L^\infty$（μ）和任意 $k \in \mathbb{N}$，我们定义 Host-Kra 半范数如下：

$$\|f\|_k = \Big(\int_{X^{[k]}} \prod_{\underline{\epsilon} \in V_k} C^{|\underline{\epsilon}|} f(x_{\underline{\epsilon}}) d\mu^{[k]}(\underline{x}) \Big)^{\frac{1}{2^k}}$$

其中 C 是复共轭算子，而 $|\underline{\epsilon}| = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k$。

证明中将用到以下关于 Host-Kra 半范数的结果。

定理 2.2。 ([14, 引理 8.12、命题 8.16 和定理 9。7])对于系统$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$， $k \geq 1$ 以及任意 $f \in L^\infty(\mu)$，有：

(1) $\|f\|_{k+1}^{2^{k+1}} =$极限$_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \|f \cdot T^h \overline{f}\|_k^{2^k}$；(2) $\|f\|_k \leq \|f\|_{k+1}$；(3) 存在一个因子 $\mathcal{Z}_k(T)$，称为 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 的 k 步因子，使得$\|f\|_{k+1} = 0$当且仅当 $\mathbb{E}(f|\mathcal{Z}_k(T)) = 0$。

注释2.3. 由上述内容，我们可以得到 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 的一列因子 $\{\mathcal{Z}_k(T)\}_{k\geq 1}$ 。并且，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\mathcal{Z}_k(T) \subset \mathcal{Z}_{k+1}(T)$。因此，我们可以定义因子 $\mathcal{Z}_\infty(T)$，称为 ∞ 步因子，将其取为包含$\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{Z}_k(T)$ 的最小 σ-代数。（更多详细信息，请参见 [14, 第 8,9,16] 章。）

命题 2.4.（[18, 引理 8]）对于一个系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$， $k \geq 1$, $f \in L^\infty(\mu)$ 为实值且 $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，则有

$$\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \|f \cdot T^{ah} f\|_k^{2^k} \leq |a| \cdot \|f\|_{k+1}^{2^{k+1}}.$$

命题 2.5.（[18, 命题 5]）对于一个系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$， $d \geq 1$, $f_1, \cdots, f_d \in L^\infty(\mu)$ 为实值、由 1 控制且彼此不同的 $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，存在常数 $A(a_1, \cdots, a_d) > 0$，使得

$$\limsup_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{d} T^{a_i n} f_i \right\|_2 \leq A \min_{1\leq i\leq d} \|f_i\|_{d+1}.$$

接下来，我们重述 Host 和 Kra 将 Wiener–Wintner 定理推广到幂零序列时在[13]中定义的有界序列的局部半范数。

定义 2.6。 ([13, 定义 2.1])设 $k \in \mathbb{N}$ 且一个 $= \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为有界序列。我们称 满足 $\mathcal{P}(k)$ 若对任意 $\underline{h} = (h_1, \cdots, h_k) \in \mathbb{Z}^k$，极限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{\underline{\epsilon}\in V_k} C^{|\underline{\epsilon}|} a_{n+\underline{h}\cdot\underline{\epsilon}}$$

存在，其中 $\underline{h}\cdot\underline{\epsilon} = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i h_i$。我们将该极限记为 $c_{\underline{h}}(\mathsf{a})$。

根据 [13, 命题 2.2]，我们知道该极限

$$\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^k} \sum_{\underline{h}\in[H]^k} c_{\underline{h}}(\mathbf{a})$$

存在且非负。于是我们可以定义 a 的局部半范数 $\|\mathsf{a}\|_k$：

$$\|\mathbf{a}\|_k = \Big(\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^k} \sum_{\underline{h}\in[H]^k} c_{\underline{h}}(\mathbf{a}) \Big)^{\frac{1}{2^k}}.$$

证明中将用到以下关于局部半范数的结果。

命题 2.7。 ([13, 推论 2.14]) 设 $k \geq 2$、$\mathsf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个 $(k-1)$-步幂零序列，且 $\delta > 0$。存在 $c(\mathsf{b}\ \delta) > 0$，使得对于任意满足 $\mathcal{P}(k)$ 的有界序列 $\mathsf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，有

$$\limsup_{N\to\infty} \Big| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n b_n \Big| \leq c\|\boldsymbol{a}\|_k + \delta \|\boldsymbol{a}\|_\infty$$

其中 $\|\mathsf{a}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$。

命题 2.8。 ([13, 推论 5.10]) 设 $k \geq 2$，且 $= \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个有界序列。假设对于任意 $\delta > 0$，存在一个（$k-1$）步幂零序列 $\mathsf{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，使得 $\mathsf{a} - \mathsf{r}$ 满足 $\mathcal{P}$（k），并且 $\|\mathsf{a} - \mathsf{r}\|_k < \delta$。那么对于任意（$k-1$）步幂零序列 $\mathsf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，极限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n b_n$$

存在。

2.4. 序列的 Furstenberg 系统。这里，我们回顾有界实序列的 Furstenberg 系统概念（详细信息见 [8]）。

定义 2.9。设 $\{N_k\}_{k\geq1}$ 是一个严格递增的正整数序列，I 是 $\mathbb{R}$上的一个闭有界区间。若序列 $\mathsf{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 取值于 I，并且在序列 $\{N_k\}_{k\geq1}$ 上相关极限存在，则称序列 $\mathsf{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 在序列 $\{N_k\}_{k\geq1}$ 上具有相关，若该极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \prod_{j=1}^{s} z_{n+n_j}$$

对任意 $s \in \mathbb{N}$ 以及任意 $(n_1, \cdots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$均存在。

令 $\Omega = I^{\mathbb{Z}}$。Ω 中的元素可写为 $w = (w(n))_{n\in\mathbb{Z}}$。因此，序列 $\mathbf{z}$ 可视为 Ω 中的一个元素。Ω 上的移位 σ 定义为：对任意 $n \in \mathbb{Z}$，$(\sigma(w))(n) = w(n+1)$。若 $\mathbf{z}$ 在序列 $\{N_k\}_{k\geq 1}$上具有相关，则该极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \delta_{\sigma^n \mathbf{z}}$$

在弱-$*$ 拓扑中存在。我们将此极限记为 ν。

我们称系统 $(\Omega\ \mathcal{F}, \nu, \sigma)$ 为序列 $\{N_k\}_{k\geq 1}$ 上 $\mathbf{z}$ 对应的 Furstenberg 系统，其中 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的 Borel σ-代数。

令 F_0 为 Ω 的第 0 个坐标投影。也就是说，$F_0 : \Omega \to I, w \mapsto w(0)$。显然，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} \prod_{j=1}^{s} z_{n+n_j} = \int \prod_{j=1}^{s} \sigma^{n_j} F_0 d\nu$$

对于任意 $s \in \mathbb{N}$ 以及任意 $(n_1, \cdots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$,

2.5. 范德科普引理。

引理 2.10。 ([17,引理 1.3。1])设 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个有界复数序列。对于任意 N， $H \geq 1$ 满足 $H \leq N$，有

$$H^2 \Big| \sum_{n=1}^{N} u_n \Big|^2 \leq H(N+H-1) \sum_{n=1}^{N} |u_n|^2 + 2(N+H-1) \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \Re \sum_{n=1}^{N} u_n \overline{u}_{n+h}.$$

3. Two lemmas

在陈述两个引理之前，我们先引入一些记号。对于 $A \lesssim_{c_1,\cdots,c_d} B$，其含义是存在一个隐含常数 $C > 0$，它依赖于 $c_1, \cdots, c_d$，使得 $A \leq CB$。设 X, Y 是两个非空集合，且 $f\colon X \to \mathbb{C}, g\colon Y \to \mathbb{C}$ 是两个函数。对于 $f \otimes g$，其含义是一个函数 $f \otimes g\colon X \times Y \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$。

3.1. 三次平均的估计。设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $V_k^* = V_k \backslash \{(0, \cdots, 0)\}$。定义 ϕ: $V_k^* \to \{1, 2, \cdots, 2^k - 1\}, \underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \cdot 2^{i-1}$。对于任意 $1 \leq i \leq k$, 令 $V_{k,i}^* = \{\underline{\epsilon} \in V_k^*\colon\ \epsilon_i = 0\}$。对于任意满足 $i \neq j$ 的 $1 \leq i, j \leq k$， 令 $A_i^j = V_{k,i}^* \backslash V_{k,j}^*$。

设 $\{a_{j,n}\}_{1\leq j\leq 2^k-1,\ n\geq 0}$ 为一族由一界控制为 1 的有界实序列。设 $N \in \mathbb{N}$。定义 k 步三次平均

$$C(N; a_{1,n}, \cdots, a_{2^k-1,n}) = \frac{1}{N^k} \sum_{\underline{h}\in[N]^k} \prod_{\underline{\epsilon}\in V_k^*} a_{\phi(\underline{\epsilon}), \underline{\epsilon}\cdot\underline{h}}.$$

例如，当 $k = 3$ 时,

$$C(N; a_{1,n}, \cdots, a_{7,n}) = \frac{1}{N^3} \sum_{\underline{h}\in[N]^3} a_{1,h_1} a_{2,h_2} a_{3,h_1+h_2} a_{4,h_3} a_{5,h_3+h_1} a_{6,h_3+h_2} a_{7,h_3+h_2+h_1}.$$

当 $k=2$ 时，Assani 建立了以下估计。

命题 3.1。 ([1, 引理 5])设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$、$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是三个绝对值不超过 1 的有界实序列。对于任意 $N\in\mathbb{N}$，有

$$\Big|\frac{1}{N^2}\sum_{n,m=0}^{N-1}a_nb_mc_{n+m}\Big|^2\le\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\Big|\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}b_mc_{n+m}\Big|^2\le\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2(N-1)}e^{2\pi imt}c_m\Big|^2.$$

实际上，Assani 在[1, 引理 6]中也给出了三步立方平均的一个估计，并指出可以为通常情形建立类似的结果。这里，我们给出一般情形的具体表述，并为完整起见给出证明。以下论证的要点是令一个指标消失。

引理 3.2。给定 $k,N\in\mathbb{N}$ 满足 $k>2$，设$\{a_{j,n}\}_{1\le j\le 2^k-1,\ n\in\mathbb{Z}}$ 是一组绝对值不超过 1 的有界实序列。那么

$$|C(N;a_{1,n},\cdots,a_{2^k-1,n})|^2\le\frac{C}{N^k}\sum_{h_1,\cdots,h_{k-2}=0}^{N-1}\sup_t\Big|\sum_{h_k=0}^{N-1}e^{2\pi ih_kt}\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}a_{\phi(\underline{\epsilon}),\epsilon_kh_k+\sum_{i=1}^{k-2}\epsilon_ih_i}\Big|^2$$

其中 C 是一个绝对常数，取值可以为 2。

证明。

$$\begin{aligned}
&|C(N;a_{1,n},\cdots,a_{2^k-1,n})|^2\\
&\le\frac{1}{N^{k-1}}\sum_{h_1,\cdots,h_{k-1}=0}^{N-1}\Big|\frac{1}{N}\sum_{h_k=0}^{N-1}\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k^*\setminus V_{k,k}^*}a_{\phi(\underline{\epsilon}),\sum_{i=1}^k\epsilon_ih_i}\Big|^2\\
&=\frac{1}{N^{k-1}}\sum_{h_1,\cdots,h_{k-1}=0}^{N-1}\Big|\int_{\mathbb{T}}\Big(\frac{1}{N}\sum_{h_k=0}^{N-1}e^{-2\pi ih_kt}\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}a_{\phi(\underline{\epsilon}),\epsilon_kh_k+\sum_{i=1}^{k-2}\epsilon_ih_i}\Big)\cdot\\
&\quad\Big(\sum_{m=0}^{2(N-1)}e^{2\pi imt}\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k^*\setminus(V_{k,k-1}^*\cup V_{k,k}^*)}a_{\phi(\underline{\epsilon}),m+\sum_{i=1}^{k-2}\epsilon_ih_i}\Big)e^{-2\pi ih_{k-1}t}dt\Big|^2\\
&\le\frac{1}{N^{k-1}}\sum_{h_1,\cdots,h_{k-2}=0}^{N-1}\int_{\mathbb{T}}\Big|\Big(\frac{1}{N}\sum_{h_k=0}^{N-1}e^{-2\pi ih_kt}\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}a_{\phi(\underline{\epsilon}),\epsilon_kh_k+\sum_{i=1}^{k-2}\epsilon_ih_i}\Big)\cdot\\
&\quad\Big(\sum_{m=0}^{2(N-1)}e^{2\pi imt}\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k^*\setminus(V_{k,k-1}^*\cup V_{k,k}^*)}a_{\phi(\underline{\epsilon}),m+\sum_{i=1}^{k-2}\epsilon_ih_i}\Big)\Big|^2dt\\
&\le\frac{1}{N^{k-1}}\sum_{h_1,\cdots,h_{k-2}=0}^{N-1}\Big((2(N-1)+1)\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{h_k=0}^{N-1}e^{-2\pi ih_kt}\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}a_{\phi(\underline{\epsilon}),\epsilon_kh_k+\sum_{i=1}^{k-2}\epsilon_ih_i}\Big|^2\Big)\\
&\le\frac{2}{N^{k-2}}\sum_{h_1,\cdots,h_{k-2}=0}^{N-1}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{h_k=0}^{N-1}e^{-2\pi ih_kt}\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}a_{\phi(\underline{\epsilon}),\epsilon_kh_k+\sum_{i=1}^{k-2}\epsilon_ih_i}\Big|^2
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由 Jensen不等式得出，第二个不等式由帕塞瓦尔恒等式得出。证明完毕。□

3.2. 多变量非传统遍历平均的一个估计。

引理 3.3. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个系统， $d\in\mathbb{N}$, $f_1,\cdots,f_d$ 为有界实值函数，且其绝对值不超过 1； $a_1,\cdots,a_d$ 为互不相同的非零整数，并且 $\mu_d^{\mathcal{A}}$ 是 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 关于多项式族 $\mathcal{A}=\{a_1n,\cdots,a_dn\}$ 的 Furstenberg 自联结。那么

$$\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi int}\prod_{i=1}^{d}f_i(T^{a_in}x_i)\Big|d\mu_d^{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\le i\le d}\|f_i\|_{d+3}.$$

证明。 令 $C>2$ 并将其固定。由引理 2.10，可得

$$\begin{aligned}&\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi int}\prod_{i=1}^{d}f_i(T^{a_in}x_i)\Big|^2d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\\&\le\frac{C}{H_1}+\frac{C}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{d}T^{a_in}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i)(x_i)\Big|d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\\&\le\frac{C}{H_1}+\frac{C}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\Big(\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{d}T^{a_in}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i)(x_i)\Big|^2d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\Big)^{\frac12}\end{aligned}$$

对任意 $H_1\in\mathbb{N}$。由命题 2.1、伯克霍夫点态遍历定理和引理 2.10，可得

$$\begin{aligned}&\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi int}\prod_{i=1}^{d}f_i(T^{a_in}x_i)\Big|^2d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\\&\le\frac{C}{H_1}+\frac{C}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\Big(\limsup_{N\to\infty}\int_{X^d}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{d}T^{a_in}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i)(x_i)\Big|^2d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\Big)^{\frac12}\\&\le\frac{C}{H_1}+\frac{C}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\Big(\limsup_{N\to\infty}\int_{X^d}\frac{C}{H_2}+\frac{2(N+H_2-1)}{H_2N}\sum_{h_2=1}^{H_2-1}\frac{H_2-h_2}{H_2}\cdot\\&\quad\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{d}T^{a_in}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i)(x_i)T^{a_i(n+h_2)}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i)(x_i)d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\Big)^{\frac12}\end{aligned}$$

对于任意 $H_2\in\mathbb{N}$。根据 $\mu_d^{\mathcal{A}}$ 的定义，我们知道

$$\begin{aligned}&\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi int}\prod_{i=1}^{d}f_i(T^{a_in}x_i)\Big|^2d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\\&\le\frac{C}{H_1}+\frac{C}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\Big(\frac{C}{H_2}+\limsup_{N\to\infty}\Big(\frac{2(N+H_2-1)}{H_2N}\sum_{h_2=1}^{H_2-1}\frac{H_2-h_2}{H_2}\cdot\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\int_X\prod_{i=1}^{d}T^{a_i(n+m)}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i\cdot T^{a_ih_2}f_i\cdot T^{a_i(h_1+h_2)}f_i)d\mu(x)\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\frac{C}{H_1}+\frac{C}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\Big(\frac{C}{H_2}+\frac{C}{H_2}\sum_{h_2=1}^{H_2-1}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\cdot$$

$$\sum_{n=1}^{N}\limsup_{M\to\infty}\left\|\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\prod_{i=1}^{d}T^{a_i(n+m)}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i\cdot T^{a_ih_2}f_i\cdot T^{a_i(h_1+h_2)}f_i)\right\|_2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

根据命题 2.5，我们有

$$\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi int}\prod_{i=1}^{d}f_i(T^{a_in}x_i)\Big|^2d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$$

$$\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\Big(\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_2}\sum_{h_2=1}^{H_2-1}\min_{1\leq i\leq d}\|\!|f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i\cdot T^{a_ih_2}(f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i)\|\!|_{d+1}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

由命题 2.4 分别对 H_1，H_2 取上极限，得到

$$\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi int}\prod_{i=1}^{d}f_i(T^{a_in}x_i)\Big|^2d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$$

$$\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\leq i\leq d}\limsup_{H_1\to\infty}\frac{1}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\Big(\limsup_{H_2\to\infty}\frac{1}{H_2}\sum_{h_2=1}^{H_2-1}\|\!|(f_iT^{a_ih_1}f_i)T^{a_ih_2}(f_iT^{a_ih_1}f_i)\|\!|_{d+1}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\leq i\leq d}\limsup_{H_1\to\infty}\frac{1}{H_1}\sum_{h_1=1}^{H_1-1}\|\!|f_i\cdot T^{a_ih_1}f_i\|\!|_{d+2}$$

$$\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\leq i\leq k}\|\!|f_i\|\!|_{d+3}^2.$$

因此，

$$\int_{X^d}\limsup_{N\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi int}\prod_{i=1}^{d}f_i(T^{a_in}x_i)\Big|d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\leq i\leq d}\|\!|f_i\|\!|_{d+3}.$$

证明完毕。 □

4. Proof of Theorem 1.4

定理 *1.4*的证明。 注意，所有常数序列都是幂零序列。因此，我们只需验证以下事实：假设对任意 h_1，$\cdots$，$h_d\in L^\infty(\mu)$，都有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{j=1}^{d}h_j(T^{a_jn}x)$$

几乎处处存在。于是，对于任意实值有界的 $f_1,\cdots,f_d$，其上界为 1 2，存在 X 的满测度子集 $X(f_1,\cdots,f_d)$，使得对任意 $x\in X(f_1,\cdots,f_d)$ 以及任意幂零序列 $\mathbf{b}=\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}b_n\prod_{j=1}^{d}f_j(T^{a_jn}x)$$

存在。

任意选取并固定一个大于一的正整数 k。接下来，我们证明上述事实对所有（$k-1$）步幂零序列都成立。完成这一步后，整个证明即可结束，因为可数个全测度子集的交仍然是满测度的。

对于任意 $1\le j\le d$，令

$$f_j=\mathbb{E}(f_j|\mathcal{Z}_{d+k}(T))+(f_j-\mathbb{E}(f_j|\mathcal{Z}_{d+k}(T))).$$

基于这一分解，剩下的部分可以分为两个步骤。

步骤 1。在此步骤中，我们验证以下结论：如果可以从 $\{1,\cdots,d\}$ 中找到 j，使得 f_j 关于 $\mathcal{Z}_{d+k}(T)$ 的条件期望为零，那么存在 X 的满测度子集 $X(f_1,\cdots,f_d)$，使得对于任意 $x\in X(f_1,\cdots,f_d)$ 以及任意（$k-1$）步幂零序列 $\mathbf{b}=\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}b_n\prod_{j=1}^{d}f_j(T^{a_jn}x)=0.$$

该假设告诉我们，存在 X 的一个满测度子集 X_1，使得对于任意 $x\in X_1$ 和任意 $\underline{h}\in\mathbb{Z}^k$，我们可以通过下式定义 $c_{\underline{h}}(x)$：

$$c_{\underline{h}}(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}a_{n+\underline{h}\cdot\underline{\epsilon}}(x)$$

其中，对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，$a_n(x)=\prod_{j=1}^{d}f_j(T^{a_jn}x)$。根据 [13, 命题 2，2], 对于任意$x\in X_1$，我们可以定义 $\|\mathbf{a}(x)\|_k$ 如下

$$\|\mathbf{a}(x)\|_k=\Big(\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}c_{\underline{h}}(x)\Big)^{\frac{1}{2^k}}.$$

接下来，我们验证对于几乎处处的 μ，$x\in X_1$，$\|\mathbf{a}(x)\|_k=0$。这一步的证明分为两部分。

第一部分：$k>2$。令 $\mu_d^{\mathcal{A}}$为相对于多项式族 $\mathcal{A}=\{a_1n,\cdots,a_dn\}$ 的 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 的 Furstenberg 自联结。根据 $\mu_d^{\mathcal{A}}$ 和 [13, 的定义以及命题 2.2],, 我们有

$$\int_X\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}c_{\underline{h}}(x)d\mu(x)$$

$$= \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}\int_X \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k} a_{n+\underline{h}\cdot\underline{\epsilon}}(x)d\mu(x)$$

$$= \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_X\prod_{j=1}^{d}T^{a_j n}(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_j(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_j)d\mu(x)$$

$$= \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}\int_{X^d}(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_1(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_1)\otimes\cdots\otimes(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_d(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_d)d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x}).$$

根据 Fatou引理，我们知道

$$\int_X \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}c_{\underline{h}}(x)d\mu(x)$$

$$\le\Big(\int_{X^d}\limsup_{H\to\infty}\Big|\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_1(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_1)\otimes\cdots\otimes(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_d(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_d)\Big|^{2^{k-2}}d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\Big)^{\frac{1}{2^{k-2}}}.$$

注意到

$$\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_1(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_1)\otimes\cdots\otimes(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_d(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_d)$$

$$=\Big(f_1\otimes\cdots\otimes f_d\Big)\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k^*}G_{\phi(\underline{\epsilon}),\underline{h}\cdot\underline{\epsilon}}$$

其中 $\{G_{i,n}\}_{1\le i\le 2^k-1,\ n\in\mathbb{Z}}$ 是一个函数序列族，并且对于任意 $1\le i\le 2^k-1$、$n\in\mathbb{Z}$、$G_{i,\ n}=T^{a_1 n}f_1\otimes\cdots\otimes T^{a_d n}f_d$。

令 $C>2$，$\tilde{C}>(1024)^k C^{1024k}$ 并固定它们。根据引理 3.2，我们知道

$$\Big(\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_1(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_1)\otimes\cdots\otimes(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_d(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_d)\Big)^2$$

$$\le\frac{C}{H^{k-2}}\sum_{h_1,\cdots,h_{k-2}=0}^{H-1}\sup_t\Big|\frac{1}{H}\sum_{h_k=0}^{H-1}e^{2\pi i h_k t}\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}G_{\phi(\underline{\epsilon}),h_k\epsilon_k+\sum_{i=1}^{k-2}h_i\epsilon_i}\Big|^2.$$

经过简单计算，对于 $k\ge 4$，我们有

$$H\Big|\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_1(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_1)\otimes\cdots\otimes(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_d(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_d)\Big|^{2^{k-2}}$$

$$\le\sum_{h_1=0}^{H-1}\Big(\frac{1}{H}\sum_{h_2=0}^{H-1}\Big(\cdots\Big(\frac{1}{H}\sum_{h_{k-2}=0}^{H-1}\sup_t\Big|\frac{1}{H}\sum_{h_k=0}^{H-1}e^{2\pi i h_k t}\cdot$$

$$\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}G_{\phi(\underline{\epsilon}),h_k\epsilon_k+\sum_{i=1}^{k-2}h_i\epsilon_i}\Big|^2\Big)^2\cdots\Big)^2\Big)^2.$$

取充分大的 H 并将其固定。由引理 2.10，对于任意 $1 \le K \le H$以及任意 $(h_1, \cdots, h_{k-2}) \in [H]^{k-2}$,

$$\sup_t \Big| \frac{1}{H} \sum_{h_k=0}^{H-1} e^{2\pi i h_k t} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), h_k \epsilon_k + \sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big|^2$$

$$\le \frac{C}{K} + \frac{C}{K} \sum_{s=1}^{K} \Big| \frac{1}{H} \sum_{n=0}^{H-1} \Big(\prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n + \sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big) \cdot \Big(\prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n+s+\sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big) \Big|.$$

于是我们有

$$\frac{1}{H} \sum_{h_{k-2}=0}^{H-1} \sup_t \Big| \frac{1}{H} \sum_{h_k=0}^{H-1} e^{2\pi i h_k t} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), h_k \epsilon_k + \sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big|^2$$

$$\le \frac{C}{K} + \frac{C}{K} \sum_{s=1}^{K} \frac{1}{H} \sum_{h_{k-2}=0}^{H-1} \Big| \frac{1}{H} \sum_{n=0}^{H-1} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n + \sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n+s+\sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big|$$

$$\le \frac{C}{K} + \frac{C}{K} \sum_{s=1}^{K} \Big(\frac{1}{H} \sum_{h_{k-2}=0}^{H-1} \Big| \frac{1}{H} \sum_{n=0}^{H-1} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n + \sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n+s+\sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

对于任意 $(h_1, \cdots, h_{k-3}) \in [H]^{k-3}$。对于任意 $1 \le s \le K$，由命题 3.1，我们知道

$$\frac{1}{H} \sum_{h_{k-2}=0}^{H-1} \Big| \frac{1}{H} \sum_{n=0}^{H-1} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n + \sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), n+s+\sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big|^2$$

$$\le \sup_t \Big| \frac{1}{H} \sum_{m=0}^{2(H-1)} e^{2\pi i m t} \Big(\prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_1(m + \sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_1 \otimes \cdots \otimes \prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_d(m + \sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_d \Big) \cdot$$

$$\Big(\prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_1(m+s+\sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_1 \otimes \cdots \otimes \prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_d(m+s+\sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_d \Big) \Big|^2.$$

因此，

$$\frac{1}{H} \sum_{h_{k-2}=0}^{H-1} \sup_t \Big| \frac{1}{H} \sum_{h_k=0}^{H-1} e^{2\pi i h_k t} \prod_{\underline{\epsilon} \in A_{k-1}^k} G_{\phi(\underline{\epsilon}), h_k \epsilon_k + \sum_{i=1}^{k-2} h_i \epsilon_i} \Big|^2$$

$$\le \frac{C}{K} + \frac{C}{K} \sum_{s=1}^{K} \sup_t \Big| \frac{1}{H} \sum_{m=0}^{2(H-1)} e^{2\pi i m t} \cdot$$

$$\Big(\prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_1(m + \sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_1 \otimes \cdots \otimes \prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_d(m + \sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_d \Big) \cdot$$

$$\Big(\prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_1(m+s+\sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_1 \otimes \cdots \otimes \prod_{\underline{\epsilon} \in V_{k-3}^*} T^{a_d(m+s+\sum_{i=1}^{k-3} h_i \epsilon_i)} f_d \Big) \Big|.$$

若 $k=3$，根据命题 2.4、引理 3.3 并对 H 取上极限 K，依次可得

$$\int_X \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^3}\sum_{\underline{h}\in[H]^3} c_{\underline{h}}(x)d\mu(x)\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\le i\le d}\|f_i\|_{d+4}.$$

若 $k>3$，我们继续进行。

对于任意 $(h_1,\ \cdots,\ h_{k-4})\in[H]^{k-4}$，由引理 2.10 和命题 3.1，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H}\sum_{h_{k-3}=0}^{H-1}\Big(\frac{1}{H}\sum_{h_{k-2}=0}^{H-1}\sup_t\Big|\frac{1}{H}\sum_{h_k=0}^{H-1}e^{2\pi i h_k t}\prod_{\underline{\epsilon}\in A_{k-1}^k}G_{\phi(\underline{\epsilon}),h_k\epsilon_k+\sum_{i=1}^{k-2}h_i\epsilon_i}\Big|^2\Big)^2\\
&\le\frac{C^2}{K^2}+\frac{4C^2}{K}+\frac{4C^3}{K_1}+\frac{4C^2}{K}\sum_{s=1}^{K}\frac{C}{K_1}\sum_{t_1=1}^{K_1}\sup_t\Big|\frac{1}{2H-1}\sum_{m=0}^{4(H-1)}e^{2\pi imt}\cdot\\
&\Big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_1(m+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_1\otimes\cdots\otimes\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_d(m+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_d\Big)\cdot\\
&\Big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_1(m+t_1+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_1\otimes\cdots\otimes\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_d(m+t_1+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_d\Big)\cdot\\
&\Big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_1(m+s+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_1\otimes\cdots\otimes\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_d(m+s+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_d\Big)\cdot\\
&\Big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_1(m+s+t_1+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_1\otimes\cdots\otimes\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-4}^*}T^{a_d(m+s+t_1+\sum_{i=1}^{k-4}h_i\epsilon_i)}f_d\Big)\Big|
\end{aligned}$$

对于任意 $1\le K_1\le H$。在上述过程中，指标 h_{k-3} 消失，并引入新的指标 t_1。若 $k=4$，则可以在此处停止。若 $k>4$，则重复该过程，直到指标 h_1 消失。最后，若 $k\ge 4$，对于任意 $1\le K$、K_1、$\cdots$、$K_{k-3}\le H$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_1(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_1)\otimes\cdots\otimes(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_k}T^{a_d(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_d)\Big|^{2^{k-2}}\\
&\le R(K,K_1,\cdots,K_{k-3})+\tilde{C}\frac{1}{K}\sum_{s=1}^{K}\frac{1}{K_1}\sum_{t_1=1}^{K_1}\cdots\frac{1}{K_{k-3}}\sum_{t_{k-3}=1}^{K_{k-3}}\sup_t\Big|\frac{1}{2^{k-2}(H-1)+1}\cdot\\
&\sum_{m=0}^{2^{k-2}(H-1)}e^{2\pi imt}\Big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-2}}T^{a_1(m+\underline{\epsilon}\cdot\underline{k})}f_1\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_{k-2}}T^{a_d(m+\underline{\epsilon}\cdot\underline{k})}f_d\Big)\Big|
\end{aligned}$$

其中 $\underline{k}=(t_{k-3},\cdots,t_1,s)$，并且

$$\lim_{K\to\infty}\cdots\lim_{K_{k-3}\to\infty}R(K,K_1,\cdots,K_{k-3})=0.$$

由命题 2.4、引理 3.3，依次对 H、K_{k-3}、$\cdots$、K_1、K 取上极限，可得

$$\int_X\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k}c_{\underline{h}}(x)d\mu(x)\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\le i\le d}\|f_i\|_{d+k+1}.$$

第二部分： $k=2$。由命题 3.1 和引理 3.3，可得

$$\begin{aligned}
&\int_X \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k} c_{\underline{h}}(x)d\mu(x)\\
&\le \Big(\int_{X^d}\limsup_{H\to\infty}\Big|\frac{1}{H^2}\sum_{\underline{h}\in[H]^2}\big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_2}T^{a_1(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_1\big)\otimes\cdots\otimes\big(\prod_{\underline{\epsilon}\in V_2}T^{a_d(\underline{h}\cdot\underline{\epsilon})}f_d\big)\Big|^2 d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \Big(\int_{X^d}\limsup_{H\to\infty}\Big|\frac{1}{H^2}\sum_{h_1,h_2=0}^{H-1}(T^{a_1h_1}f_1T^{a_1h_2}f_1T^{a_1(h_1+h_2)}f_1)\otimes\cdots\otimes\\
&\quad (T^{a_dh_1}f_dT^{a_dh_2}f_dT^{a_d(h_1+h_2)}f_d)\Big|^2 d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \Big(4\int_{X^d}\limsup_{H\to\infty}\sup_t\Big|\frac{1}{2H-1}\sum_{m=0}^{2(H-1)}e^{2\pi imt}(T^{a_1m}f_1)\otimes\cdots\otimes(T^{a_dm}f_d)\Big|^2 d\mu_d^{\mathcal{A}}(\mathbf{x})\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\le i\le d}\|\!|f_i|\!\|_{d+3}.
\end{aligned}$$

总之，对于任意 $k\ge 2$，我们有

$$\int_X \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^k}\sum_{\underline{h}\in[H]^k} c_{\underline{h}}(x)d\mu(x)\lesssim_{a_1,\cdots,a_d}\min_{1\le i\le d}\|\!|f_i|\!\|_{d+k+1}.$$

根据定理 2.2，我们知道对于 μ-几乎处处的 $x\in X_1$，$\|\!|\mathbf{a}(x)|\!\|_k=0$。根据命题 2.7，我们知道存在 $X(f_1,\ \cdots,\ f_d)$ 的满测度子集 X，使得对于任意 $x\in X(f_1,\ \cdots,\ f_d)$，以及任意（$k-1$）步幂零序列 $\mathbf{b}=\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}b_n\prod_{j=1}^{d}f_j(T^{a_jn}x)=0.$$

步骤 2。在此步骤中，我们验证以下结论：如果所有 f_j、$1\le j\le d$ 都关于 $\mathcal{Z}_{d+k}(T)$ 可测，则存在 X 的满测度子集 $X(f_1、\ \cdots、\ f_d)$，使得对于任意 $x\in X(f_1、\ \cdots、\ f_d)$，以及任意 $(k-1)$ 步幂零序列 $\mathbf{b}=\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}b_n\prod_{j=1}^{d}f_j(T^{a_jn}x)$$

存在。

根据 [14, 定理 16。10]，我们知道，对任意 $1\le j\le d$ 以及任意 $r\in\mathbb{N}$，都可以找到一个函数序列 $\{g_{j,m}\}_{m\ge1}$，使得对每个 $m\ge1$，以下结论成立：

(1) $\|g_{j,\ m}\|_\infty\le\|f_j\|_\infty$；(2) $\|g_{j,\ m}-f_j\|_1\le\frac{1}{4^{m+1+rCd}}$，其中 $C=d^{2^{k+d+1}}$；

(3) 对于 μ-几乎处处的 $x\in X$，$\{g_{j,m}(T^{a_jn}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个（$d+k$）步幂零序列。

设 $s=d+k+1$。根据伯克霍夫点态遍历定理和我们的假设，可以找到一个满测度子集 X_0 of X，使其满足以下条件：

(1) 对任意 $x \in X_0$、任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和任意 $1 \le j \le d$，$|f_j(T^{a_j n}x)| \le \frac{1}{2}$；(2) 对任意 $x \in X_0$、任意 $n \in \mathbb{Z}$、任意 $1 \le j \le d$ 和任意 $m \ge 1$，$|g_{j,\,m}(T^{a_j n}x)| \le \frac{1}{2}$；(3) 对任意 $x \in X_0$、任意 $1 \le j \le d$ 和任意 $m \ge 1$，$\{g_{j,m}(T^{a_j n}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个 $(d+k)$ 步幂零序列；(4) 对任意 $x \in X_0$、任意 $1 \le j \le d$ 和任意 $m \ge 1$，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|f_j(T^{a_j n}x)-g_{j,m}(T^{a_j n}x)| = \mathbb{E}(|f_j-g_{j,m}|\big|\mathcal{I}_{a_j})(x)$$

其中，$\mathcal{I}_{a_j}$是由所有 T^{a_j}-不变子集生成的σ-子代数；

（5）对任意 $x \in X_0$、任意 $m \ge 1$ 及任意 $\underline{h} \in \mathbb{Z}^s$，该极限

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{\underline{\epsilon}\in V_s}a^{(m)}_{n+\underline{h}\cdot\underline{\epsilon}}$$

存在，其中

$$\begin{aligned}a_n^{(m)} &= \prod_{j=1}^{d}f_j(T^{a_j n}x)-\prod_{j=1}^{d}g_{j,m}(T^{a_j n}x)\\ &= \sum_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{i-1}f_j(T^{a_j n}x)\cdot(f_i(T^{a_i n}x)-g_{i,m}(T^{a_i n}x))\cdot\prod_{l=i+1}^{d}g_{l,m}(T^{a_l n}x)\end{aligned}$$

对任意 $n \in \mathbb{Z}$。我们将该极限记为 $c_{\underline{h}}^{(m)}(x)$；

（6）对任意 $x \in X_0$、任意 $m \ge 1$ 及任意 $\underline{h} \in \mathbb{Z}^s$，

$$|c_{\underline{h}}^{(m)}(x)| \le C\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\Big(|f_j-g_{j,m}|\big|\mathcal{I}_{a_j}\Big)(x).$$

由 [13, 命题22], 可知，对任意 $m \ge 1$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_X \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^s}\sum_{\underline{h}\in[H]^s}c_{\underline{h}}^{(m)}(x)d\mu(x)\\ &= \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^s}\sum_{\underline{h}\in[H]^s}\int_X c_{\underline{h}}^{(m)}(x)d\mu(x)\\ &\le \limsup_{H\to\infty}\frac{1}{H^s}\sum_{\underline{h}\in[H]^s}\int_X C\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\big(|f_j-g_{j,m}|\big|\mathcal{I}_{a_j}\Big)(x)d\mu(x)\\ &\le C\sum_{j=1}^{d}\|f_j-g_{j,m}\|_1\\ &= \frac{1}{4^{m+r+1}}.\end{aligned}$$

则对任意 $m \geq 1$,

$$\mu(\{x \in X_0 : \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^s} \sum_{\underline{h}\in[H]^s} c_{\underline{h}}^{(m)}(x) < \frac{1}{2^{m+1+r}}\}) \geq 1 - \frac{1}{2^{m+1+r}}.$$

Let

$$X_m = \{x \in X_0 : \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^s} \sum_{\underline{h}\in[H]^s} c_{\underline{h}}^{(m)}(x) \leq \frac{1}{2^{m+1+r}}\}.$$

对于任意 $m \geq 1$，令 $Y_r = \bigcap_{m\geq 1} X_m$，则 $\mu(Y_r) \geq 1 - \frac{1}{2^r}$。令 $Y = \bigcup_{r\geq 1} Y_r$。则$\mu(Y) = 1$。

注意，有限个 $(d+k)$-步幂零序列的乘积仍然是一个 $(d+k)$-步幂零序列，并且每个 $(k-1)$-步幂零序列都可以视为一个 $(d+k)$-步幂零序列。

根据 Y和命题 2.8，我们知道，对于任意 $x \in Y$，以及任意一个 $(k-1)$-步幂零序列 $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \prod_{j=1}^{d} f_j(T^{a_j n}x)$$

存在。至此，整个证明完成。 □

5. Proof of Theorem 1.8

在证明之前，我们先给出一个引理。根据 [10, 定理 2.8] 和 [19,定理 1.1], , 重复 [9,命题 3.2]的证明过程即可得到以下引理。

引理 5.1. 给定 $d \in \mathbb{N}$，设 $S_1, \cdots, S_d$ 是作用于勒贝格空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的可逆保测变换，且 $S_1, \cdots, S_d$ 两两可交换。设 $p_1(n) \cdots, p_d(n)$ 是非常值整数系数多项式，且 deg p_1 >deg $p_2 > \cdots >$ deg $p_d \geq 2$。那么，对于任意实值 $g_1, \cdots, g_d \in L^\infty(\mu)$ 以及任意严格递增的正整数序列 $\{N_k\}_{k\geq 1}$，存在 $\{N_k\}_{k\geq 1}$ 的一个子序列 $\{N'_k\}_{k\geq 1}$，使得对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，序列 $\{\prod_{j=1}^{d} g_j(S^{p_j}(n)\ j \quad x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 在序列 $\{N'_k\}_{k\geq 1}$ 上存在相关。此外，若对于某个 $j \in \{1, \cdots, d\}$，有 $\mathbb{E}(g_j|\mathcal{Z}_\infty(S_j)) = 0$，则 0 次坐标投影 $F_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ 关于相应 Furstenberg 系统的 Pinsker 因子 [1] 的条件期望为零。

现在，我们开始证明定理 1.8。该证明的思路部分源自 [9, 命题 4.1,42] 的证明。

[1]每个系统 $(Y, \mathcal{D}, \nu, S)$ 都有一个最大的零熵因子。该因子称为 $(Y, \mathcal{D}, \nu, S)$ 的 Pinsker 因子。

定理 *1.8* 的证明。 不失一般性，我们可以假设 f_1， f_2， g_1， $\cdots$， g_d 都是取值于区间 $[-1,1]$ 的有界实值函数。设 $\Omega = [-1,1]^{\mathbb{Z}}$。设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的 Borel σ-代数。证明的其余部分分为两部分。

第一部分：我们验证如下结论：如果我们能从 $\{1,\cdots,d\}$ 中找到 j，使得 g_j 关于 $\mathcal{Z}_\infty(S_j)$ 的条件期望为零，那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d} g_j(S_j^{p_j(n)}x)=0$$

在 $L^2(\mu)$ 中。

假设上述结果不成立。那么存在 $\epsilon>0$ 以及正整数的严格递增序列 $\{N_k\}_{k\geq 1}$，使得对于任意 $k\in\mathbb{N}$,

$$\left\|\frac{1}{N_k}\sum_{n=1}^{N_k} f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d} g_j(S_j^{p_j(n)}x)\right\|_2\geq\epsilon.$$

根据引理 5.1，存在 $\{N_k\}_{k\geq1}$ 的一个子序列 $\{N'_k\}_{k\geq1}$，使得对于 μ-几乎处处的 $x\in X$，序列 $\{\prod_{j=1}^{d} g_j(S^{p_j(n)}{}_j\quad x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 在序列 $\{N'_k\}_{k\geq1}$ 上具有相关。此外，0 阶坐标投影 $F_0:\Omega\to\mathbb{R}$ 关于相应 Furstenberg 系统（Ω $\mathcal{F}$， ν_x， σ）的 Pinsker 因子的条件期望为零。

根据 [9, 命题 2.5] 和 [20, 定理 4.13.(ii)]，，对于 μ-几乎处处的 $x\in X$，序列$\{f_1(T^{an}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$在序列 $\{N'_k\}_{k\geq1}$上存在相关，且相应的 Furstenberg 系统 $(\Omega\ \mathcal{F},\lambda_x^a,\sigma)$ 是遍历的并具有零熵。设 G_0^a为其第 0 个坐标投影。类似地，对于 μ-几乎处处的 $x\in X$，序列 $\{f_2(T^{bn}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$在序列 $\{N'_k\}_{k\geq1}$ 上存在相关，且相应的 Furstenberg 系统 $(\Omega\ \mathcal{F},\lambda_x^b,\sigma)$ 是遍历的并具有零熵。设 G_0^b为其第 0 个坐标投影。

因此，我们可以找到 X 的一个满测度子集 X_0，使得对于任意 $x\in X_0$，上述性质都成立。根据我们的假设，存在 X_0 的一个子集 X_1，满足$\mu(X_1)>0$，使得对于任意 $x\in X_1$，都存在 $\{N'_k\}_{k\geq1}$的一个子序列 $\{N'_{x,k}\}_{k\geq1}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N'_{x,k}}\sum_{n=1}^{N'_{x,k}} f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d} g_j(S_j^{p_j(n)}x)$$

存在且为非零。

令 $x\in X_1$ 固定于此。令 $w_a,w_b,z\in\Omega$ 由 $w_a(n)=f_1(T^{an}x)$ $w_b(n)=f_2(T^{bn}x)$ $z(n)=\prod_{j=1}^{d} g_j(S^{p_j(n)}{}_j\quad x)$ 定义。则存在 $\{N'_{x,k}\}_{k\geq1}$ 的一个子序列 $\{N''_{x,k}\}_{k\geq1}$，使得该序列

$$\left\{\frac{1}{N''_{x,k}}\sum_{n=1}^{N''_{x,k}}\delta_{(\sigma^n w_a,\sigma^n w_b)}\right\}_{k\geq1}$$

具有弱-$*$ 极限 λ_x ，且该序列

$$\left\{\frac{1}{N''_{x,k}}\sum_{n=1}^{N''_{x,k}}\delta_{(\sigma^n w_a,\sigma^n w_b,\sigma^n z)}\right\}_{k\geq 1}$$

有弱-$*$极限 ρ_x。显然， ρ_x是$(\Omega\ \mathcal{F},\nu_x,\sigma)$与$(\Omega\times\Omega\ \mathcal{F}^{\otimes 2},\lambda_x,\sigma\times\sigma)$的一个粘合。根据 [7, 事实 4.4.3], , 我们知道$(\Omega\ \times\Omega\ \mathcal{F}^{\otimes 2},\lambda_x,\sigma\times\sigma)$具有零熵，因为 λ_x 是$(\Omega\ \mathcal{F},\lambda_x^a,\sigma)$与$(\Omega\ \mathcal{F},\lambda_x^b,\sigma)$的一个粘合。根据 [9, 命题 2.1], ，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N''_{x,k}}\sum_{n=1}^{N''_{x,k}}f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d}g_j(S_j^{p_j(n)}x)=\int F_0\otimes G_0^a\otimes G_0^b d\rho_x=0.$$

这就产生了矛盾。因此

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d}g_j(S_j^{p_j(n)}x)=0$$

在 $L^2(\mu)$中。

第二部分：我们验证如下结论：若对任意 $1\leq j\leq d$， g_j 都关于 $\mathcal{Z}_\infty(S_j)$可测，则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d}g_j(S_j^{p_j(n)}x)$$

几乎处处存在。

根据[14, 定理 14.15,16.10], ，我们知道对任意 $1\leq j\leq d$，都可以找到一个函数序列 $\{h_{j,m}\}_{m\geq 1}$ ，使得对每个 $m\geq 1$，以下结论成立：

(1) $\|h_{j,m}-g_j\|_{d+3}\leq\frac{1}{4^{m+1}}$;

(2) for μ-a.e. $x\in X$, $\{h_{j,m}(S_j^{p_j(n)}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is a nilsequence.

注意，有限个幂零序列的乘积仍然是幂零序列。由推论1.5，我们知道对于任意 $m\geq 1$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d}h_{j,m}(S_j^{p_j(n)}x)$$

几乎处处存在。重复[6, 推论 2。2],的证明中的论证，我们知道

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_1(T^{an}x)f_2(T^{bn}x)\prod_{j=1}^{d}g_j(S_j^{p_j(n)}x)$$

几乎处处存在。证明完毕。 □

Acknowledgement

作者受到中国国家自然科学基金（11971455、12031019、12090012）的资助。作者感谢邵松教授和叶向东教授提出的宝贵建议。

References

[1]I. Assani。沿立方体的遍历平均的逐点收敛。《数学分析杂志》，110(1)：241–269，2010年。[2] I. Assani、D. Duncan 和 R. Moore。Wiener-Wintner 双重遍历定理的逐点特征因子。《遍历理论与动力系统》，36(4)：1037–1066，2016年。[3] I. Assani 和 R. Moore。一个适用于范数意义下非经典遍历平均的良好通用权。《遍历理论与动力系统》，37(4)：1009–1025，2017年。[4] I. Assani 和 R. Moore。将 Wiener-Wintner 双重遍历定理推广至多项式。《数学分析杂志》，134(2)：597–613，2018年。[5] J. Bourgain。双重重返与几乎处处收敛。《纯粹与应用数学杂志》，404：140–161，1990年。[6] J. Derrien 和 E. Lesigne。精确端同态与 K 系统的逐点多项式遍历定理。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，32(6)：765–778，1996年。[7] T. Downarowicz。动力系统中的熵，《新数学专著》第18卷。剑桥：剑桥大学出版社，2011年。[8] N. Frantzikinakis 和 B. Host。遍历权的对数 Sarnak 猜想。《数学年刊》（第2辑），187(3)：869–931，2018年。[9] N. Frantzikinakis 和 B. Host。多重重返与非交换性下的收敛。arXiv 预印本 arXiv:2111.01518，即将在《伦敦数学会杂志》发表，2023年。[10] N. Frantzikinakis 和 B. Kuca。交换变换的联合遍历性及其在多项式序列中的应用。arXiv 预印本 arXiv:2207.12288，2022年。[11] H. Furstenberg。对角测度的遍历行为与 Szemerédi 关于算术级数的定理。《数学分析杂志》，31：204–256，1977年。[12] B. Host 和 B. Kra。非经典遍历平均与幂零流形。《数学年刊》（第2辑），161(1)：397–488，2005年。[13] B. Host 和 B. Kra。ℓ^∞ 上的一致性半范数及其应用。《数学分析杂志》，108：219–276，2009年。[14] B. Host 和 B. Kra。遍历理论中的幂零结构，《数学调查与专著》第236卷。普罗维登斯：美国数学会，2018年。[15] W. Huang、S. Shao 和 X. Ye。多重遍历平均的逐点收敛与严格遍历模型。《数学分析杂志》，139(1)：265–305，2019年。[16] W. Huang、S. Shao 和 X. Ye。多项式 Furstenberg 联结及其应用。arXiv 预印本 arXiv:2301.07881，2023年。[17] L. Kuipers 和 H. Niederreiter。序列的一致分布。《纯粹与应用数学》。纽约等地：约翰·威立父子公司，威利-跨学科出版物。xiv，390页，13英镑（1974年），1974年。[18] A. Leibman。沿多个变量的多项式的多重遍历平均的收敛。《以色列数学杂志》，146：303–315，2005年。[19] M. N. Walsh。幂零遍历平均的范数收敛。《数学年刊》（第2辑），175(3)：1667–1688，2012年。[20] P. Walters。遍历理论导论，《研究生数学教材》第79卷。施普林格，Cham，1982年。

[21] N. Wiener 和 A. Wintner。调和分析与遍历理论。《美国数学杂志》，63：415–426，1941年。[22] P. Zorin-Kranich。一致幂零序列 Wiener-Wintner 定理及其在双线性遍历平均中的应用。arXiv 预印本 arXiv:1504.04647，2015年。

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, 230026, PR China

电子邮箱地址：xiaorz@mail.ustc.edu.cn