arXiv:2303.02687v1 [cs.DS] 5 Mar 2023

扩张引理——多项式时间预处理的变体与应用

Ashwin Jacob[1],Diptapriyo Majumdar[2], 和 Venkatesh Raman[3]

[1]以色列贝尔谢巴内盖夫本-古里安大学， ashwinj@bgu.ac.il[2]印度新德里因陀罗普拉斯塔信息技术学院，diptapriyo@iiitd.ac.in[3]印度金奈数学科学研究所，HBNI，vraman@imsc.res.in

2023年3月7日

摘要

在参数化复杂性中，众所周知，一个参数化问题是固定参数可处理的，当且仅当它具有一个核——该核是与输入实例等价的实例，其规模仅是参数的函数。核的规模可能呈指数增长，甚至更糟，因此人们开始寻求具有多项式大小的核的固定参数可处理问题。用于证明核规模下界的工具不断发展，由此引出了这样一个问题：固定参数可处理问题的核的渐近最优规模是多少?

本文综述了一种称为扩张引理的工具，它有助于缩小核的规模。该工具早期以冠分解的形式出现，用于为Vertex Cover 问题获得线性核；后来，人们发现这一特定引理是无向反馈顶点集问题的最优$O(k^2)$核背后的工具。此后，人们发现了该工具的多种变体和扩展。本文将连同它们的应用一并进行综述。

目录

1 引言 **3**

2 预备知识 **3**

3 冠　分解与应用 5
3.1 顶点覆盖.6 3.2 $(n-k)$-着色.7 3.3 最大可满足性.7 3.4 $(n-k)$-列表着色.7 3.5 以顶点覆盖大小为参数的最长环.8 3.6 一般冠分解及其在打包与覆盖问题中的应用 . 8 3.7 其他示例.10

4（基础）扩张引理及应用 11
4.1 连通性.12 4.2 无向反馈顶点集.12 4.3 簇顶点删除.13 4.4 其他删除问题.14 4.5 图打包问题.16 4.6 其他问题.16

5 最新进展 最新进展 17
5.1 加权 q-扩张引理.17 5.2 更强扩张引理与双重扩展引理.18 5.3 平衡扩展与平衡冠分解.21 5.4 加性扩张引理.23

6 结论与未来研究 **24**

1 引言

预处理是算法实现中由来已久的技术，尤其适用于困难问题。随着参数化复杂性理论的兴起，预处理理论也获得了正式的发展。参数化问题除了输入实例外，还带有一个参数。参数化复杂性的目标是考察能否设计一种算法，使其组合爆炸局限于参数，而其余运行时间则关于输入规模呈多项式增长。这种算法称为固定参数算法，而能够由这种算法求解的问题则称为固定参数可处理问题。

众所周知（例如，参见 [20]），一个可判定参数化问题是固定参数可处理的，当且仅当输入实例可以在多项式时间内约化为一个等价实例，且该实例的大小仅取决于参数。这样的等价实例称为核。核的大小可能是指数级甚至更大，因此人们致力于寻找具有多项式大小的核的固定参数可处理问题。在复杂性理论假设下，用于证明多项式大小的核不存在的工具 [11, 24], ，以及针对核大小的更具体下界 [22] ，使这套理论更有趣。

本文综述一种有助于缩减核大小的工具，称为扩张引理。它最初以冠分解的形式出现，用于为 VertexCover 问题 [19]，获得线性核；而后，人们发现这一具体引理是该问题 Undirected Feedback Vertex Set 的最优 $O(k^2)$ 核背后的工具 [62]。此后，人们发现了该工具的若干变体和扩展。本文将综述这些内容及其应用。对于尽可能多的结果，只要扩张引理的某个变体是其应用的主要（也可能是唯一）工具，我们就尝试给出概要。对于若干问题，除了该工具之外，还需要其他思路才能得到改进核。此外，在扩张引理是主要工具的地方，我们尝试以自成一体的方式讲解算法；对于其他情况，我们则尝试说明如何应用该工具，并且往往不深入探讨其他复杂的技术细节，以免偏离本综述的主要目的。

论文结构：在第 2 节中，我们介绍基本术语和记号。接下来的三节将开始介绍本文的技术部分。在第 3 节中，我们介绍冠分解技术、基本引理及其在获取一些改进核方面的应用。在第 4 节中，我们介绍扩张引理及其在核化中若干问题上的应用。最后，在第 5 节中，我们讨论近期进展，包括对（基本）扩张引理的推广及其应用。我们将在第 6 节中总结一些可能的未来研究方向。

2 预备知识

参数化复杂性与核化：参数化问题 L 是$\Sigma^* \times \mathbb{N}$ 的子集，其中 Σ 是一个有限字母表。假设 $k \in \mathbb{N}$ 以一元形式给出，参数化问题的一个实例为（x， k），其中 $x \in \Sigma^*$ 且 $k \in \mathbb{N}$。

定义 2.1（固定参数可处理性）。如果存在一个用于解决该问题的算法 $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$，使得对于输入（ L ， x），其运行时间为 $k(f)k$，其中 $|x|^{\mathcal{O}(1)}$： f是一个可计算函数，则称参数化问题 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$是固定参数可处理的（或称 FPT ）。

定义 2.2（核化）。设 $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 是一个参数化问题。对于 L 的核化是一个多项式时间（(($|x| + k$)$^{\mathcal{O}(1)}$-时间)）过程，它将输入实例 (x, k) 替换为输入实例 (x', k')，使得

- $(x, k) \in L$ 当且仅当 $(x', k') \in L$。
- $|x'| + k' \leq g(k)$，其中 g 是一个可计算函数： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$。

众所周知，一个可判定参数化问题是固定参数可处理的，当且仅当它存在一个核化 [20]。核化可以视为预处理启发式方法的理论基础。我们感兴趣的是研究参数化问题何时存在规模较小的核化，

尤其是多项式规模的核，并且其上界尽可能小。关于参数化复杂性和核化的其他定义、记号及细节，请参阅 [20,25,29,34,56]和 [32]。

集合、数与图论：我们使用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集合。对于 $r \in \mathbb{N}$，我们用 $[r]$ 表示集合 $\{1,\ldots,r\}$。布尔公式是由二元变量和逻辑运算符合取（$\wedge$）、析取（$\vee$）及否定（$\neg$）构成的表达式。如果一个布尔公式是若干子句的合取，则称其为合取范式（或 CNF）。文字是一个布尔变量本身的形式或其补形式。每个子句都是文字的析取。我们通常使用 $G = (V, E)$ 表示无向图，使用 $D = (V, A)$ 表示有向图。令 $V(G)$ 表示 G 的顶点集合，令 $E(G)$ 表示 G 的边集合。当 G 的含义根据上下文明确时，记 $n = |V(G)|$ 和 $m = |E(G)|$。一般而言，我们用 n 表示输入图中的顶点数，用 m 表示输入图中的边数。给定图 $G = (V, E)$ 和 $X \subseteq V(G)$，我们用 $G[X]$ 表示 G 的一个导出子图；其顶点集为 X，边集由 $E(G)$ 的所有边组成，这些边的两个端点均位于 X 中。令 $G - X$ 表示 G 在顶点集 $V(G) \setminus X$ 上导出的子图。如果无向图中的每一对顶点都彼此相邻，则称该图为团。独立集是一个两两不相邻的顶点集合。竞赛图是一种有向图 T，对于每一对顶点 u、$v \in V(T)$，uv 或 vu 中恰有一个是 T 的有向边。在无向图 $G = (V, E)$ 中，路径是一个由 P 个互不相同的顶点组成的集合（起点和终点可能相同），其中 P 中的顶点可以按顺序排列为 v_1，...，v_d，使得对于每个 $1 \leq i \leq d-1$、$v_i v_{i+1} \in E(G)$。一般而言，对于路径中的所有 $1 \leq i \leq d-1$、$v_i \neq v_{i-1}$，均满足该条件。类似地，在有向图 $D = (V, A)$ 中，有向路径可用类似方式定义，只需对于每个 $i \leq d-1$，$(v_i, v_{i+1}) \in A$。有向环是起点和终点相同的（有向）路径。无向图的连通分量是一个不属于任何更大连通子图的连通子图。对于子集 X、A、$B \subseteq V(G)$，当 $G - X$ 的任何连通分量都不同时包含来自 $A \setminus X$ 和 $B \setminus X$ 的顶点时，我们称 X 分隔 A 和 B。给定顶点子集 $X \subseteq V(G)$，我们使用 $N_G(X)$ 表示 X 的开邻域，并使用 $N_G[X]$ 表示 X 的闭邻域。当图 G 根据上下文明确时，我们省略下标。

如果 $G - \{v\}$ 的连通分量数多于 G，那么 G 的顶点 v 就是割点。如果 $|V（G）\geq 3$且没有割点，则图G 是双连通的。如果图 G 的每个极大双连通分支都是团，则称其为块图。树是没有环的连通无向图（等价地说，是连通无圈无向图）。森林是这样一种图，其每个连通分量都是一棵树。有向无环图是没有有向圈的有向图。有向无环图的拓扑排序是顶点的一种线性排序，使得对于每条有向边 uv，顶点 u 在排序中位于 v 之前。如果无向图 $G =（V，E）$存在 $V（G）= A \uplus B$，使得对于每个 $uv \in E（G），u \in A$ 当且仅当 $v \in B$，则称其为二分图。我们称 A 和 B 为 G的二分部。另一种等价刻画是：二分图不含奇圈。我们用 $G =（A \uplus B，E）$表示这样的二分图，其中 A和 B是其二分部，E是其边集。如果图的集合 $M \subseteq E（G）$满足对于任意两条边 uv、$xy \in M$，$\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$，则称其为匹配。如果顶点 $u \in V（G）$与匹配 M中的某条边 M关联，则称该顶点被匹配 M匹配。若图 G 的匹配 M饱和 A，则 $A \subseteq V（M）$。如果所有顶点都被 M匹配，则称该匹配为完美匹配。如果图中的环 C 满足 $G[C]$ 除了该环的边以外没有其他边，则称其为诱导圈。如果一个图不含长度至少为 4 的诱导圈，则称其为弦图。出树是一种有向图，其中每个顶点的入度至多为 1，且其底层无向图是一棵树。出森林是若干出树的不相交并。如果存在某个 $k \in \mathbb{N}$以及函数 $\lambda：V（G）\to [k]$，使得对于每个 $uv \in E（G），\lambda（u）\neq \lambda（v）$，则称图为 k-可着色的。这样的函数 λ 称为 G的正常着色。众所周知，二分图是 2-可着色的。如果对于每个$u \in V（G）$，图 $G - u$ 都有完美匹配，则称图 G 为因子临界图。关于图论的其他术语，我们采用 Diestel [23] 的标准图论记法。

我们在本文中多次使用以下众所周知的命题。

命题 2.1（霍尔定理 [35]）。设 $G = (V = A \uplus B, E)$ 是一个二分图。则，G 存在一个饱和 A 的匹配，当且仅当对于每个 $X \subseteq A$，$|N(X)| \geq |X|$。

给定一个二分图 $G=(A\uplus B,E)$，若集合 $X\subseteq A$ 满足 $|N(X)|<|X|$，则称其为霍尔集。若一个霍尔集的任何真子集都不是霍尔集，则称该霍尔集是极小的。给定一个二分图$G=(A\uplus B,E)$，可以利用命题 2.1 在多项式时间内计算出一个极小霍尔集。

在陈述以下命题之前，我们需要引入一些记号。对于图 $G=(V,E)$，假设 $S\subseteq V(G)$，且 $\mathcal{C}$ 是 $G-S$的顶点不相交子图集合，令 $\mathcal{N}_G(S,\mathcal{C})=\{H\in\mathcal{C}\mid E(S,V(H))\neq\emptyset\}$。

命题 2.2（埃德蒙兹-盖莱结构定理 [26,49]）。对于每个图 $G=(V,E)$，都存在两两不相交的子集 $X,Y,Z\subseteq V(G)$，使得

(i) $X\cup Y\cup Z=V(G)$,

(ii) $Y=N_G(X)$,

(iii) $G[X]$的每个连通分量都是因子临界的,

(iv) $G[Z]$有一个完美匹配，并且

(v) 对于每个非空子集 $Y'\subseteq Y$，都有 $|\mathcal{N}_G(Y',\mathcal{C})|\geq|Y'|$。

此外，这样的 X,Y,Z可以在多项式时间内计算出来。

图参数：我们介绍本文中将用到的不同图参数。若对于每条边 $uv\in E(G)$，都有 $\{u,v\}\cap S\neq\emptyset$，则子集 $S\subseteq V(G)$ 是 G 的顶点覆盖。因此，对于无向图 G，如果 S 是顶点覆盖，那么 $V(G)\setminus S$ 是独立集（反之亦然）。若 $G-S$ 的每个连通分量都是一个团，则子集 $S\subseteq V(G)$ 称为 G 的簇顶点删除集。若 $G-S$ 不含环，则子集 $S\subseteq V(G)$ 称为 G 的反馈顶点集。

下面这个图参数需要一个更加复杂的定义。

定义 2.3（路径宽度 [59–61]）。图 G 的路径分解是一个二元组 (T,χ)，其中$T=(V_T,E_T)$ 是一条路径，而 $\chi=\{\chi_i\mid i\in V_T\}$ 是 $V(G)$ 的一个由子集构成的集合族，这些子集称为袋，并满足

(i) $\cup_{i\in V_T}\chi_i=V(G)$.

（ii）对于每条边 $uv\in E(G)$，存在 $i\in V_T$ 使得 $u,v\in\chi_i$。

（iii）对于 每个顶点 $u\in V(G)$，节点集合 $\{i\in V_T\mid u\in\chi_i\}$ 在 T中诱导出一个连通子图 .

值 $\max_{i\in V_T}\{|\chi_i|-1\}$ 称为路径分解（T,χ）的宽度。图的路径宽度是在 G的所有可能树分解中所取的最小宽度。理解路径（或线性森林）的路径宽度为 1 并不难。类似地，环的路径宽度为 2，而毛毛虫树的路径宽度也是 1。此外，含有 n 个顶点的团的路径宽度为 $n-1$。非正式地说，图的路径宽度衡量了一个图接近路径的程度。

我们以一个结构和一个可被视为扩展引理的前身的引理开始综述的技术部分。

3 冠分解及应用

本节将定义一种相关技术，称为“冠分解”，并介绍其在一些问题中的应用。在第 3.1、3.2、3.3、3.4 和 3.5 节中，我们将分别讨论如何利用冠分解技术为 Vertex Cover、$(n-k)$-Coloring、Maximum Satisfiability、$(n-k)$-ListColoring 和 Longest Cycle 问题构造核。之后，在第 3.6 节中，我们将讨论 Chen 等人最近提出的冠分解技术的一种推广 [17]。

Vertex Cover (VC)输入：一个无向图 $G=(V,E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个至多包含 k 个顶点的集合 $S\subseteq V(G)$，使得对于每个 $uv\in E(G)$， $u\in S$ 或 $v\in S$?

在 VERTEX COVER 问题的背景下，一个众所周知的归约规则是：为了去除悬挂（度为一）顶点，将它们的邻居选入解 [20] 中（并删除这些顶点及其邻居）。

Fellows [27] 提出的冠概括了悬挂顶点背后的结构。

定义 3.1（冠分解）。给定一个图 $G = (V, E)$，G 的冠分解是对 $V(G)$ 的一种划分 $= C \uplus H \uplus R$，满足

- $C \neq \emptyset$,
- C 是一个独立集,
- 中不存在连接 C 中的顶点与 R中顶点的边；也就是说，H 将 C 与 R分隔开，并且
- 在边 $E \cap (H \times C)$ 中存在一个大小为 $|H|$ 的匹配。

集合 C 可看作戴在剩余部分（主体）R的头部 H 上的冠。如果 G 有一个悬挂顶点 x，其（唯一的）邻居为 y，那么 $C = \{x\}$、$H = \{y\}$ 和 $R = V \setminus \{x, y\}$ 就构成一个冠分解。

引理 3.1（冠引理-1, [19,27]）。设 G是一个没有孤立顶点且至少有 $3k+1$个顶点的图。那么存在一个多项式时间算法，可以执行以下操作之一：

- 在 G中找到一个大小为 $k+1$ 的匹配，或
- 找到 G的一个冠分解。

Fellows [27] 以如下方式应用引理 3.1 进行核化。首先，他们注意到，如果存在一个大小为 $k+1$的匹配，那么对于某些问题，该实例显然是一个是或否实例。此外，在另一种情况下，可以论证冠的头部属于某个最优解（因为它覆盖了大量障碍），因此可以将其删除，从而得到一条归约规则。

以下是引理 3.1 的一种变体，有时会很有用。该引理也为下一节中描述的更一般的扩张引理作了铺垫。

引理 3.2（冠引理-2, [19, 32, 36]）。设 $G = (V = A \uplus B, E)$ 是一个二分图，B 中没有孤立顶点，且 $|B| \geq |A|$。那么，存在一个多项式时间算法，能够

- 找到一个饱和 A 的匹配，或者
- 找到 G 的一个冠分解 (C, H, R)，其中 $C \subseteq A$ 且 $H \subseteq B$。

如果不存在饱和 A 的匹配，那么根据霍尔定理（命题 2.1），存在一个极小霍尔集 $C \subseteq A$，使得 $|N(C)| < |C|$。这样的极小霍尔集会导出一个冠分解；证明见 [32] 。

我们用一些例子来说明这些引理。

3.1 顶点覆盖

现在我们概述 Chor 等人针对 VERTEX COVER 提出的一个含有 $3k$ 个顶点的核 [19]，在这里可以看到引理 3.1 的最早应用。可以安全地移除输入图 G 中的孤立顶点。然后，他们调用引理 3.1 中的算法，该算法要么在 G 中给出一个大小为 $k+1$ 的匹配，要么在 G 中给出一个冠分解（若 G 的顶点数超过 $3k$）。在前一种情况下，可以断定输入实例是一个否实例，因为要覆盖匹配中的边，G 的任何顶点覆盖都至少需要 $k+1$ 个顶点。

因此，他们假设算法会返回 G 的一个冠分解，其冠为 C，头部为 H。设 M 是将 H 匹配到 C 的匹配，并且该匹配饱和 H。覆盖 $G[H \cup C]$ 中边的任何顶点覆盖都必须至少包含 $|M| = |H|$ 个顶点。由于 M 饱和 H，且 C 是一个独立集，因此集合 H 覆盖了 $G[H \cup C]$ 中的所有边。所以，我们可以安全地将问题实例归约为 $(G \setminus (H \cup C)\ k - |H|)$。由此可知，只要 $|V(G)| > 3k$，我们就能归约 VERTEX COVER 实例。因此，VERTEX COVER 存在一个包含 $3k$ 个顶点的核。Lampis 等人 [44] 运用线性规划技术，将这一界改进为包含 $2k - \log k$ 个顶点的核。关于 VERTEX COVER 的另一种包含 $2k$ 个顶点的核，请参见 Li 和 Zhu [46] 。

3.2 $(n-k)$-着色

给定一个无向图，判断其顶点能否用 k 种颜色适当着色，即使对于 $k=3$，也是 NP-困难。因此，除非 P=NP，否则不可能存在核或 FPT算法。不过，一个相关问题是：图 G 能否用 $n-k$ 种颜色适当地着色，其中该图有 n 个顶点？这等价于能否节省 k 种颜色。形式化定义如下。

$(n-k)$-Coloring输入：一个无向图 $G=(V,E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一种着色 Ξ： $V \to \{1,2,\ldots\lvert V\rvert -k\}$ 使得只要满足 $xy \in E$，就有 $\Xi(x) \neq \Xi(y)$?

该问题有一个 FPT算法，并可利用 Chor 等人的引理 3.1 得到一个 $3k$ 顶点核 [19]（更多细节另见 [32] ）。其思路是将引理 3.2 应用于补图。如果其中包含大小为 k 的匹配，那么 G 中这 k 对非边可以帮助我们减少 k 种颜色。否则，冠 C 是 G 中的一个团，需要 $|C|$ 种颜色，并且 C 中的所有顶点都与 $V \setminus (H \cup C)$ 中的每个顶点相邻。此外，饱和 H 的匹配有助于使用 C 中用过的颜色为 H 中的顶点着色。因此，我们可以移除 $H \cup C$，并在剩余顶点上递归执行此过程。如果发现已使用的颜色超过 $(n-k)$ 种，或者只剩下 $3k$ 个顶点，该过程就会停止；前一种情况意味着输入是一个否实例。最近，Li 等人 [45] 改进了这一结果，为该问题给出了一个 $(2+\varepsilon)k$ 顶点核。他们提出了图的一种新结构，称为“分形临界冠”，并利用命题 2.2 和因子临界冠的概念（定义见 3.6）得到这一结果。

3.3 最大可满足性

Maximum Satisfiability输入：一个含有 n 个变量和 m 个子句的合取范式（CNF）公式 ϕ，以及一个非负整数 k。参数： k。问题：是否存在一个真值赋值，使 ϕ 至少满足 k 个子句?

众所周知，这样的 CNF公式 存在一个真值赋值，至少满足 $m/2$ 个子句。这意味着我们可以假设 $m \leq 2k$，否则该实例就是一个是实例。通过贪心算法依次为每个子句适当地设置一个尚未赋值的变量，也很容易看出：如果 $n \geq m$，则公式 ϕ 是可满足的。

因此可以假设 $n < m < 2k$。Lokshtanov [47] 利用引理 3.2证明了（如下所述），可以使 n 小于 k。其思想是构造一个二分图，其二分划分为 A和 B，其中 A 对应公式中的变量， B 对应公式中的子句。如果 x 出现在子句 c中，则在 $x \in A$ 与一个 $c \in B$ 之间添加一条边。

如果 $n \geq k$，那么根据引理 3.2，如果我们有一个饱和 A 的匹配，就可以通过适当设置匹配中的变量，使匹配中的子句得到满足。因此，我们至少能够满足 k 个子句。否则，可以证明，冠（C、 H、 R）可用于满足由 H 表示的子句，方法是适当设置由 C 表示的变量，并移除这些子句和变量。更多细节请参见 [32] 。

3.4 （$n-k$）-列表着色

Banik 等人 [9] 使用引理 3.2，为 $(n-k)$-List Coloring 得到了一个固定参数可处理算法。(-List Coloring) -List Coloring是第 3.2 节问题的推广；在该节中，他们给出了一条归约规则，将所有列表中的颜色数量限制为 n。下面对该问题进行形式化定义。

$(n-k)$-List Coloring输入：一个图 $G=(V,E)$、一个整数 k，以及对于每个 $u \in V(G)$，一个恰好包含 $(n-k)$ 种颜色的集合 $L(u)$。参数： k。问题：是否存在 G 的正常着色，使得对于所有 $u \in V(G)$，分配给 u 的颜色都属于 $L(u)$?

这里，他们构造了一个辅助二分图，一侧的顶点为 $V(G)$，另一侧为 $\mathcal{C}$，即每个顶点列表中的颜色；如果某个顶点的列表中包含某种颜色，就在该顶点与该颜色之间添加一条边。随后，他们应用引理 3.2。如果存在一个饱和 $\mathcal{C}$ 的匹配，则颜色数至多为 $|V(G)| = n$。否则，我们得到一个冠分解 (C,H,R)，其中有 $C \subseteq \mathcal{C}$ and$H \subseteq V(G)$。由于存在一个匹配 M，从 H 到 C，它饱和 H，且 $N(C) = H$，我们可以安全地按照匹配 M 使用颜色 C 为 H 中的顶点着色，并缩减该实例。因此，颜色数减少到 n。我们还运用其他思路来获得一个 FPT算法。

3.5 以顶点覆盖大小为参数的最长环

Longest Cycle (vc)输入：一个图 G、整数 k 和 ℓ，以及 G 的一个顶点覆盖 S，满足 $|S| = k$。参数： k。问题： G 是否包含一个有 ℓ 个顶点的环?

Bodlaender 等人 [12] 表明， Longest Cycle (vc) 存在一个具有 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核。在这里，他们构造了一个辅助二分图，其一侧是顶点对，另一侧是 $I = V(G)$ 个 $\setminus S$，当一对中的两个顶点都与 I中的某个顶点相邻时，便添加一条边。现在我们应用引理 3.2。若存在一个饱和 I的匹配，则顶点总数为 $\mathcal{O}(k^2)$。否则，我们得到一个冠分解 (C,H,R)，其中包含 $C \subseteq I$ 和 $H \subseteq S$。令 M 为一个从 H 到 C 且饱和 H的匹配。我们声称，对于任意未被 M饱和的顶点 $v \in C$，都可以将实例规约为 $(G-v,k,\ell,S)$。假设 G中的一个解环 C'包含 v。由于 I是一个独立集， v 在 C 中的两个邻居为 $s_1, s_2 \in S$。注意，存在另一个顶点 $v' \in I$，它同时与 s_1 和 s_2 相邻，因为匹配 M 中存在一条对应于 v' 和顶点对 (s_1,s_2) 的边 $\in H$。通过在 $G-v$中用 v' 替换 v，这便给出了一个环 C''。

3.6 一般冠分解及其在打包和覆盖问题中的应用

Chen 等人 [17] 引入了冠的一般概念，并利用它为T_r-Packing 问题获得了一个 $\mathcal{O}(k)$顶点核（对每个固定整数 r 均成立），其中 T_r 是一棵具有 r 条边的树。

众所周知，图中的许多覆盖问题都可以表述为如下定义的 d-HittingSet 实例。

d-Hitting Set输入：全集 U上的集合族 $\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 中的每个集合大小至多为 d，以及一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个子集 $X \subseteq U$， $|X| \leq k$ 使得 X 至少包含 $\mathcal{F}$中每个集合的一个元素?

同样，图中的许多打包问题都可以表述为一个 d-Set Packing实例，定义如下。

d-Set Packing输入：全集 U上的集合族 $\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 中的每个集合大小至多为 d，以及一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个子集 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$， $|\mathcal{F}'| = k$，使得 U 中的每个元素至多属于 $\mathcal{F}'$中的一个集合?

众所周知，支配集问题 d-Hitting Set 和 d-Set Packing问题可以表述为，而它们在二分图中的对偶问题定义如下。

d-Red/Blue Dominating Set输入：二分图 $G = (R \uplus B, E)$，其中 $\forall x \in B$： $deg(x) = d$，以及一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个子集 $X \subseteq R, |X| \leq k$，使得 X 满足 $N(X) = B$?

d-Red/Blue Distance-3 Packing输入：二分图 $G = (R \uplus B, E)$，其中 $\forall x \in B$： $deg(x) = d$，以及一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个子集 $X \subseteq B, |X| \geq k$，使得每个 $x \in R$ 至多是一个 $x \in X$的邻居?

下面正式给出一般冠分解的定义。

定义 3.2（[17]）。设 $G = (V = A \uplus B, E)$ 是一个二分图，使得对于所有 $x \in B$,$deg_G(x)$， $= d$。那么，G 的一般冠分解 (C, H, X) 由头部 $H \subseteq A$ 和冠 $C \subseteq (A \uplus B) \setminus (H \cup C)$ 构成，并满足以下性质

- H 是 G 中的一个分隔集，其中一组连通分量为 C。
- $N(H) \supseteq C \uplus B$。
- 存在一个单射 M： $H \to C \cap B$，使得：对于所有 $x \in H$, $xM(x)$， $\in E(G)$；并且每个 $v \in A$ 至多与一个 $x \in M(H)$ 相邻。
- $X = (A \uplus B) \setminus (H \cup C)$ 是其余顶点。

作者证明了（G， k）是 d-Red/Blue Dominating Set （或分别为 d-Red/Blue Distance-3 Packing ）的肯定实例，当且仅当（$G -$ （$H \cup C$） k）是肯定实例，其中（C， H， X）是 G的一般冠分解。

作者为图上的覆盖和打包问题制定了一个获取冠规则的框架。他们定义了针对具体问题的冠分解概念。随后，他们将问题归约为 d-Red/Blue Dominating Set （或分别为 d-Red/Blue Distance-3 Packing），其中，针对具体问题的冠分解对应于一般冠分解。由对应于一般冠分解的归约的安全性，可推出针对具体问题的冠分解的安全性。

作者在以下覆盖和打包问题的背景下展示了这一框架。

r-Edge-Tree-Covering输入：一个无向图 G 和一个整数 k。参数： k问题：是否存在一个集合 S，其中至多包含 k 个顶点，使得 $G - S$ 的子图中不存在具有 r 条边的树?

这个问题的对偶版本定义如下。

r-Edge-Tree-Packing输入：一个无向图 G 和一个整数 k。参数： k问题：是否存在一个至少包含 k 个两两不相交的树集合，且每棵树恰有 r 条边，并且这些树均位于G中?

他们 [17] 将 r-树冠分解定义如下。

定义 3.3。图 $G = (V, E)$ 的 r-树冠分解是对$V(G) = C \uplus H \uplus X$ 的划分，满足以下性质。

- H （头部）将 C 与 X 在 G 中分隔开。
- $G[C]$ (C 是冠）不诱导出任何含有 r 条边的树子图。
- 存在 r 个单射映射 π_1、.....、π_r，它们从 H 到 C，称为见证函数，使得对于所有 $i \neq j$， $\pi_i(H) \cap \pi_j(H) = \emptyset$，且对于每个 $v \in H$，顶点集合 $\{p\} \cup \{\pi_i(v) \mid 1 \leq i \leq r\}$ 在 G 中构成一棵含有 r 条边的树。

给定一个 r-Edge-Tree-Packing 的实例 (G, k)，作者按如下方式构造二分图$G' = (R \uplus B, E')$。令 $R = V$和 B 分别为 G中所有含有 r 条边的树的集合。当且仅当顶点 u 属于与 v对应的树时，添加边 $uv \in E', u \in R, v \in B$ 。

让我们聚焦于 G中的一个 r-树冠分解 (C, H, X)。见证函数 $\pi_1, \ldots, \pi_r$从 H 到 C 对应于一个映射 M ，该映射将 H 映射到 B中的某些树；具体而言， $v \in H$被映射到树 $\{v, \pi_1(v) \ldots, \pi_r(v)\}$。根据 $\pi_i, i \in [r]$的定义，可以得出结论：M是一个匹配，而 $M(H)$是一个打包。因此，(C', H, X') 是 G'中的一个一般冠分解，其中 $C' = C \uplus M(H)$ 且 $X' = V(G') \setminus (H \cup C')$。由于 (G', k) 是 r-Red/BlueDistance-3 Packing 的是实例，当且仅当 $(G' - (H \cup C')\ k - |H|)$ 是 r-Red/BlueDistance-3 Packing 的是实例时成立，因此可以得出结论：(G, k) 是 r-Edge-Tree-Packing 的是实例，当且仅当 $(G - (H \cup C)\ k - |H|)$ 是 r-Edge-Tree-Packing 的是实例。

利用上述归约，作者为r-Edge-Tree-Packing提供了一个至多包含（$r^2 + 1$）（$r + 1$）k 个顶点的核。作者还设计了一种方法，将打包问题的核化结果转移到具有相似规模的相应覆盖问题上（详见 [17] ）。因此， r-Edge-Tree-Covering 也相应存在一个至多包含（$r^2 + 1$）（$r + 1$）k 个顶点的核。

3.7 其他示例

冠分解及其某些变体的应用还包括以下更多示例:

- 一个针对 Triangle Packing 的、包含 $\mathcal{O}$（k^3）个顶点的核（将顶点不相交三角形作为子图进行打包） [28],
- 一个针对 k-Internal Spanning Tree 的、包含 $\mathcal{O}$（k^2）个顶点的核（寻找一个至少包含 k 个内部顶点的生成树） [58],
- 针对 Vertex Cover [18]的若干变体的线性规模核,
- 一个针对 d-Hitting Set [2]、大小为 $(2d - 1)k^{d-1} + k$ 的核,
- 一个针对 d-Set Packing [1]、大小为 $\mathcal{O}(k^{d-1})$ 的核，以及
- 一个针对 P_3-Packing （将两两不相交的 P_3 打包为子图）的核，包含 $7k$ 个顶点 [63]。后来，Xiao 和 Khu [65] 利用冠分解和一些关键观察，将这一结果改进为包含 $5k$ 个顶点的核。

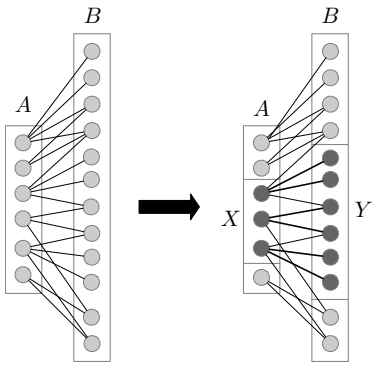


图1：引理 4.1 的示意图，其中 $q = 2$。

4（基本）扩张引理及应用

本节将定义“q-扩展”以及推广霍尔定理（命题 2.1）的扩张引理。在接下来的小节中，我们将概述扩张引理如何应用于若干问题，例如 p-Component Order Connectivity、 Feedback Vertex Set、 Cluster Vertex Deletion 以及其他一些图论问题。

定义 4.1（q-扩张）。设 $G = (V = A \uplus B, E)$ 是一个二分图。对于正整数q，边集合 $M \subseteq E(G)$ 称为从 A 到 B 的 q-扩张，若

- A 的每个顶点都与 M 中恰好 q 条边关联，并且
- M 恰好饱和 B 中的 $q|A|$ 个顶点。

当 $q = 1$ 时， q-扩张就是一个匹配。现在我们有了扩张引理，该引理由 Thomass´e [62] 引入。

引理 4.1（q-扩张引理 [62]）。设 $q \geq 1$ 为正整数，且 $G = (V = A \uplus B, E)$ 为二部图，满足

- $|B| \geq q|A|$，并且
- B中没有孤立顶点。

那么，存在非空顶点集 $X \subseteq A$ 和 $Y \subseteq B$，使得

1. 存在一个将 X 扩展到 Y中的 q-扩展，且
2. $N_G(Y) \subseteq X$。

此外，集合 X 和 Y 可以在关于 G 的规模为多项式时间内找到（ $q = 2$ 的示意见图1）。

当 $q = 1$ 时，注意集合 Y、X 和 $V(G) \setminus (X \cup Y)$ 分别构成一个冠分解中的冠、头部和主体。因此，扩张引理可以看作是引理 3.2 的推广。具体而言，它使我们能够处理需要命中的对象，而这些对象的大小可以超过 2。它提供了一种“编码”大小为 $q + 1$ 的互不相交对象的方法，使得任何解都必须命中这些对象。我们利用这一点来证明存在一个包含 X 的解，并注意到每个 Y 所属的对象都可以转换为一个包含 X 的解。

下面通过几个例子来说明这一点。为了以这种方式编码对象，我们通常会构造一个辅助二分图，并在其中应用扩张引理。

4.1 p-连通分量序连通性

在 p-Component Order Connectivity 中，目标是在给定的图中找到一个 k 顶点子集，使得剩余图的每个连通分量的大小至多为 p，其中固定整数为 p。更正式地说，

p-Component Order Connectivity输入：一个图 G 和一个整数 k。参数： k。问题： G 是否包含一个顶点子集 S， $\|S\| \leq k$，使得 $G - S$ 的每个连通分量的大小至多为 p?

注意，当 $p = 1$时， $G - S$是一个独立集。因此， p-Component Order Connectivity是 Vertex Cover的一种推广。我们将说明如何为此问题构造一个含有 $\mathcal{O}(p^3k)$ 个顶点的核。请注意，利用更强版本的扩张引理（见第 5 节）可以为此问题得到改进的核；我们给出一个 $\mathcal{O}(k^3p)$ 核，以展示引理 4.1 的一种简单应用。文献中的结果通过使用一些新工具（见第 5 节）改进了这一结果。

我们可以通过反复寻找大小为 $p+1$的连通子集，将其加入 X并从 G中删除，从而得到一个大小至多为 $(p+1)k$ 的近似解 X（若 $|X| > (p+1)k$，则这是一个否实例）。我们可以安全地删除 $G - X$ 中所有大小至多为 p 的连通分量，因为其中的顶点不可能属于任何最优解。现在，我们使用一个辅助二分图 Q，其一侧为 X，另一侧为 $G - X$ 的连通分量。如果顶点 $u \in X$ 在 D中有邻居，我们就在 $G - X$中的该顶点与连通分量 D 之间添加一条边。如果 $G - X$ 中的连通分量数量大于 $p(p+1)k$，则满足引理 4.1 的条件，其中 $q = p$。因此，我们得到一个头部 $H \subseteq X$ 和一个冠 C，后者是 $G - X$中连通分量的一个子集，使得存在一个将 H 扩张到 C中的 p-扩张，并且 $N_Q(C) \subseteq H$。与 Vertex Cover类似，我们的归约规则是将 H 全部纳入解中，删除 H 和 C 的连通分量，并将 k 减少 $|H|$。我们再次希望证明，对于一个最优解 S，集合 $S' = (S \setminus (H \cup C)) \cup H$ 也是一个最优解。 p-扩张给出了一组 $|H|$ 个互不相交的连通集，每个集合的大小为 $(p+1)$，任何解都必须命中这些集合。因此$|S'| \leq |S|$。我们利用 $N_Q(C) \subseteq H$，以及 C 上的图仅包含大小至多为 p的连通分量这一点，来说明 S' 确实是一个解。这是因为，包含 C 中连通分量内顶点且大小大于 p 的所有连通集，都必须包含 H中的一个顶点。这些集合由 S'命中。因此，$G - X$ 中的连通分量数量至多为 $p(p+1)k$。这些连通分量的大小均至多为 p。因此，我们得到一个含有 $\mathcal{O}(p^3k)$ 个顶点的核。

4.2 无向反馈顶点集

Feedback Vertex Set (FVS)输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，其顶点数至多为 k，使得 $G - S$ 无环?

Thomass´e [62] 给出了一个包含 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核，用于 Feedback Vertex Set。其核心思路是利用扩张引理将图的最大度限制为 $\mathcal{O}(k)$。

假设图中的一个顶点 v 的度大于 $11k$。在多项式时间内，可以确定 [32, 33] 是否属于至少 $k+1$ 个环，且 v 是这些环唯一的交点（此时 v 必须属于解）；或者找到一个大小至多为 $3k$ 的集合 S_v，使其与所有经过 v 的环相交。下一步是限制图 $G - (\{v\} \cup S_v)$ 中与 v 相邻的顶点所在连通分量的数量。首先要注意， v 在此类连通分量中恰好与一个顶点相邻，否则就会存在一个包含 v 且不与 S_v 相交的环。可以从这个可能含有环的图中忽略此类连通分量。注意，此类连通分量的数量至多为 k，因为它们构成互不相交的环。

考虑这样一个辅助二分图：其中一个划分是 S_v，另一个划分是 $G -$ 的其余连通分量，并且如果 S_v 中的一个顶点与

该连通分量中的一个顶点关联，则添加一条边。如果连通分量的数量超过 $6k$，则可以使用引理 4.1 和 $q = 2$ 找到子集，使得 S_v 中的每个顶点都形成一个 2-扩展。注意，由于 v 与这些连通分量相邻，这为我们提供了一个包含 v 的环集合，该集合中的每个环分别对应一个 2-扩展。利用这些环的存在性，可以证明：这些连通分量中的顶点所命中的任何环，都可以由 v 命中，或者由 S_v 的扩展子集中的所有顶点命中。作者通过构造包含 v 以及 S_v 的扩展子集中每个顶点的互不相交的 2-环（如果这些 2-环尚不存在）来对此进行编码。

这将此类连通分量的数量限制为 $2|S_v| \leq 6k$。因此，与 v 相邻的顶点数量至多为 $6k + |S_v| + k \leq 10k$。这些顶点中，至多有 k 个可以有 2 条边连接到 v，因为如果 v 属于 $k+1$ 个仅在 v 处相交的环，我们就可以将其删除。因此， v 的度至多为 $11k$。

根据其他归约规则，可以证明该图的最小度为三。最后，在这种情况下，可以证明 Feedback Vertex Set 存在一个包含 $\mathcal{O}(k\Delta)$ 个顶点的核，其中 Δ 是 G 的最大度。因此，我们有一个包含 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核，因为 $\Delta \leq 11k$。

最近，Iwata [37] 也在 $\mathcal{O}(m+n)$ 时间内得到了一个包含 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核。

4.3 簇顶点删除

Cluster Vertex Deletion (cvd)输入：一个图 G 和一个整数 k。参数： k。问题： G 是否包含一个至多有 k 个顶点的子集 S，使得 $G \setminus S$ 的每个连通分量都是一个团?

Cluster Vertex Deletion 问题可以表述为一个 3-Hitting Set 问题，其中$U = V(G)$和 $\mathcal{F}$ 分别是 G 中所有含三个顶点的诱导路径（P_3）的顶点集。Abu-Khzam [2] 为 3-Hitting Set构造了一个包含 $\mathcal{O}(k^2)$个元素的核。这个核可以调整，从而为 Cluster Vertex Deletion构造出包含 $\mathcal{O}(k^2)$个顶点的核。

Fomin 等人 [31] 利用引理 4.1 和更复杂的技术，构造了一个包含 $\mathcal{O}(k^{5/3})$个顶点的核。我们将在这里简要概述这个核。

团数量的界。我们给出一个简单的论证，说明如何利用引理 4.1 将团的数量限制为 $6k$。

首先，在 G中找出一个极大集合 $\mathcal{P}$，其中包含两两顶点不相交的 P_3。如果 $|\mathcal{P}| > k$，我们就返回一个否实例，因为不存在大小至多为 k的最优簇顶点删除集。否则，将 S 设为 $\mathcal{P}$中的顶点子集。注意， $|S| \leq 3k$。我们使用辅助二分图 Q ，一侧为 S ，另一侧为 $G - S$ 的连通分量（团）。如果 u 在 D中有邻居，就在顶点 $u \in S$ 和 $G - S$ 中的连通分量 D 之间添加一条边。删除所有孤立团。如果剩余团的数量超过 $6k$，则满足引理 4.1 的条件，其中 $q = 2$。由此可得到一个头部 $H \subseteq S$ 和一个冠 C，后者是 $G - S$中连通分量的子集，使得存在从 H 到 C 的 2-扩展，并且 $N_Q(C) \subseteq H$。类似于 Vertex Cover 的归约规则是将 H 全部纳入解中，删除 H 以及 C 的连通分量，并将 k 减少 $|H|$。这是因为容易证明，对于任意最优解 X，集合 $X' = X \setminus (H \cup C) \cup H$ 也是一个最优解。2-扩展给出了一组 $|H|$ 个两两不相交的 P_3，任何解都必须命中这些集合。因此 $|X'| \leq |X|$。随后，他们利用 $N_Q(C) \subseteq H$ 以及 C 上的图是一个簇图，来断定 X' 确实是一个解。这是因为，凡是包含 C中连通分量内顶点的 P_3，都必须包含 H中的一个顶点。这些都由 X'命中。因此， $G - S$中的团数量有 $6k$的界。

一种标记过程和弱形式的冠分解。在将 $G - S$ 中的团数限制为 $6k$ 后，作者 [31] 执行标记过程：我们反复为 S 中的每个顶点关联 $G - S$ 中的一条边，使得该边恰有一个端点与该顶点相邻。如果某个 S 中的顶点关联了 $k+1$ 条边，则可以断定该顶点必定属于解，因为它是 $k+1$ P_3 的交集，并据此缩减实例。否则，如果

大致 S 中大约有 $k^{2/3}$ 条边与 $k^{2/3}$ 个顶点相关联，则称这次运行“成功”，并
标记一个 并删除这些顶点。重复此标记过程，直到成功运行为止 .

令 U 为所有已标记顶点的集合， M 为在最后一次未成功运行中被标记的边的端点集合。令 $L = S \setminus U$。集合 U、V（G）、$\setminus S$ 和 L 可视为弱冠分解的一种弱形式，其中 U 为头部，$V - S$ 为冠， L 为主体。将冠分解用于求核时，通常可以得出结论：存在一个簇顶点删除集，其中包含头部的所有顶点，不包含冠中的任何顶点，并且冠中的所有边都位于头部内。同理，对于弱冠分解，可以得出结论：头部的大多数顶点 U 都会进入解中，冠中的几乎没有顶点 V（G）$\setminus S$ 会进入解中，并且几乎所有来自 V（G）$\setminus S$ 的边都位于 U 内。

识别好／坏团并界定剩余顶点。尽管如此，作者并未针对这一弱冠分解得到直接的归约规则。为此，他们将 $G - S$ 中的团分为好团和坏团（依据弱形式的冠分解）。根据其性质，坏团中的顶点数量可以界定为 $\mathcal{O}(k^{5/3})$。对于顶点 $s \in S$ 和好团 C，作者 [31] 根据 C 在 s中的邻居数量，识别出 C 中的一个小子集。随后，他们证明好团表现出类似顶点覆盖的行为；任意一个解要么包含 s ，要么包含某个好团的小侧。利用引理 4.1 可以运用这一性质，将好团中的顶点数量也界定为 $\mathcal{O}(k^{5/3})$。

4.4 其他删除问题

本节列举一些其他利用扩张引理得到核的删除问题。

d-Path Vertex Cover (d-PVC)输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。参数： k问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，其中至多包含 k 个顶点，使得 $G - S$ 中不存在长度为d的路径?

这里， d 是一个固定整数。此前已有多项关于 d-PVC 且 $d = 4$、$d = 5$等的研究。Cereveny 和 Suchy [16] 为 4-PVC 和 5-PVC 提出了参数化算法。后来，Cerveny 等人 [15] 利用引理 4.1，为 d-Path Vertex Cover（含有 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点）且满足 $d = 4$和 $d = 5$ 的情形构造了一个多项式核。他们还为 d-Path Vertex Cover 构造了一个多项式核，其中包含 $k^4 d^{\mathcal{O}(d)}$ 个顶点和边，且适用于任意固定的 d。

VC-2-Mod 输入：一个图 $G = (V, E)$、一个集合 $S \subseteq V(G)$（其中 $G - S$的每个顶点的度至多为 2），以及一个整数 k。参数： $\|S\|$问题： G 是否存在大小至多为 k的顶点覆盖?

令 $|S| = \ell$。Majumdar 等人 [50] 利用引理 4.1 得到一个包含 $\mathcal{O}(\ell^5)$ 个顶点的核，用于 VC-2-Mod。请注意，图 $G - S$的连通分量包括孤立顶点、路径和环。引理 4.1 用于将奇环分量的数量限制为 $\mathcal{O}(\ell^3)$。我们构造一个辅助二分图，其中一侧是 S 中构成独立集的大小为三的集合，另一侧是奇环分量，并根据一种称为阻塞集的概念添加边。在对 $q = 4$应用引理 4.1 后，扩展中的每个大小为 3 的独立集都有四个私有奇环。可以证明，删除四个奇环分量中的一个是安全的，从而得到一个包含 $O(\ell^3)$ 个奇环的实例（且不增加 S的大小）。最后，通过额外的论证，可以得到一个包含 $\mathcal{O}(\ell^5)$ 个顶点的核。

PATHWIDTH ONE VERTEX DELETION输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，包含至多 k 个顶点，使得 $G - S$的路径宽度至多为一?

Philip 等人 [57] 为 PATHWIDTH ONE VERTEX DELETION提供了一个包含 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核。Cygan 等人 [21] 利用引理 4.1 给出了一个更简单的核，包含 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点。

BLOCK GRAPH VERTEX DELETION输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，其中至多包含 k 个顶点，使得 $G - S$ 是一个块图?

Kim 和 Kwon [41] 从参数化复杂性的角度开启了对 BLOCK GRAPH VERTEX DELETION 问题的研究，并给出了一个包含 $\mathcal{O}(k^9)$ 个顶点的核。随后，Agrawal 等人 [4] 利用引理 4.1 给出了一个包含 $\mathcal{O}(k^4)$ 个顶点的核，从而改进了这一结果。

CHORDAL VERTEX DELETION输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，其中至多包含 k 个顶点，使得 $G - S$ 不含长度至少为四的诱导圈?

Jansen 等人 [40] 为 CHORDAL VERTEX DELETION 提供了一个具有 $\mathcal{O}(k^{161}\log^{58} k)$ 条边的核。后来，Agrawal 等人 [6] 利用引理 4.1 改进了他们的结果，得到一个具有 $\mathcal{O}(k^{12}\log^2 k)$ 条边的核。此外，Agrawal 等人 [6] 使用了顶点独立度的概念来获得这一结果。

EVEN CYCLE TRANSVERSAL输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个至多包含 k 个顶点的集合 $S \subseteq V(G)$，使得 $G - S$ 不含偶环?

Misra 等人 [52] 从参数化复杂性的视角开创了对 EVEN CYCLE TRANSVERSAL 问题的研究。他们证明了该问题是固定参数可处理的，并给出了一个具有 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核。他们的核化算法也将引理 4.1 作为关键工具，以获得这样的核上界。

OUT-FOREST VERTEX DELETION SET输入：一个有向图 $D = (V, A)$ 和一个正整数 k。参数： k。问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(D)$，其中至多有 k 个顶点，使得 $D - S$ 是一个出森林?

Minch 和 van Leeuwen [53] 为 OUT-FOREST VERTEXDELETION SET 提供了一个含有 $\mathcal{O}(k^3)$ 个顶点的核。后来，Agrawal 等人 [7] 利用引理 4.1 得到了一个改进核，其中含有 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点。

INDEPENDENT FEEDBACK VERTEX SET输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，其中至多有 k 个顶点，使得 S 是一个独立集，并且 $G - S$ 是无环的?

Misra 等人从参数化复杂性的视角研究了 [51] INDEPENDENT FEEDBACK VERTEX SET 问题。该问题是 FEEDBACK VERTEX SET 的一种变体，对反馈顶点集施加了额外的约束。他们利用引理 4.1 获得了一个具有 $\mathcal{O}(k^3)$

个顶点和边的核。

这些问题 Pathwidth One Vertex Deletion, Block Graph Ver-tex Deletion, Chordal Vertex Deletion, Even Cycle Transversal, Out-Forest VertexDeletion Set 和 Independent Feedback Vertex Set 的一个共同点是，它们都将某个无限的环集合视为禁用子图。对所有这些问题应用引理 4.1（扩张引理）的思路，源自 Thomass´e [62] 将其应用于 Feedback Vertex Set。引理中的 q-扩展用于识别两两相交于一个或两个顶点的环集合，而这些环必须由解命中。通过限制与 v相关联的连通分量数量，可以据此界定 G 中顶点 v 的度量（该度量取决于具体问题）。

4.5 图打包问题

扩张引理也用于打包问题。下面列举几个例子。

Cycle Packing是参数化复杂性和核化领域中一个经过充分研究的问题。 Disjoint Cycle Packing问题询问图中是否至少存在 k 个两两不相交的环。众所周知，Disjoint Cycle Packing 属于固定参数可处理，且除非 NP $\subseteq$ coNP/，否则不存在多项式核化。此后，Agrawal 等人 [5] 在不相交约束中引入了放宽标准，并针对固定整数 t定义了以下两个问题：Pairwise t-Disjoint Cycle Packing 和 Al-most t-Disjoint Cycle Packing 。

Pairwise t-Disjoint Cycle Packing (t-PDCP)输入：一个无向图 G 和一个整数 k。参数：k。问题：在 G中，是否存在至少 k个不同的环 C_1, ..., C_k，使得对每个 $i \neq j$, $\lvert V(C_i) \cap V(C_j)\rvert \leq t$?

Almost t-Disjoint Cycle Packing输入：一个无向图 G 和一个整数 k。参数： k。问题：在 G中，是否存在至少 k个不同的环 C_1, ..., C_k，使得 G的每个顶点在这些环中出现的次数至多为 t？

Agrawal 等人 [5] 证明，当 $t = 1$时， Pairwise t-Disjoint Cycle Packing 存在一个含有 $\mathcal{O}(k^4 \log k)$ 个顶点的核。这一结果的证明关键地用到了引理 4.1。如果 $t = |V(G)|$，那么 Pairwise t-Disjoint Cycle Packing可以在多项式时间内求解。

3-Path Packing输入：一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k。 参数： k问题：在 G 中是否存在 k 个两两顶点不相交的诱导 P_3?

引理 4.1 的一个简单应用可以得到一个具有 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核化。Fomin 等人[31] 为 3-Path Packing 提供了一个具有 $\mathcal{O}(k^{5/3})$ 个顶点的改进核。他们使用引理 4.1 得到了这一结果。后来，Bessy 等人 [10] 引入了一种称为彩虹匹配的新技术，并将这一结果改进为一个具有 $\mathcal{O}(k)$ 个顶点的核。

4.6 其他问题

本节将讨论扩展引理在图中的击中或打包问题之外的一些应用。

Set Splitting输入：一个全集 $\mathcal{U}$、一个由 $\mathcal{U}$的子集构成的集合族 $\mathcal{F}$，以及一个正整数 k。参数： k。问题：是否存在 $\mathcal{U}$ 的一个二分划分，使得至少有 k 个集合与两个部分都有非空交集?

Lokshtanov 等人 [48] 为以 k 为参数的 Set Splitting 给出了一个核，其中集合不超过 $2k$ 个，元素不超过 k 个。他们使用了超图中的一种强割集概念，它与图中的冠密切相关。

Maximum Internal Spanning Tree输入：一个图 G 和一个正整数 k。 参数： k。问题： G 是否存在一棵至少有 k 个内部顶点的生成树?

Fomin 等人 [30] 使用引理 4.1 和 $q = 2$，为 Maximum InternalSpanning Tree给出了一个 $3k$顶点核。

5 近期进展

本节讨论近期进展，包括扩张引理的若干变体及其应用。此类新变体近来陆续出现。其中一些变体是推广，另一些则具有更强且特殊的含义。本节主要介绍更强扩展引理、双重扩展引理、平衡扩展引理、平衡冠分解和加性扩张引理等概念（详情请参见相关小节）。

5.1 加权 q-扩张引理

我们在第 4.1 节引入了 p-Component Order Connectivity，并说明了如何获得一个含有 $\mathcal{O}(p^3k)$ 个顶点的核。本节将说明如何使用扩张引理的加权版本，为同一问题获得一个含有 $\mathcal{O}(p^2k)$ 个顶点的核。Kumar 和 Lokshtanov [43], 提出了扩张引理的加权版本，并据此为该问题给出了一个含有 $2pk$ 个顶点的核。Xiao [64], 也提出了该引理的一个变体，并为这个问题给出了一个 $\mathcal{O}(pk)$ 核。

我们采用 [32] 中加权扩展引理的一个较简单版本。首先给出一些定义。

定义 5.1（加权 q-扩张）。考虑一个带有权函数 w 的二部图 $G = (V = A \uplus B, E)$： $V(G) \to \{1, \ldots, W\}$，其中 W 为整数。给定一个子集 $X \subseteq V(G)$，令 $w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$。对于整数 $q \geq 1$，函数 f： $B \to A$ 称为将 A 扩张到 B 的加权 q-扩张，当且仅当

- 对于每个 $b \in B$, $f(b) \in N(b)$，以及
- 对于每个 $a \in A$, $w(f^{-1}(a)) \geq q - W + 1$。

当 $W = 1$ 时，加权 q-扩展对应于一个 q-扩展，因为对于 $a \in A$, $w(f^{-1}(a)) \geq q$， $w(f^{-1}(a))$ 变成了 a 在 B 中的邻居数。

引理 5.1（加权扩张引理 [32]）。设 q 和 W 为正整数。考虑一个二部图 $G = (V = A \uplus B, E)$，其权函数为 w： $V(G) \to \{1, \ldots, W\}$，满足

1. $w(B) \geq q|A|$，以及
2. B 中没有孤立顶点。

那么，存在非空顶点集 $X \subseteq A$、 $Y \subseteq B$ 以及一个函数 f： $Y \to X$，使得 t

- f 是将 X 扩展到 Y 的加权 q-扩展，并且
- 中的顶点都没有邻居位于 Y之外，也就是说， $N(Y) \subseteq X$。

此外，集合 X 和 Y 以及函数 f 可以在时间 $\mathcal{O}(mn^{1.5}W^{2.5})$内找到。

我们首先为问题 p-Component Order Connectivity 提供一个具有 $\mathcal{O}(p^2k)$个顶点的核（问题见 [32]），作为 Kumar 和 Loksh- tanov [43]所给出的具有 $2pk$ 个顶点的核的前置步骤。回顾第 4.1 节中的辅助二分图，其中一侧是调节集 X，另一侧是 $\mathcal{C}$，即 $G - X$的连通分量。对于 $\mathcal{C}$中的每个连通分量，我们将其权重设为该连通分量中的顶点数。注意，这些权重至多为 p。对于 X中的所有顶点，我们将其权重设为 1。

现在我们应用引理 5.1 和 $q = 2p - 1$，得到一个子集 $H \subseteq X$ 和一个子集 $C \subseteq \mathcal{C}$，使得存在将 H 扩展到 C的加权 q-扩展。对于任意最优解 S，我们考察集合$S' = S \setminus (H \cup C) \cup H$。加权 q-扩展为我们提供了辅助二分图中的若干两两不相交的连通集合，其中每个集合的权重至少为 $q - p + 1 \geq p$。因此，我们可以得出结论：加权 q-扩展表示 G中的一个大小至少为 $p + 1$ 的连通集合，而任何解都必须命中该集合。类似于第 4.1 节中的论证，我们可以证明 S' 是一个最优解。因此，只要引理 5.1 适用，我们就有一个归约规则。如果该引理不适用，则辅助二分图中存在$w(\mathcal{C}) \leq q|X| \leq (2p-1)(p+1)k$。由 $G - X$ 中的顶点数为 $w(\mathcal{C})$这一结论，我们得到一个 $\mathcal{O}(p^2k)$核。

请注意，在第 4.1 节所述、含有 $\mathcal{O}(p^3k)$ 个顶点、用于 p-Component Order Connectivity 的核中，我们无法捕捉辅助二分图中各连通分量的大小。借助加权扩张，我们成功做到了这一点。

Kumar 和 Lokshtanov [43] 运用一些进一步的思路和线性规划，将核的大小改进为 $2pk$。

5.2 更强的扩展引理与双重扩展引理

Fomin 等人 [31] 定义了更强的 q-扩张概念。设 $G = (V = A \uplus B, E)$ 是一个二分图。设 $q > 0$ 为一个整数， $A \subseteq A$，且 $B \subseteq B$。我们称存在一个将 A 扩张到 B 中的更强 q-扩张，若对于所有子集 $X \subseteq A$，都有 $|N_G(X) \cap B| \geq q|X|$。利用这一概念，他们证明了以下扩张引理版本，该版本不需要满足 $|B| \geq q|A|$ 的条件，也不要求 B 中不存在孤立顶点。

引理 5.2（更强扩展引理 [31]）。设 q为正整数，且 $G = (V = A \uplus B, E)$ 是一个二分图。那么存在（可能为空的）集合 $A \subseteq A$ 和 $B \subseteq B$，使得

1. A 有一个到 B中的更强 q-扩展，
2. $N_G(B) \subseteq A$，并且
3. $|B \setminus B| \leq q|A \setminus A|$。

此外，集合 A 和 B 可以在多项式时间内计算。图 2 展示了$q = 2$的示意图。

这个引理与引理 4.1 不同，因为它不要求 $|B| \geq q|A|$，也不要求 B中没有孤立顶点。此外，请注意，这个引理并不要求 A 和 B 非空。如果对于某个图 G，$B = \emptyset$，那么 $A = \emptyset$，因为存在从 A 到 B的更强 q-扩展。此外，由于 $|B \setminus B| \leq q|A \setminus A|$，我们有 $|B| \leq q|A|$。因此，如果 $|B| > q|A|$，那么 $B \neq \emptyset$。

注意，在引理 4.1（扩张引理）中， $|Y| = q|X|$。但在更强扩展引理中，可能出现 $|B| > q|A|$ 的情况。将更强扩展引理应用于问题实例的直觉是，可以从输入图中安全地删除 B 中的某些顶点。注意，由于$|B \setminus B| \leq q|A \setminus A|$，为了将 B 的大小界定为 $|A|$的函数，我们可能需要删除 B中的一些顶点。注意，对于每个 $u \in A$，至少有 q 条边与之相连。因此，只在 B中保留恰好 $q|A|$ 个顶点，就能维持 A 中的 q-扩展性质。因此， B中其他那些仅与 A有邻居的顶点可以删除。

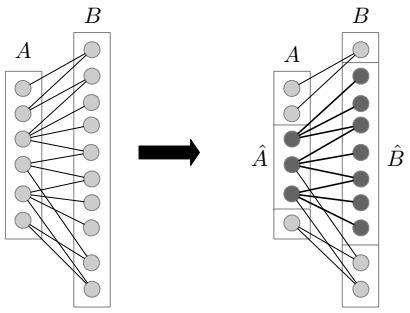


图 2： $q = 2$下引理 5.2 的示意图。

下面的问题 Arc Disjoint 4-Cycle Packing为应用上述引理提供了直觉。

Arc Disjoint r-Cycle Packing输入：有向图 $D = (V, A)$ 和整数 k。参数： k问题： D中是否至少存在 k 个两两弧不相交、长度为 r 的有向圈?

Babu 等人 [8] 首次证明，对于每个固定的 $r \geq 3$，在围长为 r的有向图中，Arc Disjoint r-Cycle Packing 是 NP 完全的；当输入图为二部图时，这一 NP 完全性结论对每个 $r \geq 4$ 都成立。随后，他们利用更强扩展引理（引理 5.2），为 $r = 4$（即 Arc Disjoint 4-Cycle Packing 问题）提供了一个包含 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点和 $\mathcal{O}(k^3)$ 条弧的核。下面简要概述 Babu 等人 [8] 提出的核化算法。

1. 首先，作者对输入图 D 应用一些预处理规则，并确保 D 中的每条弧 (u, v) 至多包含在 $(4k - 4)$ 个不同的 4- 环中，且这些 4- 环的两两交集为 $\{u, v\}$。2. 令 $\mathcal{X}$ 为一个极大 4- 环集合，使得其中任意两个 4-环至多有一个公共顶点。作者证明，若 $|\mathcal{X}| > 16k^2$，则输入是一个是实例。3. 因此，可以假设 $|\mathcal{X}| \leq 16k^2$。令 $\mathcal{X}$中所有包含在某个 4-环中的 3-路径构成的集合为 $\mathcal{P}$。由于 $|\mathcal{X}| \leq 16k^2$，$|\mathcal{P}|$ 是 $\mathcal{O}(k^2)$。剩下要做的是界定 $V(D) \setminus V(\mathcal{P})$ 中顶点的数量。4. 作者构造了一个辅助二分图 H，其二分划分为 A 和 B，其中 $A = \mathcal{P}$，且 $B = V(D) \setminus V(\mathcal{P})$。对于 $u \in B$ 和 $\{x, y, z\} \in \mathcal{P}$，当且仅当 $\{x, y, z, u\}$ 是 D中的一个 4-环时， H 中存在一条边。ˆ 5. 现在可以对 $q = 1$ 应用引理 5.2，从而得到一个更强的 1-扩张，其集合为 $A \subseteq A$ 和 ˆˆˆˆˆˆB ⊆ B。这确保了 $|B \setminus B| \leq |A \setminus A|$。令 H 中满足以下条件的边构成集合 $M \subseteq E(A, B)$：ˆˆˆ A 中的每个顶点恰好与 B 中的一个顶点相邻，且 B 中的每个顶点恰好与 A中的一个顶点相邻。ˆ 6. 最后，作者应用一条归约规则，删除 B 中未被 M 饱和的顶点集合。包含这些顶点的 4-环可以通过从相应 3-路径中选取一个顶点来覆盖。 M 匹配确保 A 中的每条 3-路径都存在一个 4-环。因此，该归约规则是安全的。ˆ 7. 当 B 中未被ˆM 饱和的顶点集合为空时，这条归约规则不再适用。此时，我们有 $|B| = |B \setminus \hat{}B| + |\hat{}B| \leq |A \setminus \hat{}A| + |\hat{}A| = |A|$，它是 $\mathcal{O}(k^2)$。因此，我们得到一个含有 $\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点的核。

Triangle Packing in Tournaments输入：一个竞赛图 $D=(V,A)$ 和一个整数 k。参数： k。问题： D中是否至少有 k 个两两顶点不相交的有向三角形?

Fomin 等人 [31] 给出了一个含有 $\mathcal{O}(k^{3/2})$ 个顶点的核，该核同时使用了引理 4.1（扩张引理）和引理 5.2（更强扩展引理）。

作者还进一步证明了下文所述的引理 5.3，该引理可同时在多个图中提供扩展。

引理 5.3（双重扩展引理 [31]）。设 q为正整数， G、 H_1、 H_2、.....、 H_d为二分图，其二分划分分别为 $A \uplus B$、 $A_1 \uplus R_1$、.....、 $A_d \uplus R_d$，并满足对于每个 $i \neq j$、$A_i \cap A_j = \emptyset$、 $R_i \cap R_j = \emptyset$、 $\cup_{i=1}^{d} A_i = A$ 和 $\cup_{i=1}^{d} R_i \subseteq B$。我们可以在多项式时间内计算 $\hat{}A \subseteq A$、$\hat{}B \subseteq B$、$\hat{}A_i \subseteq A_i$、$\hat{}R_i \subseteq R_i$，对每个 $i \in [d]$ 均如此，使得

1. $\hat{} B = \cup_{i=1}^{d} \hat{}R_i$，2. $|B \setminus \hat{}B| \leq q(|A| + |\cup_{i=1}^{d} \hat{}A_i|)$，3. $\hat{}A$ 在$\hat{}B$ 中有更强的 q-扩展，并且对于每个 $i \in [d]$，$\hat{}A_i$ 在 H_i中都有更强的 q-扩展到$\hat{}R_i$ ，$\hat{}\hat{}$ 4. $N_G(B) \subseteq A$，以及5. 对所有 $i \in [d]$， $N_{H_i}(R_i) \subseteq A_i$。

双重扩展引理曾用于 Feedback Vertex Set in Tournaments ，以得到一个改进核。我们在下面正式定义这个问题。

Feedback Vertex Set in Tournaments输入：一个竞赛图 $D=(V,A)$和一个整数 k。参数： k。问题：是否存在一个集合 $S \subseteq V(D)$，其中至多包含 k 个顶点，使得 $D-S$ 无环?

Feedback Vertex Set in Tournaments 可以表述为一个 3-Hitting Set 问题，因此可以调整其核，得到一个含有 $\mathcal{O}(k^2)$个顶点的核。Fomin 等人 [31] 使用引理 5.3（双重扩展引理）得到了一个含有 $\mathcal{O}(k^{3/2})$个顶点的核。下面我们简要介绍该算法。

由于在竞赛图中命中有向环等价于命中有向三角形，因此可以得到一种用于 Feedback Vertex Set in Tournaments 的 3-近似算法。然而，Minch等人还证明，可以得到一个大小至多为 $7k/3$ 的集合 S [54]，使得 $D-S$ 无环。如果弧 (x,y) 属于至少 $k+2$ 个三角形，且这些三角形的其他端点都来自 S，我们就称弧 (x,y) 为强弧 $\in A$。在这种情况下，每个解都必须包含 x 和 y 之一。

由于 $D-S$ 无环，其顶点存在一个拓扑排序。我们可以通过添加 S 中的顶点，将其扩展为 D 的顶点排序，并使某些“冲突”最小化。在这个排序中，我们可以论证， D 中任何不含强弧的三角形，其顶点在排序中的距离都不超过 $7k$。因此，从某种意义上说，这些三角形是局部的。

因此，问题归结为同时命中强弧和局部三角形。我们通过引理 5.3 来实现这一点：构造一个对应于强弧的全局图，以及用于局部三角形的局部图。

首先，根据拓扑排序，将 $D-S$ 的顶点分成若干组，每组大小为 $100k$。然后，作者 [31] 考察最前面的 $p=4\sqrt{k}$ 组，即 Y_1、Y_2，....., Y_p，并丢弃每组的首尾 $7k+1$ 个顶点，从而形成区间 Y_1'、Y_2'，....., Y_p'。对于 $i \in [p]$，令 S_i 为 S 中在 V 的排序中位于 Y_i' 内的顶点集合（D）。注意，任何包含 Y_i' 中某个顶点的局部三角形，其顶点都包含在集合 $S_i \cup Y_i$ 中。然后，每个区间 Y_i'、$i \in [p]$ 都可以划分为 q 个子区间 $Y_{i,1}$、$Y_{i,2}$、.....、$Y_{i,q}$，每个子区间的大小为 $3\sqrt{k}$。

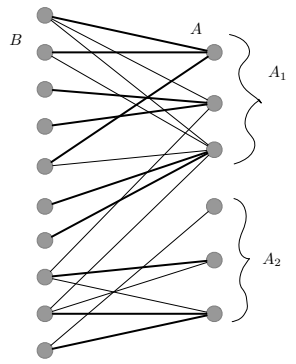


图 3: $q = 3$ and 与 $w(v) = 1$ 对每个顶点 v构成平衡扩展的示意图。赋值 f 用粗边表示。

接下来，他们定义一个全局二分图 G，其二分划分为 $S \uplus \{Y_{i,j} : i \in [p], j \in [q]\}$，并包含强弧。此外，作者还定义了局部二分图 H_i，其二分划分为 $S_i \uplus \{Y_{i,j} : i \in [p], j \in [q]\}$，并包含局部三角形。最后，他们恰当地应用双重扩展引理（引理 5.3），以同时在所有图中获得扩展性质和邻域包含性质。由此，他们可以找到 V（D）中的一个顶点 $\setminus S$，并可安全地将其删除。当该引理不再适用时，顶点数为 $|S| + |\cup_{i\in[p]} Y_i| \leq 2k + 100k \cdot 4\sqrt{k}$。由此，我们得到核的概述，其含有 $\mathcal{O}$（$k^{3/2}$）个顶点（更多详情请见 [31] ）。

5.3 平衡扩展与平衡冠分解

现在，我们介绍平衡冠分解、平衡扩展的概念，以及 Casel 等人 [14]提出的一些相关多项式时间算法。

定义 5.2（平衡扩展）。设 $G = (V = A \uplus B, E, w)$ 是一个顶点加权二分图，其中 $w^B_{\max} = \max_{b\in B} w(b)$。对于 $q \in \mathbb{N}_0$, A 的一个划分 $A_1 \cup A_2$，以及 $f : B \to A$，若满足以下条件，则称元组 (A_1, A_2, f, q) 为平衡扩展：

1. $w(a) + w(f^{-1}(a)) \geq q - w^B_{\max} + 1$ *if* $a \in A_1$,
2. $w(a) + w(f^{-1}(a)) \leq q + w^B_{\max} - 1$ *if* $a \in A_2$,
3. *for all* $b \in B$, $f(b) \in N(b)$, *and*
4. $N(f^{-1}(A_1)) \subseteq A_1$.

（示意图见图 3。）

根据上述定义，A 中一个顶点的权重与其原像的权重之和介于 $q - w^B_{\max} + 1$ 和 $q + w^B_{\max} - 1$之间。函数 f类似于第 4 节中的扩展条件。利用上述定义，Casel 等人 [14] 证明了以下结果。

引理 5.4（平衡扩展引理）。考虑一个顶点加权二分图 $G = (V = A \uplus B, E, w)$，其中 B 和 $q \geq$ 中没有孤立顶点，且 $\max_{b\in B} w(b) = w^B_{\max}$。可以在 $\mathcal{O}(mn)$ 时间内为 G 计算出一个平衡扩展 (A_1, A_2, f, q)。此外，若 $w(A) + w(B) \geq q|A|$，则 $A_1 \neq \emptyset$。

下面给出 [14] 中定义的平衡扩展的一个更精细版本。

定义 5.3（分数平衡扩张）。设 $G = (V = A \uplus B, E, w)$ 是一个顶点加权二分图，其中 $w^B_{\max} = \max_{b\in B} w(b)$。对于 $q \in \mathbb{N}_0$, A 的一个划分 $A_1 \cup A_2$，以及 $g : E(G) \to \mathbb{N}_0$，若满足以下条件，则称元组 (A_1, A_2, g, q) 为分数平衡扩张：

1. $w(a) + \sum_{b\in B} g(ab) \geq q$ *if* $a \in A_1$,

2. 若 $a \in A_2$，则 $w(a) + \sum_{b \in B} g(ab) \leq q$；3. 对所有 $b \in B$，$\sum_{a \in A} g(ab) \leq w(b)$，并且

4. $N(B_U \cup B_{A_1}) \subseteq A_1$其中 $B_a = \{b \in B \mid g(ab) > 0\}$对于 $a \in A$，$B_{A'} = \cup_{a \in A'} B_a$对于 $A' \subseteq A$且$B_U = \{b \in B \mid \sum_{a \in A} g(ab) < w(b)\}$。

这样的元组 (A_1, A_2, g, q) 可以解释为如下的分数平衡扩张。f^{-1} 函数中顶点的权重通过 g 函数分配给边，即，g 可以解释为从 $v \in B$ 到 $u \in N(b)$的分数分配。对于非分数版本（在定义 5.2 中，我们希望对所有 $v \in B$，$g(uv) = w(u)$ 都存在唯一的 $u \in A$，而 $g(u'v) = 0$ 当$u' \in A \setminus \{u\}$。

作者 [14] 证明了引理 5.4 的以下分数版本。

引理 5.5（分数平衡扩张引理）。设 $G = (V = A \uplus B, E, w)$ 是一个顶点加权二部图，其中 $w^B_{\max} = \max_{b \in B} w(b)$。对于 $q \in \mathbb{N}_0$，A 的一个划分 $A_1 \cup A_2$ 和 $g : E(G) \to \mathbb{N}_0$，可以在 $\mathcal{O}(mn)$ 时间内计算出一个分数平衡扩张 (A_1, A_2, g, q)。此外，如果 $w(A) + w(B) \geq q|A|$，那么 $A_1 \neq \emptyset$。

作者 [14] 使用引理 5.4 证明了下面所述的一种称为 λ-平衡冠分解的结构的构造，其中 λ 是一个固定整数。

定义 5.4（λ-平衡冠分解 [14]）。顶点加权图 $G = (V, E, w)$ 的一个 λ-平衡冠分解是一个元组 $(C, H, \mathfrak{R}, f)$，其中 (H, C, R) 是 $V(G)$ 的一个划分，且 $\mathfrak{R}$ 是 R 的一个划分，并且 $f : \mathbb{CC} \to H$，其中 $\mathbb{CC}(C)$ 是 $G[C]$ 的连通分量集合，使得：

1. C 与 R之间没有边，
2. 对每个 $Q \in \mathbb{CC}(C)$，$w(Q) < \lambda$，
3. 对每个 $Q \in \mathbb{C}(C)$，$f(Q) \in N(Q)$，
4. 对每个 $h \in H$，$w(h) + w(f^{-1}(h)) \geq \lambda$，并且
5. $G[R']$ *is connected and* $\lambda \leq w(R') \leq 3\lambda - 3$ *for each* $R' \in \mathfrak{R}$.

前四个性质是冠性质的性质，并附加了一些权重方面的规定（见[64]）；最后一个性质则确保划分的所有部分都相当均衡。此外，第四个条件意味着每个 $u \in H$ 都应与 $G[C]$ 中权重至少为$\lambda - 1$的连通分量相连。请注意，λ-平衡冠分解这一概念是 Casel 等人 [14]为取得一些新结果所作的贡献之一。不过，[14] 提出的定义 5.4 的一项关键贡献是第五个条件。第五个条件指出，R 的划分中的每个部分的权重都在 $[\lambda, 3\lambda - 3]$范围内。

引理 5.4（平衡扩展引理）并未直接用于证明任何核上界结果，但 Casel 等人 [14] 利用它证明了我们下面陈述的“平衡冠引理”。

引理 5.6（平衡冠引理 [14]）。设 G 是一个顶点加权图 $G = (V, E, w)$，且 $\lambda \in \mathbb{N}$，其中每个连通分量的权重至少为 λ。可以在 $\mathcal{O}(k^2|V||E|)$ 时间内计算出 G 的一个 λ-平衡冠分解 $(C, R, \mathfrak{R}, f)$，其中 $k = |H| + |\mathfrak{R}| \leq \min\{w(G)/\lambda, |V|\}$。

Casel 等人 [14] 利用引理 5.6，为我们下面定义的分离与打包问题的加权版本求得了一个核。注意，W-Weight Separator 可以视为 p-Component Order Connectivity 问题的加权变体，而 W-Weight Packing则是其打包类比。

W-Weight Separator输入：一个顶点加权无向图 $G = (V, E, w)$ 和整数 k。问题：是否存在一个至多包含 k 个顶点的集合 $S \subseteq V(G)$，使得 $G - S$ 的每个连通分量的总权重都小于 W?

W-Weight Packing输入：一个顶点加权无向图 $G=(V,E,w)$ 和整数 k。问题：是否存在 k 个两两不相交的集合 V_1、.....、V_k，使得对于每个 $1\leq i\leq k$，$V_i\subseteq V(G)$ $w(V_i)\geq k$，并且 $G[V_i]$ 是连通的?

对于这两个问题，Casel 等人[14] 都给出了具有 $3k(W-1)$ 个顶点的核，并且可以在 $\mathcal{O}(k^2|V||E|)$ 时间内计算得到。

最后，他们还研究了下面陈述的 Balanced Connected Partition 问题。

Max-Min (Min-Max) Balanced Connected Partition输入：一个顶点加权无向图 $G=(V,E,w)$ 和整数 k。问题：是否存在一个划分 $V_1,\ldots,V_k$，将 $V(G)$ 划分为，使得对于每个 $i\in[k]$，$w(V_i)\geq W$且$G[V_i]$连通?

在同一篇论文中，他们利用定义 5.4 和引理 5.6，为 Max-Min (Min-Max) Balanced Connected Partition 给出了一个多项式时间算法，该算法输出 $V_1^*,..,V_k^*$ 对 $V(G)$ 的划分，使得对于每个 $i\in[k]$，$G[V_i]$ 连通，并且 $w(V_i^*)\geq W/3$。

5.4 加性扩展引理

Koana 等人 [42] 介绍了以下扩展及扩张引理的变体。

定义 5.5（q-加性扩展，[42]）。设 $G=(V=A\uplus B,E)$ 是一个二分图，且 q 为正整数。那么，如果对于所有大小为 q 的 $B'\subseteq B$，都存在一个匹配，使 A 在 $G[A,B\setminus B']$中被饱和，则称 G 从 A 到 B 具有 q-加性扩展。

为完整起见，我们给出以下命题的证明，该命题陈述于 [42] 中。

命题 5.1。设 $G=(V=A\uplus B,E)$ 是一个二分图。当且仅当对于每个非空的 $X\subseteq A$，$|N(X)|\geq|X|+q$ 时，从 A 到 B 存在 q- 加性扩展。

证明。我们将使用霍尔定理证明这一点。

先考虑正向 ($\Rightarrow$)。假设 G 从 A 到B具有 q-加性扩展。那么，对于每个大小为 q的 $B'\subseteq B$，在 $G'=G[A,B\setminus B']$中存在一个使 A 饱和的匹配。这意味着，对于每个非空的 $X\subseteq A$，$|N(X)\setminus B'|\geq|X|$。考虑 $|N_G(X)|$的值。如果 $\hat{}|N_G(X)|<|X|+q$，那么从 $N_G(X)$ 中任取一个由 q 个顶点组成的集合 B。显然，$\hat{}\hat{}\hat{}B\subseteq B$具有 q 个顶点。但是，在图 $G=G[A,B\setminus B]$中，对于同一个集合 $X\subseteq A$，有$\hat{}|N_{\hat{G}}(X)|<|X|$成立。于是，这导致了一个矛盾：在 G中存在一个使 A 饱和的匹配。

现在证明反向 ($\Leftarrow$)。假设对于每个非空的 $X\subseteq A$，$|N(X)|\geq|X|+q$。我们需要证明，对于每个大小为 q的 $B'\subseteq B$，在$G[A,B\setminus B']$中存在一个使 A 饱和的匹配。假设对于某个大小为 q的 $B^*\subseteq B$，在 $G^*=G[A,B\setminus B^*]$中不存在使 A 饱和的匹配。那么，根据命题 2.1（霍尔定理），存在 $X\subseteq A$ 使得 $|N_{G^*}(X)|<|X|$。由于 B^* 的大小为 q，因此在 G 中也有 $|N_G(X)|<|X|+q$成立。这与前提矛盾，从而完成了对该观察的证明。□

现在，我们陈述加性扩张引理，并简要说明如何利用它为 Partial Vertex Cover 提供了一个改进的核。

引理 5.7（加性扩张引理 [42]）。设 $q\geq 1$ 和 $G=(V=A\uplus B,\ E)$是一个二部图。如果 $|B|>q|A|$，且 B 中没有孤立顶点，那么存在非空的 $A\subseteq A$ 和 $\hat{}B\subseteq B$，使得

- 存在一个将 A 扩展到 B 的 q-加$\hat{}$性扩$\hat{}$张，且 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$
- B 中的顶点均没有邻居位于 A之外，即 $N(B)\subseteq A$。

Partial Vertex Cover输入：一个无向图 $G=(V,E)$ 和两个整数 k,ℓ。参数： $k+\ell$问题：是否存在一个集合 S，其中至多包含 k 个顶点，使得 $G-S$ 至多有 $\lvert E(G)\rvert-\ell$ 条边?

首先，作者 [42] 利用扩张引理（引理 4.1）给出了一个具有（$\ell+2$）（$k+\ell$）个顶点的核。其工作原理如下。

- 首先，他们考虑 Vertex Cover 的线性规划表述。根据 Nemhauser 和 Trotter [55]，存在一个 Vertex Cover 线性规划表述的分数最优解，使得所有顶点的赋值均为 0、1 或 1/2。

- 令 V_0、V_1、$V_{1/2}$ 分别表示赋值为 0、1、1/2 的顶点。如果 $|V_1|+|V_{1/2}|\geq k+\ell+1$，则该实例为否实例。
- 否则，他们构造一个辅助二分图，并应用扩张引理，得到一个具有 $(\ell+2)(k+\ell)$ 个顶点的核。

之后，他们给出了一个证明：利用加性扩张引理（引理 5.7），可以得到一个具有 $(\ell'+1)(k+\ell)$ 个顶点的核，使得 $\ell'=\max\{\ell,1\}$。该证明的结构类似，但一个关键区别在于，他们使用引理 5.7 而非引理 4.1。

6 结论与未来研究

本综述旨在汇集名为扩张引理的重要工具的各种变体及其在参数化复杂性中的应用。不同作者针对各自研究的具体问题提出了相应的变体，因此有些应用往往只适用于特定类型的问题。本综述并未涵盖所有内容，原因在于新的变体和应用正以惊人的速度涌现。我们希望本综述能推动这些变体在参数化复杂性中的进一步应用。若能看到近期变体（如引理 5.1、引理 5.3 和引理 5.7）得到更多应用，并为其所应用的核结果找到更紧的界，将会很有意思。尤其是，以下研究方向值得探讨。

- 从核化的角度来看，还有一些研究较为充分的顶点删除问题，例如，
  Split Vertex Deletion 的一个 $\mathcal{O}(k^2)$ 顶点核（见 [3]），但其核的边数下界为$\mathcal{O}(k^{2-\varepsilon})$ [22]。值得探究的是，这些扩张引理的变体是否有助于为这些问题获得次二次顶点核。

- 最近，Jacob 等人 [38,39] 开始研究散布图类上的顶点删除问题。虽然他们已经证明了该问题的参数化复杂性，但其核化复杂性仍未解决，也鲜有研究。值得探究的是，扩张引理或其某些变体是否对此有所帮助。

参考文献

[1] Faisal N. Abu-Khzam。 r集合打包的改进核化算法。《信息处理快报》，110(16):621–624, 2010年。[2] Faisal N. Abu-Khzam。d-击中集的核化算法。《计算机与系统科学杂志》，76(7):524–531，2010年。[3] Akanksha Agrawal、Sushmita Gupta、Pallavi Jain 和 R. Krithika。用于分裂图顶点删除的二次顶点核。《理论计算机科学》，833:164–172，2020年。

[4] Akanksha Agrawal、Sudeshna Kolay、Daniel Lokshtanov 和 Saket Saurabh。用于块图顶点删除的更快固定参数可处理算法和更小的核。载于 Evangelos Kranakis、Gonzalo Navarro 和 Edgar Ch´avez 编，LATIN 2016：理论信息学——第12届拉丁美洲研讨会，恩塞纳达，墨西哥，2016年4月11日至15日，论文集，计算机科学讲义第9644卷，第1–13页。施普林格，2016年。[5] Akanksha Agrawal、Daniel Lokshtanov、Diptapriyo Majumdar、Amer E. Mouawad 和 Saket Saurabh。具有宽松不相交约束的环打包的核化。SIAM离散数学杂志，32(3):1619–1643，2018年。[6] Akanksha Agrawal、Daniel Lokshtanov、Pranabendu Misra、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。受反馈顶点集启发的弦图顶点删除核。《ACM算法汇刊》(TALG)，15(1):1–28，2018年。[7] Akanksha Agrawal、Saket Saurabh、Roohani Sharma 和 Meirav Zehavi。删除至无环有向图类的核。《计算机与系统科学杂志》，92:9–21，2018年。[8] Jasine Babu、R. Krithika 和 Deepak Rajendraprasad。定向图中的弧不相交4-环打包。载于 Anuj Dawar 和 Venkatesan Guruswami 编，IARCS软件技术与理论计算机科学基础第42届年会，FSTTCS 2022，2022年12月18日至20日，印度理工学院马德拉斯分校，金奈，印度，LIPIcs第250卷，第5:1–5:16页。计算机科学莱布尼茨国际会议中心，2022年。[9] Aritra Banik、Ashwin Jacob、Vijay Kumar Paliwal 和 Venkatesh Raman。(n-k)列表着色的固定参数可处理性。《计算系统理论》，64(7):1307–1316，2020年。[10] St´ephane Bessy、Marin Bougeret、Dimitrios M. Thilikos 和 Sebastian Wiederrecht。通过彩虹匹配对图打包问题进行核化。载于 Nikhil Bansal 和 Viswanath Nagarajan 编，2023年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA 2023，佛罗伦萨，意大利，2023年1月22日至25日，第3654–3663页。SIAM，2023年。[11] Hans L. Bodlaender、Rodney G. Downey、Michael R. Fellows 和 Danny Hermelin。关于无多项式核的问题。《计算机与系统科学杂志》，75(8):423–434，2009年。[12] Hans L. Bodlaender、Bart M. P. Jansen 和 Stefan Kratsch。路径与环问题的核界。《理论计算机科学》，511:117–136，2013年。[13] Hans L. Bodlaender、St´ephan Thomass´e 和 Anders Yeo。不相交环和不相交路径的核界。《理论计算机科学》，412(35):4570–4578，2011年。[14] Katrin Casel、Tobias Friedrich、Davis Issac、Aikaterini Niklanovits 和 Ziena Zeif。连通性约束的平衡冠分解。载于 Petra Mutzel、Rasmus Pagh 和 Grzegorz Herman 编，欧洲算法研讨会第29届年会，ESA 2021，2021年9月6日至8日，里斯本，葡萄牙（线上会议），LIPIcs第204卷，第26:1–26:15页。计算机科学莱布尼茨国际会议中心，2021年。[15] Radovan Cerven´y、Pratibha Choudhary 和 Ondrej Such´y。关于d-路径顶点覆盖的核。CoRR，abs/2107.12245，2021年。[16] Radovan Cerven´y 和 Ondrej Such´y。5-路径顶点覆盖的更快固定参数可处理算法。载于 Peter Rossmanith、Pinar Heggernes 和 Joost-Pieter Katoen 编，国际计算机科学数学基础研讨会第44届会议，MFCS 2019，2019年8月26日至30日，亚琛，德国，LIPIcs第138卷，第32:1–32:13页。计算机科学莱布尼茨国际会议中心，2019年。[17] Jianer Chen、Henning Fernau、Peter Shaw、Jianxin Wang 和 Zhibiao Yang。打包与覆盖问题的核。《理论计算机科学》，790:152–166，2019年。[18] Miroslav Chleb´ík 和 Janka Chleb´íkov´a。最小权顶点覆盖问题的皇冠约简。《离散应用数学》，156(3):292–312，2008年。

[19] Benny Chor、Mike Fellows 和 David Juedes。线性时间内的线性核，或者如何在 $O(n^2)$ 步内节省 k 种颜色。载于《国际计算机科学图论概念研讨会》，第257–269页。施普林格，2004年。[20] Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、D´aniel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。施普林格，2015年。[21] Marek Cygan、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Jakub Onufry Wojtaszczyk。改进的FPT算法与路径宽度一顶点删除的二次核。Algorithmica，64(1):170–188，2012年。[22] Holger Dell 和 Dieter Van Melkebeek。除非多项式时间层次坍塌，否则可满足性不允许非平凡的稀疏化。《ACM会刊》（JACM），61(4):1–27，2014年。[23] Reinhard Diestel。《图论》，第4版，数学研究生教材第173卷。施普林格，2012年。[24] Michael Dom、Daniel Lokshtanov 和 Saket Saurabh。通过颜色和标识符证明核化下界。《ACM算法汇刊》（TALG），11(2):1–20，2014年。[25] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性基础》。计算机科学丛书。施普林格，2013年。[26] Jack Edmonds。路径、树与花。《加拿大数学杂志》，17:449–467，1965年。[27] Michael R. Fellows。扩张、双赢策略与冠规则：FPT研究的一些新方向。载于《国际计算机科学图论概念研讨会》，第1–12页。施普林格，2003年。[28] Mike Fellows、Pinar Heggernes、Frances Rosamond、Christian Sloper 和 Jan Arne Telle。在任意图中寻找 k 个不相交三角形。载于《国际计算机科学图论概念研讨会》，第235–244页。施普林格，2004年。[29] J¨org Flum 和 Martin Grohe。《参数化复杂性理论》。理论计算机科学丛书：EATCS丛书。施普林格，2006年。[30] Fedor V. Fomin、Serge Gaspers、Saket Saurabh 和 Stefan Thomass´e。最大内部生成树的线性顶点核。《计算机与系统科学杂志》，79(1):1–6，2013年。[31] Fedor V. Fomin、Tien-Nam Le、Daniel Lokshtanov、Saket Saurabh、St´ephan Thomass´e 和 Meirav Zehavi。隐式3-击中集与3集合打包问题的次二次核。《ACM算法汇刊》，15(1):13:1–13:44，2019年。[32] Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。《核化——参数化预处理理论》。剑桥大学出版社，2019年。[33] Tibor Gallai。图的最大—最小定理与广义因子。《Acta Mathematica Hungarica》，12(1-2):131–173，1961年。[34]Jiong Guo 和 Rolf Niedermeier。数据约简与问题核化导论。《 SIGACT News 》，38(1):31–45，2007 年。[35] Peter Hall。关于子集代表元。《伦敦数学会杂志》，s1-10:26–30。[36] John E. Hopcroft 和 Richard M. Karp。二分图最大匹配的 n^5/2 算法。《SIAM计算杂志》，2(4):225–231，1973年。[37] Yoichi Iwata。反馈顶点集的线性时间核化。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Piotr Indyk、Fabian Kuhn 和 Anca Muscholl 编，《第44届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2017）》，2017年7月10日至14日，波兰华沙，LIPIcs第80卷

，pages 68:1–68:14。Schloss Da gstuhl - 莱布尼茨信息学中心 ，2017年。

[38] Ashwin Jacob、Diptapriyo Majumdar 和 Venkatesh Raman。删除至散布图类的参数化复杂性。载于 Yixin Cao 和 Marcin Pilipczuk 编，2017年《第15届参数化与精确计算国际研讨会》IPEC 2020，2020年12月14日至18日，中国香港（线上会议），LIPIcs 第180卷，第18:1–18:17页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2020年。[39] Ashwin Jacob、Diptapriyo Majumdar 和 Venkatesh Raman。更快的固定参数可 tract 算法：删除至图类对。载于 Evripidis Bampis 和 Aris Pagourtzis 编，《计算理论基础——第23届国际研讨会》，FCT 2021，希腊雅典，2021年9月12日至15日，论文集，计算机科学讲义第12867卷，第314–326页。施普林格，2021年。[40] Bart M. P. Jansen 和 Marcin Pilipczuk。弦图顶点删除的近似与核化。SIAM J. Discret. Math.，32(3):2258–2301，2018年。[41] Eun Jung Kim 和 O-joung Kwon。块图删除的多项式核。载于 Thore Husfeldt 和 Iyad A. Kanj 编，第10届参数化与精确计算国际研讨会，IPEC 2015，2015年9月16日至18日，希腊帕特雷，LIPIcs 第43卷，第270–281页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2015年。[42] Tomohiro Koana、Andr´e Nichterlein 和 Niklas W¨unsche。通过（加性）扩张引理进行部分顶点覆盖核化。CoRR，abs/2211.07001，2022年。[43] Mithilesh Kumar 和 Daniel Lokshtanov。l-分量阶连通性的 2lk 核。载于第11届参数化与精确计算国际研讨会，IPEC 2016，2016年8月24日至26日，丹麦奥胡斯，第20:1–20:14页，2016年。[44] Michael Lampis。顶点覆盖的阶为 2k- clogk 的核。信息处理快报，111(23-24):1089–1091，2011年。[45] Wenjun Li、Yang Ding、Yongjie Yang 和 Guozhen Rong。对偶着色问题的 $(2+\epsilon)$k-顶点核。理论计算机科学，868:6–11，2021年。[46] Wenjun Li 和 Binhai Zhu。基于冠分解的顶点覆盖 2k- 核化算法。Theor. Comput. Sci.，739:80–85，2018 年。[47] Daniel Lokshtanov。参数化算法与复杂性的新方法。挪威卑尔根大学，2009年。[48] Daniel Lokshtanov 和 Saket Saurabh。更快的集合划分算法！载于参数化与精确计算国际研讨会，第288–299页。施普林格，2009年。[49] Lazlo Lovasz 和 Michael D. Plumber。《匹配理论》。AMS Chelsea Publishing。美国数学学会，2000年。[50] Diptapriyo Majumdar、Venkatesh Raman 和 Saket Saurabh。以小度调节集为参数的顶点覆盖多项式核。Theory Comput. Syst.，62(8):1910–1951，2018年。[51] Neeldhara Misra、Geevarghese Philip、Venkatesh Raman 和 Saket Saurabh。论参数化独立反馈顶点集。Theor. Comput. Sci.，461:65–75，2012年。[52] Pranabendu Misra、Venkatesh Raman、M. S. Ramanujan 和 Saket Saurabh。偶圈横截集的参数化算法。载于 Martin Charles Golumbic、Michal Stern、Avivit Levy 和 Gila Morgenstern 编，《计算机科学中的图论概念——第38届国际研讨会》，WG 2012，以色列耶路撒冷，2012年6月26日至28日，修订精选论文，计算机科学讲义第7551卷，第172–183页。施普林格，2012年。[53] Matthias Mnich 和 Erik Jan van Leeuwen。删除至无环有向图类的多项式核。离散优化，25:48–76，2017年。

[54] Matthias Mnich、Virginia Vassilevska Williams 和 L´aszl´o A. V´egh。竞赛图反馈顶点集的 7/3-近似算法。载于 Piotr Sankowski 和 Christos D. Zaroliagis（编），第24届欧洲算法年会（ESA 2016），2016年8月22日至24日，丹麦奥胡斯，LIPIcs 第57卷，第67:1–67:14页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2016年。[55] George L. Nemhauser 和 Leslie E. Trotter Jr. 顶点打包：结构性质与算法。《数学规划》，8(1):232–248，1975年。[56] Rolf Niedermeier。《固定参数算法导论》。牛津大学出版社，2006年。[57] Geevarghese Philip、Venkatesh Raman 和 Yngve Villanger。路径宽度为1的顶点删除问题的四次核。载于 Dimitrios M. Thilikos（编），《计算机科学中的图论概念——第36届国际研讨会（WG 2010），希腊克里特岛扎罗斯，2010年6月28日至30日，修订论文集》，计算机科学讲义第6410卷，第196–207页，2010年。[58] Elena Prieto 和 Christian Sloper。化简为独立集结构：k-内部生成树问题。《北欧计算杂志》，12(3):308–318，2005年。[59] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图子式。III. 平面树宽。《组合理论杂志B辑》，36(1):49–64，1984年。[60] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图子式。II. 树宽的算法方面。《算法杂志》，7(3):309–322，1986年。[61] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图子式。IV. 树宽与良拟序。《组合理论杂志B辑》，48(2):227–254，1990年。[62] St´ephan Thomass´e。反馈顶点集的 $4k^2$ 核。《ACM算法汇刊》，6(2)，2010年。[63] Jianxin Wang、Dan Ning、Qilong Feng 和 Jianer Chen。用于 p2-打包的改进核化。《信息处理快报》，110(5):188–192，2010年。[64] Mingyu Xiao。将图分解为大小有界的连通分量的线性核。《计算机与系统科学杂志》，88:260–270，2017年。[65] Mingyu Xiao 和 Shaowei Kou。3-路径顶点覆盖的核化与参数化算法。载于 T. V. Gopal、Gerhard J¨ager 和 Silvia Steila（编），《计算模型理论与应用——第14届年度会议（TAMC 2017）》，瑞士伯尔尼，2017年4月20日至22日，论文集，计算机科学讲义第10185卷，第654–668页，2017年。