arXiv:2303.02679v1 [math.CA] 5 Mar 2023

扭曲拉普拉斯算子的 Bochner–Riesz 均值几乎处处收敛

EUNHEE JEONG、SANGHYUK LEE 和 JAEHYEON RYU

Abstract. 令 $\mathcal{L}$表示 $\mathbb{C}^d$中的扭曲拉普拉斯算子。我们研究 Bochner–Riesz 均值 $S_t^\delta(\mathcal{L})f$ 的几乎处处收敛性，其中 $f \in L^p(\mathbb{C}^d)$ 是 f 在特殊 Hermite 函数下的展开，且 $t \to \infty$。对于 $2 \le p \le \infty$，我们得到可和指标 δ 的最佳范围，使得对所有 $f \in L^p(\mathbb{C}^d)$， $S_t^\delta(\mathcal{L})f$ 均成立。

1. Introduction

Bochner–Riesz 均值的几乎处处收敛

$$S_t^\delta f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\Big(1-\frac{|\xi|^2}{t^2}\Big)_+^\delta \widehat{f}(\xi)d\xi, \quad \delta \ge 0$$

当 $t \to \infty$ 时，这一直是经典调和分析中的一个重要课题。与 Bochner–Riesz 猜想类似，后者关注 $S_t^\delta f$ 的 L^p 收敛性；确定最佳可和指数 δ（依赖于 p）的问题，即使得对每个 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$， $S_t^\delta f \to f$ 几乎处处成立（下文简称为几乎处处收敛），已由多位作者广泛研究（[28, 2, 3, 7]）。特别地，对于 $2 \le p \le \infty$，Carbery–Rubio de Francia–Vega [3] 基本解决了这个问题。他们证明，只要 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，几乎处处收敛就成立。

$$\delta > \delta(p,d) := \max\Big(0, d\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big)-\frac{1}{2}\Big) \tag{1.1}$$

对于 $2 \le p < \infty$。关于条件 (1.1) 必要性的讨论可见[4, 23]。然而，对于 $1 \le p < 2$ 的情形， L^p 函数的 Bochner– Riesz 均值的逐点行为却大不相同。除 Stein [28] 的经典结果外，相关研究所知甚少。近期成果可参见 [32, 33, 24] 及其中所引文献。

通过谱分解，可以为具有谱分解 $L = \int_0^\infty \lambda dE_L(\lambda)$ 的一般正自伴算子定义 Bochner–Riesz 均值，其中 L^2 内的 dE_L 表示与 L 关联的谱测度。事实上，与 L 关联的 Bochner–Riesz 均值定义为

$$S_t^\delta(L)f = \int_0^t \Big(1-\frac{\lambda}{t^2}\Big)^\delta dE_L(\lambda)f.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 42B15, 42B25, 42C10.*Key words and phrases.*几乎处处收敛，Bochner–Riesz 均值，扭曲拉普拉斯算子。

更一般地，对于任意可测函数 m ，算子 $m(L)$ 定义为 $m(L)f = \int m(\lambda) dE_L(\lambda) f$。关于 Bochner–Riesz 均值 S_t^δ 向各种算子 L 的推广，已有大量文献。例如，参见 [6, 8, 11, 12, 13, 16, 26, 27, 31, 34, 37] 及其中的参考文献。

本文关注定义在 $\mathbb{C}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$ 上的扭曲拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ 所对应的 Bochner–Riesz 均值；该算子是一个自伴二阶微分算子，定义如下：

$$\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^{d} \left(\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{2} y_j \Big)^2 + \Big(\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{i}{2} x_j \Big)^2 \right), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

扭曲拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ 在数学物理和量子物理中尤为重要，因为它是具有恒定磁场的薛定谔算子的典型例子。此外， $\mathcal{L}$ 与海森堡群上的次拉普拉斯算子密切相关；后者是海森堡群上一个独特的算子，齐次次数为二，且在左作用和旋转下保持不变。关于这些内容的更多信息，请参阅 [38, 25]。

与 $\mathcal{L}$ 相关的 Bochner–Riesz 均值。令 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. 。对于 α， $\beta \in \mathbb{N}_0^d$，特殊厄米函数 $\Phi_{\alpha,\ \beta}$ 定义为

$$\Phi_{\alpha,\beta}(z) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \Phi_\alpha\Big(\xi + \frac{1}{2} y\Big) \Phi_\beta\Big(\xi - \frac{1}{2} y\Big) d\xi, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^d,$$

其中 Φ_α 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的归一化厄米函数。$\Phi_{\alpha,\ \beta}$ 是 $\mathcal{L}$ 的特征函数，对应的特征值为 $(2|\beta| + d)$，即 $\mathcal{L}\Phi_{\alpha,\ \beta} = (2|\beta| + d)\Phi_{\alpha,\ \beta}$。这里 $|\beta| = \sum_i \beta_i$。此外， $\{\Phi_{\alpha,\beta}\}$ 构成了 $L^2(\mathbb{C}^d)$ 的标准正交基，而 $\mathcal{L}$ 的谱为 $2\mathbb{N}_0 + d := \{2k + d :\ k \in \mathbb{N}_0\}$ （见 [36]）。对于 $\mu \in 2\mathbb{N}_0 + d$，令 $\mathcal{P}_\mu$ 表示如下定义的谱投影算子：

$$\mathcal{P}_\mu f(z) = \sum_{\beta : 2|\beta| + d = \mu} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \langle f, \Phi_{\alpha,\beta} \rangle \Phi_{\alpha,\beta}(z).$$

扭曲拉普拉斯算子的 Bochner–Riesz 均值 $S_t^\delta(\mathcal{L})$ $\mathcal{L}$ 给出为

$$S_t^\delta(\mathcal{L}) f(z) = \sum_{\mu \in 2\mathbb{N}_0 + d :\ \mu \le t^2} \Big(1 - \frac{\mu}{t^2}\Big)^\delta \mathcal{P}_\mu f(z).$$

L^p 在局部和整体情形下， $S_t^\delta(\mathcal{L}) f$ 的收敛性已由多位作者进行了研究[35, 37, 31, 22] （另见 [17, 14]）。特别地，文献 [31] 表明，当 $S_t^\delta(\mathcal{L}) f$时，对于 $2(2d + 1)/(2d - 1) < p < \infty$，其在 L^p 中收敛

$$\delta > \delta(p, 2d).$$

δ 的范围是精确的，这可由 Kenig–Stanton–Tomas [18]提出的转移定理看出。对于 p，使得 L^p 收敛且具有精确可和指数的范围，后来在局部情形下进一步得到了扩展 [22]。

本文受 Chen–Duong–He–Lee–Yan [5] 近期关于厄米算子 $\mathcal{H} := -\Delta + |x|^2$ 的 Bochner–Riesz 均值几乎处处收敛的研究启发，考察 $S_t^\delta(\mathcal{L}) f$ 的几乎处处收敛，也就是说，刻画使得下式成立的 $\delta = \delta(p)$ ：

$$\lim_{t \to \infty} S_t^\delta(\mathcal{L}) f(z) = f(z) \quad \text{a.e.} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{C}^d) \tag{1.2}$$

当 $2 \le p \le \infty$ 时。与 L^p $S_t^\delta(\mathcal{L})f$ 的收敛性相比，其几乎处处收敛性尚未得到充分研究。目前仅在可和指标相对较大的情况下证明了这一结论。Thangavelu 在 [36], 中证明，当 $\delta > d - 1/3$ 时，若 $1 \le p \le \infty$，则 (1.2) 成立；当 $\delta > d - 1/2$ 时，若 $p > 4/3$，则 (1.2) 成立。

下面是我们的第一个结果，它完整刻画了使 (1.2) 成立的 p 和 δ，但当 $2 \le p \le \infty$ 时的一些端点情形除外。

定理 1.1. 设 $2 \le p \le \infty$、$\delta \ge 0$ 和 $d \ge 1$。若

$$\delta > \delta(p, 2d)/2$$

则 (1.2) 成立。反之，若 $\delta < \delta(p, 2d)/2$，则 (1.2) 不成立。

几乎处处收敛的临界可求和指数仅为 L^p 收敛对应指数的一半。文献 [5] 中针对与厄米算子相关的 Bochner–Riesz 均值 $S_t^\delta(\mathcal{H})f$ 得到了类似结果。事实上，对于 $2 \le p < \infty$，已证明当 $\delta > \delta(p, d)/2$ 时，对所有 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，$S_t^\delta(\mathcal{H})f$ 均几乎处处收敛到 f，其中 $t \to \infty$。正如稍后将要讨论的，这种可和指数的改进与以下事实有关：$\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{H}$ 具有远离零的离散谱，而乘子算子 $\eta((\mu-\mathcal{L})/R)$ 和 $\eta((\mu-\mathcal{H})/R)$ 的核基本支集在对角线 $\{(z, z') \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ 附近：$z = z'\}$（见引理 2.5 和 6.3）。

定理 1.1 包含 $p = \infty$ 的情形，而此前的工作（[3, 5]）并未涵盖这一情形。特别地，这是因为我们的方法不依赖于权函数 Ψ_α 属于 A_2 类这一事实（有关更多细节，请参见定理 1.2 下方的讨论）。在 [5], 中，通过利用 Nikishin–Maurey 定理证明了可和指数的尖锐性。然而，我们通过直接构造 L^p 函数来验证定理 1.1 的必要性部分；当 $\delta < \delta(p, 2d)/2$ 时，这些函数的几乎处处收敛性会失败。更确切地说，对于 $4d/(2d-1) < p \le \infty$，我们将证明存在一个函数 $f \in L^p(\mathbb{C}^d)$，使得

$$|\{z \in \mathbb{C}^d : \sup_{t>0} |S_t^\delta(\mathcal{L})f(z)| = \infty\}| \gtrsim 1 \tag{1.3}$$

如果 $\delta < \delta(p, 2d)/2$。详情请参见第 5 节。特别地，这使我们能够证明 $f \in L^\infty$ 的可和指数的尖锐性，而使用 Nikishin–Maurey 定理时则无法做到这一点。

加权 L^2 空间上的极大估计。为证明定理 1.1 的充分性部分，我们考虑极大 Bochner–Riesz 算子

$$S_*^\delta(\mathcal{L})f(z) = \sup_{t>0} |S_t^\delta(\mathcal{L})f(z)|.$$

L^p 经典 Bochner– Riesz 平均的极大算子 $f \to \sup_{t>0} |S_t^\delta f|$ 有界性已被用于证明 $S_t^\delta f$ 的几乎处处收敛（参见 [28, 2, 19, 21,20, 9, 10] 及其中的参考文献）。我们不证明 $S_*^\delta(\mathcal{L})$ 的 L^p 有界性，而是采用 [3] ([1, 11, 13, 23]) 中引入的方法，该方法依赖于加权 L^2 估计。为此，我们考虑一个权函数

$$\Psi_\alpha(z) = \textstyle\sum_{j \ge 0} 2^{-\alpha j} \chi_{\mathbb{A}_j}(z), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

其中 $\mathbb{A}_j = \{z \in \mathbb{C}^d : 2^{j-1} < |z| \le 2^j\}$ 对于 $j \ge 1$ 和 $\mathbb{A}_0 = \{z \in \mathbb{C}^d : |z| \le 1\}$。注意，$\Psi_\alpha(z) \sim (1 + |z|)^{-\alpha}$。定理 1.1 是以下内容的推论。

定理 1.2。设 $\alpha \geq 0$。如果 $\delta > \max\{(\alpha-1)/4,\ 0\}$，则有

$$\|S_*^\delta(\mathcal{L})f\|_{L^2(\mathbb{C}^d,\Psi_\alpha)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{C}^d,\Psi_\alpha)} \tag{1.4}$$

对于某个常数 $C > 0$。

定理 1.2 是尖锐的，因为当 $\delta < (\alpha-1)/4$ 时，(1.4) 不成立（见下文的注 1）。通过一个标准论证（见推论 1.3 下方的讨论），定理 1.1 的充分性部分可由定理 1.2 推出。在先前的工作（[3, 5]）中，小波–帕莱不等式以及权重属于 A_2-类这一事实，在证明加权 L^2 不等式时发挥了作用。这进而导致对权重的增长阶施加限制，也就是说，$\alpha < d$。然而，我们的结果在没有对 α 施加上界的情况下仍然成立。这使我们能够将定理 1.1 推广到一类在无穷远处具有增长的函数。

推论 1.3。设 $d \geq 1$ 和 $\beta \geq 0$。令 $\gamma(p,d,\beta) = \max(0, \beta + d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}) - \frac{1}{2})$。如果 $\delta > \gamma(p,2d,\beta)/2$，则只要 $\Psi_\beta f \in L^p(\mathbb{C}^d)$，就有 $\lim_{t\to\infty} S_t^\delta(\mathcal{L})f = f$ 几乎处处成立。反之，如果对于所有满足 $\Psi_\beta f \in L^p(\mathbb{C}^d)$ 的 f，其中某个 $p \in (4d/(2d-1+2\beta),\ \infty]$，(1.2) 都成立，则 $\delta \geq \gamma(p,2d,\beta)/2$。

推论的充分性部分是嵌入 $L^p(\mathbb{C}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{C}^d, \Psi_\alpha)$ 在 $\alpha > 2d(1-2/p)$ 时的直接推论。特别要注意，当 $p \geq 4d/(2d-1)$ 时，$\alpha - 1 > 2\delta(p,2d)$。

我们的方法。与 [5], 中一样，我们利用扭曲拉普拉斯算子的特殊谱性质，也就是说，利用广义迹引理（引理 2.1），以及 $\mathcal{L}$ 的离散谱与原点之间存在正距离这一事实。然而，$\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{L}$ 的问题存在显著差异。例如，将权函数与 $\mathcal{H}$ 联系起来的一个关键不等式（见引理 1.4]）通常不适用于 $\mathcal{L}$。我们没有沿用 [5], 中的方法，而是设计了一种更简单、更直接的方法，该方法依赖于对相关谱乘子之核的估计（引理 2.5）。最重要的是，我们的方法不依赖 Littlewood–Paley 理论和 A_p 权理论。（见第 3 节和第 4 节。）此外，我们无需依赖相关波算子 $\cos(t\mathcal{L})$ 的有限传播速度；此前常借助这一性质来利用 Bochner–Riesz 算子的局部化性质，而现在核的估计取代了有限传播速度的作用。我们的方法也适用于 Hermite Bochner–Riesz 均值，因此为 [5] 中的先前结果提供了一种更简单的证明（见第 6 节）。

结构安排。第 2 节中，我们证明两个基本估计，它们将作为证明定理 1.2 的主要工具。第 3 节和第 4 节用于证明定理 1.2。在第 3 节中，我们将问题归结为得到一个带权重的平方函数估计，并在第 4 节中证明这一估计。第 5 节中，我们证明定理 1.1 和定理 1.3 的必要性部分。最后，在第 6 节中，我们对 Hermite Bochner–Riesz 均值的几乎处处收敛作一些评论。

记号。对于给定的正数 A, B, $A \lesssim B$，$A \leq CB$ 表示一个仅依赖于 d 的常数 $C > 0$。如果常数 C 可以取为充分小的数，我们就使用记号 $A \ll B$。此外，$A \sim B$ 表示 $A \lesssim B$ 和 $A \gtrsim B$。对于 $z \in \mathbb{C}^d$ 和 $M > 0$，$\mathbb{B}_d(z,M)$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 中以 z 为中心、半径为 M 的 $2d$ 维球。为简便起见，我们将 $\mathbb{B}_d(M)$ 记为 $\mathbb{B}_d(0,M)$。

2. Preliminaries

本节中我们得到一些估计，并用它们证明主要结果。

2.1. 谱投影算子 $\mathcal{P}_\mu$的局部 L^2 估计。我们首先给出 $\mathcal{P}_\mu$ 在以原点为中心的球上的 L^2 估计。

引理 2.1. 设 $\mu \in 2\mathbb{N}_0 + d$. 则存在一个常数 C，与 $M \geq 1$和 μ无关，使得

$$\int_{\mathbb{B}_d(M)} |\mathcal{P}_\mu f(z)|^2 dz \leq CM\mu^{-1/2}\|f\|_2^2. \tag{2.1}$$

利用二进分解和引理 2.1，可以轻易得到以下估计

$$\int_{\mathbb{C}^d} |\mathcal{P}_\mu f(z)|^2 \Psi_\alpha(z) dz \leq C\mu^{-1/2}\|f\|_2^2 \tag{2.2}$$

对于常数 $C > 0$ ，只要 $\alpha > 1$即可。估计式 (2.2) 可视为 $\mathcal{L}$ 的一个迹引理（参见 [5, 引理 1.5]）。

为证明引理 2.1，我们修改 [5] 中的论证，为 $\mathcal{H}$ 证明一个迹引理。我们将用到以下两个引理。令 $\mathcal{L}_k^a$ 表示类型为 a 的归一化拉盖尔函数，其定义为

$$\mathcal{L}_k^a(r^2/2) = \big(k!/(k+a)!\big)^{1/2}\big(r^2/2\big)^{a/2} L_k^a(r^2/2)e^{-r^2/4},$$

其中，类型为 L_k^a 的拉盖尔多项式定义为

$$k!e^{-r}r^a L_k^a(r) = (d/dr)^k(e^{-r}r^{k+a}).$$

引理 2.2（[36, 定理 1.3。5]）。令 $\Phi_{a,\ b}$ 表示一维特殊厄米函数，a，$b \in \mathbb{N}_0$。对于 $z \in \mathbb{C}$，有

$$\Phi_{a,b}(z) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}\big(\frac{-iz}{|z|}\big)^{b-a}\mathcal{L}_a^{b-a}(|z|^2/2), & a \leq b, \\ (2\pi)^{-1/2}\big(\frac{i\bar{z}}{|z|}\big)^{a-b}\mathcal{L}_b^{a-b}(|z|^2/2), & a > b. \end{cases}$$

引理 2.3（[36, 引理 1.5。3]）。令 $\ell = 4k + 2a + 2$ 且 $a > -1$。

$$|\mathcal{L}_k^a(r)| \leq C\begin{cases} (r\ell)^{a/2}, & 0 \leq r \leq 1/\ell, \\ (r\ell)^{-1/4}, & 1/\ell \leq r \leq \ell/2, \\ \ell^{-1/4}(\ell^{1/3} + |\ell - r|)^{-1/4}, & \ell/2 \leq r \leq 3\ell/2, \\ e^{-\gamma r}, & r \geq 3\ell/2, \end{cases}$$

其中 $\gamma > 0$ 是一个常数。此外，若 $1 \leq r \leq \ell - \ell^{1/3}$，则有

$$\mathcal{L}_k^\alpha(r) = \frac{(2/\pi)^{\frac{1}{2}}(-1)^k}{r^{\frac{1}{4}}(\ell - r)^{\frac{1}{4}}}\cos\Big(\frac{\ell(2\theta - \sin 2\theta) - \pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{\ell^{\frac{1}{4}}}{(\ell - r)^{\frac{7}{4}}} + (r\ell)^{-\frac{3}{4}}\Big), \tag{2.3}$$

其中 $\theta = \cos^{-1}(r^{1/2}\ell^{-1/2})$。

注意，对于 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_d)$ $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_d)$ $\in \mathbb{N}_0^d$，有 $\Phi_{\sigma,\beta}(z) = \prod_{j=1}^d \Phi_{\sigma_j,\beta_j}(z_j)$，且 $z = (z_1, \ldots, z_d)$ $\in \mathbb{C}^d$。利用上述估计，我们得到特殊 Hermite 函数在 $\mathbb{C}^d$ 上的界。

引理 2.1 的证明。我们可以将投影算子 $\mathcal{P}_\mu$ 写成如下形式:

$$\mathcal{P}_\mu f = \sum_{j=1}^{d}\sum_{\sigma}\Big(\sum_{\beta:\,2|\beta|+d=\mu,\beta_j\sim\mu}\langle f,\Phi_{\sigma,\beta}\rangle\Phi_{\sigma,\beta}\Big).$$

因此，为了证明 (2.1)，我们只需证明

$$\mathcal{I}_j := \int_{\mathbb{B}_d(M)} |\sum_{\sigma}\sum_{\beta:\,2|\beta|+d=\mu,\beta_j\sim\mu}\langle f,\Phi_{\sigma,\beta}\rangle\Phi_{\sigma,\beta}(z)|^2dz \le CM\mu^{-1/2}\|f\|_2^2 \tag{2.4}$$

对某个常数 $C>0$。由对称性，只需证明当 $j=1.$ 时的 (2.4)

由于 $\mathbb{B}_d(M)\subset\mathbb{B}_1(M)\times\mathbb{C}^{d-1}$，令 $c_\beta^\sigma=\langle f,\Phi_{\sigma,\beta}\rangle$，可知当 $j=1$ 时，(2.4) 左侧有如下上界:

$$\sum_{\sigma,\sigma'\in\mathbb{N}_0^d}\sum_{\substack{2|\beta|+d=\mu;\\ \beta_1\sim\mu}}\sum_{\substack{2|\beta'|+d=\mu;\\ \beta_1'\sim\mu}} c_\beta^\sigma\overline{c_{\beta'}^{\sigma'}}\int_{\mathbb{B}_1(M)}\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)\overline{\Phi_{\sigma_1',\beta_1'}(z_1)}\,dz_1\prod_{l=2}^{d}\langle\Phi_{\sigma_l,\beta_l},\Phi_{\sigma_l',\beta_l'}\rangle$$

$$=\sum_{\sigma_1,\sigma_1'\in\mathbb{N}_0}\sum_{\bar\sigma\in\mathbb{N}_0^{d-1}}\sum_{\beta:\,2|\beta|+d=\mu,\beta_1\sim\mu} c_\beta^{(\sigma_1,\bar\sigma)}\overline{c_\beta^{(\sigma_1',\bar\sigma)}}\int_{\mathbb{B}_1(M)}\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)\overline{\Phi_{\sigma_1',\beta_1}(z_1)}dz_1.$$

等式由 Φ_{σ_l,β_l} 之间的正交性得出。现在我们断言

$$\int_{\mathbb{B}_1(M)}\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)\overline{\Phi_{\sigma_1',\beta_1}(z_1)}dz_1=0,\quad \sigma_1\neq\sigma_1'. \tag{2.5}$$

暂且假设 (2.5) 成立，我们继续证明 (2.4)。由 (2.5) 可得

$$\mathcal{I}_1\lesssim\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\beta:\,2|\beta|+d=\mu,\beta_1\sim\mu}|c_\beta^\sigma|^2\int_{\mathbb{B}_1(M)}|\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)|^2dz_1.$$

由于 $\sum_{\sigma,\ \beta}|c_\beta^\sigma|^2=\|f\|_2^2$，若验证下式成立，我们便可得到 (2.4):

$$\int_{\mathbb{B}_1(M)}|\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)|^2dz_1\le C\mu^{-1/2}M \tag{2.6}$$

其中 $C>0$ 与 $\sigma_1,\beta_1.$ 无关。若 $M^2>\mu$，则由于 $\|\Phi_{\sigma_1,\ \beta_1}\|_2=1$，(2.6) 显然成立。因此，为证明 (2.6)，我们可以假设 $M^2\le\mu$。首先考虑 $\sigma_1>\beta_1.$ 的情形。于是，由引理 2.2 可得 $|\Phi_{\sigma_1,\ \beta_1}(z_1)|=(2\pi)^{-1/2}\mathcal{L}_{\beta_1}^{\sigma_1-\beta_1}(|z_1|^2/2)$。令 $\epsilon=4\beta_1+2(\sigma_1-\beta_1)+2$，则 $M^2\lesssim\beta_1<\epsilon/2.$。利用极坐标和引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_1(M)}|\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)|^2dz_1&=\int_0^M|\mathcal{L}_{\beta_1}^{\sigma_1-\beta_1}(r^2/2)|^2rdr\\ &\le C\int_0^{\sqrt{2/\epsilon}}(r^2\epsilon/2)^{\sigma_1-\beta_1}rdr+\int_{\sqrt{2/\epsilon}}^M(r^2\epsilon/2)^{-1/2}rdr\\ &\le C\epsilon^{-1}+M\epsilon^{-1/2}\le CM\mu^{-1/2},\end{aligned}$$

因为 $\beta_1\sim\mu.$。当 $\sigma_1\le\beta_1$ 时，(2.6) 中的估计可用相同方法证明，细节从略。

接下来证明（2.5）。只需证明 $\sigma_1>\sigma_1'$ 的情形，因为另一种情形可通过考虑复共轭来处理。为了利用引理 2.2，我们需要分别考虑 $\sigma_1>\sigma_1'\ge\beta_1$、$\sigma_1>\beta_1\ge\sigma_1'$ 和

$\beta_1 \geq \sigma_1 > \sigma_1'$。不过，我们只证明在 $\sigma_1 > \sigma_1' \geq \beta_1$ 假设下的（2.5）。其他情形可类似处理。注意，$(i\bar{z}_1/|z_1|)(i\bar{z}_1/|z_1|) = 1$. 因此，我们的假设和引理 2.2 给出

$$\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)\overline{\Phi_{\sigma_1',\beta_1}(z_1)} = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{i\bar{z_1}}{|z_1|}\Big)^{\sigma_1-\sigma_1'}\mathcal{L}_{\beta_1}^{\sigma_1-\beta_1}(|z_1|^2/2)\mathcal{L}_{\beta_1}^{\sigma_1'-\beta_1}(|z_1|^2/2).$$

再次使用极坐标，我们得到

$$\int_{\mathbb{B}_1(M)}|\Phi_{\sigma_1,\beta_1}(z_1)|^2dz_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^M\Big(\int_0^{2\pi}(ie^{-i\theta})^{\sigma_1-\sigma_1'}d\theta\Big)\mathcal{L}_{\beta_1}^{\sigma_1-\beta_1}(r^2/2)\mathcal{L}_{\beta_1}^{\sigma_1'-\beta_1}(r^2/2)\,rdr,$$

由于 $\sigma_1 - \sigma_1' \in \mathbb{N}.$，显然该项趋于零。证明完毕。 □

下面是引理 2.1 的一个轻微推广，它对平方函数估计的证明很有用（见命题 3.2）。

推论 2.4。设 $M \geq 1$ 和 $\mu \in 2\mathbb{N}_0 + d$。假设 $\omega \in \mathsf{C}_c\big((\mu-\sigma,\mu+\sigma)\big)$ 且 $0 < \sigma \leq \mu$。则有

$$\|\chi_{\mathbb{B}_d(M)}\omega(\mathcal{L})\|_{2\to 2}^2 \leq C\max\{1,\sigma\}M\mu^{-\frac{1}{2}}\|\omega\|_\infty^2. \tag{2.7}$$

证明。如果 $\sigma \leq 1$，则（2.7）由引理 2.1 得出。因此，不妨设 $\sigma > 1$。由对偶性，（2.7）等价于

$$\|\omega(\mathcal{L})\chi_{\mathbb{B}_d(M)}\|_{2\to 2}^2 \leq C\|\omega\|_\infty^2\sigma M\mu^{-\frac{1}{2}}.$$

对于 $\ell = 0,\cdots,\lfloor\sigma\rfloor+1$，我们设 $\mathrm{I}_\ell = [\mu-\sigma+2\ell, \mu-\sigma+2\ell+2)$。对于每个 ℓ，$\mathcal{L}$ 在 I_ℓ 中只有一个特征值。因此，由正交性可得

$$\|\omega(\mathcal{L})\chi_{\mathbb{B}_d(M)}\|_{2\to 2}^2 \leq \sum_{\ell=0}^{\lfloor\sigma\rfloor+1}\|\chi_{\mathbf{I}_\ell}(\mathcal{L})\omega(\mathcal{L})\chi_{\mathbb{B}_d(M)}\|_{2\to 2}^2 \leq \|\omega\|_\infty^2\sum_{\ell=0}^{\lfloor\sigma\rfloor+1}\|\chi_{\mathbf{I}_\ell}(\mathcal{L})\chi_{\mathbb{B}_d(M)}\|_{2\to 2}^2.$$

由对偶性，估计 (2.1) 等价于 $\|\mathcal{P}_{\mu'}\chi_{\mathbb{B}_d(M)}\|_{2\to 2}^2 \leq CM(\mu')^{-1/2}$ 对每个 μ'都成立。应用这一点，得到

$$\|\omega(\mathcal{L})\chi_{\mathbb{B}_d(M)}\|_{2\to 2}^2 \leq C\|\omega\|_\infty^2\sum_{\ell=0}^{\lfloor\sigma\rfloor+1}M(\mu-\sigma+2l)^{-1/2} \leq C\|\omega\|_\infty^2\sigma M\mu^{-1/2}. \quad \square$$

2.2. 核估计。本节讨论算子 $\eta((\mu-\mathcal{L})/R)$ 的核估计，其中 $\mu \geq 1$、$R > 0$ 和 $\eta \in \mathsf{C}_c^\infty((-2,2))$。以下引理表明，这些算子的核从对角线$\{(z,z') \in \mathbb{C}^{2d}:\, z = z'\}$处迅速衰减。

对于给定的算子 T，我们用 $T(z,z')$ 表示 T 的核。

引理 2.5. 设 $\mu \geq 1$、$R > 0$ 和 $\eta \in \mathsf{C}_c^\infty((-2,2))$。那么，对于任意 $N > 0$，我们有以下结论，其中隐含常数仅依赖于 d 和 N。

(*i*) 设 $R \geq \mu$。若 $|z-z'| \gtrsim R^{-1/2}$，则

$$|\eta((\mu-\mathcal{L})/R)(z,z')| \lesssim R^d(1+R^{\frac{1}{2}}|z-z'|)^{-N}. \tag{2.8}$$

(*ii*) 设 $R \geq 1$ 和 $R < \mu$。若 $|z-z'| \gtrsim \mu^{1/2}R^{-1}$，则

$$|\eta((\mu-\mathcal{L})/R)(z,z')| \lesssim R^d(1+R\mu^{-\frac{1}{2}}|z-z'|)^{-N}. \tag{2.9}$$

（*iii*）设 $R < 1$。若 $|z-z'| \gtrsim \mu^{1/2}$，则

$$|\eta((\mu-\mathcal{L})/R)(z,z')| \lesssim (1+\mu^{-\frac{1}{2}}|z-z'|)^{-N}. \tag{2.10}$$

为证明引理 2.5，我们回顾传播子 $e^{-it\mathcal{L}}$的一些性质。由于 $\mathcal{L}$ 的特征值包含在 $2\mathbb{N}_0 + d$ 中，因此

$$e^{i(t+n\pi)\mathcal{L}} = (-1)^{nd} e^{it\mathcal{L}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

传播子 $e^{-it\mathcal{L}}$ 具有显式的核表示

$$e^{-it\mathcal{L}}(z, z') = C_d (\sin t)^{-d} e^{i\phi_{\mathcal{L}}(t,z,z')}, \tag{2.12}$$

对于常数 C_d ，其中

$$\phi_{\mathcal{L}}(t, z, z') = \frac{|z - z'|^2 \cos t}{4 \sin t} + \frac{1}{2}\langle z, \mathbf{S} z' \rangle.$$

这可由热算子 $e^{-t\mathcal{L}}$的核表达式推出。详情请参阅 [36, 第37]页。

引理 2.5 的证明。我们先考虑情形 $R \geq 1$。根据傅里叶反演

$$\eta\big((\mu - \mathcal{L})/R\big) = \frac{R}{2\pi} \int \widehat{\eta}(Rt) e^{it(\mu - \mathcal{L})} dt. \tag{2.13}$$

设 $\eta_* \in \mathsf{C}_c^\infty\big((-\pi/2 - 2^{-3}, \pi/2 + 2^{-3})\big)$ ，使得 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_*(t + n\pi) = 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上。令

$$\eta_R(t) = (2\pi)^{-1} \sum (-1)^{nd} e^{-in\pi\mu} \widehat{\eta}\big(R(t - n\pi)\big) \eta_*(t).$$

我们记作 $\eta\big((\mu - \mathcal{L})/R\big) = \frac{R}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{n\in\mathbb{Z}} \int \widehat{\eta}(Rt) \eta_*(t + n\pi) e^{it(\mu-\mathcal{L})} dt$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 作变量代换$t \to t - n\pi$，然后使用（2.11），得到

$$\eta\big((\mu - \mathcal{L})/R\big) = R \int \eta_R(t) e^{it(\mu - \mathcal{L})} dt. \tag{2.14}$$

容易看出，对于任意 $N > 0$,

$$|\eta_R^{(k)}(t)| \lesssim R^k (1 + R|t|)^{-N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.15}$$

结合（2.12）和（2.14），得到

$$\eta\big((\mu - \mathcal{L})/R\big)(z, z') = C_d R \int \eta_R(t) (\sin t)^{-d} e^{i(\mu t + \phi_{\mathcal{L}}(t,z,z'))} dt.$$

我们将积分分解为远离 $t = 0$ 的部分，因为被积函数在该点具有奇异性。令 $\psi \in \mathsf{C}_c^\infty([-8, -2] \cup [2, 8])$，使得对于 $t \neq 0$ 有 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(2^j t) = 1$，并令

$$\eta_{R,j}(t) = \eta_R(t) \psi(2^j t) (\sin t)^{-d}.$$

通过计算容易证明

$$|(\eta_{R,j})^{(k)}(t)| \lesssim 2^{jd} (2^j + R)^k \big(1 + R2^{-j}\big)^{-N}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{2.16}$$

对于任意 $N > 0$。同样可得

$$\eta\big((\mu - \mathcal{L})/R\big)(z, z') = \sum_{j \geq 1} K_j(z, z'), \tag{2.17}$$

其中

$$K_j(z, z') := C_d R \int \eta_{R,j}(t) e^{i(\mu t + \phi_{\mathcal{L}}(t,z,z'))} dt.$$

我们首先证明（i），即在假设 $R \geq \mu$ 和 $|z-z'| \gtrsim R^{-1/2}$ 的条件下证明（2.8）。为此，我们令

$$\mathfrak{I}_1^a = \sum_{j:2^{-j} \ll a^{-1/2}|z-z'|} K_j(z,z'), \quad \mathfrak{I}_2^a = \sum_{j:2^{-j} \gtrsim a^{-1/2}|z-z'|} K_j(z,z')$$

对于 $a>0$。因此，(2.17) 中的和等于 $\mathfrak{I}_1^R + \mathfrak{I}_2^R$. 我们先考虑 $\mathfrak{I}_1^R$。注意到

$$\partial_t \phi_{\mathcal{L}}(t,z,z') = -\frac{|z-z'|^2}{4\sin^2 t}. \tag{2.18}$$

由于 $2^{-j} \ll \mu^{-1/2}|z-z'|$，所以 $|z-z'|^2/(4\sin^2 t) \gg \mu$ 若 $t \in \operatorname{supp}\psi(2^j\cdot)$。因此，我们有 $|\partial_t(\mu t + \phi_{\mathcal{L}}(t,z,z'))| \sim |z-z'|^2 2^{2j}$ 对于 $t \in \operatorname{supp}\psi(2^j\cdot)$。结合这一点与 (2.16)，通过反复分部积分可得

$$|K_j(z,z')| \lesssim R|z-z'|^{-2M} 2^{(d-1-M)j}(1+R2^{-j})^{M-N}. \tag{2.19}$$

选取 N, M 使得 $d \ll M \ll N$，并结合上述不等式，得到

$$|\mathfrak{I}_1^R| \lesssim R^{d-M}|z-z'|^{-2M} \lesssim R^d(1+R^{1/2}|z-z'|)^{-M}, \tag{2.20}$$

只要 $|z-z'| \gtrsim R^{-1/2}$ 即可。 $\mathfrak{I}_2^R$ 的估计更简单。由 (2.16)，我们有

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}_2^R| &\lesssim R\int \Big(\sum_{2^{-j} \gtrsim R^{-1/2}|z-z'|} 2^{jd}\psi(2^j t)\Big)(1+R|t|)^{-N}dt \\ &\lesssim R^{\frac{d}{2}}|z-z'|^{-d}(1+R^{1/2}|z-z'|)^{-N+2}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

显然，这意味着若 $|z-z'| \gtrsim R^{-1/2}$，则 $|\mathfrak{I}_2^R| \lesssim R^d(1+R^{1/2}|z-z'|)^{-N}$。结合 (2.20)，即可得到 (i) 中的估计。

现在，我们证明 ii，也就是说，在假设 $1 \leq R < \mu$ 和 $|z-z'| \gtrsim \mu^{1/2}R^{-1}$ 的情况下证明 (2.9)。在这种情况下，我们将和式 (2.17) 拆分，得到

$$\eta\big((\mu-\mathcal{L})/R\big)(z,z') = \mathfrak{I}_1^\mu(z,z') + \mathfrak{I}_2^\mu(z,z').$$

证明沿用上述论证。当 $2^{2j}|z-z'|^2 \gg \mu$ 时，由 (2.18) 可得 $|\partial_t(\mu t + \phi_{\mathcal{L}}(t,z,z'))| \sim 2^{2j}|z-z'|^2$，其中 $t \in \operatorname{supp}\psi(2^j\cdot)$。此外，估计 (2.16) 在此情形下仍然成立。现在，反复进行分部积分可知 (2.19) 成立。选取适当的 N 和 M，并对 j 求和：$2^{-j} \ll \mu^{-1/2}|z-z'|$，可得

$$|\mathfrak{I}_1^\mu| \lesssim R\mu^{(d-1-N)/2}|z-z'|^{-N-d+1}, \tag{2.22}$$

因为 $R<\mu$。因此，只要 $|z-z'| \gtrsim \mu^{1/2}R^{-1}$，我们就得到 $|\mathfrak{I}_1^\mu| \lesssim R^d(1+R\mu^{-1/2}|z-z'|)^{-N-d+1}$。对 $\mathfrak{I}_2^\mu$ 的估计可以通过对上述论证应用相同的方法得到。事实上，利用 $|e^{it\mathcal{L}}(z,z')| \lesssim t^{-d}$，我们有

$$|\mathfrak{I}_2^\mu| \lesssim R\int_{C\mu^{-1/2}|z-z'|}^2 (1+R|t|)^{-N}t^{-d}dt \lesssim R^d(1+R\mu^{-1/2}|z-z'|)^{-N}.$$

结合这一点以及对 $\mathfrak{I}_1^\mu$ 的估计，即可验证（ii）。

最后，为了证明 (iii)，我们假设 $R<1$ 和 $|z-z'| \gtrsim \mu^{1/2}$。那么，很容易看出 $|\eta_R^{(k)}, j(t)| \lesssim R^{-1}2^{(d+k)j}$ 对 $k \in \mathbb{N}_0$. 成立。像之前一样，利用 (2.18) 和反复分部积分，我们得到

$$|K_j(z,z')| \lesssim |z-z'|^{-2M}2^{(d-1-M)j}$$

对任意满足 $2^{-j} \ll \mu^{-1/2}|z-z'|$ 的 M。我们将 $\eta(R^{-1}(\mu-\mathcal{L}))(z,z') = \mathfrak{I}_1^\mu + \mathfrak{I}_2^\mu$ 分解。因此，关于 $|K_j(z,z')|$ 的上述估计给出 $|\mathfrak{I}_1^\mu| \lesssim (1+\mu^{-1/2}|z-z'|)^{-M-d+1}$。由于 $|\eta_{R,j}| \lesssim |\eta_*\psi(2^j\cdot)|$，可得 $|\mathfrak{I}_2^\mu| \lesssim R\int_{C\mu^{-1/2}|z-z'|}^2 |\eta_*(t)|dt \lesssim (1+\mu^{-1/2}|z-z'|)^{-N}$ 对任意 N 成立。证明完毕。□

3. Proof of Theorem 1.2

本节将定理 1.2 的证明归结为证明一个平方函数估计。从现在起，我们将 $\mathbb{C}^d$ 与 $\mathbb{R}^{2d}$ 等同。

3.1. 平方函数估计。我们首先回顾

$$S_*^\delta(\mathcal{L})f(z) \le C \sup_{R>0}\left(\frac{1}{R}\int_0^R |S_t^\rho(\mathcal{L})f(z)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

对 $\delta > \rho + 1/2 > 0$ 成立。这一点已在 [30, 第 278 页至 279] 中证明（另见 [5, 第 13] 页）。我们对算子 $S_t^\rho(\mathcal{L})$ 作典型的二进分解。设 $\phi_* \in \mathsf{C}_c^\infty((2^{-3},2^{-1}))$ 是一个非负函数，使得 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi_*(2^k t) = 1$ 对 $t>0$ 成立。对于 $k \ge 0$，我们令

$$\phi_k(t) = \begin{cases} (2^k t)_+^\rho\, \phi_*(2^k t), & k \ge 1, \\ \sum_{k\le 0} t_+^\rho\, \phi_*(2^k t), & k = 0. \end{cases}$$

分解

$$S_t^\rho(\mathcal{L})f(z) = \phi_0\big(1-t^{-2}\mathcal{L}\big)f(z) + \sum_{k>0} 2^{-\rho k}\phi_k\big(1-t^{-2}\mathcal{L}\big)f(z).$$

将其代入 (3.1)，再应用闵可夫斯基不等式，可得

$$S_*^\delta(\mathcal{L})f(z) \le \sum_{k\ge 0} 2^{-\rho k}\mathfrak{S}_k f(z) \tag{3.2}$$

对于满足 $\delta > \rho + 1/2$ 的 $\rho > -1/2$，其中

$$\mathfrak{S}_k f(z) := \sup_{R>0}\Big(\frac{1}{R}\int_0^R \big|\phi_k\big(1-t^{-2}\mathcal{L}\big)f(z)\big|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

定理 1.2 的证明归结为证明下面两个命题。

命题 3.1. 设 $d \ge 1$ 和 $\alpha \ge 0$。则有如下估计

$$\int \sup_{R>0}\big|\phi_0\big(1-R^{-2}\mathcal{L}\big)f(z)\big|^2 \Psi_\alpha(z)dz \le C\int |f(z)|^2\Psi_\alpha(z)dz. \tag{3.3}$$

命题 3.2. 设 $d \ge 1$、$\alpha \ge 0$ 和 $k \ge 1$。则对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\int\int \big|\phi_k\big(1-t^{-2}\mathcal{L}\big)f(z)\big|^2 \frac{dt}{t}\Psi_\alpha(z)dz \le C\,2^{(\varepsilon-1)k}\mathbf{B}_\alpha(k)\int |f(z)|^2\Psi_\alpha(z)dz, \tag{3.4}$$

其中

$$\mathbf{B}_\alpha(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le \alpha \le 1, \\ 2^{\frac{\alpha-1}{2}k}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

一旦得到估计 (3.3) 和 (3.4)，定理 1.2 的证明就相当直接了。

定理 1.2 的证明。取一个 $\varepsilon>0$ 使得 $\delta>2\varepsilon+\max((\alpha-1)/4,0)$，并令 $\rho=\varepsilon+\max((\alpha-1)/4,0)-1/2$。由 (3.2) 可知，只需证明算子

$$\sum_{k\geq 0}2^{-\rho k}\mathfrak{S}_k$$

在 $L^2(\mathbb{R}^{2d},\Psi_\alpha)$ 上有界。由于 $\mathfrak{S}_0 f\leq \sup_R|\phi_0(1-R^{-2}\mathcal{L})f|$，由 (3.3) 可得 $\|\mathfrak{S}_0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d},\Psi_\alpha)}\lesssim\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d},\Psi_\alpha)}$。对于 $k\geq 1$，显然 $(\mathfrak{S}_k f(z))^2\leq\int|\phi_k(1-t^{-2}\mathcal{L})f(z)|^2\frac{dt}{t}$。因此，利用 (3.4) 可得

$$\|\sum_{k\geq 1}2^{-\rho k}\mathfrak{S}_k f\|_{L^2(\Psi_\alpha)}\lesssim\sum_{k\geq 1}2^{(\max(\frac{\alpha-1}{4},0)-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}-\rho)k}\|f\|_{L^2(\Psi_\alpha)}\lesssim\|f\|_{L^2(\Psi_\alpha)}.$$

证明至此完成。 □

本节余下部分证明命题 3.1，而命题 3.2 将在下一节证明。

3.2. 命题 3.1 的证明。我们先证明以下估计

$$\left|\phi_0\big(1-R^{-2}\mathcal{L}\big)f(z)\right|\leq C\int R^{2d}(1+R|z-z'|)^{-N}|f(z')|dz' \tag{3.5}$$

对于 $R\geq 1$ 以及任意 $N\geq 0$。为此，只需证明

$$\left|\phi_0\big(1-R^{-2}\mathcal{L}\big)(z,z')\right|\leq CR^{2d}(1+R|z-z'|)^{-N}. \tag{3.6}$$

回忆 $\operatorname{supp}\phi_0\subset(2^{-3},\infty)$，并令 κ 为 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数，使得 $\operatorname{supp}\kappa\subset(-\infty,2)$ 且 $\kappa\equiv 1$ 在 $(-\infty,1]$上。由于 $\mathcal{L}\geq 1$的特征值，我们有 $\phi_0(1-R^{-2}\mathcal{L})=(\phi_0\kappa)(1-R^{-2}\mathcal{L})$，其中 $R>0$。将引理 2.5 中的估计 (2.8) 应用于 $\eta=\phi_0\kappa$ 和 R，并分别以 R^2 替换，我们在 $|z-z'|\gtrsim R^{-1}$时得到 (3.6)。对于另一种情形 $|z-z'|\lesssim R^{-1}$，只需证明以下结论即可得到所需的界 (3.6)：

$$\|\phi_0\big(1-R^{-2}\mathcal{L}\big)\|_{L^1\to L^\infty}\lesssim R^{2d}.$$

这是估计 $\|\mathcal{P}_\mu\|_{L^1\to L^\infty}\leq C\mu^{d-1}$, $\mu\in 2\mathbb{N}_0+d$ 的一个直接推论（例如参见 [14]）。事实上，由该估计和三角不等式可得 $\|\phi_0\big(1-R^{-2}\mathcal{L}\big)\|_{L^1\to L^\infty}\leq\sum_{\mu\in 2\mathbb{N}_0+d:\,\mu\leq R^2}\|\phi_0\|_\infty\|\mathcal{P}_\mu\|_{L^1\to L^\infty}\leq CR^{2d}$.

现在我们来证明 (3.3)。由于 $\mathcal{L}$ 的谱包含于 $[d,\infty)$，$\phi_0(1-R^{-2}\mathcal{L})\equiv 0$ if $R\leq 1$。因此，(3.3) 中的上确界可以改为对 $R\geq 1$ 取上确界。将 f 替换为 $\Psi_\alpha^{-1/2}f$后，估计 (3.3) 等价于

$$\int\sup_{R\geq 1}\left|\phi_0\big(1-R^{-2}\mathcal{L}\big)(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)\right|^2\Psi_\alpha(z)dz\leq C\int|f(z)|^2dz.$$

选取 N 使得 $N>\alpha+100d$。令 $\Phi(z)=(1+|z|)^{-N}$，并令 $\Phi_R(z)=R^{2d}\Phi(Rz)$。由 (3.5)，问题归结为证明

$$\int\sup_{R\geq 1}\left|\Phi_R*(\Psi_\alpha^{-1/2}|f|)(z)\right|^2\Psi_\alpha(z)dz\lesssim\int|f(z)|^2dz. \tag{3.7}$$

回忆 $\Psi_\alpha=\sum_{j\geq 0}2^{-\alpha j}\chi_{\mathbb{A}_j}$ 并令

$$\mathcal{V}_1=\sum_{j\geq 0}2^{-\alpha j}\int_{\mathbb{A}_j}\sup_{R\geq 1}\Big|\Phi_R*\Big(\sum_{j':|j-j'|\leq 2}2^{\frac{\alpha}{2}j'}\chi_{\mathbb{A}_{j'}}|f|\Big)(z)\Big|^2dz,$$

$$\mathcal{V}_2=\sum_{j\geq 0}2^{-\alpha j}\int_{\mathbb{A}_j}\sup_{R\geq 1}\Big|\Phi_R*\Big(\sum_{j':|j-j'|\geq 3}2^{\frac{\alpha}{2}j'}\chi_{\mathbb{A}_{j'}}|f|\Big)(z)\Big|^2dz.$$

显然，(3.7) 的左侧有一个常数倍的 $\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2$ 作为上界。因此，只需证明

$$\mathcal{V}_k \lesssim \int |f(z)|^2 dz, \quad k=1,2. \tag{3.8}$$

我们首先考虑 $k=1$ 的 (3.8)，这很容易证明。事实上，

$$\mathcal{V}_1 \lesssim \sum_{|n|\le 3}\sum_{j\ge 0}\int_{\mathbb{A}_j} \sup_{R\ge 1}(\Phi_R * (\chi_{\mathbb{A}_{j+n}}|f|)(z))^2 dz \lesssim \int (\sup_{R>0}\Phi_R * |f|(z))^2 dz.$$

由于 $\sup_{R>0}\Phi_R * |f|(z)$ 被 Hardy–Littlewood 极大函数所控制，故得出 $k=1$ 的 (3.8)。

现在我们考虑 $k=2$ 的 (3.8)。注意到

$$\mathcal{V}_2 \le \sum_{j\ge 0} 2^{-\alpha j}\int_{\mathbb{A}_j}\Big(\int \big(\sup_{R\ge 1}\Phi_R(z-z')\big)\big(\sum_{j':|j-j'|\ge 3} 2^{\frac{\alpha}{2}j'}\chi_{\mathbb{A}_{j'}}|f|\big)(z')dz'\Big)^2 dz.$$

由于 $|j-j'|\ge 3$，我们在积分中有 $|z-z'|\ge 1$。因此，$\sup_{R\ge 1}\Phi_R(z-z') \le (1+|z-z'|)^{-N+2d}$。由此可得

$$\mathcal{V}_2 \lesssim \int\Big(\int \mathfrak{K}(z,z')|f(z')|dz'\Big)^2 dz,$$

其中

$$\mathfrak{K}(z,z') = \chi_{\mathcal{A}}(z,z')(1+|z|)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+|z'|)^{\frac{\alpha}{2}}(1+|z-z'|)^{-N+2d}$$

以及 $\mathcal{A}=\{(z,z')\in\mathbb{R}^{2d}\times\mathbb{R}^{2d}: \ |z-z'|\ge 2^{-5}\max\{|z|,|z'|\}\}$。由于 $N>\alpha+100d$，直接计算可得，对于某个常数 $C>0$，$\sup_z\int\mathfrak{K}(z,z')dz'$，$\sup_{z'}\int\mathfrak{K}(z,z')dz < C$。由 Young 不等式，(3.8) 对于 $k=2$ 成立。

4. Proof of square function estimates: Proof of Proposition 3.2

本节中，我们证明平方函数估计

$$\mathfrak{T}_k := \int_1^\infty\int \Big|\phi_k\big(1-t^{-2}\mathcal{L}\big)(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)\Big|^2\Psi_\alpha(z)\frac{dtdz}{t} \lesssim 2^{(\varepsilon-1)k}\mathbf{B}_\alpha(k)\|f\|_2, \tag{4.1}$$

该估计与 (3.4) 等价，因为当 $t\le 1$时，对于 $k\ge 1$ 有 $\phi_k(1-t^{-2}\mathcal{L})=0$。如下文所示，利用正交性，对于 $\alpha=0$ 证明估计 (4.1) 很容易（见包含不等式 (4.2) 的段落）。因此，通过插值，只需证明 $\alpha>1$时的 (4.1) 即可。

4.1. 在 t 中的分解。为了证明 (4.1)，我们利用截断函数 ϕ_* 将积分拆分。因此，我们有

$$\mathfrak{T}_k = \sum_{\nu\ge 2}\int \phi_*(2^{-\nu}t)\int\Big|\phi_k\big(1-t^{-2}\mathcal{L}\big)(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)\Big|^2\Psi_\alpha(z)dz\,\frac{dt}{t}.$$

$\phi_k(1-t^{-2}\mathcal{L})$ 的谱支集包含于区间 $[t^2(1-2^{-k-1}),\ t^2(1-2^{-k-3})]$，中；对于 $t\in\operatorname{supp}\phi_*(2^{-\nu}\cdot)$，该区间的长度约为 $2^{2\nu}2^{-k}$。为了利用谱支集的不相交性，我们进一步拆分 t 中的积分，使被积函数的谱支集限制在长度约为 $2^{2\nu}2^{-k}$ 的区间内。

为此，令 $\varphi\in C_c^\infty((-3/4,3/4))$，使得 $\varphi\equiv 1$ 在 $[-1/4,1/4]$ 上，且$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\varphi(t-\ell)=1$ 对 $t\in\mathbb{R}$ 成立。因此，$\mathfrak{T}_k$ 等于

$$\sum_{\nu\ge 2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int\varphi\Big(\frac{t-2^{\nu-k}\ell}{2^{\nu-k}}\Big)\phi_*(2^{-\nu}t)\int\Big|\Psi_\alpha^{1/2}(z)\phi_k\big(1-t^{-2}\mathcal{L}\big)(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)\Big|^2 dz\,\frac{dt}{t}.$$

作变量代换 $t \to 2^{\nu-k}(t+\ell)$，得到

$$\mathfrak{T}_k = 2^{-k} \sum_{\nu\geq 2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int \varphi(t)\phi_*\Big(\frac{t+\ell}{2^k}\Big) \int |\Psi_\alpha^{1/2}(z)\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)|^2 dz \, \frac{2^k dt}{(t+\ell)},$$

其中

$$\phi_{\nu,\ell}(t,s) = \phi_k\Big(1 - \frac{2^{2(k-\nu)}s}{(t+\ell)^2}\Big).$$

我们注意到，函数 $s \mapsto \phi_{\nu,\ell}(t,s)$ 对任意 $t \in \operatorname{supp}\varphi$ 均为零，只要 s 在宽度为 $\sim 2^{2\nu}2^{-k}$ 的区间之外；集合 $\{\operatorname{supp}\phi_{\nu,\ell}(t,\cdot)\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 的重叠次数有界。若积分非零，则 $2^{-k}(t+\ell) \sim 1$ 在 $\operatorname{supp}\phi_*$ 上。因此，我们有

$$\mathfrak{T}_k \lesssim 2^{-k} \sup_{t\in\operatorname{supp}\varphi} \sum_{\nu\geq 2} \sum_{\ell\in L_t^k} \int |\Psi_\alpha^{1/2}(z)\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)|^2 dz,$$

其中

$$L_t^k = \{\ell : 1/8 \leq 2^{-k}(t+\ell) \leq 1\}.$$

由于 $\{\phi_{\nu,\ell}(t,\cdot):\ \nu,\ell\}$ 的支集重叠次数有界，因此得到 $\alpha = 0$ 的估计 (4.1)。因此，一旦有了以下结果，通过插值即可得到 $\alpha \in (0,1)$ 的估计 (4.1)：

$$\sum_{\nu\geq 2} \sum_{\ell\in L_t^k} \int |\Psi_\alpha^{1/2}(z)\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)|^2 dz \leq C2^{(\frac{\alpha-1}{2}+\varepsilon)k}\|f\|_2, \quad \alpha > 1 \tag{4.2}$$

对于某个常数 $C>0$，只要 $t \in \operatorname{supp}\varphi$，上述结论便成立。

本节余下部分将用于证明 (4.2)。

4.2. 低频、中频和高频部分。为证明 (4.2)，我们将 (4.2) 左端拆分为三部分：

$$\mathfrak{I}^l(t) := \sum_{2\leq\nu\leq k/2} \sum_{\ell\in L_t^k} \int |\Psi_\alpha^{1/2}(z)\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)|^2 dz,$$

$$\mathfrak{I}^m(t) := \sum_{k/2<\nu\leq k} \sum_{\ell\in L_t^k} \int |\Psi_\alpha^{1/2}(z)\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)|^2 dz,$$

$$\mathfrak{I}^h(t) := \sum_{k<\nu} \sum_{\ell\in L_t^k} \int |\Psi_\alpha^{1/2}(z)\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\Psi_\alpha^{-1/2}f)(z)|^2 dz.$$

我们分别将 $\mathfrak{I}^l$、$\mathfrak{I}^m$ 和 $\mathfrak{I}^h$ 称为低频、中频和高频部分。对于这些算子，我们证明下面的结论，由此可立即得到所需的估计 (4.2)。

命题 4.1. 设 $\alpha > 1$ 和 $t \in \operatorname{supp}\varphi$。假设 $\|f\|_2 \leq 1$。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个常数 $C = C(d,\alpha,\varepsilon)$，使得

$$\mathfrak{I}^l(t) \leq C2^{(\frac{\alpha-1}{2}+\varepsilon)k}, \tag{4.3}$$

$$\mathfrak{I}^m(t) \leq C2^{(\frac{\alpha-1}{2}+\varepsilon)k}, \tag{4.4}$$

$$\mathfrak{I}^h(t) \leq C2^{\varepsilon k}. \tag{4.5}$$

在证明命题 4.1 之前，我们解释为何要分别考虑 $\mathfrak{I}^l$、 $\mathfrak{I}^m$ 和 $\mathfrak{I}^h$。令 $\mu = 2^{-2k}(t+\ell)^2 2^{2\nu}$ 和 $R = 2^{-2k}(t+\ell)^2 2^{2\nu-k}$，注意到

$$\phi_{\nu,\,\ell}(t,\mathcal{L}) = \phi\big((\mu-\mathcal{L})/R\big). \tag{4.6}$$

由于 $2^{-k}(t+\ell) \sim 1$，我们有 $\mu \sim 2^{2\nu}$ 以及 $R \sim 2^{2\nu-k}$。由引理 2.5 中的 (ii) 和 (iii)，我们注意到，算子 $\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})$ 的核在 $R=1$ 附近改变其行为，即 $2^\nu = 2^{k/2}$。因此，自然可以区分低频部分（$\nu \le k/2$）和另一部分（$\nu > k/2$）。此外，如果 $\nu \ge k$，引理 2.5 (ii) 表明，核 $\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(z,z')$ 本质上局部化于对角线 $\{(z,z')$ 的 1-邻域内: $z = z'\}$。在这种情况下，权重 $\Psi_\alpha^{1/2}$ 可以很容易地处理。因此，我们进一步将部分 $\nu > k/2$ 分为中频部分（$k \ge \nu > k/2$）和高频部分（$\nu > k$）。

4.3. 命题 4.1 的证明。我们先证明 (4.3)。对于 $j \ge 0$，记

$$U_j^l = \{j' \in \mathbb{N}_0 : \operatorname{dist}(\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_{j'}) \le 2^{\nu+\varepsilon k}\}.$$

回顾 $\Psi_\alpha^{1/2} = \sum_{j\ge 0} 2^{-\frac{\alpha}{2}j}\chi_{\mathbb{A}_j}$，我们将 $\mathfrak{I}^l$ 分解为

$$\mathfrak{I}^l \lesssim \mathfrak{I}_1^l + \mathfrak{I}_2^l + \mathfrak{I}_3^l,$$

其中

$$\mathfrak{I}_1^l := \sum_{2\le\nu\le k/2}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j\le\nu+\varepsilon k+3}\int_{\mathbb{A}_j}\Big|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\Big(\sum_{j'\in U_j^l} 2^{\frac{\alpha}{2}(j'-j)}\chi_{\mathbb{A}_{j'}}f\Big)(z)\Big|^2 dz,$$

$$\mathfrak{I}_2^l := \sum_{2\le\nu\le k/2}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j>\nu+\varepsilon k+3}\int_{\mathbb{A}_j}\Big|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\Big(\sum_{j'\in U_j^l} 2^{\frac{\alpha}{2}(j'-j)}\chi_{\mathbb{A}_{j'}}f\Big)(z)\Big|^2 dz,$$

$$\mathfrak{I}_3^l := \sum_{2\le\nu\le k/2}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j}\int_{\mathbb{A}_j}\Big|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\Big(\sum_{j'\notin U_j^l} 2^{\frac{\alpha}{2}(j'-j)}\chi_{\mathbb{A}_{j'}}f\Big)(z)\Big|^2 dz.$$

然后，为了证明 (4.3)，只需证明

$$\mathfrak{I}_1^l \le C 2^{(\frac{\alpha-1}{2}+\varepsilon)k}, \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{I}_i^l \le C, \qquad i = 2,3 \tag{4.8}$$

对某个常数 $C = C(d,\alpha,\varepsilon)$ 成立。我们先考虑 (4.7)。由于 $s \to \phi_{\nu,\,\ell}(t,s)$ 的支集包含在一个长度为 2 (即 $R \lesssim 1$) 的区间内，该区间以 $\mu = 2^{-2k}(t+\ell)^2 2^{2\nu} \sim 2^{2\nu}$ 为中心，因此利用推论 2.4 并适当选择 ω，可得

$$\int_{\mathbb{A}_j}|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})g(z)|^2 dz \lesssim 2^{-\nu}2^j\int|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})g(z)|^2 dz.$$

因此可得

$$\mathfrak{I}_1^l \lesssim \sum_{2\le\nu\le k/2} 2^{-\nu}\sum_{j\le\nu+\varepsilon k+3} 2^{(1-\alpha)j}\sum_{\ell\in L_t^k}\int|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})F_j(z)|^2 dz, \tag{4.9}$$

其中

$$F_j = \textstyle\sum_{j'\in U_j^l} 2^{\frac{\alpha}{2}j'}\chi_{\mathbb{A}_{j'}}f.$$

记为 $\sum_{\ell\in L_t^k}\int|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})F_j(z)|^2dz=\langle(\sum_{\ell\in L_t^k}\phi_{\nu,\ell}^2(t,\mathcal{L}))F_j,F_j\rangle$. 由于 $2^{2\nu-k}\le 1$，因此我们有 $\sum_{\ell\in L_t^k}\phi_{\nu,\ell}^2(t,s)\,.\,1$，其中 $s\ge 1$ 且 $t\in\operatorname{supp}\varphi$。由此可得

$$\sum_{\ell\in L_t^k}\int|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})F_j(z)|^2dz\le C\|F_j\|_2^2.$$

将此与 (4.9) 结合，并注意到 $\|F_j\|_2^2\lesssim 2^{\alpha\nu+\alpha\varepsilon k}$，我们得到

$$\mathfrak{I}_1^l\lesssim\sum_{2\le\nu\le k/2}2^{(\alpha-1)\nu+\alpha\varepsilon k}\sum_{j\le\nu+\varepsilon k+3}2^{(1-\alpha)j}\lesssim\sum_{2\le\nu\le k/2}2^{(\alpha-1)\nu+\alpha\varepsilon k}$$

因为 $\alpha>1$。这就得到了 (4.7)。

下面转向对 $\mathfrak{I}_2^l$ 的估计。注意到 $U_j^l\subset\{j+n:\ n=-1,\ 0,\ 1\}$ 若 $j>\nu+\varepsilon k+3$。由此可见

$$\mathfrak{I}_2^l\lesssim\sum_{|n|\le1}\sum_{j\ge0}\Big(\sum_{2\le\nu\le k/2}\sum_{\ell\in L_t^k}\int\big|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\chi_{\mathbb{A}_{j+n}}f)(z)\big|^2dz\Big)$$

和之前一样，容易验证，对于任意 $s\ge1$ 且 $\operatorname{supp}\varphi$，$\sum_{2\le\nu\le k/2}\sum_{\ell\in L_t^k}\phi_{\nu,\ell}^2(t,s)\le C$。因此，我们得到 $\mathfrak{I}_2^l\lesssim\sum_{|n|\le1}\sum_{j\ge0}\|\chi_{\mathbb{A}_{j+n}}f\|_2^2$。由此，对于 $i=2$，我们得到 (4.8)。

为完成 (4.3) 的证明，尚需证明 $i=3$ 的 (4.8)。由 Minkowski 不等式和 H¨older 不等式，我们有

$$\mathfrak{I}_3^l\lesssim\sum_{2\le\nu\le k/2}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_j2^{-\alpha j}\Big(\sum_{j'\notin U_j^l}2^{\alpha j'/2}|\mathbb{A}_j|^{1/2}\|\chi_{\mathbb{A}_j}\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\chi_{\mathbb{A}_{j'}}f\|_\infty\Big)^2.$$

注意到 $|z-z'|\ge\max\{2^{\nu+\varepsilon k},2^j,2^{j'}\}$ 对 $(z,z')\in\mathbb{A}_j\times\mathbb{A}_{j'}$ 成立，因为 $j'\notin U_j^l$ 对 $j\in\mathbb{N}$. 成立。回顾 (4.6)，我们注意到 $\mu\sim2^{2\nu}$ 且 $R\lesssim1$。取 $N_1\gg1$ 和 N_2，$N_3>2d$，利用 (2.10) 并令 $N=N_1+N_2+N_3$，可得 $|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(z,z')|\lesssim(1+2^{-\nu}|z-z'|)^{-N_1-N_2-N_3}$ 对 $(z,z')\in\mathbb{A}_j\times\mathbb{A}_{j'}$ 成立。因此，我们得到

$$|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\chi_{\mathbb{A}_{j'}}f)(z)|\lesssim2^{-\varepsilon N_1k}(\max\{2^{j-\nu},2^{j'-\nu}\})^{-N_2}2^{d\nu}\|\chi_{\mathbb{A}_{j'}}f\|_2$$

对 $z\in\mathbb{A}_j$ 成立。结合这一点与上述不等式可得

$$\mathfrak{I}_3^l\lesssim\sum_{2\le\nu\le k/2}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_j2^{-2\varepsilon N_1k}2^{-2N_2(j-\nu)}2^{2d\nu}2^{2dj}\lesssim2^{(N_2+d+1-2\varepsilon N_1)k}.$$

因此，取足够大的 N_1 使得 $2\varepsilon N_1>1+N_2+d$，该不等式便给出 $i=3$ 的 (4.8)。

接下来我们验证 (4.4) 和 (4.5)，其证明沿用 (4.3) 的论证思路。因此，这里简要说明。为证明 (4.4)，我们令

$$U_j^m:=\{j'\in\mathbb{N}_0:\operatorname{dist}(\mathbb{A}_j,\mathbb{A}_{j'})\le2^{(1+\varepsilon)k-\nu}\},\quad j\in\mathbb{N}_0.$$

与前面一样，记 $\tilde{F}_j = \sum_{j'\in U_j^m} 2^{\frac{\alpha}{2}j'}\chi_{\mathbb{A}_{j'}} f$ 和

$$\mathfrak{I}_1^m = \sum_{k/2\le\nu\le k}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j\le(1+\varepsilon)k-\nu+3} 2^{-\alpha j}\int_{\mathbb{A}_j}\left|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\tilde{F}_j(z)\right|^2 dz,$$

$$\mathfrak{I}_2^m = \sum_{k/2\le\nu\le k}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j>(1+\varepsilon)k-\nu+3} 2^{-\alpha j}\int_{\mathbb{A}_j}\left|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\tilde{F}_j(z)\right|^2 dz,$$

$$\mathfrak{I}_3^m = \sum_{k/2\le\nu\le k}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j} 2^{-\alpha j}\int_{\mathbb{A}_j}\Big|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\Big(\sum_{j'\notin U_j^m} 2^{\frac{\alpha}{2}j'}\chi_{\mathbb{A}_{j'}} f\Big)(z)\Big|^2 dz,$$

我们有

$$\mathfrak{I}^m \lesssim \mathfrak{I}_1^m + \mathfrak{I}_2^m + \mathfrak{I}_3^m.$$

我们先处理 $\mathfrak{I}_1^m$。和之前一样，回顾 (4.6)，并对 $\mathfrak{I}_1^m$ 中的积分应用推论 2.4，可得

$$\mathfrak{I}_1^m \lesssim \sum_{k/2\le\nu\le k} 2^{\nu-k}\sum_{j\le(1+\varepsilon)k-\nu+3} 2^{-j(\alpha-1)}\sum_{\ell\in L_t^k}\int |\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\tilde{F}_j(z)|^2 dz.$$

由于 $\operatorname{supp}\phi_{\nu,\ell}(t,\cdot)$ 至多重叠 C 次，$\sum_{\ell\in L_t^k}\int|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\tilde{F}_j(z)|^2dz \lesssim \|\tilde{F}_j\|_2^2$。因此，我们得到

$$\mathfrak{I}_1^m \lesssim \sum_{k/2\le\nu\le k} 2^{(1-\alpha)\nu}2^{(\alpha-1+\varepsilon\alpha)k} \lesssim 2^{(\frac{\alpha-1}{2}+\varepsilon\alpha)k}$$

因为 $\alpha>1$。关于 $\mathfrak{I}_2^m$ 和 $\mathfrak{I}_3^m$，我们有估计 $\mathfrak{I}_2^m, \mathfrak{I}_3^m \le C$，可以用与 (4.8) 相同的方法证明。更确切地说，估计 $\mathfrak{I}_2^m \le C$ 可以类似于 (4.8) 对 $i=2$ 的证明得到。同样，为了证明 $\mathfrak{I}_3^m \le C$，用 (2.9) 代替 (2.10)，重复证明 (4.8) 对 $i=3$ 的论证即可。细节从略。结合关于 $\mathfrak{I}_2^m$、$\mathfrak{I}_2^m$ 和 $\mathfrak{I}_3^m$ 的这些估计，得到 (4.4)。

最后，为了证明（4.5），我们将 $\mathfrak{I}^h$ 分成两部分，得到 $\mathfrak{I}^h \lesssim \mathfrak{I}_1^h + \mathfrak{I}_2^h$，其中

$$\mathfrak{I}_1^h := \sum_{\nu>k}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j}\int_{\mathbb{A}_j}\Big|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\Big(\sum_{j'\in U_j^m} 2^{\frac{\alpha}{2}(j'-j)}\chi_{\mathbb{A}_{j'}} f\Big)(z)\Big|^2 dz,$$

$$\mathfrak{I}_2^h := \sum_{\nu>k}\sum_{\ell\in L_t^k}\sum_{j}\int_{\mathbb{A}_j}\Big|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})\Big(\sum_{j'\notin U_j^m} 2^{\frac{\alpha}{2}(j'-j)}\chi_{\mathbb{A}_{j'}} f\Big)(z)\Big|^2 dz.$$

因此，只需证明

$$\mathfrak{I}_1^h \le C2^{\varepsilon k}, \quad \mathfrak{I}_2^h \le C$$

对于 $t\in\operatorname{supp}\varphi$. 。第二个不等式可用与所示估计 $\mathfrak{I}_3^m \le C$ 相同的方法得到。因此，我们只证明第一个估计。由于 $\nu>k$,$U_j^m \subset \{j\pm n\colon n=0,1,\cdots,n_0\}$，存在一个正整数 n_0 使得 $2^{n_0}\sim 2^{\varepsilon k}$。因此，

$$\mathfrak{I}_1^h \lesssim 2^{(\alpha+1)\varepsilon k}\sum_{|n|\le n_0}\sum_{j\ge0}\Big(\sum_{\nu>k}\sum_{\ell\in L_t^k}\int\left|\phi_{\nu,\ell}(t,\mathcal{L})(\chi_{\mathbb{A}_{j+n}}f)(z)\right|^2 dz\Big).$$

注意，$\sum_{\nu>k}\sum_{\ell\in L_t^k}\phi_{\nu,\ell}^2(t,s) \le C$ 对于 $s\ge1$ 且 $t\in\operatorname{supp}\varphi$。因此，括号内的表达式有上界 $C\|\chi_{\mathbb{A}_{j+n}}f\|_2^2$。由此得到

$$\mathfrak{I}_1^h \lesssim 2^{(\alpha+1)\varepsilon k}\sum_{|n|\le n_0}\sum_{j\ge0}\|\chi_{\mathbb{A}_{j+n}}f\|_2^2 \lesssim C2^{(\alpha+2)\varepsilon k}$$

正如所需。

5. Sharpness of summability indices

本节讨论定理 1.1 和推论 1.3 中给出的可和指标的尖锐性。下面证明定理 1.1 和推论 1.3 的必要性部分。

命题 5.1. 设 $d \geq 1$、$\beta \geq 0$ 和 $p > 4d/(2d-1+2\beta)$。若 $0 \leq \delta < \gamma(p,2d,\beta)/2$，则存在一个可测函数 f，使得 $\Psi_\beta f \in L^p(\mathbb{C}^d)$，且 (1.3) 成立。

为证明命题 5.1，我们构造一个函数序列，使其在集合 $\mathbb{A}_1$ 上的表现如同 $\mathcal{L}$ 的特征函数。

引理 5.2. 设 $p > 4d/(2d-1)$和 $\beta \geq 0$。那么，存在序列 $\{\mu_k\} \subset 2\mathbb{N}_0 + d$ 和 $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{C}^d)$，使得

$$\mu_k \sim 2^{2^k}, \quad \|\Psi_\beta f_k\|_{L^p(\mathbb{C}^d)} = 1,$$

并且对于一个较大的常数 $k_\circ$，以下结论成立：

$$\left|\left\{z \in \mathbb{A}_1 : |\mathcal{P}_{\mu_k} f_k(z)| \geq C_0 \mu_k^{\gamma(p,2d,\beta)/2}\right\}\right| \geq C_0 \tag{5.1}$$

对于常数 $C_0 > 0$，若 $k \geq k_\circ$，并且对于任意 $N > 0$，存在一个常数 $C_N > 0$，使得

$$|\mathcal{P}_{\mu_k} f_j(z)| \leq C_N \mu_k^{\gamma(p,2d,\beta)/2} (\mu_j/\mu_k)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{d}{p}} |\mu_k - \mu_j|^{-N}, \quad z \in \mathbb{A}_1 \tag{5.2}$$

只要 $j \neq k \geq k_{\circ\circ}$

暂且假设引理 5.2 成立，我们来证明命题 5.1。

命题 5.1 的证明。令 $\{\mu_k\}$ 和 $\{f_k\}$ 为引理 5.2 中给出的序列。我们考虑 $f = \sum_{k=k_\circ}^\infty 2^{-k} f_k$ 和

$$E_k = \left\{z \in \mathbb{A}_1 : |S_*^\delta(\mathcal{L}) f(z)| \geq c\, 2^{-k} \mu_k^{-\delta+\gamma(p,2d,\beta)/2}\right\}, \quad k \geq k_\circ$$

其中常数 c 为较小的正数，稍后确定。对于 (1.3)，只需证明

$$|E_k| \geq C_0 \tag{5.3}$$

对于常数 $C_0 > 0$，若 $k \geq k_{\circ\circ}$ 事实上，由于 $\mu_k \sim 2^{2^k}$ 和 $\delta < \gamma(p, 2d, \beta)/2$，容易看出 $\{E_k\}$ 是一个递减的可测集序列，并收敛到 $E := \{z \in \mathbb{A}_1 : S_*^\delta(\mathcal{L}) f(z) = \infty\}$。因此，(1.3) 可由 (5.3) 得出。

不等式 (5.3) 可由 (5.1) 和包含关系轻易推出

$$\tilde{E}_k := \left\{z \in \mathbb{A}_1 : |\mathcal{P}_{\mu_k} f_k(z)| \geq C_0 \mu_k^{\gamma(p,2d,\beta)/2}\right\} \subset E_k. \tag{5.4}$$

因此，只需证明 (5.4)。为此，我们利用不等式

$$|\mathcal{P}_{\mu_k} f(z)| \leq \mathfrak{C} \mu_k^\delta S_*^\delta(\mathcal{L}) f(z), \quad k \geq k_\circ, \tag{5.5}$$

该不等式以常数 $\mathfrak{C}$ 成立。这可由众所周知的恒等式推出

$$F(\mathcal{L}) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_0^\infty F^{(\delta+1)}(t) t^\delta S_t^\delta(\mathcal{L}) dt, \quad \delta \geq 0$$

对于 $F \in \mathsf{C}_c^\infty([0,\infty))$，其中 $F^{(\delta)}$ 表示 F 的 Weyl 分数阶导数，而 $\Gamma(\delta)$ 是伽马函数。将 $F = \eta(\cdot - \mu_k)$ 代入 $\eta \in \mathsf{C}_c^\infty((-1,1))$，可得（5.5）。详情请参见 [5, 22]。

由（5.5），我们现在有

$$S_*^\delta(\mathcal{L})f(z) \geq \mathfrak{C}^{-1}\mu_k^{-\delta}\Big(2^{-k}|\mathcal{P}_{\mu_k}f_k(z)| - \sum_{j\neq k}2^{-j}|\mathcal{P}_{\mu_k}f_j(z)|\Big). \tag{5.6}$$

由 (5.2) 并取充分大的 N，可知 $\sum_{j\neq k}2^{-j}|\mathcal{P}_{\mu_k}f_j(z)|$ 有一个常数倍的上界

$$\mu_k^{\gamma(p,2d,\beta)/2}\sum_{j\neq k}2^{-j}(\mu_j/\mu_k)^{\frac{1}{2}-\frac{d}{p}+\frac{\beta}{2}}|\mu_j-\mu_k|^{-N} \lesssim \mu_k^{\gamma(p,2d,\beta)/2}\mu_k^{-1}.$$

˜我们选取一个常数 c，使得 $c < C_0/2\mathfrak{C}$。由 (5.6)，对于 $z \in E_k$，我们有$S_*^\delta(\mathcal{L})f(z) \geq c\,2^{-k}\mu_k^{-\delta+\gamma(p,2d,\beta)/2}$，若 k足够大。因此，(5.4) 得证。□

现在我们来证明引理 5.2。

引理 5.2 的证明。我们取一个序列 $\{\mu_k\} \subset 2\mathbb{N}_0 + d$，使得 $\mu_k \sim 2^{2^k}$。令

$$g_k(z) = \phi_*^\vee(\mathcal{L}-\mu_k)(0,z), \quad z \in \mathbb{C}^d,$$

其中 $\phi_* \in \mathsf{C}_c^\infty((2^{-3},2^{-1}))$ 在第 3 节中定义。由 (2.13) 和 (2.12)，我们有

$$g_k(z) = \frac{C_d}{2\pi}\int \phi_*(t)(\sin t)^{-d}e^{-i(\frac{|z|^2}{4}\cot t+\mu_k t)}dt. \tag{5.7}$$

很容易看出

$$|g_k(z)| \leq \begin{cases} C\mu_k^{-1/2}, & \text{if } |z|^2 \sim \mu_k, \\ C_N(1+\max\{|z|^2,\mu_k\})^{-N}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.8}$$

对每个 $N \in \mathbb{N}_0$ 都成立。事实上，相位函数 $p(t) := -\mu_k t - |z|^2\cot t/4$ 满足$|p'(t)| \gtrsim \max\{\mu_k, |z|^2\}$，对 $t \in \operatorname{supp}\phi_*$，若 $|z|^2 \geq C\mu_k$ 或 $|z|^2 \leq C^{-1}\mu_k$，其中常数为$C > 0$。因此，分部积分给出 $|g_k(z)| \lesssim (1+\max\{\mu_k,|z|^2\})^{-N}$，除非 $|z|^2 \sim \mu_k$.。若 $|z|^2 \sim \mu_k$，则 $p''(t) \sim \mu_k$，对 $t \in (2^{-3},2^{-1})$ 成立。驻相法给出$|g_k(z)| \sim \mu_k^{-1/2}$（例如，参见 [29]）。当 $k \geq k_\circ$足够大时，(5.8) 给出

$$\|\Psi_\beta g_k\|_{L^p(\mathbb{C}^d)} \sim \mu_k^{d/p-1/2-\beta/2}. \tag{5.9}$$

注意

$$\mathcal{P}_{\mu_k}g_j(z) = \phi_*^\vee(\mu_k-\mu_j)\mathcal{P}_{\mu_k}(0,z), \tag{5.10}$$

并回忆一下，$\mathcal{P}_{\mu_k}$ 的核由下式给出

$$\mathcal{P}_{\mu_k}(w,z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\Big(\frac{(N_k+d-1)!}{N_k!}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{|w-z|^2}{2}\Big)^{-\frac{d-1}{2}}\mathcal{L}_{N_k}^{d-1}\Big(\frac{|w-z|^2}{2}\Big)e^{\frac{i}{2}\langle w,\mathbf{S}z\rangle} \tag{5.11}$$

其中 $2N_k + d = \mu_k$ ([36, 第 1 章–2])。对 $\alpha = d-1$ 使用 (2.3)，可得

$$\Big|\Big\{z \in \mathbb{A}_1 : |\mathcal{P}_{\mu_k}(0,z)| \sim \mu_k^{(2d-3)/4}\Big\}\Big| \geq C_0 \tag{5.12}$$

当常数为 $C_0 > 0$ 且 $k \geq k_\circ$足够大时（例如参见 [5, 引理 4.9] 的证明）。我们定义

$$f_k = g_k/\|\Psi_\beta g_k\|_{L^p(\mathbb{C}^d)}.$$

尚需验证 (5.1) 和 (5.2)。事实上，由 (5.12) 和 (5.9) 可得 (5.1)，因为 $\phi_*^\vee(0) > 0$且 $\mathcal{P}_{\mu_k}f_j = \phi_*^\vee(\mu_k-\mu_j)\mathcal{P}_{\mu_k}(0,z)/\|\Psi_\beta g_j\|_{L^p(\mathbb{C}^d)}$.对

$\alpha = d-1$，利用 (2.3)，不难看出，若 $|z| \sim 1$，则 $|\mathcal{P}_{\mu_k}(0,z)| \lesssim \mu_k^{(2d-3)/4}$。结合这一点和 (5.9)，我们有

$$|\mathcal{P}_{\mu_k} f_j(z)| \lesssim \mu_k^{\gamma(p,2d,\beta)/2} (\mu_j/\mu_k)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{d}{p}} |\phi_*^\vee(\mu_k-\mu_j)|, \quad |z| \sim 1$$

当 k, j 足够大时。由 $\phi_*^\vee$ 的快速衰减可得 (5.2)。 □

注 1. 在引理 5.2 的证明中使用 g_k，可以容易地证明，当 $\delta < (\alpha-1)/4$ 时，(1.4) 不成立。事实上，利用 (5.5)、(5.10)、(5.12) 和 (5.9)，我们可知估计 (1.4) 蕴含

$$\mu_k^{(2d-3)/4-\delta} \lesssim \mu_k^{d/2-1/2-\alpha/4}.$$

取 $k \to \infty$ 可得 $\delta \geq (\alpha-1)/4$。

6. Bochner–Riesz means for the Hermite operator

算子 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{H}$ 具有共同的谱性质，例如相关传播子的周期性以及谱远离零。此外，我们还可以像之前一样得到算子 $\eta((\mu-\mathcal{H})/R)$ 的类似核表示（参见 (2.14)），其中使用传播子 $e^{it\mathcal{H}}$，其核由下式给出

$$e^{-i\frac{t}{2}\mathcal{H}}(x,y) = \tilde{C}_d (\sin t)^{-d/2} e^{i\phi_{\mathcal{H}}(t,x,y)} \tag{6.1}$$

˜为常数 C_d ([36, 15])，其中

$$\phi_{\mathcal{H}}(t,x,y) = 2^{-1}(|x|^2+|y|^2)\cot t - \langle x,y\rangle \csc t. \tag{6.2}$$

利用这些性质，不难看出我们的方法同样适用于厄米算子的 Bochner–Riesz 均值。事实上，可以证明以下结果，这与 [5] 中的结果不同之处在于，它不要求 α 有上界。

定理 6.1. 设 $\alpha > 0$ 和 $\psi_\alpha = (1+|x|)^{-\alpha}$。若 $\delta > \max\{(\alpha-1)/4, 0\}$，则存在常数 $C>0$，使得我们有如下估计

$$\|S_*^\delta(\mathcal{H})f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\psi_\alpha)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\psi_\alpha)}.$$

因此，我们得到具有无穷远处增长的函数的几乎处处收敛。

推论 6.2. 设 $d \geq 1$ 和 $\beta \geq 0$。若 $\delta > \gamma(p,d,\beta)/2$，则只要 $\psi_\beta f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，$\lim_{t\to\infty} S_t^\delta(\mathcal{H}) f = f$ 几乎处处成立。反之，若对所有满足 $\psi_\beta f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 的 f，其中某个 $p \in (2d/(d-1+2\beta), \infty]$，均有几乎处处收敛，则 $\delta \geq \gamma(p,d,\beta)/2$。

必要性部分。必要性部分可以按照第 5 节中的相同方式证明。回顾第 3 节中定义的截断函数 ϕ_*，我们考虑

$$\tilde{g}_k(x) := \phi_*^\vee(\mu_k - \mathcal{H})(0,x), \quad k \in \mathbb{N},$$

其中 $\mu_k = 2N_k + d$ 是一个满足 $\mu_k \sim 2^{2^k}$ 且 N_k 为偶函数的序列。令 $\tilde{f}_k = \tilde{g}_k / \|\psi_\beta \tilde{g}_k\|_p$ 和 $\tilde{f} = \sum_k 2^{-k} \tilde{f}_k$。然后，按照第 5 节中的相同论证，不难看出

$$\big|\{x \in \mathbb{R}^d : \sup_t |S_t^\delta(\mathcal{H})\tilde{f}(x) = \infty\}\big| \gtrsim 1$$

只要 $\delta < \gamma(p,d,\beta)/2$ 成立即可。事实上，利用傅里叶反演，我们可以写出

$$\eta\big((\mu-\mathcal{H})/R\big) f(x) = \frac{R}{4\pi} \int \widehat{\eta}\big(Rt/2\big) e^{i\frac{t}{2}(\mu-\mathcal{H})} f(x) dt \tag{6.3}$$

对于 $\eta \in C_c^\infty((-2,2))$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$（参见 (2.13)）。由 (6.1) 和 (6.2) 可知

$$\tilde{g}_k(x) = \tilde{C}_d \int \phi_*(t)(\sin t)^{-\frac{d}{2}} e^{-i(\frac{|x|^2}{4}\cot t + \mu_k t)} dt$$

对一个常数 $\tilde{C}_d$。因此，与之前类似，我们有 $\|\psi_\beta \tilde{g}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \sim \mu_k^{d/(2p)-1/2-\beta/2}$.

$L\mathcal{P}_\mu$ 表示谱投影（与 $\mathbb{R}^d$ 中的厄米算子 $\mathcal{H}$相关），其作用到由特征值 μ对应的特征函数张成的空间上。于是，由~可得 $\mathcal{P}_{\mu_k}\tilde{g}_j(x) = \phi_*^\vee(\mu_k - \mu_j)\mathcal{P}_{\mu_k}(0,x)$。现在我们断言

$$|\tilde{\mathcal{P}}_{\mu_k}(0,x)| \sim \Big(\frac{\Gamma(N_k/2+d/2)}{\Gamma(N_k/2+1)}\Big)^{1/2} |x|^{1-\frac{d}{2}} |\mathcal{L}_{N_k/2}^{d/2-1}(|x|^2)|. \tag{6.4}$$

有了这一点，后续论证就与扭曲拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$情形的论证完全相同。因此，我们省略细节。

最后，我们验证 (6.4)。当 d 为偶数时，(6.4) 由 (5.7) 和 (5.11) 立即得出。然而，对于奇数 d，我们还需要做一些额外工作。利用 (6.1)、(6.2) 以及 $\mu_k \in 2\mathbb{N}_0 + d$ 这一事实，我们有

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mu_k}(0,x) = c_d \int_0^{2\pi} (\sin t)^{-d/2} e^{-i(\mu_k t + \frac{|x|^2}{2}\cot t)} dt$$

~（见 [15]）。回忆一下，N_k 被选为偶函数。由于 $\mathcal{P}_{\mu_k}(0,x)$ 是径向的，且由于~ ~ ~$\mathcal{P}_{\mu_k}(\mathcal{P}_{\mu_k}(0,x)) = \mathcal{P}_{\mu_k}(0,x)$，根据 [36, 推论 3.4, 1] 我们有

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mu_k}(0,x) = \mathfrak{C}_k^d \Big(\frac{\Gamma(N_k/2+d/2)}{\Gamma(N_k/2+1)}\Big)^{1/2} |x|^{1-\frac{d}{2}} \mathcal{L}_{N_k/2}^{d/2-1}(|x|^2) \tag{6.5}$$

对某个常数 $\mathfrak{C}_k^d$ 成立。因此，只需证明 $|\mathfrak{C}_k^d| \sim 1$，即可得到 (6.4)。将 $\tilde{\mathcal{P}}_{\mu_k}(0,x)$ 写作 $=\sum_{|\alpha|=N_k} \Phi_\alpha(0)\Phi_\alpha(x)$，由厄米函数的正交性可得

$$\|\tilde{\mathcal{P}}_{\mu_k}(0,\cdot)\|_2 = \big(\sum_{|\alpha|=N_k} |\Phi_\alpha(0)|^2\big)^{1/2} \sim \mu_k^{\frac{d-2}{4}}$$

因为对大多数 α，$|\Phi_\alpha(0)| \sim \mu_k^{-d/4}$。此外，利用极坐标以及引理 1.5 中关于归一化拉盖尔函数 [36, (i) 的估计，4], 容易看出，(6.5) 右端的 L^2 范数与下式可比

$$|\mathfrak{C}_k^d|\, \mu_k^{\frac{d-2}{4}} \Big(\int_0^\infty |\mathcal{L}_{N_k/2}^{d/2-1}(r^2)|^2 r dr\Big)^{1/2} \sim |\mathfrak{C}_k^d|\, \mu_k^{\frac{d-2}{4}}.$$

因此，我们有 $|\mathfrak{C}_k^d| \sim 1$。

充分性部分。定理 6.1 可用与定理 1.2 相同的方法证明。事实上，显然我们只需验证：将 $\mathcal{L}$ 和 $\mathbb{C}^d$ 分别替换为 $\mathcal{H}$ 和 $\mathbb{R}^d$ 后，推论 2.4 和引理 2.5 仍然成立。由于推论 2.4 由估计 (2.1) 得出，因此厄米算子的相应估计也可由 [5] 中的估计 (2.3) 得出。至于引理 2.5 的对应结果，我们有以下结论。

引理 6.3。设 $\mu \geq 1$、$R > 0$ 和 $\eta \in C_c^\infty((-2,2))$。那么，对于任意 $N > 0$，有以下结论，其中隐含常数仅依赖于 d、N。

(*i*)′ 设 $R \geq 1$ 和 $R \geq \mu$。若 $|x-y| \gtrsim R^{-1/2}$，则

$$|\eta((\mu - \mathcal{H})/R)(x,y)| \lesssim R^{d/2}(1 + R^{1/2}|x-y|)^{-N}.$$

(*ii*)′ 设 $R \geq 1$ 和 $R < \mu$。若 $|x-y| \gtrsim \mu^{1/2}R^{-1}$，则

$$|\eta((\mu - \mathcal{H})/R)(x,y)| \lesssim R^{d/2}(1 + R\mu^{-1/2}|x-y|)^{-N}.$$

$(iii)'$ 设 $R<1$。若 $|x-y|\gtrsim \mu^{1/2}$，则

$$|\eta((\mu-\mathcal{H})/R)(x,y)|\lesssim (1+\mu^{-\frac{1}{2}}|x-y|)^{-N}.$$

证明。证明与引理 2.5 的证明类似。因此，我们从简叙述。回顾引理 2.5 的证明，其中满足 $\eta_*\sum_{n\in\mathbb{Z}}\eta_*(t+n\pi)=1$。将其与 (6.3) 结合并作变量替换 $t\to t+n\pi$，可得

$$\eta\big((\mu-\mathcal{H})/R\big)f=\frac{R}{4\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\widehat{\eta}\big(R(t+n\pi)/2\big)\eta_*(t)e^{i\frac{t+n\pi}{2}(\mu-\mathcal{H})}f\,dt.$$

注意到，对于 $n\in\mathbb{Z}$，$\phi_{\mathcal{H}}(t+n\pi,x,y)=\phi_{\mathcal{H}}(t,x,(-1)^n y)$。因此，我们有

$$\eta((\mu-\mathcal{H})/R)(x,y)=\sum_{\tilde{n}=0,1}R\int\eta_R^{\tilde{n}}(t)e^{i(\frac{t\mu}{2}+\phi_{\mathcal{H}}(t,x,(-1)^{\tilde{n}}y))}dt,$$

其中

$$\eta_R^{\tilde{n}}(t)=\frac{\tilde{C}_d}{4\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-i\mu\pi(2n+\tilde{n})/2}\,\frac{\widehat{\eta}\big(R(t-(2n+\tilde{n})\pi)/2\big)}{((-1)^{\tilde{n}}\sin t)^{d/2}}\,\eta_*(t),\quad \tilde{n}=0,1.$$

容易看出，将 (2.15) 中的 η_R 替换为 $\eta_R^{\tilde{n}}$ 后，估计仍然成立。与之前一样，令 $\eta_{R,\ j}^{\tilde{n}}=\psi(2^j\cdot)\eta_R^{\tilde{n}}$，显然满足

$$|(\eta_{R,j}^{\tilde{n}})^{(k)}(t)|\lesssim 2^{jd/2}(2^j+R)^k\big(1+R2^{-j}\big)^{-N},\quad k\in\mathbb{N}_0 \tag{6.6}$$

对于任意 $N>0$。我们对核 $\eta((\mu-\mathcal{H})/R)(x,y)$ 作二进分解，得到

$$\eta\big((\mu-\mathcal{H})/R\big)(x,y)=\sum_{j,\tilde{n}}K_j^{\tilde{n}}(x,y):=\sum_{\tilde{n}=0,1}\sum_{j\geq 1}R\int\eta_{R,j}^{\tilde{n}}(t)e^{i(\mu t/2+\phi_{\mathcal{H}}(t,x,(-1)^{\tilde{n}}y)))}dt.$$

为证明 $(i)'$，我们将上面的和拆分如下：

$$\sum_{\tilde{n}=0,1}\Big(\mathfrak{I}_1^{\tilde{n},R}+\mathfrak{I}_2^{\tilde{n},R}\Big):=\sum_{\tilde{n}=0,1}\Big(\sum_{j:2^{-j}\ll R^{-1/2}|z-z'|}K_j^{\tilde{n}}+\sum_{j:2^{-j}\gtrsim R^{-1/2}|z-z'|}K_j^{\tilde{n}}\Big).$$

对于 $(ii)'$ 和 $(iii)'$，我们将 $\eta\big((\mu-\mathcal{H})/R\big)(x,y)=\sum_{\tilde{n}=0,\ 1}(\mathfrak{I}^{n,\ 1}{}^{\mu}+\mathfrak{I}^{n,\ 2}{}^{\mu})$ 分解。要证明 $\mathfrak{I}^{\tilde{n},\ 2}{}^{R}$ 和 $\mathfrak{I}^{\tilde{n},\ 2}{}^{\mu}$ 的所需估计相当直接，无需利用核的振荡效应（例如参见 (2.21)）。

要证明 $\mathfrak{I}^{\tilde{n},\ 1}{}^{R}$ 和 $\mathfrak{I}^{\tilde{n},\ 1}{}^{\mu}$ 的估计，我们需要利用振荡效应。不过，只要证明下式，按照引理 2.5 证明中的同样思路即可轻松完成证明：

$$|\partial_t\big(\mu t/2+\phi_{\mathcal{H}}(t,x,(-1)^{\tilde{n}}y)\big)|\gtrsim 2^{2j}|x-y|^2 \tag{6.7}$$

对于 $t\in\operatorname{supp}(\eta_{R,\ j}^{\tilde{n}})$ 和 $\tilde{n}=0,\ 1$，若 $2^{-j}\ll\mu^{-1/2}|x-y|$. 成立。事实上，结合 (6.6) 并通过分部积分可得，

$$|K_j^{\tilde{n}}(x,y)|\lesssim R|x-y|^{-2M}2^{(d-1-M)j}(1+R2^{-j})^{M-N}.$$

因此 , 所有所需的估计都可按前述相同方法得出。

最后，我们验证估计式 (6.7)。注意，

$$-\partial_t\phi_{\mathcal{H}}(t,x,(-1)^{\tilde{n}}y)=\frac{|x-y|^2}{2\sin^2 t}+\frac{\langle x,y\rangle}{\sin^2 t}(1-(-1)^{\tilde{n}}\cos t).$$

我们区分两种情况：$\langle x,y\rangle\geq 0$ 和 $\langle x,y\rangle<0$。对于第一种情况，有$|\partial_t\phi_{\mathcal{H}}(t,x,y)|\geq|x-y|^2/(2\sin^2 t)$。对于后一种情况，注意到 $|x-y|^2\geq 2|\langle x,y\rangle|$，因此

$|\partial_t \phi_{\mathcal{H}}(t,x,y)| \geq |x-y|^2 \cos t/(2\sin^2 t)$。因此，对于 $t \in \operatorname{supp}(\eta^{\tilde{n}}_{R,j})$且$\tilde{n}=0,1$, (6.7)成立。由此，我们得到(6.7)，因为 $2^{-j} \ll \mu^{-1/2}|x-y|$。□

Acknowledgements

本研究得到韩国国家研究基金会（大韩民国）资助，项目编号为 2020R1F1A1A0-1048520（Jeong）和 2022R1A4A1018904（Lee）；RYU 获韩国高等研究院的高等研究院个人资助 MG087001。

References

[1] M. Annoni, *Almost everywhere convergence for modified Bochner–Riesz means at the critical index for $p \geq 2$*, **286** 2017 257 275 《太平洋数学杂志》（），–。[2] A. Carbery, *The boundedness of the maximal Bochner–Riesz operator on $L^4(\mathbb{R}^2)$*，《杜克数学杂志》50（1983），409–416。[3] A. Carbery、J.L. Rubio de Francia 和 L. Vega, *Almost everywhere summability of Fourier integrals* **38** 1988 513 524 ，《伦敦数学会杂志》（），–。[4] A. Carbery 和 F. Soria, *Almost-everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces and an L^2 localisation principle* **4** 1988 ，《伊比利亚美洲数学杂志》（），319–337。[5] P. Chen、X.T. Duong、D. He、S. Lee 和 L. Yan, *Almost everywhere convergence of Bochner–Riesz means for the Hermite operators* **392** 2021 108042, 42 ，《数学进展》（），论文编号 pp. [6] P. Chen、S. Lee、A. Sikora 和 L.X. Yan, *Bounds on the maximal Bochner–Riesz means for elliptic operators* **373** 2020 3793 3828 ，《美国数学会汇刊》（），–。[7] M. Christ, *On almost everywhere convergence for Bochner–Riesz means in higher dimensions* **95** 1985 155 167 ，《美国数学会会刊》（），–。[8] M. Christ 和 C.D. Sogge, *The weak type L^1 convergence of eigenfunction expansions for pseudodifferential operators* **94** 1988 421 453 ，《数学创刊》（），–。[9] S. Gan、Y. Jing 和 S. Wu, *New bounds for Stein's square function in $\mathbb{R}^3$*, arXiv:2104.14731。[10] S. Gan、C. Oh 和 S. Wu, *New bounds for Stein's square functions in higher dimensions*, arXiv:2108.11567。[11] D. Gorges 和 D. Müller, *Almost everywhere convergence of Bochner–Riesz means on the Heisenberg group and fractional integration on the dual* **85** 2002 《伦敦数学会会刊》（），139–167。[12] C. Guillarmou、A. Hassell 和 A. Sikora, *Restriction and spectral multiplier theorems on asymptotically conic manifolds* **6** 2013 893 950 ，《偏微分方程分析》（），–。[13] A.D. Horwich 和 A. Martini, *Almost everywhere convergence of Bochner–Riesz means on Heisenberg-type groups* **103** 2021 1066 1119 ，《伦敦数学会杂志》（），–。[14] E. Jeong、S. Lee 和 J. Ryu, *Sharp L^p–L^q estimate for the spectral projection associated with the twisted Laplacian* **66** 2022 831 855 ，《数学出版物》（），–。[15] *Bounds on the Hermite spectral projection operator*, arXiv:2210.03385。[16] G. E. Karadzhov, *Riesz summability of multiple Hermite series in L^p spaces*，《保加利亚科学院通讯》47（1994），5–8。[17] H. Koch 和 F. Ricci, *Spectral projections for the twisted Laplacian*，《数学研究》180（2）（2007），103–110。[18] C. Kenig、R. Stantion 和 P. Tomas, *Divergence of eigenfunction expansions*，《泛函分析杂志》46（1982），28–44。[19] S. Lee, *Improved bounds for Bochner–Riesz and maximal Bochner–Riesz operators*，《杜克数学杂志》**122** 2004 205 232 （），–, *Square function estimates for the Bochner–Riesz means*，《偏微分方程分析》11（2018），1535–1586。[20] [21] S. Lee、K. Rogers 和 A. Seeger, *Improved bounds for Stein's square functions*，《伦敦数学会会刊》（3）104（2012），1198–1234。[22] S. Lee 和 J. Ryu, *Bochner–Riesz means for the Hermite and special Hermite expansions*，《数学进展》400（2022），论文编号108260，共52页。[23] S. Lee 和 A. Seeger, *On radial Fourier multipliers and almost everywhere convergence*，《伦敦数学会杂志》91（2015），105–126。

[24] X. Li 和 S. Wu, *New estimates of the maximal Bochner–Riesz operator in the plane*, 《数学年刊》378（2020），873–890。[25] M. Reed 和 B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis Self-Adjointness* 2, 1975，第卷。爱思唯尔，。[26] C.D. Sogge, *On the convergence of Riesz means on compact manifolds*, 《数学年刊》126（1987），439–447。[27] *Eigenfunction and Bochner Riesz estimates on manifolds with boundary*, 《数学研究快报》9（2002），205–216。[28] E.M. Stein, *Localization and summability of multiple Fourier series*, 《数学学报》100（1958），93–147。[29] *Harmonic analysis: real-variable methods orthogonality and oscillatory integrals*, 《调和分析专著》III。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。[30] E.M. Stein 和 G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces*, 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，（1971）。[31] K. Stempak 和 J. Zienkiewicz, *Twisted convolution and Riesz means*, 《数学分析杂志》76（1998），93–107。[32] 陶哲轩, *The weak-type endpoint Bochner–Riesz conjecture and related topics*, 《印第安纳大学数学杂志》47（1998），1097–1124。[33] *On the maximal Bochner–Riesz conjecture in the plane for $p < 2$*, 《美国数学会汇刊》354（2002），1947–1959。[34] M. Taylor, *L^p estimates on functions of the Laplace operator*, 《杜克数学杂志》58（1989），773–793。[35] S. Thangavelu, *Weyl multipliers Bochner–Riesz means and special Hermite expansions*, 《阿克塔数学》29（1991），307–321。[36] *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, 《数学笔记》42，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。[37] *Hermite and special Hermite expansions revisited*, 《杜克数学杂志》94（1998），257-278。[38] *Harmonic analysis on the Heisenberg group*, 《数学进展》第159卷，Birkh¨auser，波士顿，1998。

（JEONG） Department of Mathematics Education, and Institute of Pure and Applied Mathematics, Jeonbuk National University, Jeonju 54896, Republic of Korea*Email address*: eunhee@jbnu.ac.kr

（LEE） Department of Mathematical Sciences and RIM, Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea*Email address*: shklee@snu.ac.kr

（RYU） School of Mathematics, Korea Institute for Advanced Study, Seoul 02455, Republic of Korea*Email address*: jhryu@kias.re.kr