arXiv:2303.02686v1 [math.NA] 5 Mar 2023

真正多维的保持物理约束有限体积格式用于狭义相对论流体力学

Dan Ling[1] 和Huazhong Tang[2]

摘要

本文针对笛卡尔网格上的二维狭义相对论流体动力学方程，构建了真正多维的 HLL黎曼求解器，并研究其保持物理约束（PCP）性质。基于所得的 HLL 求解器，本文提出了一阶和高阶精度的 PCP有限体积格式。高阶格式采用了 WENO重构、三阶精度的强稳定保持时间离散方法以及 PCP通量限制器。本文给出若干数值结果，以展示所提出的 PCP有限体积格式在精度、性能和激波等的分辨率方面的表现，以及其真正多维的波结构。

关键词：真正多维格式，HLL，物理约束保持性质，高阶精度，狭义相对论流体力学。

[1]西安交通大学数学与统计学院，中国陕西省西安市710049。电子邮件：danling@xjtu.edu.cn。[2]南昌航空大学，中国江西省南昌市330063；北京大学应用物理与技术研究中心、HEDPS和LMAM、数学科学学院，中国北京市100871。

1 引言

本文研究了用于狭义相对论流体动力学（RHD）的保持物理约束（PCP）真正多维有限体积格式。狭义相对论流体动力学在天体物理学、等离子体物理学和核物理学等领域发挥着重要作用；在这些领域中，流体以接近光速的极高速度运动，因此相对论效应变得至关重要。在（静止）实验室参考系中，描述理想流体流动的二维（2D）狭义相对论流体动力学方程可写成散度形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\sum_{\ell=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{F}_\ell(\boldsymbol{U})}{\partial x_\ell}=0, \tag{1.1}$$

其中，守恒变量向量 $\boldsymbol{U}$ 和通量 $\boldsymbol{F}_\ell$ 分别定义为

$$\boldsymbol{U}=(D,\boldsymbol{m},E)^T,\quad \boldsymbol{F}_\ell=\left(Du_\ell,\boldsymbol{m}u_\ell+p\boldsymbol{e}_\ell,(E+p)u_\ell\right)^T,\ \ \ell=1,2, \tag{1.2}$$

其中，$D=\rho\gamma$、$\boldsymbol{m}=Dh\gamma\boldsymbol{u}$、$E=Dh\gamma-p$ 和 p 分别表示相对于实验室参考系的质量、动量和总能量，以及气体压强；$\boldsymbol{u}=(u_1,\ u_2)$ 为流体速度向量；$\boldsymbol{e}_\ell$ 为表示大小为 2 的单位矩阵第 ℓ 行的行向量；ρ 为静止质量密度；$\gamma=1/\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}$ 为洛伦兹因子；$|\boldsymbol{u}|^2=u_1^2+u_2^2$、$h=1+e+\frac{p}{\rho}$ 为比焓；e 为比内能。注意，本文采用了自然单位制（即光速 $c=1$）。系统（1.1）应通过状态方程（EOS）闭合，其一般形式为 $p=p(\rho,e)$。为简单起见，本文考虑理想气体的状态方程，即

$$p=(\Gamma-1)\rho e, \tag{1.3}$$

绝热指数为 $\Gamma\in(1,2]$。在可压缩性假设下，对 Γ 施加这样的限制是合理的；对于弱相对论情形，Γ 取 5/3，而对于超相对论情形则取 4/3。在此情况下，当 $i=1,\ 2$ 时，系统的雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{U})=\partial\boldsymbol{F}_i/\partial\boldsymbol{U}$

(1.1) 有 4 个实特征值，其从小到大排列如下

$$\begin{aligned}
\lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U}) &= \frac{u_i(1-c_s^2) - c_s\gamma^{-1}\sqrt{1-u_i^2-c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2-u_i^2)}}{1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2},\\
\lambda_i^{(2)}(\boldsymbol{U}) &= \lambda_i^{(3)}(\boldsymbol{U}) = u_i,\\
\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U}) &= \frac{u_i(1-c_s^2) + c_s\gamma^{-1}\sqrt{1-u_i^2-c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2-u_i^2)}}{1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2},
\end{aligned}$$

其中 c_s 表示显式写出的声速

$$c_s = \sqrt{\Gamma p/(\rho h)},$$

并满足

$$c_s^2 = \frac{\Gamma p}{\rho h} = \frac{\Gamma p}{\rho + \frac{p}{\Gamma-1} + p} = \frac{(\Gamma-1)\Gamma p}{(\Gamma-1)\rho + \Gamma p} < \Gamma - 1 \le 1 = c.$$

由于相对论效应，尤其是洛伦兹因子的出现，系统 (1.1) 比非相对论情形具有更强的非线性，因此除某些特殊情况（例如一维黎曼问题或等熵问题 [26, 31, 24]）外，对其进行解析处理极其困难且富有挑战性。由于无法将原始变量向量 $\boldsymbol{V} = (\rho,\ \boldsymbol{u},\ p)^T$和通量向量 $\boldsymbol{F}_i$ 显式表示为 $\boldsymbol{U}$的形式，因此无法从 $\boldsymbol{U}$ 显式求出它们的值，而需要求解一个非线性方程，例如下面的压力方程

$$E + p = D\gamma + \frac{\Gamma}{\Gamma-1}p\gamma^2,$$

满足 $\gamma = \left(1 - |\boldsymbol{m}|^2/(E+p)^2\right)^{-1/2}$。除此之外，还存在一些物理约束，例如$\rho > 0,\ p > 0$ 和 $E \ge D$，以及速度不能超过光速，即$|\boldsymbol{u}| < c = 1$。对于洛伦兹因子较大、密度或压力较低，或存在强间断的相对论流体动力学问题，在数值计算中很容易得到负密度或负压力，或超过光速的速度，从而导致雅可比矩阵的特征值或洛伦兹因子变为虚数，直接造成离散问题适定性缺失。因此，开发适用于 (1.1) 的稳健且精确的保持物理约束数值格式十分必要且意义重大，其解能够满足内禀物理

约束，或属于可容许状态集 [45]

$$\mathcal{G} = \left\{ \boldsymbol{U} = (D, \boldsymbol{m}, E)^T \middle| \ \rho > 0,\ p > 0,\ |\boldsymbol{u}| < 1 \right\},$$

这等价于

$$\mathcal{G} = \left\{ \boldsymbol{U} = (D, \boldsymbol{m}, E)^T \middle| \ D > 0,\ E - \sqrt{D^2 + |\boldsymbol{m}|^2} > 0 \right\}.$$

基于此，可以证明关于 $\mathcal{G}$的一些有用性质，另见 [45]。

引理 1.1. 可容许状态集 $\mathcal{G}$ 是凸集。

引理 1.2. 若假设 $\boldsymbol{U}$、 $\boldsymbol{U}_1$、 $\boldsymbol{U}_2 \in \mathcal{G}$，则：

(i) 对所有 $\kappa > 0, \quad \kappa \boldsymbol{U} \in \mathcal{G}$ 。

(ii) 对所有 a_1、 $a_2 > 0, \quad a_1 \boldsymbol{U}_1 + a_2 \boldsymbol{U}_2 \in \mathcal{G}$ 。

(iii) $\alpha \boldsymbol{U} - \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U}), -\beta \boldsymbol{U} + \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U}) \in \mathcal{G}$ *for* $\beta \leq \lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U}),\ \lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U}) \leq \alpha,$ *and* $i = 1, 2.$

引理 1.2 中的第二和第三个性质在形式上不同于 [45] 中引理 2.3 的相应性质。其证明与后者的证明略有不同，可见附录 A。

相对论流体动力学方程数值方法的研究可追溯至采用人工黏性的有限差分程序，该程序用于拉格朗日坐标下的球对称广义相对论流体动力学方程 [29, 30] 以及欧拉坐标下的多维相对论流体动力学方程 [42]。自20世纪90年代以来，相对论流体动力学的数值研究开始受到广泛关注，参见一些早期综述文章 [27, 28, 19], 。针对相对论流体动力学方程，人们开发了各种现代激波捕捉方法，并采用精确或近似黎曼求解器。例如，双激波黎曼求解器 [10], 、Roe 黎曼求解器 [35], 、HLL黎曼求解器 [20]以及HLLC 黎曼求解器 [39] 等。文献中还对一些其他高阶精度方法进行了充分研究，例如ENO（本质无振荡）方法和加权本质无振荡方法 [13, 55, 38], 、间断伽辽金方法 [34, 57, 59, 58], 、自适应动网格方法 [21, 22, 16], 以及直接欧拉型广义黎曼问题格式 [52, 53, 50, 46, 54]。

近年来，基于 $\mathcal{G}$ 的性质，人们为特殊相对论流体动力学方程发展了多种保持物理约束格式。这些方法包括 [45, 47, 32, 43,23] 提出的高阶精度保正性保持有限差分加权本质无振荡格式、间断Galerkin方法（DG）以及拉格朗日有限体积格式。此类工作在 [48, 49], 中成功拓展至狭义相对论磁流体力学（RMHD），并展示了无散场对于实现保持物理约束方法的重要性。近期，针对特殊相对论流体动力学方程或RMHD方程的熵稳定格式也已得到发展 [12, 14, 15, 16, 7, 17]。上述方法大多建立在一维黎曼求解器之上；这类求解器通过提取垂直于单元界面的流动变化，求解单元界面处的局部一维黎曼问题，进而给出精确或近似的黎曼解。对于多维问题，仍然面临着巨大风险：一维黎曼求解器可能在一定程度上丧失计算效能和效率，因为某些沿横向于网格边界方向传播的流动特征可能会被忽略，更多详情参见 [40] 。因此，有必要捕捉更多流动特征，并将真正的多维（物理）信息纳入数值方法。

20世纪90年代初，由于研究从有限体积方法转向波动方法，真正多维迎风差分领域的研究水平取得了巨大进展。关于多维迎风方法的早期综述见 [40]。对于线性化欧拉方程，文献 [1] 通过计算线性双曲方程的黎曼问题精确解，构造了一种真正多维的一阶有限体积格式；该线性双曲方程是通过对欧拉方程进行线性化得到的。迄今为止，多维黎曼求解器及相应数值格式已有进一步发展，包括：用于在非结构三角网格上求解欧拉方程的多维HLL格式 [8, 9], ；采用对流压力通量分裂黎曼求解器的真正多维HLL型格式 [25], ；用于气体动力学的多维HLLE格式 [41, 2], ；用于磁流体力学的多维MuSCL求解器 [5], ；用于流体动力学和磁流体力学的多维HLLC格式 [3, 4];

用于浅水方程的平衡型二维 HLL 格式 [36], ，以及用于曲线坐标下可压缩流的真正二维格式 [33] 等。对于二维特殊相对论流体动力学方程，现有的真正多维格式是文献 [44]提出的有限体积局部演化Galerkin方法。

本文将为相对论流体动力学方程 (1.1) 构造真正多维的 PCP 有限体积格式。全文安排如下。第 2 节推导方程 (1.1) 的二维 HLL 黎曼求解器，并研究其中间态的 PCP 性质。第 3 节介绍一阶 PCP 真正多维 HLL 格式，随后结合 WENO重构、三阶精度的强稳定保持时间离散以及 PCP通量限制器，将其推广为高阶保正性保持（PCP）格式。第 4 节通过若干数值实验展示本文格式的精度和性能。第 5 节对全文作总结，并给出一些评论。

2 二维 HLL 黎曼求解器

本节介绍适用于笛卡尔网格上、具有状态方程 (1.3) 的二维特殊相对论流体动力学方程 (1.1) 的真正多维 HLL 黎曼求解器 [2] ，并研究其 PCP 性质。为方便起见，以下及后文中，符号 $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$、$(u_1, u_2)$ 和 (x_1, x_2) 将分别替换为 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$、$(u, v)$ 和 (x, y)，

考虑式 (1.1) 的二维黎曼问题，其初始数据如图 2.1 所示，记为 RP($\boldsymbol{U}_{RU}$、 $\boldsymbol{U}_{LU}$、 $\boldsymbol{U}_{LD}$、$\boldsymbol{U}_{RD}$)。其中，四个常状态 $\boldsymbol{U}_{RU}$（右上）、 $\boldsymbol{U}_{LU}$（左上）、 $\boldsymbol{U}_{LD}$ （左下）和 $\boldsymbol{U}_{RD}$ （右下）分别位于第一、第二、第三和第四象限， O 为坐标原点。将初始间断产生的基本波中向左、向右、向上和向下传播的最大波速分别记为S_L、 S_R、 S_U、 S_D。特别地， S_L 和 S_R 分别由 [39]方向上的两个一维黎曼问题 RP$\{\boldsymbol{U}_{LU}, \boldsymbol{U}_{RU}\}$和 RP$\{\boldsymbol{U}_{LD}, \boldsymbol{U}_{RD}\}$的一维 HLL 求解器中向左和向右传播的最大波速得到，而 S_D和 S_U则通过考虑 y方向上的两个一维黎曼问题（分别记为 RP$\{\boldsymbol{U}_{LU}, \boldsymbol{U}_{LD}\}$）得到。

以及 RP$\{\boldsymbol{U}_{RU}, \boldsymbol{U}_{RD}\}$。

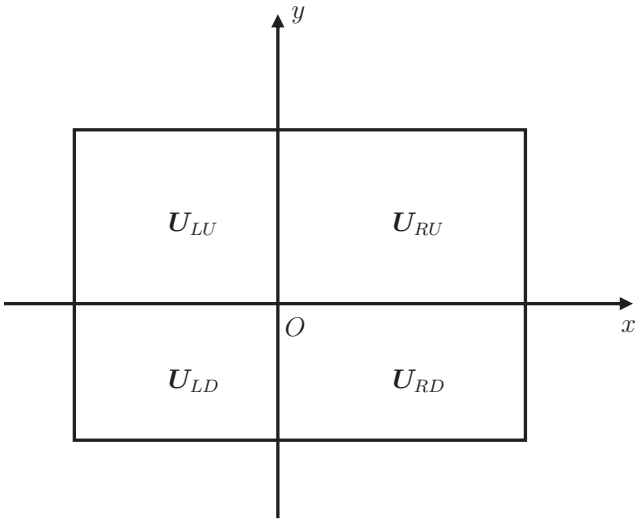


图 2.1：点 O 处二维黎曼问题的初始数据。

下面估计二维 HLL 求解器中使用的波速 S_L、S_R、S_D、S_U。若将$\lambda_A^{(1)}$（$\boldsymbol{U}_{LD}$）和 $\lambda_A^{(4)}$（$\boldsymbol{U}_{LD}$）分别记为雅可比矩阵 $\partial \boldsymbol{F}/\partial \boldsymbol{U}$（$\boldsymbol{U}_{LD}$）的最小和最大特征值，将 $\lambda_B^{(1)}$（$\boldsymbol{U}_{LD}$）和 $\lambda_B^{(4)}$（$\boldsymbol{U}_{LD}$）分别记为雅可比矩阵 $\partial \boldsymbol{G}/\partial \boldsymbol{U}$（$\boldsymbol{U}_{LD}$）的最小和最大特征值，并在状态 $\boldsymbol{U}_{RU}$、$\boldsymbol{U}_{LU}$和$\boldsymbol{U}_{RD}$ 处沿 x方向和 y方向作类似定义，则波速 S_L、S_R、S_D 和 S_U 分别为

$$
\begin{aligned}
S_L &= \alpha \min\left(\lambda_A^{(1)}(\boldsymbol{U}_{LD}), \lambda_A^{(1)}(\boldsymbol{U}_{RD}), \lambda_A^{(1)}(\boldsymbol{U}_{LU}), \lambda_A^{(1)}(\boldsymbol{U}_{RU})\right), \\
S_R &= \alpha \max\left(\lambda_A^{(4)}(\boldsymbol{U}_{LD}), \lambda_A^{(4)}(\boldsymbol{U}_{RD}), \lambda_A^{(4)}(\boldsymbol{U}_{LU}), \lambda_A^{(4)}(\boldsymbol{U}_{RU})\right), \\
S_D &= \alpha \min\left(\lambda_B^{(1)}(\boldsymbol{U}_{LD}), \lambda_B^{(1)}(\boldsymbol{U}_{RD}), \lambda_B^{(1)}(\boldsymbol{U}_{LU}), \lambda_B^{(1)}(\boldsymbol{U}_{RU})\right), \\
S_U &= \alpha \max\left(\lambda_B^{(4)}(\boldsymbol{U}_{LD}), \lambda_B^{(4)}(\boldsymbol{U}_{RD}), \lambda_B^{(4)}(\boldsymbol{U}_{LU}), \lambda_B^{(4)}(\boldsymbol{U}_{RU})\right),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中 $\alpha \geq 1$ 将在后面确定。注意，条件 $\alpha > 1$ 用于保持定理 2.1 中的 PCP 性质。实际上，如果不需要 PCP 性质，α 通常可直接取为 1。定义一维 HLL 型黎曼求解器中波速的方法有多种，参见例如 [6, 18, 11]。下文中，我们只讨论 $S_L < 0 < S_R$和 $S_D < 0 < S_U$的情形，因为当 S_L和 S_R（或 S_D和 S_U）同号时，我们真正多维黎曼求解器将退化为一维黎曼求解器。

与一维 HLL 黎曼求解器类似，需要求出上述二维黎曼问题近似解中的中间态 $\boldsymbol{U}^*$ 以及相应的通量 $\boldsymbol{F}^*$ 和 $\boldsymbol{G}^*$。对于任意给定的时间 $T>0$，在 $(x,\ y,\ t)$ 空间中选取一个三维长方体 $\mathbb{V}_{LRDU}(0,\ T)$，如下所示：其顶面和底面为具有四个顶点的矩形

$$(TS_L, TS_D, 0),\ (TS_R, TS_D, 0),\ (TS_L, TS_U, 0),\ (TS_R, TS_U, 0),$$

and

$$(TS_L, TS_D, T),\ (TS_R, TS_D, T),\ (TS_L, TS_U, T),\ (TS_R, TS_U, T),$$

分别地。在 $\mathbb{V}_{LRDU}(0,\ T)$ 上对 (1.1) 积分可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^*\mathscr{A} &- \int_{TS_L}^{TS_R}\int_{TS_D}^{TS_U}\boldsymbol{U}(x,y,0)dydx \\ &+ \int_0^T\int_{TS_D}^{TS_U}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(TS_R,y,t))dydt - \int_0^T\int_{TS_D}^{TS_U}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(TS_L,y,t))dydt \\ &+ \int_0^T\int_{TS_L}^{TS_R}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x,TS_U,t))dxdt - \int_0^T\int_{TS_L}^{TS_R}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x,TS_D,t))dxdt = 0, \qquad (2.2)\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{U}^* = \frac{1}{\mathscr{A}}\int_{TS_D}^{TS_U}\int_{TS_L}^{TS_R}\boldsymbol{U}(x,y,T)dxdy,\quad \mathscr{A} = T^2(S_R-S_L)(S_U-S_D).$$

由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^* = \frac{1}{\mathscr{A}}\int_{TS_D}^{TS_U}\int_{TS_L}^{TS_R}\boldsymbol{U}(x,y,T)dxdy &= \frac{S_RS_U\boldsymbol{U}_{RU} + S_LS_D\boldsymbol{U}_{LD} - S_RS_D\boldsymbol{U}_{RD} - S_LS_U\boldsymbol{U}_{LU}}{(S_R-S_L)(S_U-S_D)} \\ - \frac{S_U(\boldsymbol{F}_{RU}-\boldsymbol{F}_{LU}) - S_D(\boldsymbol{F}_{RD}-\boldsymbol{F}_{LD})}{(S_R-S_L)(S_U-S_D)} &- \frac{S_R(\boldsymbol{G}_{RU}-\boldsymbol{G}_{RD}) - S_L(\boldsymbol{G}_{LU}-\boldsymbol{G}_{LD})}{(S_R-S_L)(S_U-S_D)}, \qquad (2.3)\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{LU}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{LU})$ 和 $\boldsymbol{G}_{LU}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_{LU})$，而 $\boldsymbol{F}_{RU}$，$\boldsymbol{F}_{LD}$，$\boldsymbol{F}_{RD}$，$\boldsymbol{G}_{RU}$，$\boldsymbol{G}_{LD}$，$\boldsymbol{G}_{RD}$的定义类似。显然，中间态 $\boldsymbol{U}^*$ 的计算取决于四个状态 $\boldsymbol{U}_{LD}$、$\boldsymbol{U}_{LU}$、 $\boldsymbol{U}_{RD}$和 $\boldsymbol{U}_{RU}$，换言之，$\boldsymbol{U}^*$包含真正的多维信息。特别是，如果

$$\boldsymbol{U}_{LD} = \boldsymbol{U}_{LU},\quad \boldsymbol{U}_{RD} = \boldsymbol{U}_{RU},$$

then

$$\boldsymbol{F}_{LD} = \boldsymbol{F}_{LU},\quad \boldsymbol{F}_{RD} = \boldsymbol{F}_{RU},\quad \boldsymbol{G}_{LD} = \boldsymbol{G}_{LU},\quad \boldsymbol{G}_{RD} = \boldsymbol{G}_{RU},$$

and

$$\boldsymbol{U}^* = \frac{S_R\boldsymbol{U}_{RD} - S_L\boldsymbol{U}_{LU} + \boldsymbol{F}_{LD} - \boldsymbol{F}_{RD}}{S_R - S_L}, \tag{2.4}$$

这确实是 [39] 中一维 HLL 黎曼求解器的中间态。

现在来求多维黎曼求解器的界面通量 $\boldsymbol{F}^*$ 和 $\boldsymbol{G}^*$ （针对 $S_L < 0 < S_R$ 和 $S_D < 0 < S_U$的情况）。分别对控制体 $\mathbb{V}_{LRDU}(\mathbf{0}, T)$ 的左侧部分和顶部部分（或右侧和底部部分）积分系统 (1.1)，可得

$$\begin{aligned}
\int_{TS_L}^{0}\int_{TS_D}^{TS_U} \boldsymbol{U}(x,y,T)dydx = &\int_{TS_L}^{0}\int_{TS_D}^{TS_U} \boldsymbol{U}(x,y,0)dydx \\
&- \int_0^T \int_{TS_D}^{TS_U} \big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(0,y,t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(TS_L,y,t))\big)dydt \\
&- \int_0^T \int_{TS_L}^{0} \big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x,TS_U,t)) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x,TS_D,t))\big)dxdt, \qquad (2.5)\\
\int_{TS_L}^{TS_R}\int_{0}^{TS_U} \boldsymbol{U}(x,y,T)dydx = &\int_{TS_L}^{TS_R}\int_{0}^{TS_U} \boldsymbol{U}(x,y,0)dydx \\
&- \int_0^T \int_{0}^{TS_U} \big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(TS_R,y,t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(TS_L,y,t))\big)dydt \\
&- \int_0^T \int_{TS_L}^{TS_R} \big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x,TS_U,t)) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x,0,t))\big)dxdt. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

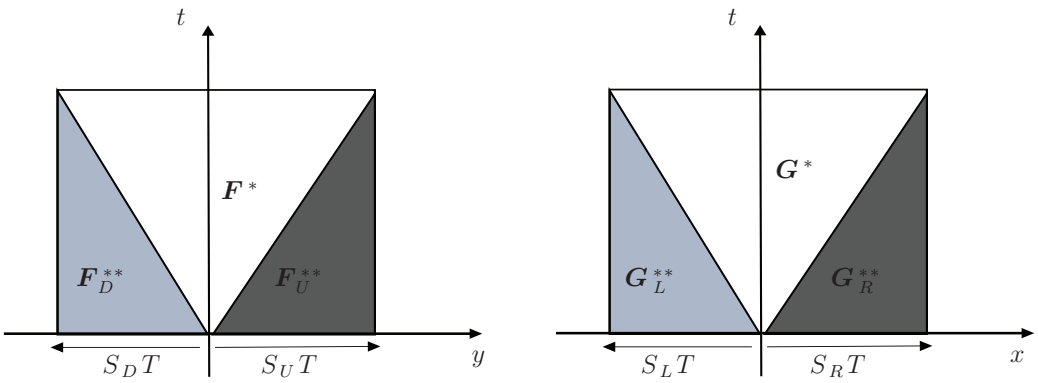


图2.2：左侧面 $x = 0$ 和右侧面 $y = 0$ 上的通量分别由若干不同部分组成。

如图2.2所示，沿 $x = 0$ （左侧）和 $y = 0$ （右侧）各面的通量分别由若干不同部分组成，因此式（2.5）中的积分以及

(2.6)

在 $x=0$ 面和 $y=0$ 面上分别可写为

$$\int_0^T \int_{TS_D}^{TS_U} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(0,y,t))dydt = \frac{T^2}{2}\bigg(S_U\boldsymbol{F}_U^{**} - S_D\boldsymbol{F}_D^{**} + (S_U - S_D)\boldsymbol{F}^*\bigg), \tag{2.7}$$

$$\int_0^T \int_{TS_L}^{TS_R} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x,0,t))dxdt = \frac{T^2}{2}\bigg(S_R\boldsymbol{G}_R^{**} - S_L\boldsymbol{G}_L^{**} + (S_R - S_L)\boldsymbol{G}^*\bigg), \tag{2.8}$$

其中，$\boldsymbol{F}_U^{**}$，$\boldsymbol{F}_D^{**}$，$\boldsymbol{G}_R^{**}$和$\boldsymbol{G}_L^{**}$是一维 HLL 黎曼求解器中对应的一维 HLL 通量，其具体形式为

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{1d-HLL}}(\boldsymbol{U}_{LU},\boldsymbol{U}_{RU}) := \boldsymbol{F}_U^{**} = \frac{1}{S_R - S_L}\bigg(S_R\boldsymbol{F}_{LU} - S_L\boldsymbol{F}_{RU} + S_LS_R(\boldsymbol{U}_{RU} - \boldsymbol{U}_{LU})\bigg), \tag{2.9}$$

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{1d-HLL}}(\boldsymbol{U}_{LD},\boldsymbol{U}_{RD}) := \boldsymbol{F}_D^{**} = \frac{1}{S_R - S_L}\bigg(S_R\boldsymbol{F}_{LD} - S_L\boldsymbol{F}_{RD} + S_LS_R(\boldsymbol{U}_{RD} - \boldsymbol{U}_{LD})\bigg), \tag{2.10}$$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{1d-HLL}}(\boldsymbol{U}_{RD},\boldsymbol{U}_{RU}) := \boldsymbol{G}_R^{**} = \frac{1}{S_U - S_D}\bigg(S_U\boldsymbol{G}_{RD} - S_D\boldsymbol{G}_{RU} + S_DS_U(\boldsymbol{U}_{RU} - \boldsymbol{U}_{RD})\bigg), \tag{2.11}$$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{1d-HLL}}(\boldsymbol{U}_{LD},\boldsymbol{U}_{LU}) := \boldsymbol{G}_L^{**} = \frac{1}{S_U - S_D}\bigg(S_U\boldsymbol{G}_{LD} - S_D\boldsymbol{G}_{LU} + S_DS_U(\boldsymbol{U}_{LU} - \boldsymbol{U}_{LD})\bigg). \tag{2.12}$$

将式 (2.3) 与式 (2.5)–(2.12) 中的关系结合，可得

$$\boldsymbol{F}^* = \frac{1}{S_U - S_D}\bigg(S_U\boldsymbol{F}_U^{**} - S_D\boldsymbol{F}_D^{**} - \frac{2S_LS_R}{S_R - S_L}(\boldsymbol{G}_{RU} - \boldsymbol{G}_{RD} - \boldsymbol{G}_{LU} + \boldsymbol{G}_{LD})\bigg), \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{G}^* = \frac{1}{S_R - S_L}\bigg(S_R\boldsymbol{G}_R^{**} - S_L\boldsymbol{G}_L^{**} - \frac{2S_DS_U}{S_U - S_D}(\boldsymbol{F}_{RU} - \boldsymbol{F}_{RD} - \boldsymbol{F}_{LU} + \boldsymbol{F}_{LD})\bigg), \tag{2.14}$$

它们是在 $S_L < 0 < S_R$ 和 $S_D < 0 < S_U$ 情况下的二维 HLL 通量。对于 S_L，S_R，S_D，S_U取特定符号（正或负）的所有其他情况，我们仍可类似地计算上述积分在 $x=0$ 和 $y=0$ 面上的值，并根据式 (2.5) 和式 (2.6)，在多维黎曼求解器中得到通量 $\boldsymbol{F}^*$ 和 $\boldsymbol{G}^*$。因此，若令 [39]

$$S_L^- = \min(S_L,0),\quad S_R^+ = \max(S_R,0),\quad S_D^- = \min(S_D,0),\quad S_U^+ = \max(S_U,0), \tag{2.15}$$

于是，对于所有情形，多维黎曼求解器中的二维 HLL 通量 $\boldsymbol{F}^*$ 和 $\boldsymbol{G}^*$ 可表示如下

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{2d-HLL}}(\boldsymbol{U}_{LD},\boldsymbol{U}_{LU},\boldsymbol{U}_{RD},\boldsymbol{U}_{RU}) &:= \boldsymbol{F}^* \\ &= \frac{1}{S_U^+ - S_D^-}\bigg(S_U^+\boldsymbol{F}_U^{**} - S_D^-\boldsymbol{F}_D^{**} - \frac{2S_L^-S_R^+}{S_R^+ - S_L^-}(\boldsymbol{G}_{RU} - \boldsymbol{G}_{RD} - \boldsymbol{G}_{LU} + \boldsymbol{G}_{LD})\bigg),\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{2d-HLL}}(\boldsymbol{U}_{LD},\boldsymbol{U}_{LU},\boldsymbol{U}_{RD},\boldsymbol{U}_{RU}) &:= \boldsymbol{G}^{*}\\ &= \frac{1}{S_R^{+}-S_L^{-}}\bigg(S_R^{+}\boldsymbol{G}_R^{**}-S_L^{-}\boldsymbol{G}_L^{**}-\frac{2S_D^{-}S_U^{+}}{S_U^{+}-S_D^{-}}(\boldsymbol{F}_{RU}-\boldsymbol{F}_{RD}-\boldsymbol{F}_{LU}+\boldsymbol{F}_{LD})\bigg).\end{aligned} \tag{2.17}$$

接下来，我们研究多维 HLL 黎曼求解器的 PCP 性质，即多维黎曼求解器中的中间态 $\boldsymbol{U}^{*}$ 是可容许的。这里只需讨论 $S_L<0<S_R$，$S_D<0<S_U$ 的情形，因为所有其他情形（除非平凡情形 $S_L<0<S_R$，$S_D<0<S_U$）都会产生一维中间态，根据 [23]可很容易证明该中间态具有 PCP 性质。带有（2.1）的多维 HLL 黎曼求解器的 PCP 性质如下所示。

定理 2.1。若 $\boldsymbol{U}_{RU}$、$\boldsymbol{U}_{LU}$、$\boldsymbol{U}_{LD}$、$\boldsymbol{U}_{RD}\in\mathcal{G}$ 以及波速 S_L、S_R、S_D、S_U 取为(2.1) 中的形式，且 $\alpha=2$，则多维 *HLL* 黎曼求解器在 (2.3) 中得到的中间态 $\boldsymbol{U}^{*}$ 是可容许的，即

$$D^{*}>0,\quad E^{*}>0,\quad (E^{*})^2-(D^{*})^2-|\boldsymbol{m}^{*}|^2>0.$$

证明。假设 $S_L<0<S_R$ 和 $S_D<0<S_U$。将 (2.3) 中的 $\boldsymbol{U}^{*}$ 改写为

$$\boldsymbol{U}^{*}=\frac{1}{\mathscr{B}}\bigg(S_LS_D\boldsymbol{H}_{LD}-S_RS_D\boldsymbol{H}_{RD}-S_LS_U\boldsymbol{H}_{LU}+S_RS_U\boldsymbol{H}_{RU}\bigg),$$

其中 $\mathscr{B}=(S_R-S_L)(S_U-S_D)$，并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{LD}&=\boldsymbol{U}_{LD}-\frac{1}{S_L}\boldsymbol{F}_{LD}-\frac{1}{S_D}\boldsymbol{G}_{LD},\quad \boldsymbol{H}_{RD}=\boldsymbol{U}_{RD}-\frac{1}{S_R}\boldsymbol{F}_{RD}-\frac{1}{S_D}\boldsymbol{G}_{RD},\\ \boldsymbol{H}_{LU}&=\boldsymbol{U}_{LU}-\frac{1}{S_L}\boldsymbol{F}_{LU}-\frac{1}{S_U}\boldsymbol{G}_{LU},\quad \boldsymbol{H}_{RU}=\boldsymbol{U}_{RU}-\frac{1}{S_R}\boldsymbol{F}_{RU}-\frac{1}{S_U}\boldsymbol{G}_{RU}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{U}^{*}$ 是 $\boldsymbol{H}_{LD}$、$\boldsymbol{H}_{RD}$、$\boldsymbol{H}_{LU}$、$\boldsymbol{H}_{RU}$ 的凸组合。根据引理 1.1，只需检验这些 $\boldsymbol{H}$ 项是否属于可容许集 $\mathcal{G}$。例如，考虑项 $\boldsymbol{H}_{LD}$，它可以分解为以下两部分

$$\boldsymbol{H}_{LD}=\boldsymbol{U}_{LD}-\frac{1}{S_L}\boldsymbol{F}_{LD}-\frac{1}{S_D}\boldsymbol{G}_{LD}=\frac{1}{2}\bigg(\boldsymbol{U}_{LD}-\frac{2}{S_L}\boldsymbol{F}_{LD}\bigg)+\frac{1}{2}\bigg(\boldsymbol{U}_{LD}-\frac{2}{S_D}\boldsymbol{G}_{LD}\bigg).$$

引理 1.2 中的性质 (ii) 和 (iii) 表明 $\boldsymbol{U}_{LD}-\frac{2}{S_L}\boldsymbol{F}_{LD}$ 和 $\boldsymbol{U}_{LD}-\frac{2}{S_D}\boldsymbol{G}_{LD}$ 均具有可容许性，$\boldsymbol{H}_{LD}$ 也是如此。类似地，可以证明其他 $\boldsymbol{H}$- 项也都是可容许的。证明完毕。

□

3 数值格式

本节针对特殊的相对论流体动力学方程 (1.1)，介绍采用上述多维 HLL 黎曼求解器的一阶和高阶精度保持物理约束有限体积格式。

3.1 一阶保持物理约束格式

考虑空间 x, y 中的二维笛卡尔网格 $\{(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) | \Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \Delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}, i, j \in \mathbb{Z}\}$，并定义矩形网格单元 $I_{ij} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$。假设$t_{n+1} = t_n + \Delta t^n$，其中 $t_0 = 0$，Δt^n 为 $t = t_n$ 时的时间步长，稍后确定，$n = 0, 1, 2, \cdots$。在 t_n时的数值解通过使用 $\boldsymbol{U}$ 在网格单元 I_{ij}上的（近似）单元平均值 $\boldsymbol{U}_{ij}^n$ 重构为分片常数函数。

—

对网格单元 $I_{ij} \times [t_n, t_{n+1})$ 上的 RHD 系统 (1.1) 进行积分，可得到以下有限体积格式

$$\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n+1} = \overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\big(\widehat{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2},j} - \widehat{\boldsymbol{F}}_{i-\frac{1}{2},j}\big) - \frac{\Delta t^n}{\Delta y_j}\big(\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j-\frac{1}{2}}\big), \tag{3.1}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2},j}$且 $\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j+\frac{1}{2}}$为用于近似通量积分的数值通量

$$\begin{aligned} I^y_{i+\frac{1}{2},j} &:= \frac{1}{\Delta t^n \Delta y_j} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t_n)) dy dt, \\ I^x_{i,j+\frac{1}{2}} &:= \frac{1}{\Delta t^n \Delta x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t_n)) dx dt, \end{aligned} \tag{3.2}$$

分别由此确定，且 Δt^n 由 CFL 型条件确定

$$\Delta t^n \le \sigma \min_{i,j} \left\{ \frac{\Delta x_i}{\max\left(|\lambda_A^{(1)}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^n)|, |\lambda_A^{(4)}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^n)|\right)}, \frac{\Delta y_j}{\max\left(|\lambda_B^{(1)}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^n)|, |\lambda_B^{(4)}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^n)|\right)} \right\}, \tag{3.3}$$

此处的 CFL 数为 $\sigma \le \frac{1}{2}$。注意，(3.1) 也可通过对网格单元 $I_{ij} \times [t_n, t_{n+1}$上的相对论流体动力学系统 (1.1) 积分推导得出。根据 [2], ，见图2.2，数值通量 $\boldsymbol{F}$和 $\boldsymbol{G}$ 分别由网格单元边中心处的一维黎曼求解器和网格单元边两个端点处的二维黎曼求解器给出。例如，数值通量 $\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},\,j}$由三部分组成：$\boldsymbol{F}^{**}_{i+\frac{1}{2},\,j}$由点 $(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_j)$ 处的一维 HLL 黎曼求解器计算得到，以及

$\boldsymbol{F}^*_{i+\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{F}^*_{i+\frac{1}{2},\,j+\frac{1}{2}}$分别由 $(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{j-\frac{1}{2}})$ 和 $(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{j+\frac{1}{2}})$ 处的二维 HLL 黎曼求解器计算得到，其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^{**}_{i+\frac{1}{2},j} &= \widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{1d-HLL}}(\boldsymbol{U}^L_{i+\frac{1}{2},j}, \boldsymbol{U}^R_{i+\frac{1}{2},j}),\\
\boldsymbol{F}^{*}_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}} &= \widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{2d-HLL}}\big(\boldsymbol{U}^{LD}_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}, \boldsymbol{U}^{LU}_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}, \boldsymbol{U}^{RD}_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}, \boldsymbol{U}^{RU}_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}\big),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中，$\boldsymbol{U}^L_{i+\frac{1}{2},\,j}$、$\boldsymbol{U}^R_{i+\frac{1}{2},\,j}$分别是 $\boldsymbol{U}$在边中心$x = x_{i+\frac{1}{2}}$处的左、右限制近似；$\boldsymbol{U}^{LD}_{i+\frac{1}{2},\,j\pm\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{U}^{RD}_{i+\frac{1}{2},\,j\pm\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{U}^{LU}_{i+\frac{1}{2},\,j\pm\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{U}^{RU}_{i+\frac{1}{2},\,j\pm\frac{1}{2}}$分别是 $\boldsymbol{U}$在节点（$x_{i+\frac{1}{2}}$、$y_{j\pm\frac{1}{2}}$）处的左下、右下、左上和右上限制近似，定义如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}^L_{i+\frac{1}{2},j} = \overline{\boldsymbol{U}}_{ij}, \qquad \boldsymbol{U}^R_{i+\frac{1}{2},j} = \overline{\boldsymbol{U}}_{i+1,j}, \qquad \boldsymbol{U}^{LD}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \overline{\boldsymbol{U}}_{ij},\\
&\boldsymbol{U}^{RD}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \overline{\boldsymbol{U}}_{i+1,j},\ \boldsymbol{U}^{LU}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \overline{\boldsymbol{U}}_{i,j+1},\ \boldsymbol{U}^{RU}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \overline{\boldsymbol{U}}_{i+1,j+1}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

实际上，对于 $S_D < 0 < S_U$的情况，参见 -eps-converted-to.pdf 2.2和 3.1 左侧的示意图，数值通量 $\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},\,j}$可由下式导出：

$$\begin{aligned}
I^y_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{\Delta t^n \Delta y_j}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y^U_{j-\frac{1}{2}}} + \int_{y^U_{j-\frac{1}{2}}}^{y^D_{j+\frac{1}{2}}} + \int_{y^D_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right\} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t_n)\ dydt\\
&\approx \frac{S_{U,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\Delta t^n}{2\Delta y_j}\boldsymbol{F}^*_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \Big(1 - \frac{(S_{U,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - S_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})\Delta t^n}{2\Delta y_j}\Big)\boldsymbol{F}^{**}_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{S_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta t^n}{2\Delta y_j}\boldsymbol{F}^*_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

在假设 $(S_{U,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - S_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})\dfrac{\Delta t^n}{2\Delta y_j} \le 1$) 的条件下，其中 $y^U_{j-\frac{1}{2}} := y_{j-\frac{1}{2}} + S_{U,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\Delta t^n$，$y^D_{j+\frac{1}{2}} := y_{j+\frac{1}{2}} + S_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta t^n$。类似地，数值通量 $\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j+\frac{1}{2}}$ 由 $\boldsymbol{G}^{**}_{i,j+\frac{1}{2}}$ 和 $\boldsymbol{G}^*_{i\pm\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ 组成，它们分别由位于 $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$ 的一维 HLL 黎曼求解器，以及位于 $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ 和 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ 的二维 HLL 黎曼求解器计算得到；此外，也可以在假设

$\dfrac{(S_{R,i-\frac{1}{2},\,j+\frac{1}{2}} - S_{L,i+\frac{1}{2},\,j+\frac{1}{2}})\Delta t^n}{2\Delta x_i} \le 1$) 。借助（2.15）中 S^-_L、S^+_R、S^-_D、S^+_U的定义，（3.1）中的数值通量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 最终表示为

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\Delta t^n}{2\Delta y_j}S^+_{U,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\boldsymbol{F}^*_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^n}{2\Delta y_j}S^-_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\boldsymbol{F}^*_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\\
&\quad + \left(1 - \frac{\Delta t^n}{2\Delta y_j}(S^+_{U,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - S^-_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})\right)\boldsymbol{F}^{**}_{i+\frac{1}{2},j},\\
\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta t^n}{2\Delta x_i}S^+_{R,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\boldsymbol{G}^*_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^n}{2\Delta x_i}S^-_{L,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\boldsymbol{G}^*_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$+\left(1-\frac{\Delta t^n}{2\Delta x_i}(S^+_{R,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-S^-_{L,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})\right)\boldsymbol{G}^{**}_{i,j+\frac{1}{2}}, \tag{3.7}$$

在时间步长约束下

$$\Delta t^n \le \min_{i,j}\left(\frac{2\Delta x_i}{S^+_{R,i-\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}-S^-_{L,i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}},\frac{2\Delta y_j}{S^+_{U,i\pm\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-S^-_{D,i\pm\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}\right), \tag{3.8}$$

这比（3.3）更弱。

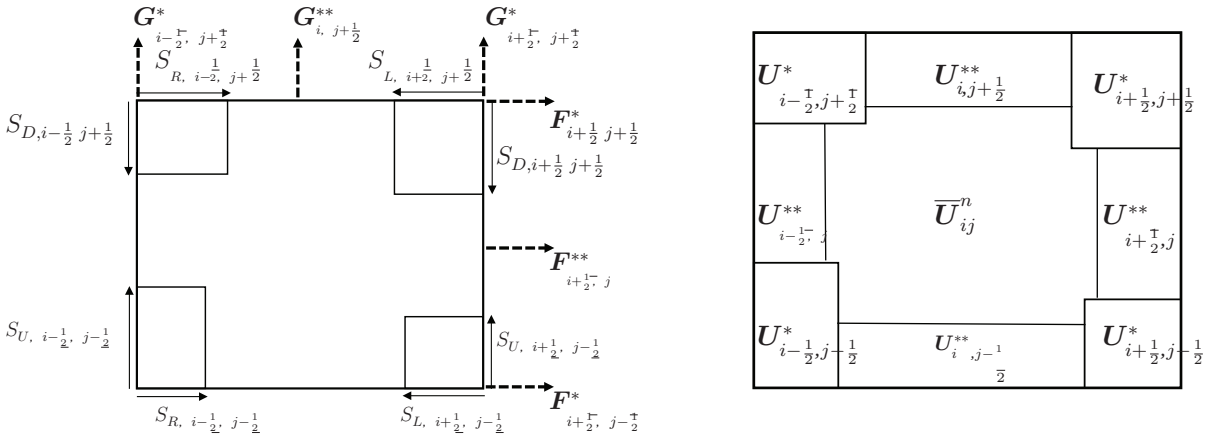


图 3.1：数值格式（3.1）的数值通量（左）和近似解（右）的示意图。

现在讨论采用数值通量 (3.6) 和 (3.7) 的格式 (3.1) 的 PCP 性质。根据一维和二维 HLL 黎曼求解器，在满足 CFL 条件 (3.3) 且$\sigma \le \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{U}^{n+1}_{ij}$的情况下，格式 (3.1) 可写为对网格单元 I_{ij} 上这些近似黎曼解进行精确积分，即

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{U}}^{n+1}_{ij}=\frac{1}{\Delta x_i\Delta y_j}\Bigg(&\int_{\Omega_1}R_h(x/t,y/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j-1},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j-1},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})dxdy+\int_{\Omega_5}\widetilde{R}_h(x/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})dxdy\\
&+\int_{\Omega_2}R_h(x/t,y/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j-1},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j-1},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j})dxdy+\int_{\Omega_6}\widetilde{R}_h(x/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j})dxdy\\
&+\int_{\Omega_3}R_h(x/t,y/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j+1},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1})dxdy+\int_{\Omega_7}\widetilde{R}_h(y/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j-1},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})dxdy\\
&+\int_{\Omega_4}R_h(x/t,y/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j+1})dxdy+\int_{\Omega_8}\widetilde{R}_h(y/t,\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij},\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1})dxdy\\
&+\int_{I_{ij}\setminus\bigcup_{m=1}^{8}\Omega_m}\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij}dxdy\Bigg),\end{aligned}$$

其中，$R_h(x/t,\ y/t,\ \overline{\boldsymbol{U}}_1,\ \overline{\boldsymbol{U}}_2,\ \boldsymbol{U}_3,\ \boldsymbol{U}_4)$ 是具有四个初始状态 $\boldsymbol{U}_1$，$\boldsymbol{U}_2$，$\boldsymbol{U}_3$ 和 $\boldsymbol{U}_4$ 的二维黎曼问题的近似解；$\widetilde{R}_h(z/t,\ \boldsymbol{U}_1,\ \boldsymbol{U}_2)$ 是沿 z 方向、具有两个初始状态 $\boldsymbol{U}_1$，$\boldsymbol{U}_2$ 和 $z=x$，y 的一维黎曼问题的近似解，并且

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{R,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{U,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right],\\
\Omega_2 &= \left[x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_{L,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{U,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right],\\
\Omega_3 &= \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{R,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_{D,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right],\\
\Omega_4 &= \left[x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_{L,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right],\\
\Omega_5 &= \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_1\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{U,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_{D,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right],\\
\Omega_6 &= \left[x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_2, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{U,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_{D,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right],\\
\Omega_7 &= \left[x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{R,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{L,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_3\right],\\
\Omega_8 &= \left[x_{i-\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{R,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^+_{L,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta t^n S^-_4, y_{j+\frac{1}{2}}\right],
\end{aligned}
$$

这里，$S^- = \min(0,\ S)$ $S^+ = \max(0,\ S)$，S_1 和 S_2 分别是二维黎曼问题 RP$\{\boldsymbol{U}^n_{i-1,j}, \boldsymbol{U}^n_{ij}\}$ 和 RP$\{\boldsymbol{U}^n_{ij}, \boldsymbol{U}^n_{i+1,j}\}$对应的一维黎曼HLL求解器中的最大和最小波速；$S_3$ 和 S_4 分别是二维黎曼问题 RP$\{\boldsymbol{U}^n_{i,j-1}, \boldsymbol{U}^n_{ij}\}$ 和 RP$\{\boldsymbol{U}^n_{ij}, \boldsymbol{U}^n_{i,j+1}\}$对应的一维黎曼HLL求解器中的最大和最小波速。基于上述一维和二维 HLL 黎曼求解器，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} R_h(x/t, y/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j-1}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j-1}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})dxdy = |\Omega_1|\boldsymbol{U}^*_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}},\\
&\int_{\Omega_2} R_h(x/t, y/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j-1}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j-1}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j})dxdy = |\Omega_2|\boldsymbol{U}^*_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}},\\
&\int_{\Omega_3} R_h(x/t, y/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j+1}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1})dxdy = |\Omega_3|\boldsymbol{U}^*_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},\\
&\int_{\Omega_4} R_h(x/t, y/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j+1})dxdy = |\Omega_4|\boldsymbol{U}^*_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},\\
&\int_{\Omega_5} \widetilde{R}_h(x/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i-1,j}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})dxdy = |\Omega_5|\boldsymbol{U}^{**}_{i-\frac{1}{2},j}, \quad \int_{\Omega_6} \widetilde{R}_h(x/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j})dxdy = |\Omega_6|\boldsymbol{U}^{**}_{i+\frac{1}{2},j},\\
&\int_{\Omega_7} \widetilde{R}_h(y/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j-1}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})dxdy = |\Omega_7|\boldsymbol{U}^{**}_{i,j-\frac{1}{2}}, \quad \int_{\Omega_8} \widetilde{R}_h(y/t, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij}, \overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1})dxdy = |\Omega_8|\boldsymbol{U}^{**}_{i,j+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

其中，$|\Omega_m|$ 表示计算域Ω_m的面积，$m = 1$、2、$\cdots$、8，带有上标“$*$”和“$**$”的项分别由二维和一维 HLL 黎曼求解器得到。显然，

对于 $S_L < 0 < S_R$、$S_D < 0 < S_U$ 的非平凡情形，更新后的解 $\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}$ 可以重新表述为九项的凸组合：$\boldsymbol{U}_{ij}^{n}$、$\boldsymbol{U}_{i-\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{*}$、$\boldsymbol{U}_{i+\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{*}$、$\boldsymbol{U}_{i-\frac{1}{2},\,j+\frac{1}{2}}^{*}$、$\boldsymbol{U}_{i-\frac{1}{2},\,j+\frac{1}{2}}^{*}$以及 $\boldsymbol{U}_{i-\frac{1}{2},\,j}^{**}$、$\boldsymbol{U}_{i+\frac{1}{2},\,j}^{**}$、$\boldsymbol{U}_{i,\,j-\frac{1}{2}}^{**}$、$\boldsymbol{U}_{i,\,j+\frac{1}{2}}^{**}$，见图 3.1 右侧示意图。另一方面，显然可以知道，凸组合中的每一项都是可容许的，见第 2 节，因此，一阶格式 (3.1) 与 (3.5)-(3.7) 对应的数值解 $\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}$ 也是可容许的。我们在下面的定理中总结这一结果。

定理 3.1。若 $\boldsymbol{U}_{ij}^{n} \in \mathcal{G}$，对所有 i、$j \in \mathbb{Z}$，且波速 S_D、S_U、S_L、S_R 由(2.1) 估计，其中 $\alpha = 2$，则采用(3.1) 一阶格式、结合(3.5)–(3.7) 以及多维黎曼求解器得到的 $\boldsymbol{U}_{ij}^{n+1}$，在 (3.3) 所示的时间步长限制下，其中 $\sigma \leq \frac{1}{2}$，属于可容许状态集 $\mathcal{G}$。

注 3.1。(3.6)-(3.7)中的数值通量还可以进一步推广为

$$\widehat{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2},j} = \alpha \boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{*} + \beta \boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{*} + \left(1-(\alpha+\beta)\right)\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{**}, \tag{3.9}$$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha} \boldsymbol{G}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{*} + \tilde{\beta} \boldsymbol{G}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{*} + \left(1-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})\right)\boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{**}, \tag{3.10}$$

例如，在 $S_D < 0 < S_U$、$S_L < 0 < S_R$ 的情况下，通过近似通量积分 $I_{i+\frac{1}{2},\,j}^{y}$ 和 $I_{i,\,j+\frac{1}{2}}^{x}$，可以类似地得到这些结果，

$$I_{i+\frac{1}{2},j}^{y} \approx \alpha \boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{*} + \big(1-(\alpha+\beta)\big)\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{**} + \beta \boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{*},$$

$$I_{i,j+\frac{1}{2}}^{x} \approx \tilde{\alpha} \boldsymbol{G}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{*} + \big(1-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})\big)\boldsymbol{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{**} + \tilde{\beta} \boldsymbol{G}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{*},$$

其中 α、β、$\tilde{\alpha}$ 和 β 满足 α、$\beta \geq 0$、$\alpha+\beta \leq 1$、$\tilde{\alpha}$、$\beta \geq 0$ 和 $\tilde{\alpha}+\beta \leq 1$。显然，这些量可能与辛普森公式或三点高斯–洛巴托求积的权重有关。值得注意的是，在某些适当的 *CFL* 型条件下，定理 *3.1* 中的 *PCP* 性质可由采用(3.1) 格式并结合(3.9)–(3.10)的格式保持。

3.2 高阶保持物理约束方案

本小节针对 (1.1)，采用前述二维 HLL 黎曼求解器、高阶初始重构、通量积分 (3.2) 的高阶近似、PCP通量限制器以及显式SSP Runge-Kutta时间离散，构造高阶精度的PCP格式。

这里采用具有 K 个节点及权重 $\{\omega_\alpha$ 的 Gauss-Lobatto求积: $\sum_{\alpha=1}^{K}\omega_\alpha=1\}$，以计算通量积分 (3.2)，从而纳入二维 HLL 黎曼求解器，其中，对于 (1.1) 的 $(r+1)$ 阶精度格式，$2K-3\geq r$。

分别将区间 $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ 和 $[y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的 Gauss-Lobatto求积点记为如下形式

$$S_i^x=\{x_i^\alpha,\ \alpha=1,2,\cdots,K\},\tag{3.11}$$

and

$$S_j^y=\left\{y_j^\beta,\ \beta=1,2,\cdots,K\right\},\tag{3.12}$$

并将网格单元 I_{ij} 上的 Gauss-Lobatto求积点定义为

$$S_{ij}=\left\{(x_i^\alpha,y_j^\beta),\ \alpha,\beta=1,2,\cdots,K\right\}.$$

利用网格单元 I_{ij} 上 t_n 处 $\boldsymbol{U}$ 的（近似）单元平均值 $\boldsymbol{U}_{ij}^n$，结合局部特征分解，分别在 x 方向和 y 方向进行逐维 WENO重构 [37]，从而得到 $\boldsymbol{U}$ 在求积点 S_i^x、S_j^y、S_{ij} 处的高阶WENO近似，分别记为

$$\boldsymbol{U}_{ij}^n(x_{i+\frac{1}{2}},y_j^\beta),\quad \boldsymbol{U}_{ij}^n(x_i^\alpha,y_{j+\frac{1}{2}}),\quad \boldsymbol{U}_{ij}^n(x_i^\alpha,y_j^\beta).$$

有关详细内容，读者还可参阅 [57]。利用点值 $\boldsymbol{U}_{ij}^n(x_i^\alpha,y_j^\beta)$，还可以通过拉格朗日插值将 t_n 处的数值解进一步重构为分片多项式，其中 $\boldsymbol{U}_{ij}^n(x,y)$，对于 $(x,y)\in I_{ij}$。

基于上述重构以及含有 K 个点的 Gauss-Lobatto求积，式 (3.2) 中的通量积分可近似计算如下

$$\begin{aligned}
I^y_{i+\frac{1}{2},j}&\approx\sum_{\beta=1}^{K}\omega_\beta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{ij}^n(x_{i+\frac{1}{2}},y_j^\beta))\approx\sum_{\beta=1}^{K}\omega_\beta\widehat{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2},j_\beta}=:\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{high}}_{i+\frac{1}{2},j},\\
I^x_{i,j+\frac{1}{2}}&\approx\sum_{\alpha=1}^{K}\tilde{\omega}_\alpha\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_{ij}^n(x_i^\alpha,y_{j+\frac{1}{2}}))\approx\sum_{\alpha=1}^{K}\tilde{\omega}_\alpha\widehat{\boldsymbol{G}}_{i_\alpha,j+\frac{1}{2}}=:\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{high}}_{i,j+\frac{1}{2}},
\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中，$\{\omega_\beta\}$和 $\{\tilde{\omega}_\alpha\}$分别表示$I^y_{i+\frac{1}{2},\,j}$和$I^x_{i\,,\,j+\frac{1}{2}}$、$\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},\,j_\beta}$和$\boldsymbol{G}_{i_\alpha,\,j+\frac{1}{2}}$的求积权重；它们表示在求积点（$x_{i+\frac{1}{2}}$，$y^\beta_j$）和（$x^\alpha_i$，$y_{j+\frac{1}{2}}$）处，分别使用一维或二维 HLL黎曼求解器计算得到的数值通量。特别地，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{high}}_{i\pm\frac{1}{2},j} &= \sum_{\beta=1}^{K}\omega_\beta\widehat{\boldsymbol{F}}_{i\pm\frac{1}{2},j_\beta} = \omega_1(\boldsymbol{F}^*_{i\pm\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{F}^*_{i\pm\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \sum_{\beta=2}^{K-1}\omega_\beta\boldsymbol{F}^{**}_{i\pm\frac{1}{2},j_\beta},\\
\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{high}}_{i,j\pm\frac{1}{2}} &= \sum_{\alpha=1}^{K}\tilde{\omega}_\alpha\widehat{\boldsymbol{G}}_{i_\alpha,j\pm\frac{1}{2}} = \tilde{\omega}_1(\boldsymbol{G}^*_{i-\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}} + \boldsymbol{G}^*_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}) + \sum_{\alpha=2}^{K-1}\tilde{\omega}_\alpha\boldsymbol{G}^{**}_{i_\alpha,j+\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

于是，格式 (3.1) 变为

$$\overline{\boldsymbol{U}}^{n+1}_{ij} = \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij} - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\big(\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{high}}_{i+\frac{1}{2},j} - \widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{high}}_{i-\frac{1}{2},j}\big) - \frac{\Delta t^n}{\Delta y_j}\big(\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{high}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{high}}_{i,j-\frac{1}{2}}\big). \tag{3.15}$$

一般而言，采用数值通量 (3.14) 的高阶精度格式 (3.15) 不满足 PCP 性质，也就是说，我们无法保证由 (3.15) 得到的 $(\boldsymbol{U}^{n+1}_{ij})^{\text{high}} := \boldsymbol{U}^{n+1}_{ij}$ 属于可容许集 $\mathcal{G}$。这里，我们在 [45] 中使用 PCP通量限制器，得到以下高阶保正性保持（PCP）格式

$$\overline{\boldsymbol{U}}^{n+1}_{ij} = \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij} - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\big(\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{PCP}}_{i+\frac{1}{2},j} - \widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{PCP}}_{i-\frac{1}{2},j}\big) - \frac{\Delta t^n}{\Delta y_j}\big(\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{PCP}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{PCP}}_{i,j-\frac{1}{2}}\big), \tag{3.16}$$

其中

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{PCP}}_{i\pm\frac{1}{2},j} = \big(1-\theta^x_{i\pm\frac{1}{2},j}\big)\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{low}}_{i\pm\frac{1}{2},j} + \theta^x_{i\pm\frac{1}{2},j}\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{high}}_{i\pm\frac{1}{2},j}, \tag{3.17}$$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{PCP}}_{i,j\pm\frac{1}{2}} = \big(1-\theta^y_{i,j\pm\frac{1}{2}}\big)\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{low}}_{i,j\pm\frac{1}{2}} + \theta^y_{i,j\pm\frac{1}{2}}\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{high}}_{i,j\pm\frac{1}{2}}, \tag{3.18}$$

with

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{F}}^{\text{low}}_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij}) + \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j}) - \alpha^n_{i+\frac{1}{2},j}(\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i+1,j} - \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})\Big),\\
\widehat{\boldsymbol{G}}^{\text{low}}_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{G}(\overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij}) + \boldsymbol{G}(\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1}) - \beta^n_{i,j+\frac{1}{2}}(\overline{\boldsymbol{U}}^n_{i,j+1} - \overline{\boldsymbol{U}}^n_{ij})\Big),
\end{aligned}$$

且 $\alpha^n_{i+\frac{1}{2},j} = \max\{\varrho^x(\boldsymbol{U}^n_{i+1,j})\ \varrho^x(\boldsymbol{U}^n_{i\,,j})\}$，$\beta^n_{i\,,j+\frac{1}{2}} = \max\{\varrho^y(\boldsymbol{U}^n_{i\,,j+1})\ \varrho^y(\boldsymbol{U}^n_{i\,,j})\}$。这里，$\varrho^x$和 ϱ^y分别为雅可比矩阵 $\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{U}$和 $\partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{U}$的谱半径，$\theta^x_{i\pm\frac{1}{2},j}$以及 $\theta^y_{i\,,j\pm\frac{1}{2}}$ 分别是下文为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$定义的 PCP通量限制器。

若假设$\boldsymbol{U}^n_{ij}\in\mathcal{G}$对任意 i，j，并满足 CFL型条件

$$\Delta t^n \le \frac{1}{4}\min_{i,j}\Big(\frac{\Delta x_i}{\alpha^n_{i+\frac{1}{2},j}}, \frac{\Delta y_j}{\beta^n_{i,j+\frac{1}{2}}}\Big), \tag{3.19}$$

则利用引理 1.2 中 $\mathcal{G}$ 的性质可得

$$\boldsymbol{U}_{ij}^{\pm,\mathrm{low}} := \overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n} \mp \frac{4\Delta t^n}{\Delta x_i}\widehat{\boldsymbol{F}}_{i\pm\frac{1}{2},j}^{\mathrm{low}} \in \mathcal{G}, \quad \widetilde{\boldsymbol{U}}_{ij}^{\pm,\mathrm{low}} := \overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n} \mp \frac{4\Delta t^n}{\Delta y_j}\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{\mathrm{low}} \in \mathcal{G}.$$

定义

$$\boldsymbol{U}_{ij}^{\pm,\mathrm{high}} := \overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n} \mp \frac{4\Delta t^n}{\Delta x_i}\widehat{\boldsymbol{F}}_{i\pm\frac{1}{2},j}^{\mathrm{high}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{U}}_{ij}^{\pm,\mathrm{high}} := \overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n} \mp \frac{4\Delta t^n}{\Delta y_j}\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{\mathrm{high}},$$

并引入两个较小的正数 ε_D和 ε_q，使得 $D\big(\boldsymbol{U}^{\pm,\ \mathrm{low}}_{ij}\big) \geq \varepsilon_D > 0$, $D\big(\boldsymbol{U}^{\pm,\ \text{低}}_{ij}\big) \geq \varepsilon_D > 0$, $q\big(\boldsymbol{U}^{\pm,\ \mathrm{low}}_{ij}\big) \geq \varepsilon_q > 0$, $q\big(\widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\ \mathrm{low}}_{ij}\big) \geq \varepsilon_q > 0$。在接下来的计算中，$\varepsilon_D = \varepsilon_q = 10^{-14}$。

PCP通量限制器 $\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},\ j}$和 $\theta^{y}_{i,\ j\pm\frac{1}{2}}$定义如下。

(i) 确保质量密度 $D(\boldsymbol{U})$的正性。对于每个 i 和 j，定义

$$\theta^{D,x,\pm}_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} (D^{\pm,\mathrm{low}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j} - \varepsilon_D)/(D^{\pm,\mathrm{low}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j} - D^{\pm,\mathrm{high}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j}), & \text{if } D^{\pm,\mathrm{high}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j} < \varepsilon_D, \\ 1, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\theta^{D,y,\pm}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (\widetilde{D}^{\pm,\mathrm{low}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}} - \varepsilon_D)/(\widetilde{D}^{\pm,\mathrm{low}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}} - \widetilde{D}^{\pm,\mathrm{high}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}), & \text{if } \widetilde{D}^{\pm,\mathrm{high}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}} < \varepsilon_D, \\ 1, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

并限制

$$\left\{\widehat{\boldsymbol{F}}^{D}_{i+\frac{1}{2},j}\right\}_k = \begin{cases} (1-\theta^{D,x}_{i+\frac{1}{2},j})\left\{\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{low}}_{i+\frac{1}{2},j}\right\}_k + \theta^{D,x}_{i+\frac{1}{2},j}\left\{\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{high}}_{i+\frac{1}{2},j}\right\}_k, & k=1, \\ \left\{\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{high}}_{i+\frac{1}{2},j}\right\}_k, & k>1, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\left\{\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{D}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right\}_k = \begin{cases} (1-\theta^{D,y}_{i,j+\frac{1}{2}})\left\{\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{low}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right\}_k + \theta^{D,y}_{i,j+\frac{1}{2}}\left\{\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{high}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right\}_k, & k=1, \\ \left\{\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{high}}_{i,j+\frac{1}{2}}\right\}_k, & k>1, \end{cases} \tag{3.21}$$

其中 $\theta^{D,\ x}_{i+\frac{1}{2},\ j} = \min\{\theta^{D,x,+}_{i+\frac{1}{2},j}, \theta^{D,x,-}_{i+\frac{1}{2},j}\}$，$\theta^{D,\ y}_{i,\ j+\frac{1}{2}} = \min\{\theta^{D,y,+}_{i,j+\frac{1}{2}}, \theta^{D,y,-}_{i,j+\frac{1}{2}}\}$，且 $\left\{\widehat{\boldsymbol{F}}_{i+\frac{1}{2},\ j}\right\}_k$，$\left\{\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,\ j+\frac{1}{2}}\right\}_k$分别是 $\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2},\ j}$和 $\boldsymbol{G}_{i,\ j+\frac{1}{2}}$的第 k个分量。

(ii) 确保项 $q(\boldsymbol{U}) = E - \sqrt{D^2 + |\boldsymbol{m}|^2}$ 的正性。对于每个 $i,\ j,$ 计算

$$\theta^{q,x,\pm}_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \big(q(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j}) - \varepsilon_q\big)/\big(q(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j}) - q(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{D}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j})\big), & \text{if } q(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{D}}_{i+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2},j}) < \varepsilon_q, \\ 1, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\theta^{q,y,\pm}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \big(q(\widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{low}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}) - \varepsilon_q\big)/\big(q(\widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{low}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}) - q(\widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{D}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}})\big), & \text{if } q(\widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{D}}_{i,j+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}) < \varepsilon_q, \\ 1, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

然后将数值通量限制为

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{PCP}}_{i+\frac{1}{2},j} = (1-\theta^{q,x}_{i+\frac{1}{2},j})\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{low}}_{i+\frac{1}{2},j} + \theta^{q,x}_{i+\frac{1}{2},j}\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{D}}_{i+\frac{1}{2},j}, \tag{3.22}$$

$$\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{PCP}}_{i,j+\frac{1}{2}} = (1-\theta^{q,y}_{i,j+\frac{1}{2}})\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{low}}_{i,j+\frac{1}{2}} + \theta^{q,y}_{i,j+\frac{1}{2}}\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{D}}_{i,j+\frac{1}{2}}, \tag{3.23}$$

其中 $\theta^{q,x}_{i+\frac{1}{2},j} = \min\{\theta^{q,x,+}_{i+\frac{1}{2},j}, \theta^{q,x,-}_{i+\frac{1}{2},j}\}$ 和 $\theta^{q,y}_{i,j+\frac{1}{2}} = \min\{\theta^{q,y,+}_{i,j+\frac{1}{2}}, \theta^{q,y,-}_{i,j+\frac{1}{2}}\}$。

(iii) 定义 $\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j} := \theta^{D}_{i\pm\frac{1}{2},j}\theta^{q}_{i\pm\frac{1}{2},j}$ 和 $\theta^{y}_{i,j\pm\frac{1}{2}} := \theta^{D}_{i,j\pm\frac{1}{2}}\theta^{q}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$。

不难证明，当 $\boldsymbol{U}^n_{ij} \in \mathcal{G}$ 且给定适当的时间步长时，格式 (3.16) 与 (1.1) 中的二维相对论流体动力学方程相容，并且满足保持物理约束（PCP）（见定理 3.2）。此外，我们还指出，这种保持物理约束限制器不会破坏光滑区域内原有的高阶精度，更多细节见 [45]。

定理 3.2。 在满足 (3.19) 中的时间步长限制时，若 $\boldsymbol{U}^{\pm,\text{低}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} \in \mathcal{G}$ 对所有 i,j 均成立，且波速按 (2.1) 估计，则对于高阶有限体积格式 (3.15)，有

$$\overline{\boldsymbol{U}}^{n+1}_{ij} = \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{U}^{+,\mathrm{PCP}}_{ij} + \boldsymbol{U}^{-,\mathrm{PCP}}_{ij} + \widetilde{\boldsymbol{U}}^{+,\mathrm{PCP}}_{ij} + \widetilde{\boldsymbol{U}}^{-,\mathrm{PCP}}_{ij}\right) \in \mathcal{G}, \quad \forall i,j,$$

其中

$$\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij} = \overline{\boldsymbol{U}}^{n}_{ij} \mp \frac{4\Delta t^n}{\Delta x_i}\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{PCP}}_{i\pm\frac{1}{2},j}, \quad \widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij} = \overline{\boldsymbol{U}}^{n}_{ij} \mp \frac{4\Delta t^n}{\Delta y_j}\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{PCP}}_{i,j\pm\frac{1}{2}}.$$

证明。 由于 $\overline{\boldsymbol{U}}^{n+1}_{ij}$ 是四项 $\boldsymbol{U}^{+,\mathrm{PCP}}_{ij}$、$\boldsymbol{U}^{-,\mathrm{PCP}}_{ij}$、$\widetilde{\boldsymbol{U}}^{+,\text{保持物理约束}}_{ij}$、$\widetilde{\boldsymbol{U}}^{-,\text{保持物理约束}}_{ij}$ 的凸组合，鉴于 $\mathcal{G}$ 的凸性，要使 $\boldsymbol{U}^{n+1}_{ij} \in \mathcal{G}$ 成立，一个充分条件是每一项都属于可容许集 $\mathcal{G}$，参见引理 1.1。不失一般性，这里仅给出 $\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij} \in \mathcal{G}$ 的证明；类似的分析也可应用于 $\widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij}$。

在上述假设和 PCP通量限制器下，我们知道 $0 \le \theta^{D,x}_{i+\frac{1}{2},j} \le 1$、$0 \le \theta^{q,x}_{i+\frac{1}{2},j} \le 1$，并且存在两个较小的正数 ε_D 和 ε_q，使得 $D^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} \ge \varepsilon_D > 0$、$q\big(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij}\big) \ge \varepsilon_q > 0$。

结合 (3.20) 和 (3.22) 可得

$$\left\{\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{PCP}}_{i\pm\frac{1}{2},j}\right\}_1 = \left(1-\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}\right)\left\{\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{low}}_{i\pm\frac{1}{2},j}\right\}_1 + \theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}\left\{\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{high}}_{i\pm\frac{1}{2},j}\right\}_1,$$

然后

$$D^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij} = \left(1-\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}\right)D^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} + \theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}D^{\pm,\mathrm{high}}_{ij}.$$

根据 $\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}$和 $\theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}$ 的定义，可得

$$0 < \theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j} \le \theta^{D,x}_{i\pm\frac{1}{2},j} \le \theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j} \le 1,$$

and

$$\left(1-\theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}\right) D^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} + \theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j} D^{\pm,\mathrm{high}}_{ij} \ge \varepsilon_D > 0,$$

这意味着

$$\begin{aligned} D^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij} &= \left(1-\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}\right) D^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} + \theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j} D^{\pm,\mathrm{high}}_{ij} \\ &= \frac{\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \left((1-\theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}) D^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} + \theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j} D^{\pm,\mathrm{high}}_{ij} \right) + \left(1 - \frac{\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \right) D^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} \\ &\ge \frac{\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \varepsilon_D + \left(1 - \frac{\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{D,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \right) \varepsilon_D = \varepsilon_D > 0. \end{aligned}$$

另一方面，由（3.22）可得

$$\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij} = (1-\theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j}) \boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} + \theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j} \boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{D}}_{ij},$$

进而

$$q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij}\right) = q\left((1-\theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j}) \boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij} + \theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j} \boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{D}}_{ij} \right) \ge (1-\theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j}) q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij}\right) + \theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j} q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{D}}_{ij}\right),$$

因为函数 $q(\boldsymbol{U})$ 是凹函数。因此我们得到

$$\begin{aligned} q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij}\right) &\ge (1-\theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j}) q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij}\right) + \theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j} q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{D}}_{ij}\right) \\ &= \frac{\theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{q,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \left((1-\theta^{q,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}) q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij}\right) + \theta^{q,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j} q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{D}}_{ij}\right) \right) + \left(1 - \frac{\theta^{x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{q,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \right) q\left(\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{low}}_{ij}\right) \\ &\ge \frac{\theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{q,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \varepsilon_q + \left(1 - \frac{\theta^{q,x}_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\theta^{q,x,\pm}_{i\pm\frac{1}{2},j}} \right) \varepsilon_q = \varepsilon_q > 0. \end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{PCP}}_{ij} \in \mathcal{G}$。证明完毕。 □

注 3.2。在实际计算中，计算数值通量 $\widehat{\boldsymbol{F}}_{\text{高}\,i+\frac{1}{2},\,j}$和 $\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{high}}_{i,\,j+\frac{1}{2}}$需要重构值 $\boldsymbol{U}^{n}_{ij}(x^{\alpha}_{i},\, y_{j+\frac{1}{2}})$和 $\boldsymbol{U}^{n}_{ij}(x_{i+\frac{1}{2}},\, y^{\beta}_{j})$属于可容许集 $\mathcal{G}$。可以通过使用与上述类似的 *PCP* 限制器来实现，只需将 $\boldsymbol{U}^{\pm,\mathrm{high}}_{ij}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{U}}^{\pm,\mathrm{high}}_{ij}$ 替换为，参见 *[47, 23]*。

注3.3。 为了获得空间和时间上都具有高阶精度的格式，我们将*PCP*格式(3.16) 中的前向欧拉时间离散替换为显式三阶精度*SSP Runge-Kutta*时间离散。该方法在适当的*CFL*型条件下仍能保持物理约束，具体实现如下：

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{(1)} &= \overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n} - \Delta t^n \mathcal{L}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n}),\\
\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{(2)} &= \frac{3}{4}\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n} + \frac{1}{4}\left(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{(1)} - \Delta t^n \mathcal{L}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{(1)})\right),\\
\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{n} + \frac{2}{3}\left(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{(2)} - \Delta t^n \mathcal{L}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}^{(2)})\right),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\mathcal{L}(\overline{\boldsymbol{U}}_{ij}) = \frac{1}{\Delta x_i}\big(\widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{PCP}}_{i+\frac{1}{2},j} - \widehat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{PCP}}_{i-\frac{1}{2},j}\big) + \frac{1}{\Delta y_j}\big(\widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{PCP}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \widehat{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{PCP}}_{i,j-\frac{1}{2}}\big).
$$

4 数值测试

本节针对具有较大洛伦兹因子、强间断、低静止质量密度或低压力的二维超相对论相对论流体动力学问题，开展若干数值实验，以验证本文保持物理约束格式的精度、鲁棒性和有效性。值得再次强调的是，这些超相对论问题对数值格式构成了严峻挑战。除非另有说明，所有计算均采用绝热指数为 $\Gamma = 5/3$ 的状态方程 (1.3)，并使用由 (3.3) 确定、CFL 数为 $\sigma = 0.45$ 的时间步长 Δt^n 。此外，在计算中，我们采用五阶WENO重构 [37]，并将Δt^n 替换为 $(\Delta t^n)^{5/3}$ ，以匹配示例 4.2 和 4.3 中的空间精度。

例4.1。 我们首先参考 [3]中的设置构造一个爆炸问题，以检验格式的多维性。初始时，计算域$\Omega = [-0.5, 0.5]^2$内的静止流体具有单位静止质量密度。半径为1/10的圆形区域内压力设为20，圆形区域外的压力则设为较小的0.1。图4.1绘出了使用带有多维黎曼求解器的一阶PCP 格式（即式(3.1)结合式(3.6)-(3.7)），在由 64×64 个均匀网格单元组成的网格上得到的 $t = 0.1$ 时刻静止质量密度的等值线，以及沿 y轴和 $y = x$ 方向的截面。作为比较，-eps-converted-to.pdf 4.2 给出了

使用相应格式和一维黎曼求解器得到的数值解，即$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$式(3.1)结合$\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}}$、$_j = \boldsymbol{F}^{**}_{i+\frac{1}{2}}$、$_j$和$\boldsymbol{G}_{i,\ j+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{G}^{**}_{i}$、$_{j+\frac{1}{2}}$。从中可以清楚地看出，采用二维黎曼求解器的格式得到的结果更好地保持了球对称性。

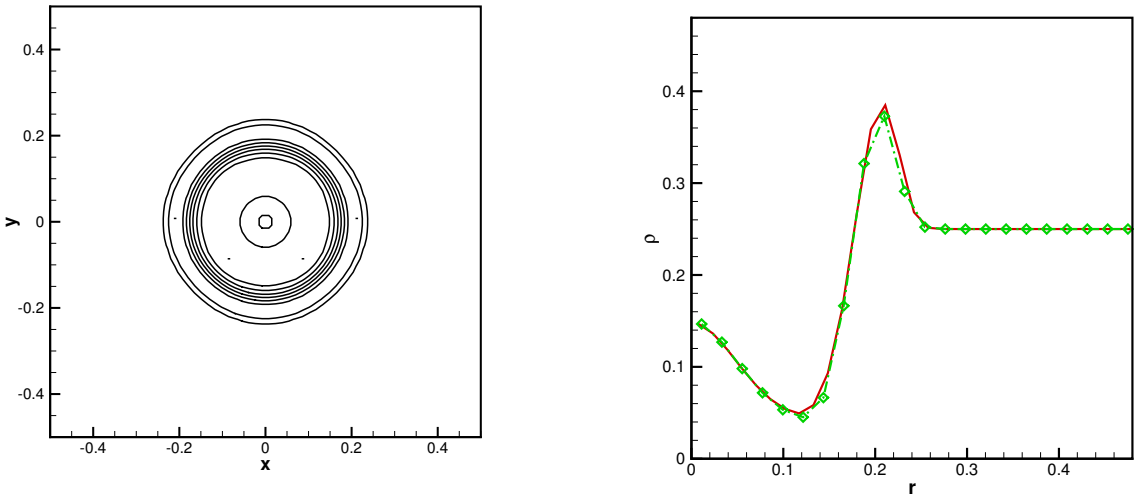


图4.1： 例4.1：采用我们的一阶 PCP 格式和二维 HLL 黎曼求解器得到的 $t = 0.1$ 处的静止质量密度。左图：包含八条等间距等值线的等值线图；右图： ρ 在 y轴处的截面（实线）和 $y = x$ 处的截面（带符号“◇”的虚线）。

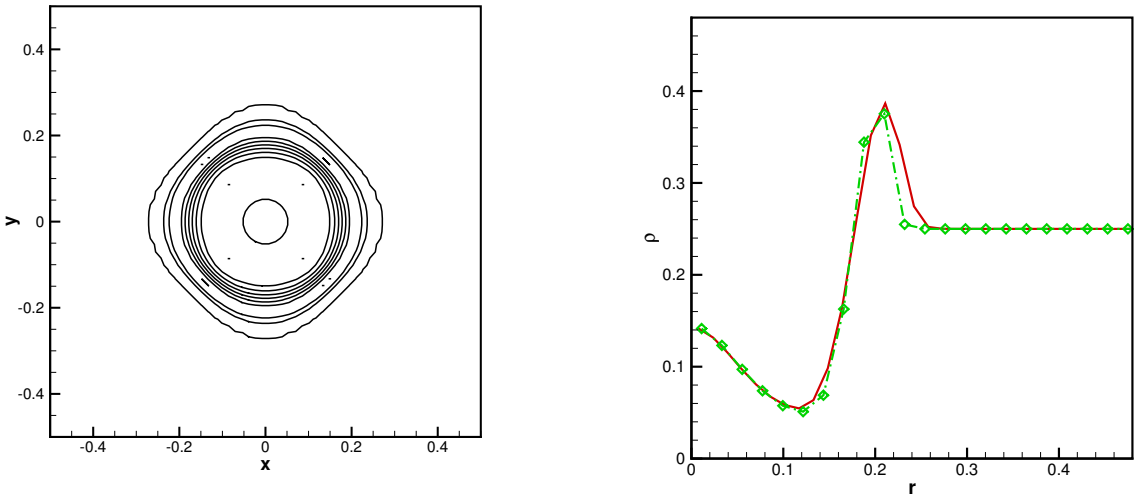


图4.2： 与图4.1相同，但采用一维 HLL 黎曼求解器。

例 4.2（正弦波传播 [47]）。 此问题用于检验我们的 PCP有限体积格式的精度。其精确解为

$$(\rho,\ u,\ v,\ p)(x,\ y,\ t) = (1 + 0.99999\sin(2\pi(x + \bar{y} - 0.99\sqrt{2}\bar{t}))\ 0.99/\sqrt{2},\ 0.99/\sqrt{2},$$

0。01) $t \geq 0$该解描述了一个在计算域$\Omega = [0,1]^2$ 中以与 x轴成 45° 角的方向周期性传播的相对论流体动力学（RHD）正弦波。计算区域划分为 $N \times N$ 个均匀网格单元，并在Ω的边界上施加周期性边界条件。表 4.1 和表 4.2 分别列出了使用我们的一阶和五阶多维PCP格式得到的 ℓ^1，ℓ^2 和 ℓ^∞ 误差（在 $t = 0.1$ 处）以及收敛阶。结果表明，PCP性能符合预期。表 4.2 还列出了所有时间层上PCP 限制单元所占的比例，分别记为 Θ_N^1（缩放PCP限制器）和 Θ_N^2（PCP通量限制器）。可以看出，由于密度较低，五阶精度格式中启用了PCP 限制器，而使用该限制器并未损害高阶精度。

表 4.1：例 4.2：使用网格由 $N \times N$ 个均匀网格单元组成的一阶 PCP 格式，在 $t = 0.1$ 处得到的质量密度误差及收敛阶。

N	ℓ^1 误差	ℓ^1 收敛阶	ℓ^2 误差	ℓ^2 收敛阶	ℓ^∞ 误差	ℓ^∞ 阶数
20	3.91E-01	—	4.36E-01	—	6.16E-01	—
40	1.92E-01	1.03	2.13E-01	1.03	3.01E-01	1.03
80	9.49E-02	1.02	1.05E-01	1.02	1.49E-01	1.01
160	4.76E-02	1.00	5.28E-02	1.00	7.47E-02	1.00
320	2.38E-02	1.00	2.65E-02	1.00	3.74E-02	1.00

表 4.2：例 4.2：与表 4.1 相同，但采用五阶 PCP 格式。

N	ℓ^1 错误	ℓ^1 阶	ℓ^2 错误	ℓ^2 阶	ℓ^∞ 错误	ℓ^∞ 阶	Θ_N^1 (%)	Θ_N^2 (%)
10	3.70E-02	–	4.08E-02	–	6.18E-02	–	36.18	0.00
20	1.37E-03	4.75	1.59E-03	4.68	3.07E-03	4.33	12.36	0.00
40	3.96E-05	5.12	4.64E-05	5.10	9.12E-05	5.07	1.85	0.00
80	1.19E-06	5.05	1.38E-06	5.07	2.87E-06	4.99	0.00	0.00
160	3.64E-08	5.03	4.15E-08	5.06	8.56E-08	5.07	0.00	0.00

例 4.3（相对论等熵涡旋）。这是一个二维相对论等熵涡旋问题，最初在 [23], 中构造，其中涡旋在时空坐标系（x， y， t）中以大小为 w 的恒定速度沿（-1， -1）方向运动。时刻 $t \geq 0$ 的时变解（ρ， u， v， p）如下

$$
\begin{aligned}
&\rho = (1-\alpha e^{1-r^2})^{\frac{1}{\Gamma-1}}, \quad p = \rho^{\Gamma}, \\
&u = \frac{1}{1-\frac{w(u_0+v_0)}{\sqrt{2}}}\left[\frac{u_0}{\gamma} - \frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma w^2}{2(\gamma+1)}(u_0+v_0)\right], \\
&v = \frac{1}{1-\frac{w(u_0+u_0)}{\sqrt{2}}}\left[\frac{v_0}{\gamma} - \frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma w^2}{2(\gamma+1)}(u_0+v_0)\right],
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}, \quad r = \sqrt{x_0^2+y_0^2}, \quad (u_0, v_0) = (-y_0, x_0)f, \\
&\alpha = \frac{(\Gamma-1)}{8\Gamma\pi^2}\epsilon^2, \quad \beta = \frac{2\Gamma\alpha e^{1-r^2}}{2\Gamma-1-\Gamma\alpha e^{1-r^2}}, \quad f = \sqrt{\frac{\beta}{1+\beta r^2}}, \\
&x_0 = x + \frac{\gamma-1}{2}(x+y) + \frac{\gamma t w}{\sqrt{2}}, \quad y_0 = y + \frac{\gamma-1}{2}(x+y) + \frac{\gamma t w}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

我们的计算在计算域$\Omega = [-6,6]^2$ 中进行，绝热指数为 $\Gamma = 1.4$，$w = 0.5\sqrt{2}$，涡旋强度为 $\epsilon = 10.0828$，并采用周期性边界条件。在这种情况下，最低密度和最低压力分别为 7.83×10^{-15} 和 1.78×10^{-20}。

表 4.3 和表 4.4 分别给出了我们的一阶和五阶 PCP 格式所得的静止质量密度在 $t = 1$ 处的误差及收敛阶。显然，我们的多维 PCP 格式达到了预期的精度，同时保持了密度和压力的正性。此外，还列出了所有时间层上 PCP 限制单元所占的比例，分别记为 Θ_N^1（缩放 PCP限制器）和Θ_N^2（PCP通量限制器），以表明 PCP 限制器确实用于保持数值解的可容许性。

表 4.3： 例 4.3：使用一阶 PCP 格式在具有 $N \times N$ 个均匀网格单元的网格上得到的 $t = 1$ 处质量密度误差及收敛阶。

N	ℓ^1 误差	ℓ^1 阶	ℓ^2 误差	ℓ^2 阶	ℓ^∞ 误差	ℓ^∞ 阶
20	2.48E+00	—	7.41E-01	—	5.54E-01	—
40	1.63E+00	0.60	4.90E-01	0.60	3.61E-01	0.62
80	9.42E-01	0.80	2.91E-01	0.75	2.19E-01	0.72
160	5.12E-01	0.88	1.63E-01	0.84	1.30E-01	0.76
320	2.68E-01	0.93	8.66E-02	0.91	7.14E-02	0.86

表 4.4：例 4.3：与表 4.3 相同，但使用五阶 PCP 格式。

N	ℓ^1 误差	ℓ^1 阶	ℓ^2 误差	ℓ^2 阶	ℓ^∞ 误差	ℓ^∞ 阶	Θ_N^1 (%)	Θ_N^2 (%)
20	9.12E-01	—	2.88E-01	—	2.37E-01	—	3.21	3.82
40	1.63E-01	2.49	7.60E-02	1.92	9.66E-02	1.30	1.53	1.85
80	8.66E-03	4.23	4.56E-03	4.06	1.19E-02	3.03	5.13E-01	7.13E-02
160	3.22E-04	4.75	1.64E-04	4.80	4.36E-04	4.77	2.34E-02	2.57E-04
320	1.12E-05	4.84	6.12E-06	4.74	1.84E-05	4.56	7.74E-04	2.77E-05
640	3.58E-07	4.97	1.95E-07	4.97	7.86E-07	4.55	9.40E-05	2.04E-06

例 4.4（黎曼问题 I）。本例求解二维黎曼问题 [45]。

初始数据由下式给出

$$(\rho, u, v, p)(x, y, 0) = \begin{cases} (0.1, 0, 0, 0.01), & x > 0.5,\ y > 0.5, \\ (0.1, 0.99, 0, 1), & x < 0.5,\ y > 0.5, \\ (0.5, 0, 0, 1), & x < 0.5,\ y < 0.5, \\ (0.1, 0, 0.99, 1), & x > 0.5,\ y < 0.5, \end{cases}$$

其中，左侧和底部的间断均为接触间断，且横向速度存在跃变；而右侧和顶部的间断均不是简单波。

计算区域Ω取为 $[0, 1]^2$ ，并划分为包含400×400 个网格单元的均匀网格。-eps-converted-to.pdf 图 4.3 和图 4.4 分别展示了使用一阶和

五阶 PCP 格式得到的、在时的静止质量密度对数 ln 800×800 和压力对数 ln $1200 \times$的等值线。可以看到，四个初始间断相互作用，形成了两道反射弯曲激波和一个细长的射流状尖峰。值得一提的是，非 PCP 格式在模拟这个问题时会失效。图 4.5 还展示了五阶 PCP 格式在 400×400 均匀网格上沿直线 $y = x$ 得到的数值近似截面，以及一阶 PCP 格式在相同网格和更精细的 800×800 与 1200 网格上的数值近似截面。显然，五阶格式比一阶格式更能捕捉间断。此外，我们统计了每个时间层的 PCP 限制单元，并在图 4.6 中绘出了其占比；由此可以清楚地得出结论：对于不具备 PCP 性质的方法，该问题的数值模拟可能会失败。

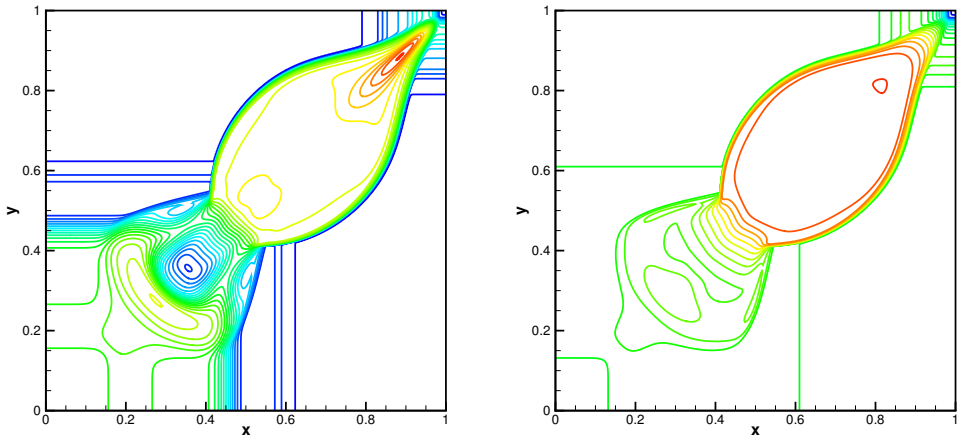


图 4.3： 例 4.4：通过一阶 PCP 格式得到的 $t = 0.4$ 时刻的密度对数 $\ln \rho$ （左）和压力对数 $\ln p$ （右）的等值线。使用了 25 条等间距等值线。

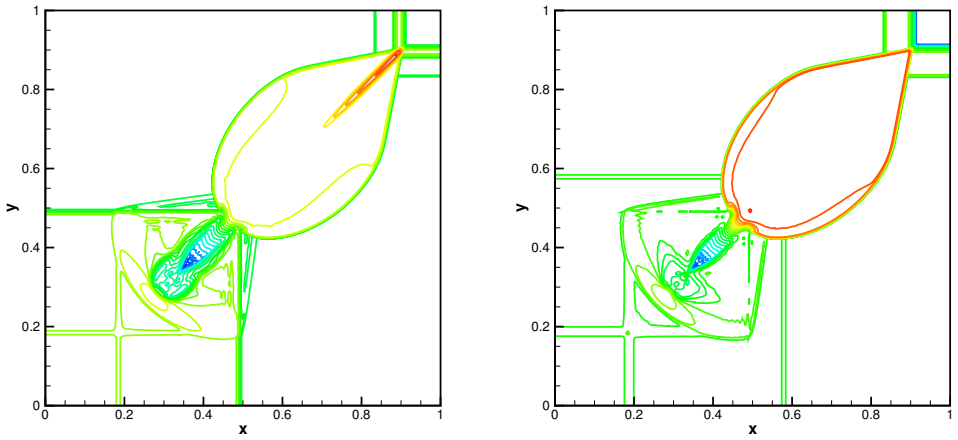


图 4.4：例 4.4：与图 4.3 相同，但采用五阶 PCP 格式。

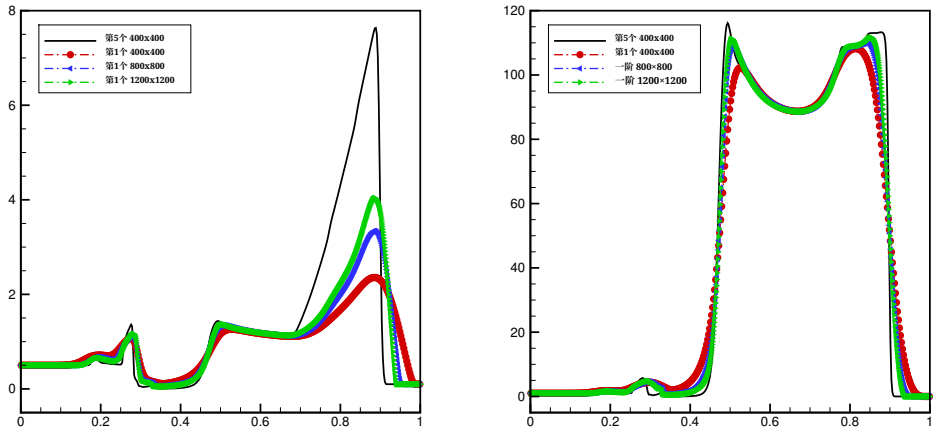


图 4.5：例 4.4：不同网格和格式下，数值解在闭区间 $x \in [0,1]$ 上沿直线$y = x$ 和 $t = 0.4$ 的截面对比。左：静止质量密度 ρ；右：压力 p。

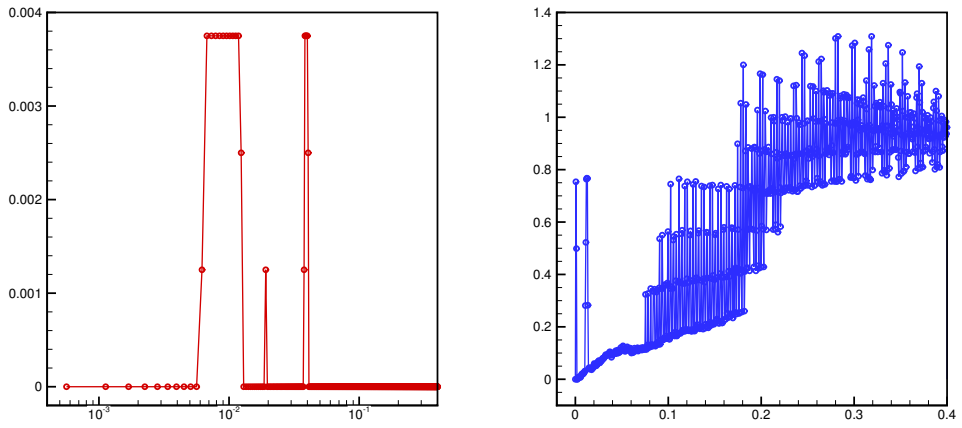


图 4.6： 例 4.4：各时间层 PCP 限制单元所占的比例。左：缩放PCP限制器；右：PCP通量限制器。

例 4.5 (黎 曼问题 II [45])。 第二个黎曼问题的初始数据为 e

$$(\rho,u,v,p)(x,y,0)=\begin{cases}(0.1,0,0,20), & x>0.5,\ y>0.5,\\ (\widetilde{\rho},\widetilde{u},0,0.05), & x<0.5,\ y>0.5,\\ (0.01,0,0,0.05), & x<0.5,\ y<0.5,\\ (\widetilde{\rho},0,\widetilde{u},0.05), & x>0.5,\ y<0.5,\end{cases}$$

其中 $\widetilde{\rho}=0.00414329639576$, $\widetilde{u}=0.9946418833556542$ ，计算区域 $\Omega=[0,1]^2$。在这个问题中，左侧和下侧的初始间断为接触间断，而上侧和右侧的初始间断为速度为 -0.66525606186639 的激波。随着时间推移，流体速度的最大值变得非常大，接近光速，这使数值模拟更具挑战性。图 4.7 和图 4.8 分别展示了在 $t=0.4$时，使用一阶和五阶 PCP格式在由 400×400 个网格单元组成的均匀网格上得到的静止质量密度对数 $\ln\rho$和压力对数 $\ln p$的等值线。四个初始间断相互作用，使初始激波发生扭曲，并从点 (0.5,0.5) 开始形成一个向左下方区域扩展的“蘑菇云”。我们还在图 4.9 中比较了一阶和高阶格式得到的数值解，该图展示了沿直线 $y=x$的静止质量对数 $\ln\rho$和压力对数 $\ln p$的曲线。我们可以看到，五阶

PCP格式即使在更精细的网格上，对间断的分辨率也优于一阶格式。此外，我们还想指出，模拟这个问题必须使用保持物理约束格式，因为确实需要使用PCP通量限制器和缩放PCP限制器来保持物理约束性质，见图 4.10。

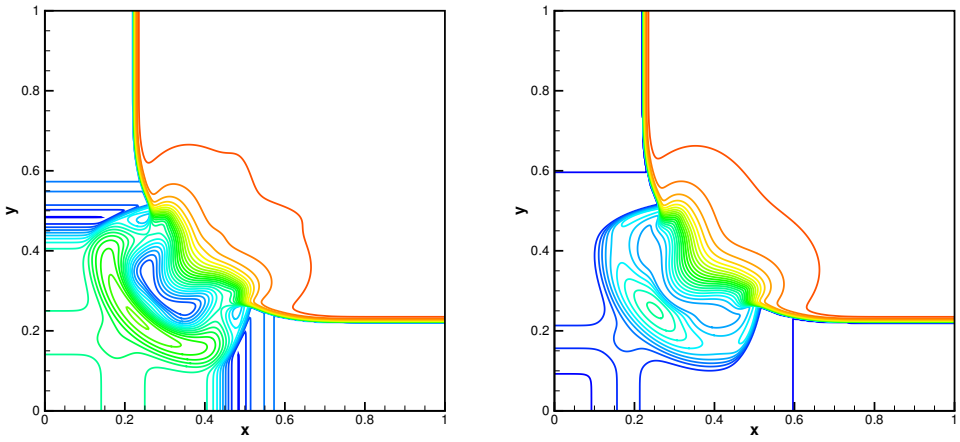


图4.7： 例 4.5：一阶 PCP 格式得到的 $t = 0.4$ 处密度对数 $\ln \rho$ （左）和压力对数 $\ln p$ （右）的等值线。图中显示了 25 条等间距等值线。

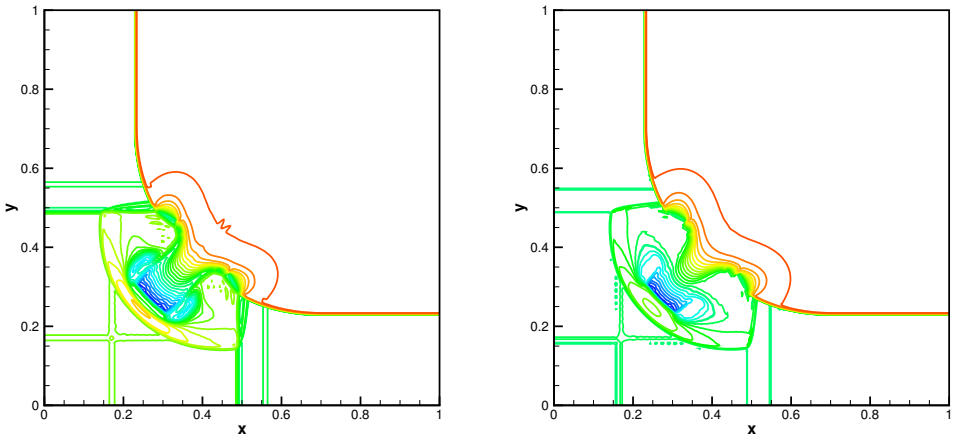


图4.8： 例 4.5：与图4.7相同，但采用五阶 PCP 格式。

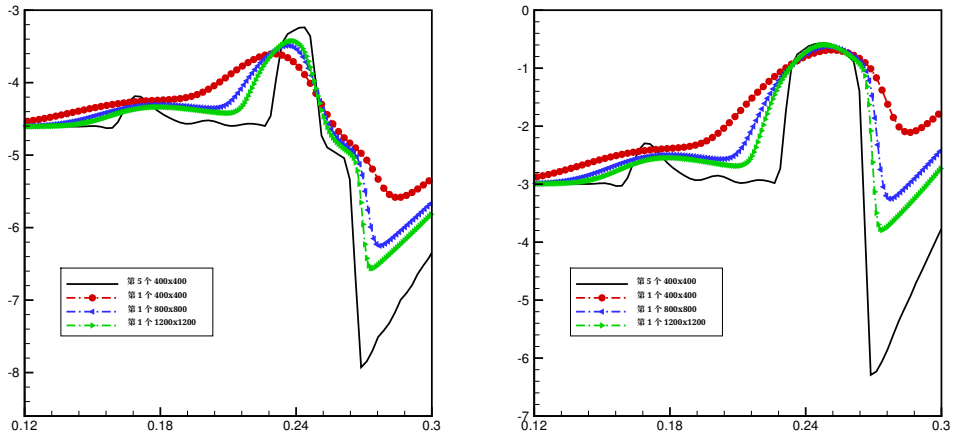


图 4.9: 例 4.5：在闭区间 $x \in [0.12, 0.3]$内，不同网格和格式的数值解在直线 $y = x$和 $t = 0.4$ 上的截面对比。左：静止质量密度对数 $\ln \rho$；右：压力对数 $\ln\ p$。

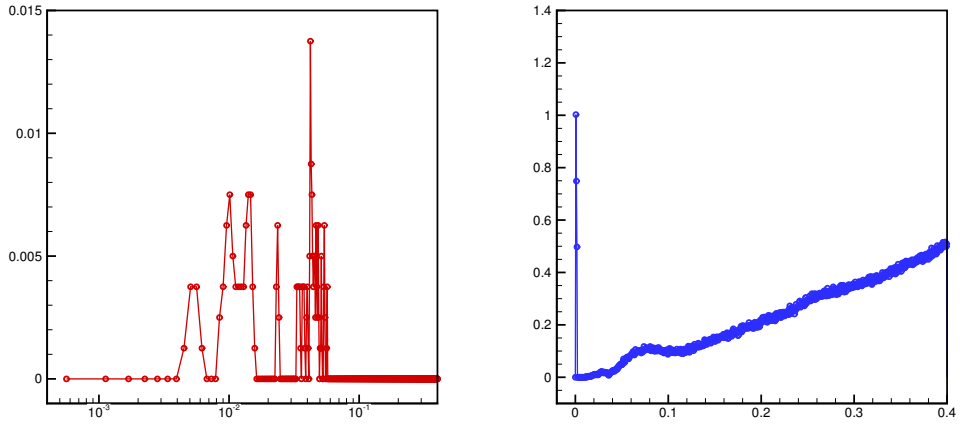


图 4.10: 例 4.5：各时间层 PCP 限制单元所占比例。左：缩放PCP限制器；右：PCP通量限制器。

例 4.6（相对论喷流）。 最后一个例子是模拟高速相对论喷流流动，这种流动普遍存在于与活动星系核相关的河外射电源中，也是狭义相对论现象最有力的案例 [47]。这类喷流流动的数值模拟充满挑战，因为其中可能出现强相对论激波、剪切波、界面不稳定性和超相对论区域，以及高速喷流等。

这里我们考虑一种压力匹配热喷流模型，其中，大量束流内能产生的相对论效应十分重要，其影响程度可与流体

速度接近光速时产生的效应相媲美，因为经典射流马赫数 $M_b = 1.72$ 接近给定射流速度 v_b 时的最小马赫数。我们指出，数据设置与 [47] 中的相同，但状态方程不同。初始时，计算区域 $[0, 12] \times [0, 30]$ 充满静止均匀介质，其静止质量密度为 1；一道轻质相对论射流以高速 v_b 沿 y方向，经由底部边界（$y = 0$）上的入口部分 $|x| \leq 0.5$ 注入，其静止质量密度为 0.01，压力等于环境压力。在喷嘴 $\{y = 0, |x| \leq 0.5\}$上指定固定流入射流条件，在 $x = 0$处指定反射边界条件，而其他边界采用流出边界条件。下面考虑以下三个不同的情形：

(i) $v_b = 0.99$，对应于 $\gamma \approx 7.089$ 和 $M_r \approx 9.971$的情况。

(ii) $v_b = 0.999$，对应于 $\gamma \approx 22.366$ 和 $M_r \approx 31.316$的情况。

(iii) $v_b = 0.9999$，对应于 $\gamma \approx 70.712$ 和 $M_r \approx 98.962$的情况。

此处 $M_r := M_b\gamma/\gamma_s$ 表示相对论马赫数，其中 $\gamma_s = 1/\sqrt{1 - c_s^2}$ 是与局部声速相关的洛伦兹因子。

随着 v_b 越来越接近光速，射流的数值模拟也变得更具挑战性。图 4.11–4.14 展示了在计算区域 $[0, 12] \times [0, 30]$内，使用一阶和五阶格式在 240×600 个均匀网格上于 $t = 30$ 时得到的静止质量密度对数 $\ln \rho$ 和压力对数 $\ln\ p$ 的施利伦图像。显然，高阶格式比一阶格式更能准确捕捉射流界面。

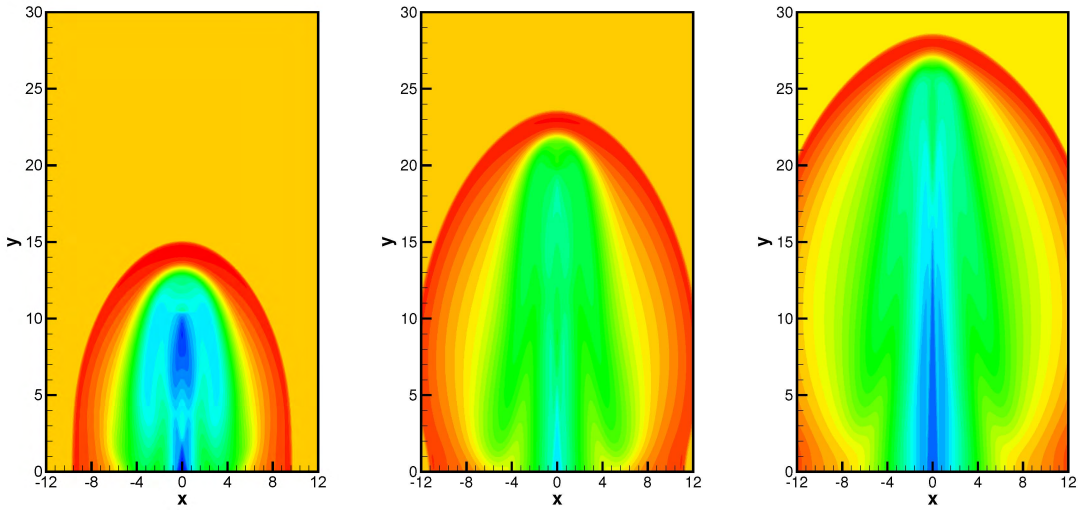


图 4.11：例 4.6：采用一阶 PCP 格式，在 240×600 个均匀网格单元上得到的热射流模型在 $t = 30$ 时刻的静止质量密度对数 $\ln \rho$ 施利伦图像。从左至右：配置 (i)、(ii) 和 (iii)。

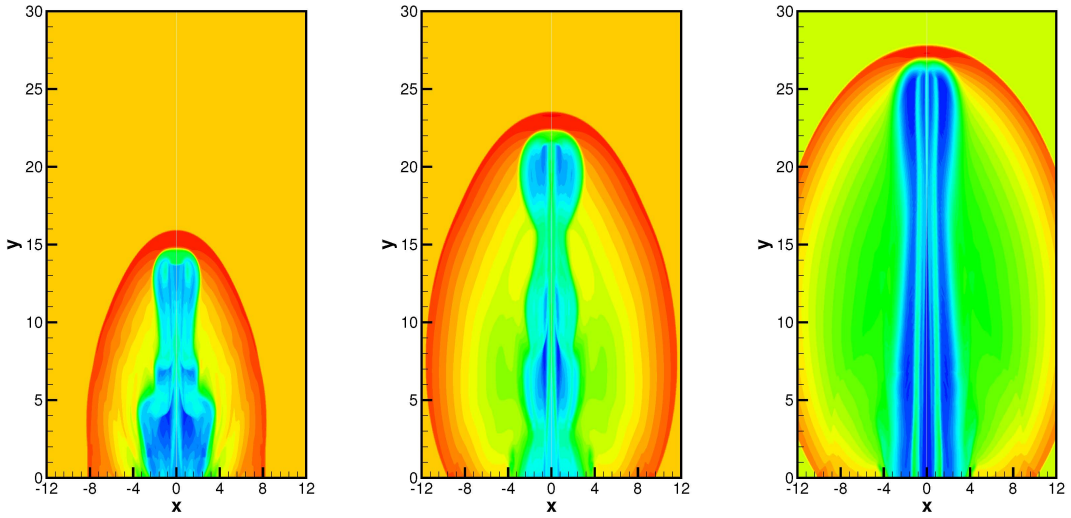


图 4.12：例 4.6：与图 4.11 相同，但采用五阶 PCP 格式。

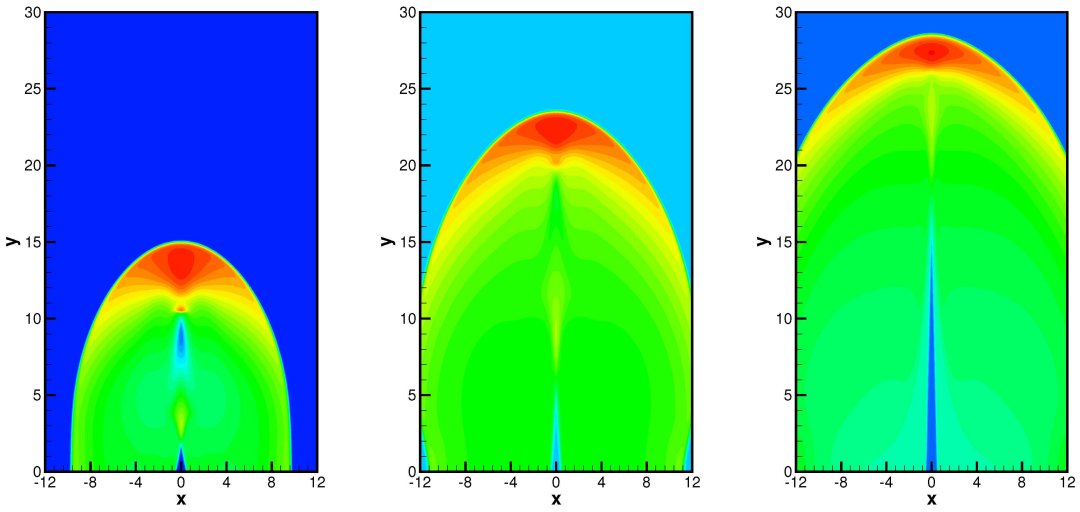


图 4.13： 例 4.6：采用一阶 PCP 格式，在 240×600 个均匀网格单元上计算得到的热射流模型在 $t=30$ 时刻的压力对数 $\ln p$ 施利伦图像。从左到右：配置 (i)、(ii) 和 (iii)。

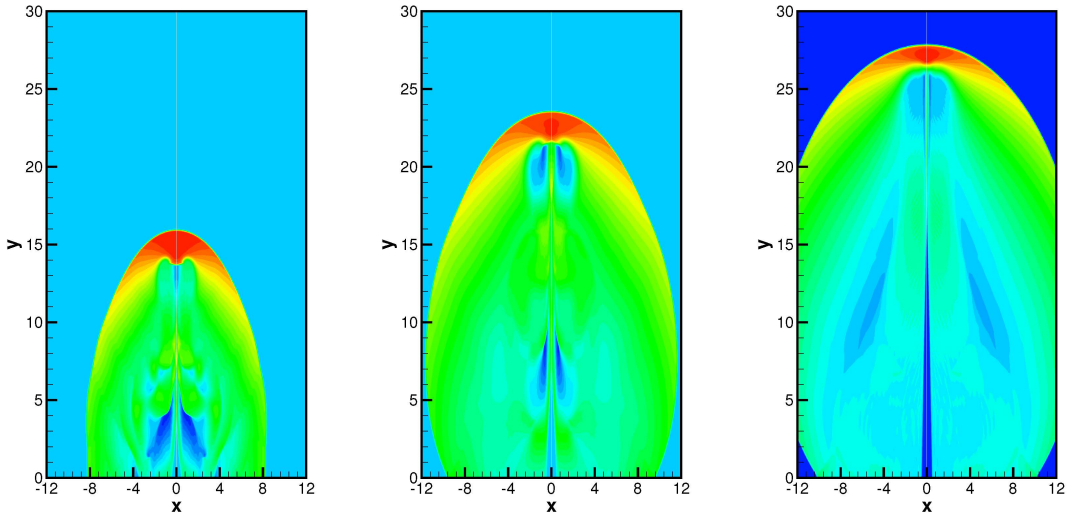


图 4.14： 例 4.6：与图 4.13 相同，但采用五阶 PCP 格式。

5 结论

本文提出了一种基于多维 HLL 黎曼求解器的二维狭义相对论流体力学有限体积格式，并研究了其 PCP 性质（即保持静止质量密度和压力的正性，以及流体

速度的有界性）。我们首先证明，当对 HLL 波速进行适当估计时，多维 HLL 黎曼求解器中的中间态具有 PCP 性质；随后证明，采用多维 HLL 黎曼求解器和前向欧拉时间离散的一阶精度有限体积格式具有 PCP 性质。基于所得的多维 HLL 求解器，我们通过采用高阶精度的强稳定保持（SSP）时间离散、WENO 重构过程和 PCP通量限制器，构造了高阶精度的 PCP格式。最后，我们进行了若干二维数值实验，以展示所提出的 PCP格式在求解特殊相对论流体动力学问题时的精度和有效性；这些问题涉及大洛伦兹因子、低静止质量密度、低压力或强间断等情况。

致谢

本工作得到国家重点研发计划（项目编号：2020YFA0712000）的部分资助。此外，D. Ling 感谢国家自然科学基金（批准号：12101486）、中国博士后科学基金（批准号：2020M683446）以及西安交通大学高性能计算平台的支持；H.Z. Tang 感谢国家自然科学基金（批准号：12171227 和 12288101）的支持。

附录 A 引理 1.2 的证明

本附录给出引理 1.2 的证明，该证明与 [45] 中引理 2.3 的证明略有不同。需要注意的是，引理 1.2 中的第二个和第三个性质在形式上不同于 [45] 中引理 2.3 的相应性质。

(i) 对于任意正数 κ，令 $(D^\kappa, \boldsymbol{m}^\kappa, E^\kappa)^T = \boldsymbol{U}^\kappa := \kappa \boldsymbol{U}$。由于 $\boldsymbol{U} \in \mathcal{G}$，容易验证

$$D^\kappa = \kappa D > 0, \quad E^\kappa - \sqrt{(D^\kappa)^2 + |\boldsymbol{m}^\kappa|^2} = \kappa\big(E - \sqrt{D^2 + |\boldsymbol{m}|^2}\big) > 0,$$

由此可得 $\kappa \boldsymbol{U}$ 的可容许性。

(ii) $\mathcal{G}$ 的凸性表明

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}\boldsymbol{U}_1+\frac{a_2}{a_1+a_2}\boldsymbol{U}_2\in\mathcal{G},$$

对于任意 $a_1,\ a_2>0$ 和 $\boldsymbol{U}_1,\ \boldsymbol{U}_2\in\mathcal{G}$。结合 (i) 中的结论可得

$$a_1\boldsymbol{U}_1+a_2\boldsymbol{U}_2\in\mathcal{G}.$$

(iii) 为简便起见，记

$$(D^\alpha,\boldsymbol{m}_i^\alpha,E^\alpha)^T=\boldsymbol{U}^\alpha:=\alpha\boldsymbol{U}-\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U}),$$
$$(D^\beta,\boldsymbol{m}_i^\beta,E^\beta)^T=\boldsymbol{U}^\beta:=-\beta\boldsymbol{U}+\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U}).$$

对于满足 $\alpha\geq\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})$ 的状态 $\boldsymbol{U}^\alpha$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
D^\alpha&=D(\alpha-u_i)\geq D\big(\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})-u_i\big)>0,\\
E^\alpha&=E(\alpha-u_i)-pu_i\geq E\big(\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})-u_i\big)-pu_i\\
&=\frac{p\gamma^2}{c_s^2}\left(\big(\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\big)\frac{u_i(1-c_s^2)+c_s\gamma^{-1}\sqrt{1-u_i^2-c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2-u_i^2)}}{1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2}-\Gamma u_i\right)\\
&\geq\frac{p\gamma^2}{c_s^2}\left(\big(\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\big)\frac{u_i(1-c_s^2)+c_s\gamma^{-2}}{1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2}-\Gamma u_i\right)\\
&=\frac{p}{c_s(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)}\Big(-c_su_i(\Gamma-c_s^2+1)+\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\Big)\\
&\geq\frac{p}{c_s(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)}\Big(-c_s|\boldsymbol{u}|(\Gamma-c_s^2+1)+\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\Big)\\
&=\frac{p}{c_s(1+c_s|\boldsymbol{u}|)}\Big(\Gamma-c_s^2-c_s|\boldsymbol{u}|\Big)>0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(E^\alpha)^2-|\boldsymbol{m}^\alpha|^2-(D^\alpha)^2&=(E^2-|\boldsymbol{m}|^2-D^2-p^2)(\alpha-u_i)^2+p^2(\alpha^2-1)\\
&=\frac{\Gamma p^2}{c_s^2}\gamma^2\left(\frac{2}{\Gamma-1}-\frac{\Gamma c_s^2}{(\Gamma-1)^2}\right)(\alpha-u_i)^2+p^2(\alpha^2-1)\\
&=p^2\cdot f(\alpha),
\end{aligned}$$

其中 $f(s)$ 是 $s\in[\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})$ 的二次函数，1)，其形式为

$$f(s)=\frac{\Gamma\gamma^2}{c_s^2}\left(\frac{2}{\Gamma-1}-\frac{\Gamma c_s^2}{(\Gamma-1)^2}\right)(s-u_i)^2+s^2-1.$$

容易证明， $f(s)$ 随 $s \in [\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})$ 单调递增，$1)$，因此对于任意 $s \in [\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})$，$1)$，都有 $f(s) \geq f(\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U}))$，进而 $f(\alpha) \geq f(\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U}))$。此外，我们有

$$\begin{aligned} f(\lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})) &= \frac{2\Gamma(\Gamma-1)-\Gamma^2 c_s^2}{(\Gamma-1)^2(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)^2}\bigg(-\frac{c_s u_i}{\gamma}+\sqrt{1-u_i^2-c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2-u_i^2)}\bigg)^2 \\ &\quad + \frac{\bigg(u_i(1-c_s^2)+c_s\gamma^{-1}\sqrt{1-u_i^2-c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2-u_i^2)}\bigg)^2}{(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)^2} - 1 \\ &= C_1\bigg(c_s u_i\gamma^{-1}-\sqrt{1-u_i^2-c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2-u_i^2)}\bigg)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

with

$$C_1 = \frac{1}{(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)^2}\bigg(\Gamma^2-1+c_s^2(1-2\Gamma)\bigg) > 0.$$

因此， $f(\alpha) > 0$接着 $(E^\alpha)^2-|\boldsymbol{m}^\alpha|^2-(D^\alpha)^2>0$。至此，我们已证明结论$\alpha\boldsymbol{U}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) \in \mathcal{G}$对于 $\alpha \geq \lambda_i^{(4)}(\boldsymbol{U})$。

对于状态 $\boldsymbol{U}^\beta$，当 $\beta \leq \lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})$ 时，同样可以得到

$$\begin{aligned} D^\beta &= D(u_i-\beta) \geq D\big(u_i-\lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})\big) > 0, \\ E^\beta &= E(u_i-\beta)+pu_i \geq E\big(u_i-\lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})\big)+pu_i \\ &= \frac{p\gamma^2}{c_s^2}\bigg(-\big(\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\big)\frac{u_i(1-c_s^2)-c_s\gamma^{-1}\sqrt{1-u_i^2-c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2-u_i^2)}}{1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2}+\Gamma u_i\bigg) \\ &\geq \frac{p\gamma^2}{c_s^2}\bigg(-\big(\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\big)\frac{u_i(1-c_s^2)-c_s\gamma^{-2}}{1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2}+\Gamma u_i\bigg) \\ &= \frac{p}{c_s(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)}\bigg(c_s u_i(\Gamma-c_s^2+1)+\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\bigg) \\ &\geq \frac{p}{c_s(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)}\bigg(-c_s|\boldsymbol{u}|(\Gamma-c_s^2+1)+\Gamma-c_s^2\gamma^{-2}\bigg) \\ &= \frac{p}{c_s(1+c_s|\boldsymbol{u}|)}\bigg(\Gamma-c_s^2-c_s|\boldsymbol{u}|\bigg) > 0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (E^\beta)^2-|\boldsymbol{m}^\beta|^2-(D^\beta)^2 &= (E^2-|\boldsymbol{m}|^2-D^2-p^2)(\beta-u_i)^2+p^2(\beta^2-1) \\ &= \frac{\Gamma p^2}{c_s^2}\gamma^2\bigg(\frac{2}{\Gamma-1}-\frac{\Gamma c_s^2}{(\Gamma-1)^2}\bigg)(\beta-u_i)^2+p^2(\beta^2-1) \\ &= p^2\cdot g(\beta), \end{aligned}$$

其中 $g(s)$ 是 $s \in (-1,\ \lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})]$ 的二次函数，形式为

$$g(s) = \frac{\Gamma\gamma^2}{c_s^2}\left(\frac{2}{\Gamma-1} - \frac{\Gamma c_s^2}{(\Gamma-1)^2}\right)(s-u_i)^2 + s^2 - 1.$$

容易证明，$g(s)$ 随 $s \in (-1,\ \lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})]$, 单调递减，因此对于任意 $s \in (-1,\ \lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})]$，都有 $g(s) \geq g(\lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U}))$，进而 $g(\beta) \geq g(\lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U}))$。此外，我们还可以证明

$$\begin{aligned} g(\lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})) &= \frac{2\Gamma(\Gamma-1) - \Gamma^2 c_s^2}{(\Gamma-1)^2(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)^2}\left(c_s u_i \gamma^{-1} + \sqrt{1 - u^2 - c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2 - u_i^2)}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\left(u_i(1-c_s^2) - c_s\gamma^{-1}\sqrt{1 - u_i^2 - c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2 - u_i^2)}\right)^2}{(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)^2} - 1 \\ &= C_2\left(c_s u_i \gamma^{-1} + \sqrt{1 - u_i^2 - c_s^2(|\boldsymbol{u}|^2 - u_i^2)}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

with

$$C_2 = \frac{1}{(1-c_s^2|\boldsymbol{u}|^2)^2}\left(\Gamma^2 - 1 + c_s^2(1-2\Gamma)\right) > 0.$$

因此，$g(\beta) > 0$，进而 $(E^\beta)^2 - |\boldsymbol{m}^\beta|^2 - (D^\beta)^2 > 0$，这将导致对于 $\beta \leq \lambda_i^{(1)}(\boldsymbol{U})$, $-\beta\boldsymbol{U} + \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U}) \in \mathcal{G}$。

□

参考文献

[1] R. Abgrall，《真正多维黎曼求解器》，研究报告，RR-1859，1993年（https://hal.inria.fr/inria-00074814）。

[2] D.S. Balsara，多维 HLLE 黎曼求解器：在欧拉流和磁流体动力学流中的应用，《计算物理学杂志》，229（2010）1970–1993。

[3] D.S. Balsara，《守恒律的二维 HLLC 黎曼求解器：在欧拉流和磁流体流动中的应用》，《计算物理学杂志》，231（2012年）7476–7503。

[4] D.S. Balsara、M. Dumbser 和 R. Abgrall，面向非结构网格的多维 HLLC 黎曼求解器——及其在 Euler 和 MHD 流动中的应用，《计算物理学杂志》，261（2014年）172-208。

[5] D.S. Balsara 和 M. Dumbser，基于多维黎曼求解器的高阶有限体积格式在非结构网格上实现无散磁流体力学，《计算物理学杂志》，299（2015年）687-715。

[6] P. Batten、N. Clarke、C. Lambert 和 D.M. Causon，关于HLLC黎曼求解器波速的选择，*SIAM*计算科学杂志，18 (1997)1553-1570。

[7] B.Biswasa、H. Kumar 和 D. Bhoriya，狭义相对论流体动力学方程的熵稳定不连续Galerkin格式，《计算数学及其应用》，112 (2022年) 55-75。

[8] G.Capdeville，气体动力学欧拉方程的多维HLL黎曼求解器，《计算流体》，47 (2011年) 122-147。

[9] G. Capdeville，非线性双曲系统的多维HLL黎曼求解器，《国际数值方法：流体》，67 (2011年) 1899-1931。

[10] P. Colella，《用于气体动力学的直接欧拉 MUSCL 格式》，《*SIAM*科学与统计计算杂志》，6 (1985) 104-117。

[11] S. F. Davis，《简化的二阶Godunov型方法》，《*SIAM*科学与统计计算杂志》，9(3)(1988年) 445-473。

[12] D. Bhoriya 和 H. Kumar，《相对论流体动力学方程的熵稳定格式》，《应用数学与物理学杂志》，71 (2020年)1-29。

[13] A. Dolezal 和 S.S.M. Wong，《相对论流体动力学与本质无振荡激波捕捉格式》，《计算物理学杂志》，120 (1995)266-277。

[14] J.M. Duan 和 H.Z. Tang，《一维和二维狭义相对论流体动力学的高阶精度熵稳定有限差分格式》，《应用数学与力学进展》，12 (2020年) 1-29。

[15] J.M.Duan 和 H.Z. Tang，《理想特殊相对论磁流体力学的高阶精确熵稳定节点间断伽辽金格式》，《计算物理学杂志》，421 (2020年) 109731。

[16] J.M. Duan 和 H.Z. Tang，二维和三维特殊相对论流体力学的熵稳定自适应动网格格式，《计算物理学杂志》，426（2021年）109949。

[17] J.M. Duan 和 H.Z. Tang，适用于特殊相对论（磁）流体力学的高阶精确熵稳定自适应动网格有限差分格式，《计算物理学杂志》，456（2022年）111038。

[18] B. Einfeldt，关于气体动力学的 Godunov 型方法，*SIAM* 数值分析杂志，25（3）（1988年）294-318。

[19] J.A. Font，广义相对论中的数值流体动力学和磁流体力学，《相对论综述》，11（2008年）7。

[20] A. Harten、P.D. Lax 和 B. van Leer，关于双曲守恒律的上游差分和 Godunov 型格式，*SIAM* 评论，25（1983年）289-315。

[21] P. He 和 H.Z. Tang，《二维相对论流体动力学的自适应动网格方法》，计算物理学通讯，11 (2012年)114-146。

[22] P. He 和 H.Z. Tang，《二维相对论磁流体力学的自适应动网格方法》，《计算流体》，60 (2012年) 1-20。

[23] D. Ling、J.M.Duan 和 H.Z.Tang，《用于一维和二维狭义相对论流体动力学的保持物理约束的拉格朗日有限体积格式》，《计算流体学杂志》，396 (2019年) 507-543。

[24] F.D. Lora-Clavijo、J.P. Cruz-P´erez、F.S. Guzm´an 和 J.A. Gonz´alez，《牛顿流体动力学和相对论流体动力学中一维黎曼问题的精确解》，$Rev.\ Mex.\ F´ıs.\ E$，59（2013年）28–50。

[25] J.C. Mandal 和 V. Sharma，《一种真正多维的欧拉方程对流压力通量分裂黎曼求解器》，《计算物理学杂志》，297（2015年）669–688。

[26] J.M. Martı́ 和 E. M¨uller，《相对论流体动力学中黎曼问题的解析解》，《流体力学杂志》，258 (1994年)317-333。

[27] J.M. Martı́ 和 E. M¨uller，《狭义相对论中的数值流体力学》，《相对论综述》，6 (2003年) 7。

[28] J.M. Martı́ 和 E. M¨uller，《相对论流体动力学和磁流体动力学中的基于网格的方法》，《计算天体物理学综述》，1 (2015年)3。

[29] M.M. May 和 R.H. White，《广义相对论坍缩的流体动力学计算》，《物理评论》，141 (1966年)1232-1241。

[30] M.M. May 和 R.H. White，《恒星动力学与引力坍缩》，《计算物理方法》，7 (1967年) 219-258。

[31] V. Pant，等熵相对论流体动力学的全局熵解，《偏微分方程通讯》，21 (1996) 1609-1641。

[32] T. Qin、C.-W. Shu 和 Y. Yang，用于相对论流体动力学的保界间断伽辽金方法，《计算物理学杂志》，315 (2016)323-347。

[33] F. Qu、D. Sun、J. Bai 和 C. Yan，曲线坐标下可压缩流动的一种真正二维黎曼求解器，《计算物理学杂志》，386 (2019) 47-63。

[34] D. Radice 和 L. Rezzolla，广义相对论流体动力学的间断伽辽金方法：形式化及其在球对称时空中的应用，《物理评论D辑》，84 (2011) 024010。

[35] P.L.Roe，近似黎曼求解器、参数向量与差分格式，《计算物理学杂志》，43（1981年）357-372。

[36] K.A. Schneider、J.M. Gallardo、D.S. Balsara、B. Nkonga 和 C. Par´és，双曲非守恒系统的多维近似黎曼求解器及其在浅水系统中的应用，《计算物理学杂志》，444（2021年）110547。

[37] C.-W. Shu，针对对流主导问题的高阶加权基本无振荡格式，*SIAM* 评论，51（2009年）82-126。

[38] A. Tchekhovskoy、J.C. McKinney 和 R. Narayan，WHAM：一种基于 WENO 的广义相对论数值格式，I. 流体动力学，皇家天文学会月刊，379（2007年）469-497。

[39] E.F. Toro，黎曼求解器与流体动力学数值方法：实用导论，第3版，施普林格，2009年。

[40] B. van Leer，多维迎风差分的进展。载于：Napolitano M.、Sabetta F.（编）第十三届流体动力学数值方法国际会议，物理学讲义，第414卷。施普林格，柏林，海德堡，1993年。

[41] B. Wendroff，适用于气体动力学的二维HLL黎曼求解器及相关Godunov型差分格式，《计算数学及其应用》，38 (1999) 175-185。

[42] J.R. Wilson，Kerrr时空中流体流动的数值研究，《天体物理学杂志》，173 (1972) 431-438。

[43] K.L. Wu，广义相对论流体动力学中可证明满足物理约束保持性质的方法设计，《物理评论D辑》，95 (2017) 103001。

[44]K.L. Wu 和 H.Z. Tang，二维狭义相对论流体动力学的有限体积局部演化Galerkin方法，《计算物理学杂志》，256 (2014) 277-307。

[45] K.L. Wu 和 H.Z. Tang，《用于狭义相对论流体力学的高阶精度保持物理约束有限差分 WENO 格式》，《计算物理学杂志》，298（2015年）539-564。

[46] K.L. Wu 和 H.Z. Tang，《一种用于球对称广义相对论流体动力学的直接欧拉型GRP格式》，*SIAM*计算科学杂志，38（2016年）B458-B489。

[47] K.L. Wu和H.Z. Tang，具有一般状态方程的狭义相对论流体力学保持物理约束的中心间断伽辽金方法，《天体物理学杂志增刊系列》，228（2017年）3。

[48] K.L. Wu和H.Z. Tang，相对论磁流体动力学方程的可容许状态与保持物理约束格式，《数学模型与方法应用科学》，27（2017年）1871-1928。

[49] K.L. Wu和H.Z. Tang，关于具有一般状态方程的狭义相对论磁流体动力学保持物理约束格式，《应用数学与物理学杂志》，69（2018年）84。

[50] K.L. Wu、Z.C. Yang和H.Z. Tang，一维相对论流体动力学的三阶精度直接欧拉型GRP格式，《东亚应用数学杂志》，4（2014年）95-131。

[51] Z.F. Xu，适用于求解双曲守恒律高阶格式的参数化保最大值原理通量限制器：一维标量问题，《数学计算》，83（2014年）2213-2238。

[52] Z.C. Yang、P. He 和 H.Z. Tang，相对论流体动力学的直接欧拉型GRP格式：一维情形，《计算物理学杂志》，230（2011年）7964-7987。

[53] Z.C. Yang 和 H.Z. Tang，相对论流体动力学的直接欧拉型GRP格式：二维情形，《计算物理学杂志》，231（2012年）2116-2139。

[54] Y.H. Yuan 和 H.Z. Tang，一维和二维狭义相对论流体力学的两阶段四阶精度时间离散，《计算数学杂志》，38（2020年）746-774。

[55] L.D. Zanna 和 N. Bucciantini，《用于多维相对论流动的高效捕捉激波的中心型格式，I：流体动力学》，《天文学与天体物理学》，390（2002年）1177-1186。

[56] X.X. Zhang 和 C.-W. Shu，《矩形网格上可压缩Euler方程的保正高阶间断Galerkin格式》，《计算物理学杂志》，229（2010）8918-8934。

[57] J. Zhao和H.Z. Tang，采用WENO限制器的狭义相对论流体动力学Runge-Kutta间断伽辽金方法，《计算物理学杂志》，242（2013年）138-168。

[58] J. Zhao和H.Z. Tang，狭义相对论磁流体力学的Runge-Kutta间断伽辽金方法，《计算物理学杂志》，343（2017年）33-72。

[59] J. Zhao和H.Z. Tang，狭义相对论流体动力学的Runge-Kutta中心间断Galerkin方法，计算物理学通讯，22（2017年）643-682。