arXiv:2303.02696v1 [math.QA] 5 Mar 2023

幺半与非幺半设置中的泛构造、布劳尔包络与伪特征

MEE SEONG IM、MIKHAIL KHOVANOV 和 VICTOR OSTRIK

Abstract. 本文阐明了拓扑理论与幺半范畴中泛构造的基本定义。文中针对多种类型的幺半范畴给出了泛构造的定义，包括刚性范畴和对称范畴。本文还说明了如何为非幺半范畴建立泛构造。论文第二部分阐释了如何将一个小范畴与一个刚性对称幺半范畴关联起来，后者可视为该范畴的一种布劳尔包络。针对布劳尔包络的泛构造推广了前两位作者此前关于自动机、幂级数和拓扑理论的一些工作。最后，本文通过一维拓扑理论和带缺陷的拓扑量子场论，诠释了伪特征理论（或伪表示理论）；该理论是现代数论中的重要工具。文中研究了布劳尔范畴的伪特征概念，并证明了特征零情形下，当布劳尔范畴至多有可数多个对象时，伪特征具有提升为半单表示的特征的性质。本文还简要讨论了伪 holonomy，即从流形中的环到实数的函数；这类函数类似于流形上向量丛的联络沿环的全纯的迹。最后，论文分类了特征零情形下定向二维余边界范畴的伪特征（伪拓扑量子场论）及其生成函数。

Contents

1. 引言 22. 幺半设置与非幺半设置中的泛构造 52.1. 一般幺半范畴中的泛构造 52.2. 非幺半情形中的泛构造 93. 范畴的布劳尔包络 123.1. 范畴的布劳尔包络。 123.2 布劳尔包络的泛构造 183.3. 带边界的布劳尔包络 193.4. 集合预层与内部端点 224. 伪特征与一维拓扑理论 254.1. 拓扑理论与拓扑量子场论：一个实现问题 254.2. 布劳尔包络的伪特征标 304.3. 带边界的 Brauer 范畴的伪特征标 364.4. 伪 holonomy 395. 二维伪拓扑量子场论 41

Date：2023年3月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：57K16、18M05、18M30；次分类：15A15。*Key words and phrases.* 拓扑理论、拓扑量子场论、拓扑量子场论、缺陷、泛构造、伪特征标、伪拓扑量子场论、布劳尔包络。

5.1. 二维拓扑量子场论与生成函数 415.2. 二维拓扑场论。5.3. 二维伪拓扑量子场论。 44
45参考文献 56

1. Introduction

本文阐明了拓扑理论和幺半范畴的泛构造的基本框架。此外，本文提出了布劳尔范畴的一种推广：从一个范畴 C 出发，构造一个由 C 的对象和态射装饰的一维协边范畴。本文研究了 C 的布劳尔范畴的泛构造。文中还说明，现代代数数论中至关重要的伪特征标概念，可以用一个只有一个对象的范畴的布劳尔范畴之泛构造的语言来描述，即从拓扑理论到带缺陷的一维拓扑量子场论（TQFT）的提升性质。

泛构造 [BHMV95、FKN+05、Kho04、RW20、Kho20b、KS20、Mei21]以一个配边范畴或类似的幺半范畴 C，以及闭配边的乘性求值 α 为起点（更一般地说，是对恒等对象的自同态环 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1)$ 的交换幺半群进行乘性求值）。该求值取值于某个交换环或半环 R。随后转到范畴 $R\mathcal{C}$，即 C 中态射的 R-线性组合所构成的范畴。范畴 $R\mathcal{C}$ 带有一个等价关系：当且仅当无论如何将两个态射扩展为单位对象 1 的自同态并通过 α求值，所得求值都相等时，这两个态射才等价。由此得到的商范畴 $\mathcal{C}_\alpha$是 R-线性的幺半范畴，并且通常会产生一种拓扑理论，它是拓扑量子场论的一种弱类比：该理论将 C 的对象 X 关联到其状态空间 $A(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\alpha}(1, X)$，并将态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2)$ 关联到一个映射 $A(f) : A(X_1) \to A(X_2)$。这一对应是一个松幺半函子 A_α，从 C 映到 R-模范畴 R–mod：

$$A_\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow R\text{–mod}, \quad X \longmapsto A(X), \tag{1.1}$$

$$A(X_1) \otimes_R A(X_2) \longrightarrow A(X_1 \otimes X_2), \quad X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}). \tag{1.2}$$

它是松幺半的，其含义是（1.2）中的映射存在，但一般而言并非同构（同构性质会使函子 A_α 成为幺半的）。

本文由三部分组成：

- 第 2节一般性地解释幺半范畴和非幺半范畴中的泛构造。
- 第 3 节描述了 $\mathcal{C}$ 的布劳尔范畴：由 $\mathcal{C}$ 的对象和态射装饰的零维流形之间的一维配边。它还解释了一维配边可能具有内部 端点，而这些端点不属于配边的外边界时的推广。随后讨论布劳尔范畴的泛构造。
- 第 4 节和第 5节探讨伪特征与拓扑理论之间的关系。

在第 2.1 节中，我们给出一般幺半范畴中泛构造的定义，要求存在一个乘法同态 $\alpha : \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) \longrightarrow R$ 从恒等对象自同态的交换幺半群出发

到交换半环 R。我们阐释了 R 和 C 的各种性质（包括 R 为交换环，以及 C 为对称或刚性）如何简化定义，并研究泛构造。

在第 2.2 节中，我们提出了范畴 $\mathcal{C}$ 不是幺半范畴时泛构造的一种框架。此时，我们用起始对象和终止对象的集合取代单位对象 **1**。对象的状态空间 X 是一个由从起始对象到 R的态射生成的 X -模，并满足如下关系：将这些态射与从 R到终止对象的态射复合，并通过 X 计算复合后，得到这些态射的 α-线性组合所产生的关系。我们在第 3.4 节进一步推广这一框架，用一对集合预层取代起始对象和终止对象的集合，其中一个对应于 $\mathcal{C}$，另一个对应于 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。

第 3.1 节定义了小范畴 C 的布劳尔包络，也称为布劳尔范畴 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$。可以将其视为这样一个范畴：其态射是由 $\mathcal{C}$ 的态射装饰的定向一维配边，连接着由 $\mathcal{C}$ 的对象装饰的定向零流形。基本配边复合后会产生由 $\mathcal{C}$ 中的自同态装饰的环，并受适当等价关系约束。该节还介绍了庞加莱⁄对偶构造，其中配边带有由 $\mathcal{C}$ 的态射装饰的零维缺陷，而这些缺陷之间的区间则由 $\mathcal{C}$ 的对象装饰。。

第 3.2 节介绍了布劳尔范畴的泛构造，其中为 x中 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ 的每个环赋予交换半环 R中的一个元素 $\alpha(x)$。由此得到一个 R-线性刚性对称幺半范畴 $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C})$ 以及一串范畴与函子

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}) \longrightarrow R\mathcal{B}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}),$$

其中第一个箭头是将 C 包含到其布劳尔包络中的“包含映射”，第二个箭头是布劳尔范畴的R-线性化，第三个箭头则由求值 α 的泛构造给出。

在第 3.3 节，我们考虑更一般的 $\mathcal{C}$-装饰的一维配边，它们可以在配边的“中间”终止（结束），也就是说，不在描述 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$中态射的源和目标的配边边界处终止。这些额外的端点称为内部或浮动端点。第 3.4 节通过 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$上的一对集合预层，介绍了这类配边的一般框架，并解释了此情形下的泛构造。该节还展示了这一设定下的非幺半泛构造。

第 4 节首先说明如何通过拓扑量子场论实现求值的提升问题，见第 4.1 节。现代伽罗瓦表示理论中的一项重要工具是伪特征（或伪表示）理论 [Tay91, Car94, Rou96, Nys96, Dot11, Bel12, Bel21, WWE17, WE13]。伪特征可以追溯到 20 世纪之交，当时相关结构（群行列式）促使 Frobenius 开创了有限群特征理论，见 [Joh19] 和 [Dot11，备注 1]。我们说明，伪特征可以看作是范畴 C_G 的布劳尔范畴上的求值 α；这里 C 只有一个对象 X，其自同态构成群或幺半群 G。属于伪特征的求值还具有一项额外性质：对某个 d，其反对称化算子 $X^{\otimes(d+1)}$ 恒等于 0。令人惊讶的是，这通常足以推出该求值可以实现为某个表示的特征。将伪特征实现为表示的特征 V，可以解释为将相应的求值（或拓扑理论）提升为带缺陷的一维拓扑量子场论。其示意图见图 1.0.1。

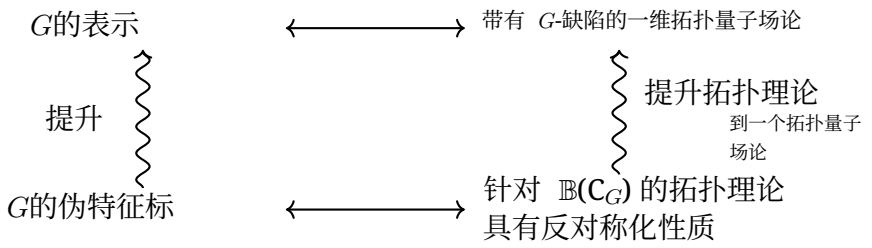


FIGURE 1.0.1.伪特征标/表示与一维拓扑理论/拓扑量子场论之间的对应关系。

在第 4.2 节中，我们考察这种对应的分布式情形，此时$\mathcal{C}$ 有多个对象。分布式情形的一个潜在应用是伪 holonomy，即流形上定义在闭路径上的函数 M ，其表现如同流形上向量丛联络的全纯的迹 M，见第 4.4节。我们还讨论内部端点的情形，此时求值同时定义在带标记圆和区间上，见第 4.3节。

在第 5 节中，我们研究一维情形以外的伪特征。我们回顾二维拓扑量子场论及其生成函数。范畴 α Cob_2 的二维协边的一个伪特征会导出一个具有内部端点和一个无标记缺陷的布劳尔范畴的伪特征。该伪特征的其他性质（并将域限制为特征为 0 的域）使我们能够约束 α 的生成函数，并证明它与某个二维拓扑量子场论的生成函数一致。定理 Cob_2 的伪特征分类结果陈述于定理 5.10中。

更一般的幺半范畴的伪特征标或可应用于数论以外的领域，例如拓扑量子场论的变形理论。

将刚性张量包络 B(C) 称为 C 的布劳尔范畴，源于以下例子。熟知的定向布劳尔范畴（参见 [BCNR17] 中的介绍）是我们构造的一个特例：此时 C 是一个只有一个对象 X 和一个态射（即 X 的恒等态射）的范畴。于是，刚性对称幺半范畴 B(C) 中单位对象的自同态是圆 $\mathbb{S}_X$ （由态射 id_X 装饰的圆）的幂，参见图 4.1.1。接着，可以通过对态射取线性组合，将 C 扩张为 R-线性范畴 RB(C)，然后施加关系 $\alpha(\mathbb{S}_X) = \lambda \in R$ ，规定圆的求值为 λ，其中 R 是一个交换环，通常是一个域。所得范畴通常称为定向布劳尔范畴。

下一步是取该范畴的可忽略商，这等价于针对这一求值 α 进行泛构造。当 $|\lambda| = n \in \mathbb{Z}_+$ 时，可忽略商可以通过 GL(n) 的表示范畴来诠释。

Deligne 和 Milne 构造了一族刚性对称幺半范畴 Rep(GL(λ))，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$，见 [DM82、Del90]。当 $\lambda \notin \mathbb{Z}$ 时，Rep(GL(λ)) 是满足某种泛性质的半单张量范畴。关于素特征下 GL(n)、SL(n) 和 PGL(n) 的倾斜范畴半单化的进一步进展，见 [BEAEO20、EO22]。

更一般地，当 $\mathcal{C}$ 只有一个对象 X时，范畴 $\mathcal{C}$ 可由自同态幺半群G 来描述，该幺半群由 X 的自同态构成，记作 $\mathcal{C}_G$。伪特征与这一情形相关。除了伪特征的拓扑理论诠释外，Brauer 范畴 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_G)$以及插值范畴 $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}_G)$也自然出现在形式有理幂级数、正则语言和自动机的拓扑理论与拓扑量子场论（TQFT）诠释中，见 [Kho20a、IK22b、IK21、GIK+23]。

Brauer 范畴 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_G)$ 是构造 Frobenius海森堡范畴的中间步骤，见 [BSW21] （对于该关系，需要选取 Frobenius 代数的一组生成元，用以标记线上的点）。

在更受限的情形下，当$\mathcal{C}$ 由单个对象 X 和一个生成态射$x : X \longrightarrow X$ （除恒等态射之外）自由生成时，Brauercategory $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ 的变体作为海森堡代数的各种范畴化中的中间范畴出现，见 [Kho14、BSW20]。以 nilHecke 代数替代对称群，会得到相关范畴，它们出现在量子 $\mathfrak{sl}$（2）的范畴化中，见 [Lau10]。

带有内部端点的 Brauer 范畴（其中允许一维流形在配边的中部终止）在第 3.3、3.4节中进行了研究；它们的插值推广了车 rook 布劳尔代数和范畴 [Hd14、Hu20], ，它们对应于这样的情形：C $\mathcal{C}$ 具有单个对象、单个（恒等）态射，以及该态射在单元素集合上的作用。描述幺半范畴中到单位对象及从单位对象出发的态射的内部端点还出现在 [KS15、Kho20a、IK22a、KT19]中。

致谢：M.K. 和 M.S.I. 谨向都柏林高等研究院和 Sergei Gukov 致谢，感谢他们在 2022年11月的一次研讨会期间提供了良好的工作环境；本研究正是在那次研讨会上开始的。作者感谢 Yakov Kononov 和 Eric Urban 的精彩讨论。M.K. 谨此感谢美国国家科学基金会项目 DMS-2204033 和西蒙斯合作奖 994328 提供的部分支持。

2. Universal construction in monoidal and non-monoidal settings

本文始终假设所有范畴都是小范畴，包括下文的范畴 C。

2.1. 一般幺半范畴的泛构造。

在拓扑理论的泛构造中，首先给定一个幺半范畴 C。单位对象的自同态环 $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$ 构成一个交换幺半群。选取一个交换环或交换半环 R，并选择一个乘法映射

$$\alpha \ : \ \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \longrightarrow R, \tag{2.1}$$

使得

$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y), \quad x, y \in \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}). \tag{2.2}$$

范畴 C 通常具有集合论或拓扑学起源，其中的同态空间 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2)$ 只是集合。我们将 C 取其 R-线性闭合 RC，它是一个幺半范畴，与 C 具有相同的对象；但 RC 中的态射是 C 中态射的有限个 R-线性组合，其复合由将 C 中的复合双线性地扩展到态射的线性组合而定义。求值 α 按 R-线性扩展为一个交换半环的同态，也记作 α:

$$\alpha \ : \ \mathsf{End}_{R\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \cong R\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \longrightarrow R. \tag{2.3}$$

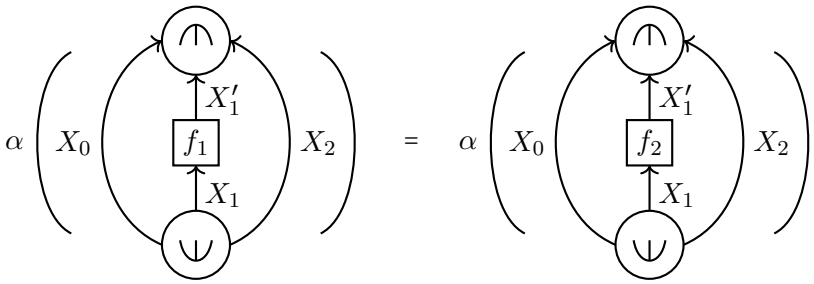


FIGURE 2.1.1. 关系（2.5）在任意幺半范畴和交换半环的通用构造中的图示表示 R。

接下来，将范畴 C_α 定义为 $R\mathsf{C}$ 的一个商范畴，它与 $R\mathsf{C}$ 和 C 具有相同的对象。若对于任意对象 X_0、X_2以及任意态射， $R\mathsf{C}$ 中的两个态射 f_1、$f_2 : X_1 \to X_1'$彼此 α-等价

$$\text{(2.4)} \qquad \text{ш} : \mathbf{1} \longrightarrow X_0 \otimes X_1 \otimes X_2, \qquad \text{ı} : X_0 \otimes X_1' \otimes X_2 \longrightarrow \mathbf{1}$$

在 C（或等价地，在 $R\mathsf{C}$）中，以下关系成立

$$\text{(2.5)} \qquad \alpha(\text{ı} \circ (\mathsf{id}_{X_0} \otimes f_1 \otimes \mathsf{id}_{X_2}) \circ \text{ш}) \;=\; \alpha(\text{ı} \circ (\mathsf{id}_{X_0} \otimes f_2 \otimes \mathsf{id}_{X_2}) \circ \text{ш}),$$

见图 2.1.1。

换言之，我们以相同的方式闭合或补全 f_1、f_2，使其成为 1 的自同态，并要求这两个闭合在 R 中取相同的值。

范畴 C_α 是 R-线性幺半范畴。所谓 R-线性范畴，是指同态空间为 R-模，且态射的复合是 R-双线性的范畴。

我们将 $X \in \mathsf{Ob}(\mathsf{C}) = \mathsf{Ob}(\mathsf{C}_\alpha)$ 的右态空间 $A_r(X)$ 定义为 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathbf{1}, X)$。同理，将 $X \in \mathsf{Ob}(\mathsf{C}) = \mathsf{Ob}(\mathsf{C}_\alpha)$ 的左态空间 $A_\ell(X)$ 定义为 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_\alpha}(X, \mathbf{1})$，因此

$$\text{(2.6)} \qquad A_\ell(X) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_\alpha}(X, \mathbf{1}), \qquad A_r(X) := \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathbf{1}, X).$$

我们的约定 关于左、右态空间的区分，源于对复合的观察：

$$\text{(2.7)} \qquad \mathbf{1} \xleftarrow{g} X \xleftarrow{f} \mathbf{1}$$

它写作 gf，其中 $g \in \mathsf{Hom}(X, \mathbf{1})$ 位于左侧，而 gf 和 $f \in \mathsf{Hom}(\mathbf{1}, X)$ 位于右侧。一个

态射 rphism $f : X \to X'$ in C, in $R\mathsf{C}$ or in C_α, 会诱导出态空间之间的 R-线性映射

$$\text{(2.8)} \qquad A_r(f) : A_r(X) \longrightarrow A_r(X'), \qquad A_\ell(f) : A_\ell(X') \longrightarrow A_\ell(X).$$

映射 $A_r(f)$ 和 $A_\ell(f)$ 分别对态射的复合具有协变性和反变性： $A_r(fg) = A_r(f) \bigcirc A_r(g)$， $A_\ell(fg) = A_\ell(g) \bigcirc A_\ell(f)$。

状态空间的集合 $\{A_r(X)\}_{X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})}$ 以及映射 $A_r(f)$，其中 $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2), X_1, X_2 \in \mathsf{Ob}(\mathsf{C})$，给出一个函子 $A_{\alpha,r}$（或简称 A_r），从 C 到 R–mod；该函子可分解为函子 $\mathsf{C}_\alpha \to R$–mod，也记作 A_r。这个函子

$$A_r : \mathcal{C} \longrightarrow R\text{–mod}$$

描述了一个 C 的拓扑理论，即一种较弱（或松弛）的拓扑量子场论版本，其中态射 s

$$A_r(X_1) \otimes_R A_r(X_2) \longrightarrow A_r(X_1 \otimes X_2)$$

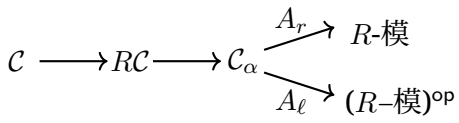


FIGURE 2.1.2. 幺半范畴 C 中，关于求值 α 的泛构造所用的范畴与函子图。

取代了拓扑量子场论定义中相应的同构，其中右侧的 $\otimes$ 表示 C 中的张量积，而左侧的 $\otimes_R$ 表示交换半环 R 上 R-半模的张量积。类似地，对于 C 中的态射f，态空间 $A_\ell(X)$ 和映射 $A_\ell(f)$（其定义与 $A_r(f)$ 类似）给出一个从 C 到R–mod 的反变函子 $A_{\alpha,\ \ell}$（或简称 A_ℓ），它下降为一个函子

$$A_\ell : \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow (R\text{–mod})^{\mathsf{op}},$$

参见图 2.1.2 中的两个函子 A_r， A_ℓ。

由于 R 是交换的，因此左 R-模与右2.2 讨论了泛构造的非幺半版本，其中 R可能不交换，函子 A_ℓ 和 A_r 的目标范畴分别是左 R-模与右2.2.1，参见图。

配对

$$(\ ,\ )_X\ :\ A_\ell(X)\times A_r(X)\longrightarrow \mathsf{End}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathbf{1})\cong R \tag{2.9}$$

是 R-双线性的（即在交换半环 R 上线性），且是非退化的，其含义是：对于不同的元素 f, $f'\in A_\ell(X)$，存在 $g\in A_r(X)$，使得 $(f,g)\neq(f',g)$；另一坐标也同样如此。

注记 2.1. 我们也可以不从 $\mathcal{C}$ 出发，再先转到 $R\mathcal{C}$，而是从一个已经 R-线性的幺半范畴 $\mathcal{C}$ 出发，并在给定一个 R-线性求值 α的情况下，对其进行商构造，另见 [Mei21]。

这一构造有一些重要的特例：

I. R 是交换环，而不只是半环。此时，方程中的各项可以移到等式的一边（2.5）。定义 $f: X_1\longrightarrow X_1'$ 与 α-等价于 $0\in \mathsf{Hom}_{R\mathcal{C}}(X_1,X_1')$ 当且仅当

$$\alpha(\imath\circ(\mathsf{id}_{X_0}\otimes f\otimes \mathsf{id}_{X_2})\circ\imath)\ =0 \tag{2.10}$$

对（2.4）中所述的所有对象和态射而言，集合 I 态射 α-等价于零态射的、存在于各种对象对之间的态射，构成 $R\mathcal{C}$中的一个双边理想，而 $\mathcal{C}_\alpha$ 与商范畴 $R\mathcal{C}/I$ 同构。

状态空间 $A_\ell(X)$ $A_r(X)$ 是 R-模，且非退化配对（2.9）是 R-模的配对。

可以通过允许对象的有限直和，并为幂等态射添加对象，得到 Karoubi 闭包 $\mathsf{Kar}(\mathcal{C}_\alpha)$。当 R 是交换环，或者更好，是域时，这尤其有用，参见 [KS20、KOK22、KL21、Mei21]。当 R 只是半环而非环时，取 Karoubi 闭包是否有用尚不明确。

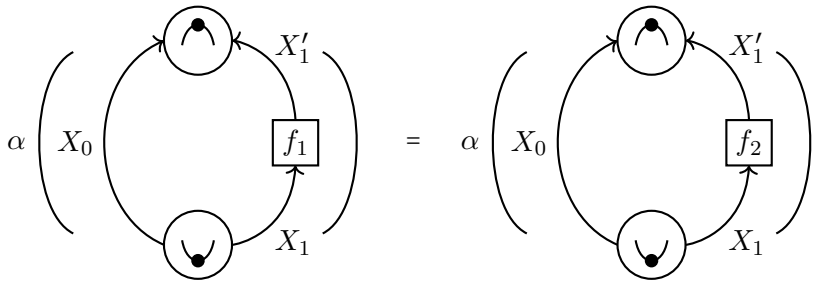


FIGURE 2.1.3. 当 C 是对称幺半范畴时，泛构造关系的简化。

II.$\mathcal{C}$ 是对称幺半的。 关于泛构造的大多数论文中，范畴 $\mathcal{C}$都是对称的。配边范畴往往是对称幺半的，而例如嵌入在 $\mathbb{R}^2$ 中的一维配边范畴是幺半但不对称的；这类范畴的泛构造见[KL21]。

当 $\mathcal{C}$对称时，对象 X_0， X_2， X_0'， X_2'可以翻转到每个张量积的一侧，因此，例如，可以化简为 $X_2 = X_2' = \mathbf{1}$。于是，(2.4)-(2.5) 中的映射和方程可简化为

$$\text{(2.11)} \qquad \cup : \mathbf{1} \longrightarrow X_0 \otimes X_1, \qquad \cap : X_0 \otimes X_1' \longrightarrow \mathbf{1},$$

$$\text{(2.12)} \qquad \alpha(\cap \circ (\mathrm{id}_{X_0} \otimes f_1) \circ \cup) \;=\; \alpha(\cap \circ (\mathrm{id}_{X_0} \otimes f_2) \circ \cup),$$

见图 2.1.3。范畴 $\mathcal{C}_\alpha$ 因而也是对称幺半范畴。

III.$\mathcal{C}$ 是刚性幺半范畴。 范畴 $\mathcal{C}_\alpha$ 是刚性的 [EGNO15] 当 $\mathcal{C}$ 是刚性的。在这种情况下，(2.4)、(2.5) 中的态射和图以及图 2.1.1 仅能稍作简化：图 X_0 中的线 2.1.1 可以弯折成一个杯和一个帽，从而将 $\cap$ 转换为态射$X_1' \otimes X_2 \longrightarrow X_0^*$并将 $\cup$ 转换为态射 $X_0^* \longrightarrow X_1 \otimes X_2$。

刚性给出了左、右态空间 $A_\ell(X) \cong A_r(X)$ 之间的同构，它们被映射 f_ℓ 和 $(f^*)_r$ 交织，其中 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2)$，而 $f^* : X_2^* \twoheadrightarrow X_1^*$ 是由刚性结构给出的 f 态射的对偶。

IV. $\mathcal{C}$ 是刚性对称幺半的。 那么范畴 $\mathcal{C}_\alpha$ 也是刚性对称幺半的。当 $\mathcal{C}$ 是配边范畴之一时，便属于这种情形，其中包括 n 维配边、带缺陷的配边、图或视为配边的适当 CW复形。泛构造主要是在这种情形下研究的。在这种情形下，条件（2.4）还可以进一步简化，改为要求对任意态射$g : X_1^* \longrightarrow (X_1')^*$两个闭合具有相同的 α-求值：

$$\text{(2.13)} \qquad {}_{X_1} : \mathbf{1} \longrightarrow X_1 \otimes X_1^*, \quad \overset{\curvearrowright}{X_1} : X_1' \otimes (X_1')^* \longrightarrow \mathbf{1}$$

$$\text{(2.14)} \qquad \alpha\left(\overset{\curvearrowright}{X_1} \circ (f_1 \otimes g) \circ {}_{X_1}\right) \;=\; \alpha\left(\overset{\curvearrowright}{X_1} \circ (f_2 \otimes g) \circ {}_{X_1}\right),$$

其中 ${}_X$， $\overset{\curvearrowright}{X}$是对象 X的刚性态射，另见图 2.1.4。

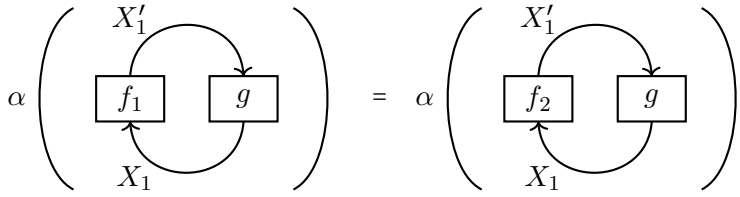


FIGURE 2.1.4. 当 C 为刚性对称幺半时的求值方程与图 .

若 R 还具有环结构，参见上文的情形 I，则可进一步化简为 RC 中的单个态射$f : X_1 \to X_1'$，并将其定义为与零态射 α等价，当且仅当

$$\alpha\left(\overset{X_1'}{\curvearrowright} \circ (f \otimes g) \circ \quad_{X_1}\right) = 0 \tag{2.15}$$

对于 C 中的任意态射 $g : X_1^* \to (X_1')^*$。之后，可以对 RC 取关于理想 I 的商，其中该理想由 α-等价于零态射的态射组成。商 RC/I 是一个 R-线性刚性对称幺半范畴。

这三个性质： R 是一个（交换）环、C 具有刚性、C 是幺半对称的，可以彼此独立地施加，从而得到泛构造的八种情形，并相应简化商范畴 C$_\alpha$的定义。上述 I–IV 中讨论了这八种情形中的五种。

关于泛构造的论文大多专门研究以下范畴： n维配边，通常是带有各种装饰的流形，或带有装饰和 $n = 2$ （泡沫）的 CW复形，参见[BHMV95、FKN$^+$05、Kho20b、KS20、KL21、KOK22] 及其中的参考文献。配边范畴通常是刚性对称幺半范畴。

Ehud Meir [梅尔21] 恰当地将泛构造重新命名为幺半范畴的插值。Meir 强调，泛构造可以置于刚性对称幺半范畴的一般框架中来理解。事实上，正如上文所述，可以去掉$\mathcal{C}$ 的刚性和对称性条件，从而考虑任意幺半范畴的插值。

非正式地说，幺半范畴可以看作广义一维协边的范畴，尤其是在幺半范畴由生成对象、生成态射和定义关系给出时。生成态射可以绘制成顶点，其“入”和“出”的边标记为生成对象。这样的态射从“入”边所对应对象的张量积映射到“出”边所对应对象的张量积。这些态射的幺半复合则构成带标记的有向图，也就是一种一维协边。

2.2. 非幺半情形下的泛构造。可以在一般范畴中定义泛构造的一个版本，而不要求范畴是幺半的。设给定一个范畴 C 和一个半环 R，该半环不一定交换。选取对象集合 S_i, $i \in I$ 和T_j, $j \in J$。我们将 S_i 称为源对象，将 T_j 称为目标对象。对于 $i \in I, j \in J$，令α_{ji} 为一个集合映射

$$\alpha_{ji} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(S_i, T_j) \longrightarrow R. \tag{2.16}$$

将这些映射的并集记为 $\alpha = (\alpha_{ji})_{i,\ j}$。

要定义此设置中的状态空间，先从自由右 R-模 $\mathrm{Fr}_r(X)$ 开始，其基为 $\{[f]\}_f$，其中 $f \in \sqcup_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S_i, X)$。也就是说，基元素由从各种起始对象 S_i 到 X的所有态射给出，而 $\mathrm{Fr}_r(X)$ 中的一个元素是 $\sum_k f_k a_k$, $a_k \in R$ 的形式有限线性组合。类似地，定义自由左 R-模 $\mathrm{Fr}_\ell(X)$，其基为 $\{[g]\}_g$，其中 $g \in \sqcup_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_j)$。其元素是 $\sum_m b_m g_m$,$b_m \in R$ 的有限线性组合。

定义一个配对

$$(\ ,\ )_X : \mathrm{Fr}_\ell(X) \times \mathrm{Fr}_r(X) \longrightarrow R \tag{2.17}$$

by

$$([g],[f])_X := \alpha_{ji}(gf),\quad f \in \mathrm{Hom}(S_i, X),\ g \in \mathrm{Hom}(X, T_j) \tag{2.18}$$

并双线性地延拓。对于 f_k 与 g_m 的有限线性组合，其中 i 和 j 固定，定义

$$\left(\sum_m b_m[g_m], \sum_k [f_k]a_k\right)_X := \sum_{m,k} b_m \alpha_{ji}(g_m f_k) a_k,\quad f_k \in \mathrm{Hom}(S_i, X),\ g_m \in \mathrm{Hom}(X, T_j), \tag{2.19}$$

然后通过线性性将其延拓到具有不同指标 i 和不同指标 j 的项的有限线性组合。注意， b_m、a_k 以及求值 α_{ji} 的值都是半环R中的元素；该半环一般不交换，且乘积中元素的顺序很重要。

两个元素 $g_1, g_2 \in \mathrm{Fr}_\ell(X)$ 称为左 α-等价的，如果对于所有 $f \in \mathrm{Fr}_r(X)$，都有 $(g_1, f) = (g_2, f)$。记 $A_\ell(X)$ 为等价类构成的左 R-模。它自然是自由左 R-模 $\mathrm{Fr}_\ell(X)$ 的一个商。

两个元素 $f_1, f_2 \in \mathrm{Fr}_r(X)$ 称为右 α-等价的，如果对于所有 $g \in \mathrm{Fr}_\ell(X)$，都有 $(g, f_1) = (g, f_2)$。记 $A_r(X)$ 为等价类构成的右 R-模。它自然是自由右 R-模 $\mathrm{Fr}_r(X)$ 的一个商。

自然的 R-双线性配对

$$A_\ell(X) \times A_r(X) \longrightarrow R \tag{2.20}$$

是非退化的。C 中的一个态射 $f : X_1 \to X_2$ 诱导出 R-线性映射

$$A_r(f) : A_r(X_1) \longrightarrow A_r(X_2), \quad A_\ell(f) : A_\ell(X_2) \longrightarrow A_\ell(X_1). \tag{2.21}$$

对 C 中所有态射 f 而言，映射 $A_r(f)$ 定义了 C 的一个表示，即一个协变函子

$$A_{\alpha,r} = A_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{mod}\text{-}R \tag{2.22}$$

从 C 到右 R-模的范畴。该函子将状态空间 $A_r(X)$ 赋予对象 X，并将映射 $A_r(f)$ 赋予态射 f。

对 C 中所有态射 f 而言，映射 $A_\ell(f)$ 定义了 C^{op} 的一个表示，即一个函子

$$A_{\alpha,\ell} = A_\ell : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow R\text{–}\mathsf{mod} \tag{2.23}$$

从 C 的对偶范畴到左 R-模的范畴。该函子将状态空间 $A_\ell(X)$ 赋予对象 X，并将映射 $A_\ell(f)$ 赋予态射 f。

我们将其概括为以下陈述。

命题 2.2。上述求值 α 的泛构造结果为

- 态空间 $A_\ell(X)$， $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$，它们是左 R-(半)模，并通过映射 (2.21)，构成一个反变函子 $A_{\alpha,\ell} : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to R\text{–}\mathsf{mod}$,

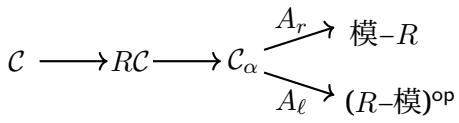


FIGURE 2.2.1. 当 C 不是幺半范畴时，泛构造的范畴与函子图。

•态空间 $A_r(X)$， $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$，它们是右 R-(半)模，并通过映射(2.21)，构成一个协变函子 $A_{\alpha,\ r} : \mathsf{C} \to \mathsf{mod}\text{-}R$.

非正式地说，我们通过源对象 S_i's 和目标对象T_j's 来探测范畴 C，并通过 α 对其进行插值，考察从 S_i 到 T_j 的、经由各种对象 X分解的态射。通过求值 α，引入了关于到 X 的态射（以及关于从 X出发的态射）的关系。当 R 是环（而不只是半环）时，构造会进一步简化，并且 $A_\ell(X)$ $A_r(X)$ 是环 R 上的（分别为左、右）模。

类比第 2.1 节，可以引入范畴 $R\mathsf{C}$，其态射是 C 中态射的R-线性组合。然而，当 R 不交换时，函子$A_{\alpha,\ell}$ 和 $A_{\alpha,r}$ 似乎无法扩展到范畴 $R\mathsf{C}$。它们可以扩展到 $Z\mathsf{C}$，其中$Z = Z(R)$ 是 R 的中心。范畴 $Z\mathsf{C}$ 与 C 具有相同的对象，而其中的态射是 C 中态射的有限个 Z- 线性组合。复合从 C 中的复合 Z-双线性地扩展而来。

求值α_{ji}在（2.16）中可扩张为 Z-线性求值$\mathsf{Hom}_{Z\mathcal{C}}(S_i, T_j) \longrightarrow R$，也记作$\alpha_{ji}$。

接下来，将态射上的 α-等价定义如下。若对任意 $i \in I, j \in J$以及态射 $h_1 : S_i \to X_1$, $h_2 : X_2 \to T_j$，以下等式成立，则元素 $f_1, f_2 \in \mathsf{Hom}_{Z\mathcal{C}}(X_1, X_2)$是$\alpha$-等价的：

$$\alpha_{ji}(h_2 f_1 h_1) = \alpha_{ji}(h_2 f_2 h_1). \tag{2.24}$$

将这些元素写成$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2$中元素的 Z-线性组合 ），

$$f_1 = \sum_k z_{1,k} f_{1,k}, \qquad f_2 = \sum_{k'} z_{2,k'} f_{2,k'}, \qquad z_{1,k}, z_{2,k'} \in Z, \qquad f_{1,k}, f_{2,k'} \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2), \tag{2.25}$$

我们将方程（2.24）改写为

$$\sum_k z_{1,k}\, \alpha_{ji}(h_2 f_{1,k} h_1) = \sum_{k'} z_{2,k'}\, \alpha_{ji}(h_2 f_{2,k'} h_1). \tag{2.26}$$

因此，我们将$f_{1,\ k}$,$f_{2,\ k'}$ 与来自某个起始对象 S_i 的态射复合，并在另一侧与指向某个终止对象 T_j 的态射复合，从而得到从 S_i 到 T_j 的态射$h_2 f_{1,\ k} h_1$ 和$h_2 f_{2,\ k'} h_1$ ，然后通过α_{ji}求值。

定义 C_α 为一个范畴，其对象与 C 相同，而 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_\alpha}(X_1, X_2)$ 是 $\mathsf{Hom}_{Z\mathcal{C}}(X_1, X_2)$ 中元素的 α-等价类，也就是说，是 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2)$ 中态射的有限 Z-线性组合，模去由 α 构成的等价关系，见上文。函子 $A_{\alpha,\ell}$ 和 $A_{\alpha,r}$ 扩展为范畴 C_α 上的函子。

例 2.3. 设 C 是以一个对象 X 和一个有限集 Σ 的生成态射为生成元的自由范畴。那么 $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X)$ 是由 Σ 生成的自由幺半群 Σ^* 。我们选取 X 作为唯一的源和唯一的目标对象。有限长度词 $\omega = a_1 \cdots a_n$、 $a_i \in \Sigma$ 由字母 Σ 构成，构成一个

双射，对应于 X 的自同态；求值函数 α 将 $\lambda_\omega \in R$ 赋给每个 $\omega \in R$。

求值 α 随后编码在非交换幂级数中，

$$\alpha = \sum_{\omega \in \Sigma^*} \lambda_\omega \omega, \qquad \lambda_\omega \in R,$$

其系数取自 R。

状态空间 $A_\ell(X)$ 是一个左 R-模，并带有幺半群 Σ^* 的右作用。利用 Σ^* 的反幺半群 $\Sigma^{*\mathrm{op}}$，可以将这两个作用合并为幺半群代数 $R[\Sigma^{*\mathrm{op}}]$ 的左作用。

状态空间 $A_\ell(X)$ 由向量 $\omega|$ 张成，这些向量对应于词 $\omega \in \Sigma^*$。该空间是一个循环左 $R[\Sigma^{*\mathrm{op}}]$-模，初始向量为 $\varnothing|$，并带有由 α 给出的非退化迹映射。

如果 $A_\ell(X)$ 是有限生成的 R-模，则称 R-值语言 α 是可识别的。~此时，选取一个自由 R-模覆盖 $A_\ell(X) \twoheadrightarrow A_\ell(X)$，并连同循环向量 $\varnothing|$ 的一个提升，就得到一个以 Σ 为底、对应于 R-值语言 α 的加权自动机。关于加权自动机的详细内容，请参阅 [BR11，第 1 节6] 和 [DKV09]。

当 $R = \mathbb{B} := \{0, 1 | 1 + 1 = 1\}$ 为布尔半环时，可以从状态空间 $A_\ell(X)$ 中恢复非确定有限状态自动机和确定有限状态自动机（FSA），见 [IK22b]。语言 $L = \alpha^{-1}(1)$ 的最小确定有限状态自动机由纯态的子集 $Q \subset A_\ell(X)$ 给出，其形式为 $\omega|$，其中 $\omega \in \Sigma^*$，而不是它们的布尔组合。最小非确定有限状态自动机则通过取 $A_\ell(X)$ 的最小自由 $\mathbb{B}$-模覆盖，并将 Σ 的作用及循环向量提升到这些覆盖上得到。

更一般地，当 R 是交换半环时，状态空间 $A_\ell(X)$ 可以从单个对象 X 扩展到由一维 Σ-装饰配边构成的整个刚性对称幺半范畴。此扩展还需要选取一个取值于圆的 R级数$\alpha_\circ$，用于计算由来自 Σ的字母项链装饰的圆，见 [IK22b、Kho20a]。原级数 α 计算由来自 Σ的字母链装饰的区间。此扩展仅适用于交换 R，因为区间与圆构成了一维配边范畴中单位对象自同态的生成元，且彼此交换（可以相互越过）。对于非交换 R，似乎只能采用上述非幺半构造。

在 [IK22b] 中，泛构造是在带缺陷的一维协边的幺半范畴上进行的，而 α 的数据需要额外的圆形级数，并且同样构造出一个幺半范畴。像上文那样在非幺半情形下进行构造，只需要非交换幂级数；在特殊情形 $R = \mathbb{B}$ 下，它还原为熟悉的非确定性自动机概念，但不会得到一个幺半范畴。它适用于任意非交换半环 R，而幺半情形则要求 R 是交换的。

3. Brauer envelopes of categories

3.1. 范畴的 Brauer 包络。从一个小范畴 C 出发，其中对象构成一个集合，我们构造一个刚性对称范畴 B(C)，并称之为 C 的 Brauer 包络。其思路是从定向一维流形入手，将其视为定向零维流形之间的配边；用 C 中的对象装饰零维流形，用 C 中的态射装饰一维流形。这还要求允许一维流形上带有以 C 中对象为标记的点（零维缺陷），而这些缺陷之间的区间则以态射标记，并满足相容的

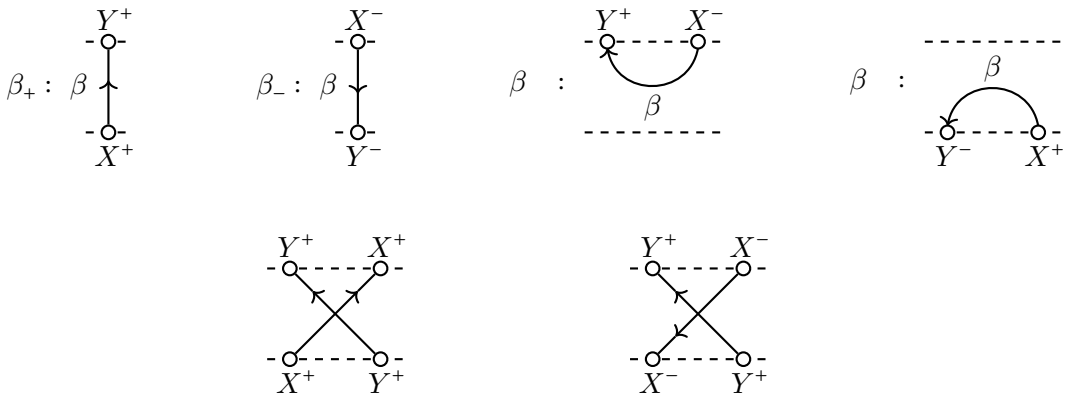


FIGURE 3.1.1. 上排：与 $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 相关联的 B(C) 中的态射。下排：四个换位态射中的两个。

方式。对于两侧都带有态射的此类缺陷，可以将其消去，并以这两个态射的复合替代。该构造还会产生以 C 中对象的自同态标记的环（圆），并对其取适当的等价关系。

更仔细地说，B(C) 的对象是由对 $X_i^{\varepsilon_i} = (X_i, \varepsilon_i)$ 构成的有限序列 $X = (X_1^{\varepsilon_1}, \ldots, X_n^{\varepsilon_n})$，其中每一对为（C 的对象，符号），而符号 $\varepsilon_i \in \{+,-\}$ 被视为一个点的定向。空序列 $\varnothing_0$ 是 B(C) 的单位对象。范畴 B(C) 是刚性对称幺半的，具有如下生成态射：

- 对于每个态射 $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$，有态射

$$\beta_+ : X^+ \longrightarrow Y^+, \quad \beta_- : Y^- \longrightarrow X^-, \quad \beta \quad : X^+ \otimes X^- \longrightarrow \varnothing_0, \quad \beta \quad : \varnothing_0 \longrightarrow X^- \otimes X^+,$$

- 换位态射

$$X^{\varepsilon_1} \otimes Y^{\varepsilon_2} \longrightarrow Y^{\varepsilon_2} \otimes X^{\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+,-\},$$

见图 3.1.1。我们隐含地假定，换位态射图中的两个区间分别携带 X 和 Y 的恒等态射。然后，我们如图 3.1.2 所示，为相反取向定义杯与帽态射。

这些生成态射的幺半复合会得到由定向弧和圆（定向一维配边）构成的图，其中顶点标记为 $\mathcal{C}$ 中的对象，定向边则标记为 $\mathcal{C}$ 中的态射，方向从边的源顶点指向目标顶点。图可以利用 $\mathcal{C}$中的复合进行化简：一对可复合的态射$\beta : X \longrightarrow Y$, $\gamma : Y \longrightarrow Z$ 对应于一个带标记一维流形，其内部顶点标记为 Y，如图 3.1.3 所示，以及一个态射 $X_+ \longrightarrow Z_+$。我们施加化简关系，允许删除该顶点，并将这对边替换为一条标记为复合 $\gamma\beta$的边；相反取向的情形也同样如此。

对于杯与帽附近的顶点，也采用了类似的简化，示例见图 3.1.4 。由恒等态射标记的区间可以擦除，见左侧的图 3.1.5 。右侧的图 3.1.5 展示了一个刚性同构，其中的杯与帽由恒等态射标记。

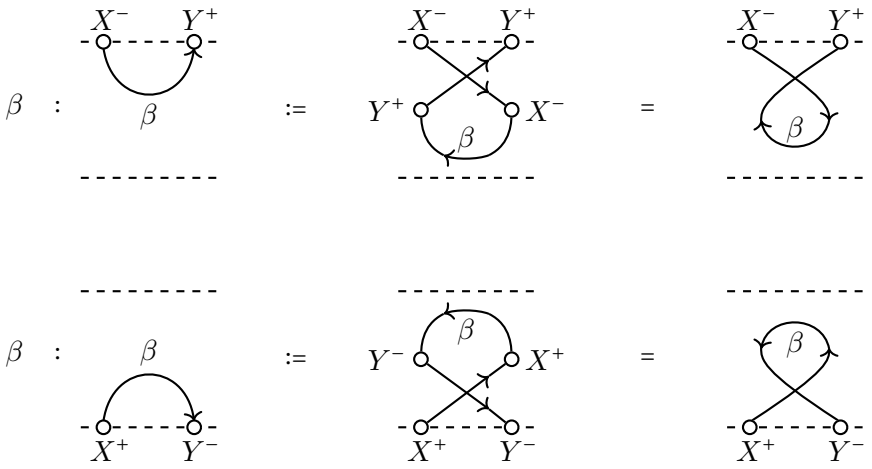


FIGURE 3.1.2. 相反取向下的杯与帽态射。这些定义（或关系）也可以通过反向解读等式来理解为消去弯曲。

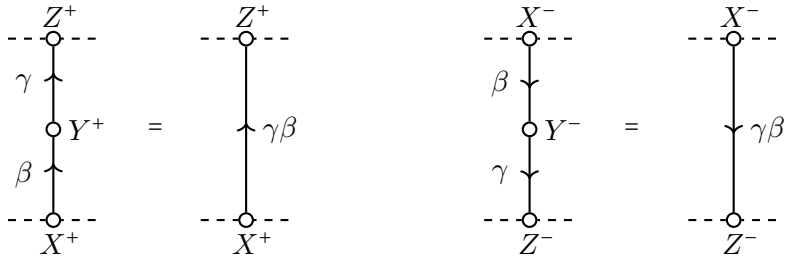


FIGURE 3.1.3. 抹去一个内部顶点，并用态射的复合标记区间。

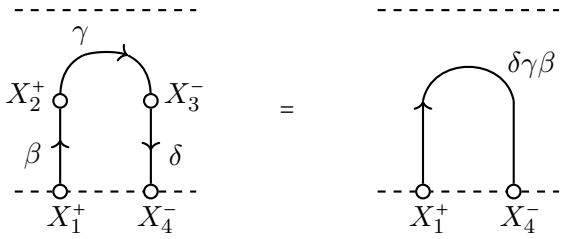


FIGURE 3.1.4. 将帽与竖直区间态射复合。

我们施加如下关系：换位态射与恒等杯与帽态射 $\mathrm{id}_{X,}$ ， $\mathrm{id}_{X,}$ 以及 $\mathrm{id}_{X,}$ ， $\mathrm{id}_{X,}$ 使 B(C) 成为刚性对称幺半范畴。特别是，这意味着所有交点都是“虚拟的”，直线和圆可以自由地彼此滑过，也可以滑过其他由 C 中对象标记的直线和圆上的点（缺陷），并且图的所有“同伦变形”都被允许。

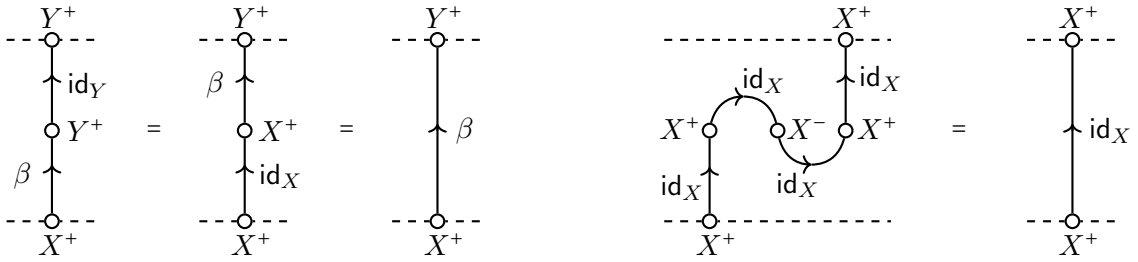


FIGURE 3.1.5. 左：与一个带恒等标记的区间复合。右：刚性（同伦）关系。

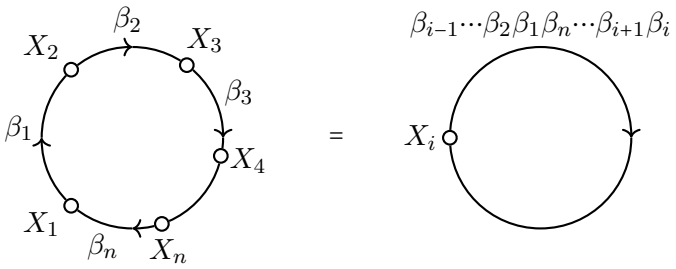


FIGURE 3.1.6. B(C) 中的一般环。

命题 3.1。范畴 B(C) 是一个严格刚性对称幺半范畴，并且将 C 作为子范畴包含其中。自然包含函子 $\iota_{\mathcal{C}}$: C Ð→B(C) 对于从 C 到严格刚性对称幺半范畴的函子而言具有泛性质。

证明。忠实函子 $\iota_{\mathcal{C}}$: C Ð→ B(C) 将 X ∈Ob(C) 中的对象映射为 X^+ B(C) 中的对象，并将 C 中的态射 β 映射为 B(C) 中的态射 β_+。从 F : C Ð→D 到严格刚性对称幺半范畴 D 的函子，具有唯一且典范的延拓，可成为刚性对称幺半函子 B(F) : B(C) Ð→ D。□

考虑 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$中的环。这些是单位对象 $\mathbf{1}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ 中的自同态，由一个圆表示，圆上按定向方向依次放置有限个对象 $X_1,\ldots,X_n \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$，并在边上放置态射 $\beta_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$，$X_{n+1} = X_1$，见图 3.1.6。将圆上除一个顶点外的所有顶点都去掉后，就得到一个对象 $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ 及其自同态 $\beta : X \longrightarrow X$。

对于上述小范畴 C，将 C 的环集 L(C) 定义为以下等价关系下的配对 (X,β) 的等价类集合，其中 $\beta \in \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X)$

$$(X,\gamma\beta) \sim (Y,\beta\gamma), \quad \text{for } \beta : X \longrightarrow Y, \quad \gamma : Y \longrightarrow X \tag{3.1}$$

如图 3.1.7所述。这些等价类对应于 $\mathsf{End}^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(\mathbf{1})$中的圆的等价类，它们是后一个交换幺半群的生成元。

注记 3.2. 集合 $L(\mathcal{C})$ 可以视为范畴 C的迹，参见 [BPW19] 中的公式 (1.1)。它类似于幺半范畴中的 竖直迹，参见 [GHW22]，节

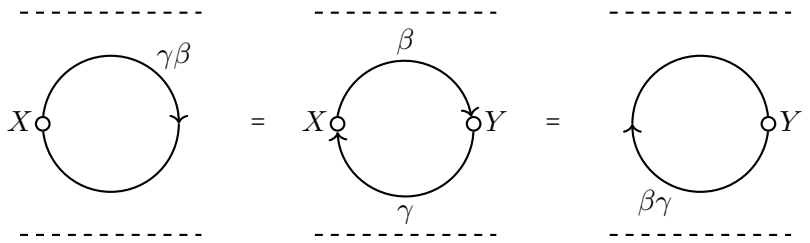


FIGURE 3.1.7. 以两种不同方式将含有两个对象的环简化为单个对象及其自同态。

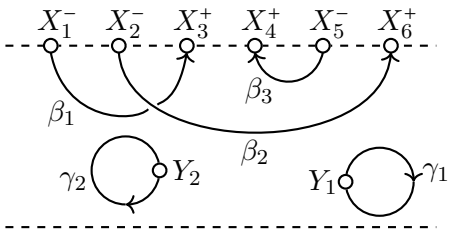


FIGURE 3.1.8. B(C) 中从 1 到 $X_1^- \otimes X_2^- \otimes X_3^+ \otimes X_4^+ \otimes X_5^- \otimes X_6^+$ 的一个态射示例。

5.5] 以及 [BGHL14、BHLv17、EL16]。它也可以定义为余端：

$$L(\mathcal{C}) = \int^{C} \mathsf{Hom}(C, C),$$

参见 [Lor21]。

命题 3.3。B(C) 中单位对象的自同态环 $\mathsf{End}^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(1)$ 是由集合 L(C) 中的生成元生成的自由交换幺半群。1 的自同态的复合对应于带标记圆的不交并，而空图对应于 $\mathsf{End}^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(1)$ 中的恒等自同态。

更一般地，我们可以描述 B(C) 中任意对象之间的态射 $\mathsf{Hom}^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(\underline{X}, \underline{Y})$。利用刚性结构，只需描述任意序列 $\underline{X}$对应的 $\mathsf{Hom}^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(1, X)$。这些 Hom 与以下三元组之间存在双射：

- 对序列 $\underline{X}$ 中的元素进行反号配对，
- 每对中的 − 对象到 + 对象的 C 中的态射，
- B(C) 中 1 的自同态。

图 3.1.8 展示了此类态射的一个示例。一般而言，$\mathcal{B}(\mathcal{C})$ 中的态射是由互不相交的弧与圆圈构成的集合。弧构成态射的源对象与目标对象的张量积中各项的保向匹配，每条弧都指定一个 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$中的态射，而圆圈是 $\mathcal{C}$中的环。

庞加莱对偶描述。布劳尔范畴 B(C) 也可以通过庞加莱对偶图示来描述，此时对象对应弧，态射对应点（位于直线和圆上的缺陷）。从 B(C) 中一个态射的表示开始，在

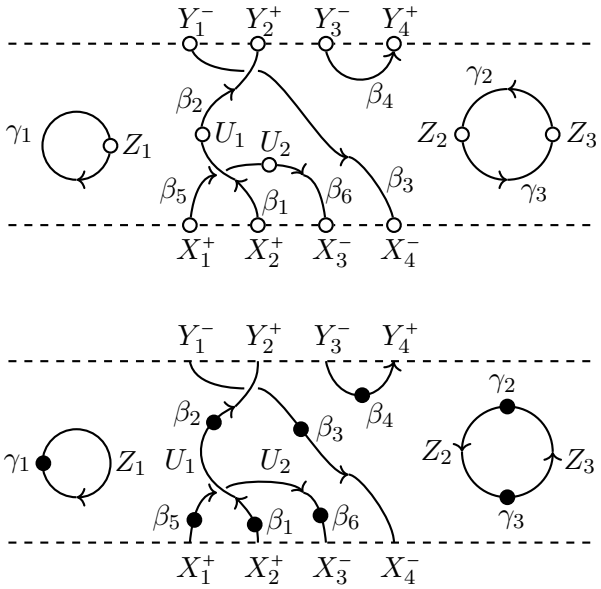


FIGURE 3.1.9. B(C) 中的一个态射（上方）及其庞加莱对偶表示（下方），其中对象现在对应于弧，态射对应于直线和圆上的缺陷。

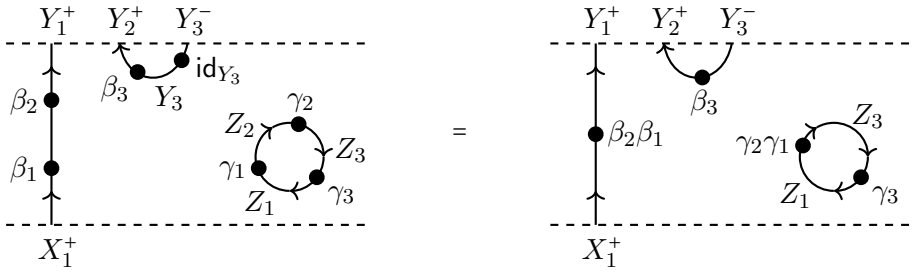


FIGURE 3.1.10. B(C) 中一个态射及其约化的图。还可以进一步约化为圆上的一个点和一个区间，分别标记为 $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$ 和 Z_1。

每个区间的中点放置一个点，并用相应的态射标记。然后擦去配边中原有的端点顶点和内部的点。同一个一维流形的这一庞加莱对偶分解中的区间由 $\mathcal{C}$ 中的对象标记。图展示了一个态射及其庞加莱对偶表示，见图 3.1.9。

区间或圆上相邻的点可以合并为态射的复合，见图 3.1.10。

标记为恒等态射的点可以擦去。按照这一约定，标记为对象 X 的无点圆表示 C 中的环 (X, id_X)。

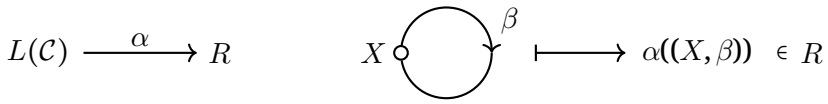


FIGURE 3.2.1. 从 C 到交换半环的求值映射所对应的环。

注 3.4. 这种庞加莱对偶描述正是论文 [Kho20a、IK22b、IK21] 中采用的描述，其中 $\mathcal{C}$ 只有一个对象，其自同态幺半群是由有限集 Σ*自由生成的幺半群 Σ。此时，$\mathcal{C}$ 中的态射都可以唯一地写成 Σ中生成态射的乘积。在这些论文中，直线和圆上的点标记为 Σ中的元素，因此每条直线都携带一个态射，即相应元素 Σ的乘积；每个圆则携带 $\mathcal{C}$中的一个环，也就是自由幺半群 Σ^* 中一个在旋转等价意义下的元素。

注 3.5. 在构造布劳尔包络时，我们只需添加所有对象的对偶，并允许“弯折”态射，从而形成 $\mathcal{C}$ 的刚性对称幺半闭包。文献 [CSvdB21], 探讨了一个更微妙的问题：作者从一个幺半（不一定是对称）范畴出发，研究如何对其中一个或多个对象取对偶。

3.2 布劳尔包络的泛构造。为了对刚性张量范畴 B(C) 进行泛构造，我们选取一个交换半环 R 以及一个乘性求值

$$\alpha : \mathsf{End}_{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}) \longrightarrow R. \tag{3.2}$$

这些求值与集合映射之间存在双射

$$\alpha : L(\mathcal{C}) \longrightarrow R, \tag{3.3}$$

其中，我们指定 R 中每个环所对应的元素$\mathcal{C}$ (即$\mathcal{C}$中每个带标记圆的等价类所对应的元素), 然后将其乘法扩张为（3.2）中从自由幺半群到 R的同态。见图3.2.1。

求值 α 使得可以在$\mathcal{B}(\mathcal{C})$上进行泛构造。首先取 R线性组合，组合对象为$\mathcal{B}(\mathcal{C})$ 中的态射，从而得到范畴 $R\mathcal{B}(\mathcal{C})$。然后对等价关系取商，见第**IV** 种情形（第2.1 节及（2.15））。所得范畴记为$\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C})$，它是一个刚性对称幺半 R线性范畴，其对象与$\mathcal{B}(\mathcal{C})$相同。

因此，我们得到由四个范畴和三个函子构成的图：

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{C}}} \mathcal{B}(\mathcal{C}) \longrightarrow R\mathcal{B}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}), \tag{3.4}$$

其中第二、第三和第四个范畴是刚性对称幺半范畴，第三和第四个范畴还具有 R-线性结构。

函子性。给定一个函子 $\mathsf{F} : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$, ，存在一个诱导的刚性对称幺半函子 $\mathsf{B}(\mathsf{F}) : \mathsf{B}(\mathsf{C}_1) \to \mathsf{B}(\mathsf{C}_2)$。范畴 C_2 的一个 R-求值 $\alpha : L(\mathsf{C}_2) \to R$ 会诱导出求值 $\alpha_{\mathcal{F}} : L(\mathsf{C}_1) \to R$，其定义是将 α 与 F 作用于 C_1中的环复合。于是函子 F 诱导出一个 R-线性刚性对称函子，可记为

$$\mathcal{F}_\alpha : \mathcal{B}_{\alpha_{\mathcal{F}}}(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}_2).$$

例子。作为一个特例，设 C 是一个只有一个对象和一个态射（恒等态射）的范畴。那么 B(C) 就是定向0维流形之间的定向一维余边界范畴（其对象由符号序列枚举）。这种情况下的布劳尔范畴

由选取 $\lambda \in R$ （假设 R 是一个域，或至少是一个交换环），并将圆赋值为 λ而得。所得范畴就是通常的定向布劳尔范畴，参见 [Rey15]。

通过泛构造得到的定向布劳尔范畴的商范畴 $B_\lambda(C)$，其中圆的取值为 λ，也称为布劳尔范畴的可忽略商。

补充说明上文的注 3.4：如果 C 只有一个对象，Ob(C) =$\{X\}$，那么范畴 C 可由自同态环 M =$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ （即 X 的自同态）描述。为了与 [Kho20a 、 IK22b 、 IK21], 的构造相对应，我们考虑 B(C) 的庞加莱对偶表示。B(C) 中态射的所有区间都标记为同一个对象，因此可以省略这些标记。点（缺陷）由 M 的元素标记。如果 $\{m_i\}_{i\in I}$ 是 M 的生成元，那么可以将点的标记简化为 m_i，并满足 M 中成立的任意关系。恒等态射不带标记，也不需要点。

此外，如果 $M \cong \Sigma^*$ 是集合 Σ上的自由幺半群，那么点由 Σ中的元素装饰，点的连接不满足任何关系。

- 当 R 是一个域时，相应的范畴被视为 [Kho20a 的第 2 节4]（进一步对 $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C})$ 取 Karoubi 闭包，另见 [KS20]），作为带缺陷的圆的域值求值的泛构造。当配边可以具有内点时，这个范畴（及其推广，见第 3.3 节）还在 [IK21], 中结合 R 域进行了进一步研究。特别地，在这种情况下，有理求值 α 会导出一个对称 Frobenius 代数，以及一个限制在薄平坦曲面上的二维拓扑量子场论。

- 在 [IK22b] 中，作者考察了 $R = \mathbb{B} = \{0, 1 | 1 + 1 = 1\}$ 为布尔半环的情形，并分别选取由 Σ中字母构成的词和循环词所装饰的区间与圆的求值。这由一个正则语言 $L\mathrm{I} \subset \Sigma^*$ 和一个正则循环语言 $L\bigcirc$ 给出。当语言 $L\mathrm{I}$ 为空时，该构造的一个特殊情形通过循环语言 $L\bigcirc$ 对上述布劳尔范畴进行插值，并产生一个具有有限维态射空间的 $\mathbb{B}$-线性刚性对称幺半范畴，见 [IK22b]。对于任意更一般的正则 $L\mathrm{I}$，另见第 3.3 节公式 (3.9) 后的注释。

3.3. 带边界的布劳尔包络。范畴 C 的左理想 I 是 C 中在与 C 中的态射作左复合运算下封闭的态射集合：

$$f \in \mathcal{I},\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \ \Rightarrow\ gf \in \mathcal{I}. \tag{3.5}$$

小范畴 C 中左理想的一个例子是：取 C 的对象集合 U，并定义该理想由 C 中所有源对象属于 U 的态射组成。将此理想记为

$$\mathcal{I}^0_{\mathcal{U}} := \bigcup_{X\in\mathcal{U}, Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y). \tag{3.6}$$

同样，范畴 C 的右理想 I 是 C 中在与 C 中的态射进行右复合下封闭的态射集合：

$$f \in \mathcal{I}, \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \ \Rightarrow\ fg \in \mathcal{I}. \tag{3.7}$$

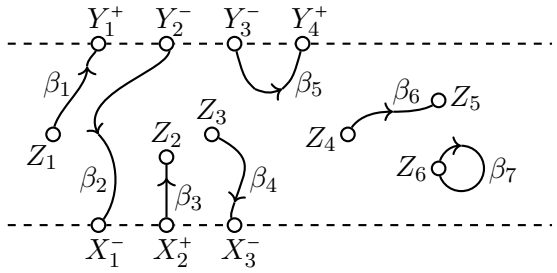


FIGURE 3.3.1. 态射 $\beta_1, \beta_4 \in \mathrm{I}^0$, $\beta_3 \in \mathrm{I}^1$, 和 $\beta_6 \in \mathrm{I}^0 \cap \mathrm{I}^1$。

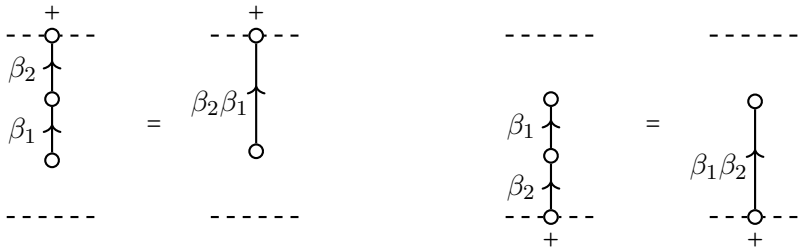


FIGURE 3.3.2. 左: $\beta_1 \in \mathrm{I}^0$。右: $\beta_1 \in \mathrm{I}^1$。

取 C 的对象集合 U，并将右理想定义为由所有源对象属于 C 的对象的态射组成:

$$\mathcal{I}^1_{\mathcal{U}} := \bigcup_{X \in \mathcal{U}, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X). \tag{3.8}$$

设有一个小范畴 C，其左理想为 I^0，右理想为 I^1。按如下方式定义幺半范畴 B = B(C, I^0,I^1)。它具有与 B(C) 相同的对象。B(C) 中的态射及其图示通过允许一维协边在中间终止而得到扩展（即具有不对应于态射的源对象或目标对象中的项的边界点）。这些端点称为协边的内部端点、松端点或边界。在一个“入”内部边界点处的区间标记为右理想 I^1, 中的一个态射; 在一个“出”内部边界点处的区间则标记为左理想 I^0, 中的一个态射。见图 3.3.1。

态射的复合规则从 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ 扩展到 $\mathcal{B}$，如图 3.3.2所示。一个配边的端点可以任意弯曲，从而在 $\mathcal{B}$上赋予刚性结构。与范畴 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$一样，交点是虚拟的，内部端点可以滑过交点。

命题 3.6。对于小范畴 C 及其中如上所述的左理想和右理想 I^0,I^1，范畴 B(C) = B(C, I^0,I^1) 是严格刚性对称幺半范畴，并包含 C 作为子范畴。单位对象的自同态幺半群 $\mathrm{End}^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(\mathbf{1})$ 是由不交并上的元素生成的自由交换幺半群

$$L(\mathcal{C}) \sqcup (\mathcal{I}^0 \cap \mathcal{I}^1)$$

集合 C 中的环以及两个理想交集 $\mathrm{I}^0 \cap \mathrm{I}^1$ 中的元素集合 *ls.*

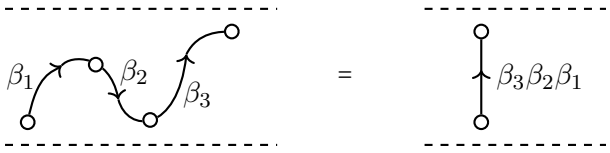


FIGURE 3.3.3. 任意浮动区间的约化。态射的乘积属于两个理想的交集 $\mathbf{I}^0 \cap \mathbf{I}^1$，因为 $\beta_1 \in \mathbf{I}^0$ 和 $\beta_3 \in \mathbf{I}^1$。

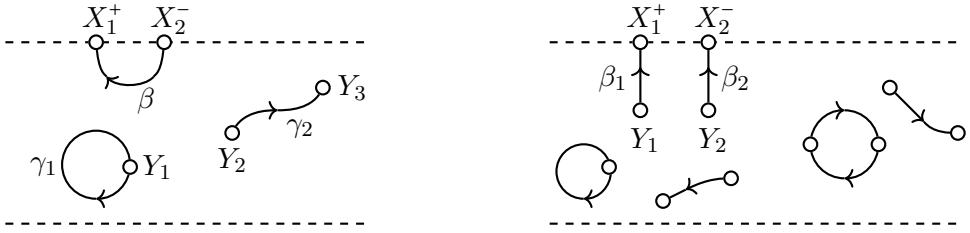


FIGURE 3.3.4. 从空序列到（X_1^+，X_2^-）的两类态射。第一类中，一条弧连接上边界处的两个端点。第二类中，每个端点都界定一个半区间。对于第二类态射，由浮动分支的并集给出的 1 的相应自同态环以示意图表示为定向区间与圆的集合。

事实上，浮动区间与 $\mathcal{C}$ 中的环自由生成 自同态环$^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(\mathbf{1})$。浮动区间的等价类由 $\mathcal{I}^0 \cap \mathcal{I}^1$ 中的态射参数化。图 3.3.3 展示了如何将任意区间约化为相应的态射。

例 3.7。从 $\varnothing_0$ 到序列 （X_1^+，X_2^-）的态射，其中 X_1，$X_2 \in \mathsf{Ob}$（$\mathcal{C}$），分为两类，如图 3.3.4所示：

- 一条从 X_2 到 X_1 的弧，由态射 $\beta : X_2 \to X_1$ 以及 B(C)(1) 自同态环中的一个元素标记（这要求存在这样的态射 β），
- 端点位于 X_1^+, X_2^-的半区间，由态射 $\beta_1 \in \mathbf{I}^0, \beta_2 \in \mathbf{I}^1$ 标记，其中$\beta_1 : Y_1 \to X_1$, $\beta_2 : X_2 \to Y_2$，对于某些 Y_1, Y_2，并带有 B(C)(1) 自同态环中的一个元素（如果存在这样的态射）。

要对 B(C) 进行泛构造，求值 $\alpha : \mathsf{End}^{\mathcal{B}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}) \to R$ 由一个集合映射确定

$$\alpha : L(\mathcal{C}) \sqcup (\mathcal{I}^0 \cap \mathcal{I}^1) \longrightarrow R.$$

每个这样的 α 都会产生一个 R-线性刚性对称幺半范畴 B_α(C) $= \mathrm{B}_\alpha(\mathrm{C}, \mathbf{I}^0, \mathbf{I}^1)$，其满足

$$\mathsf{End}_{\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C})}(\mathbf{1}) = R,$$

也就是说, 单位对象的自同态构成底交换半环 R .

范畴 $\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathcal{I}^0, \mathcal{I}^1)$ 和 $\mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{C}, \mathcal{I}^0, \mathcal{I}^1)$ 可称为 车 rook 布劳尔范畴，类比于 车 Brauer 代数 [Hd14]。

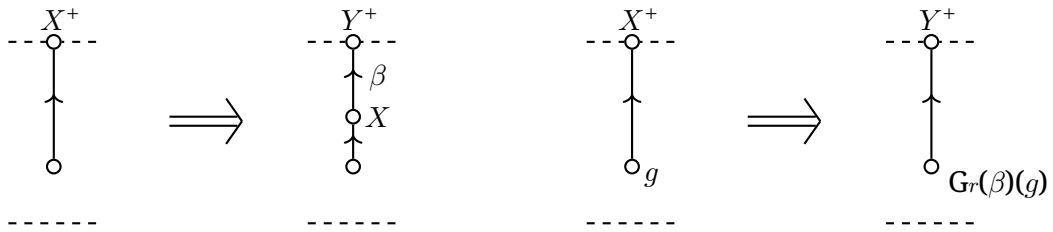


FIGURE 3.4.1. 将一个态射应用于半区间。

插值范畴 $B_\alpha(C, I^0, I^1)$ 的特殊情形已在 [Kho20a、IK22b、IK21] 中研究过。在这些论文中，C 只有一个对象 X，且其自同态环 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) \cong \Sigma^*$ 是有限集 Σ 上的自由幺半群，其元素称为字母。集合 I^0 和 I^1 由 C 中的所有态射构成，并且都由 Σ^* 的元素参数化，也就是说，由 Σ 中的词参数化。环的集合 $L(C)$ 由循环词 $\Sigma^\circ = \Sigma^*/\sim$ 参数化，这些循环词是词在旋转下的等价类，也就是说，$\omega_1\omega_2 \sim \omega_2\omega_1$，对于 ω_1、$\omega_2 \in \Sigma^*$。求值 α 是一个集合映射

$$\Sigma^* \sqcup \Sigma^\circ \longrightarrow R,$$

并且可以通过两个映射来表示：

$$\alpha_| : \Sigma^* \longrightarrow R, \quad \alpha_\circ : \Sigma^\circ \longrightarrow R, \tag{3.9}$$

也就是说，表示为 一个赋值 $\alpha_|(\omega) \in R$ 对每个词 ω，以及 $\alpha_\circ(\omega) \in R$ 对每个循环词 ω .

- 在 [Kho20a] 和 [IK21], 环 R 是一个域 k 和 α_I，$\alpha_\circ$ 是非交换幂级数，其变量集合为 $\Sigma_\circ$ 定向0维流形的态空间是k-向量空间，当且仅当 α_I，$\alpha_\circ$ 是有理的幂级数。关于非交换有理幂级数的更多内容，参见[BR11、RRV99]及其中的参考文献。

- 在 [IK22b] R 中，布尔半环为 $\mathbb{B} = \{0, 1 | 1 + 1 = 1\}$，求值 αI $\alpha\bigcirc$ 由子集 $\alpha^{-1}I(1) \subset \Sigma^*$ 和 $\alpha^{-1}\bigcirc(1) \subset \Sigma\bigcirc$ 分别确定，也称为语言 $LI^L\bigcirc$。当且仅当两个语言 $LI^L\bigcirc$ 都是有理的时，定向0维流形的态空间是有限的（等价地，是有限秩 $\mathbb{B}$-模）。如果一种语言可以用正则表达式描述，或者等价地，是由有限状态自动机接受的语言，则称其为有理语言。[IK22b], 探讨了泛构造与自动机之间的联系，而将一维缺陷拓扑量子场论赋予非确定性自动机的做法见 [GIK+23]。

3.4. 集合预层与内部端点。 对于底层范畴 $\mathcal{C}$ 的区间内部（浮动）端点，可以采用如下更一般的设置。不指定内部端点处应放置什么数据，而是考虑一个顶端带有 + 边界端点（以及另一个内部端点）的半区间。边界端点由某个对象标记 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。一个态射 $\beta : X \longrightarrow Y$ 可在 $\mathcal{C}$ 中作用于边界，从而产生另一个半区间，见图3.4.1。

这些应用（映射）必须与 C 中态射的复合相容。因此，对于每个对象 X，都有一个由所有可能的半区间组成的集合，这些半区间的边界上带有 X 标签；而对于 C 中的每个态射，都有一个在这些集合之间的映射，并满足通常的相容性条件。

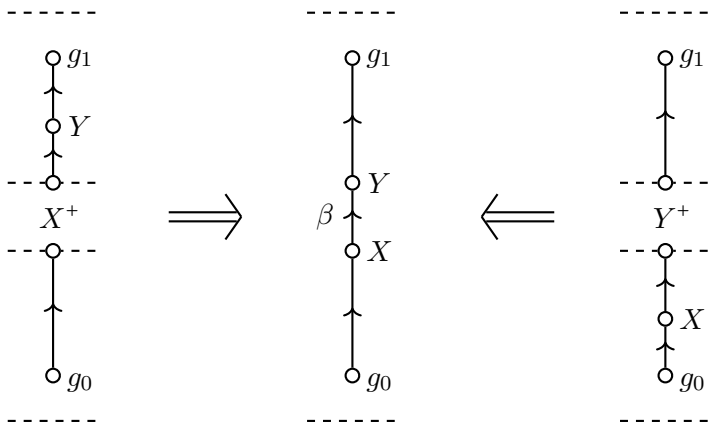


FIGURE 3.4.2. 将同一个浮动区间用两种方式由两个半区间粘合而成，分别在 X^+ 或 Y^+处粘合。

我们可以将这一设定描述为一个协变函子

$$\mathcal{G}_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Sets} \tag{3.10}$$

从$\mathcal{C}$ 到集合范畴。接着，对于上述一个在边界处带有 X 的半区间，我们可以赋予集合 g 中的一个元素 $\mathcal{G}_r(X)$ (从而为该半区间赋予装饰)，而与区间 β 拼接后得到元素 $\mathcal{G}_r(\beta)(g)$，见右侧图 3.4.1 。

反转定向，并考察边界处带有 X、定向相反的半区间及其通过 C 中的态射产生的相互作用，所得数据可以描述为一个从 C 到集合范畴的逆变函子：

$$\mathcal{G}_\ell : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathsf{Sets}. \tag{3.11}$$

这样的函子 G_ℓ 对应于 C 上的一个集合预层。同样，C 上集合预层之上的函子 G_r 也可以称为 C 上的集合预余层。

复合两个半区间会得到一个浮动区间。为了诠释这一复合，构造商集

$$\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r := \bigsqcup_{X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{G}_\ell(X) \times \mathcal{G}_r(X) / \sim, \tag{3.12}$$

其等价关系由以下内容生成：

$$(g_\ell \beta, g_r) \sim (g_\ell, \beta g_r),\ X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}),\ \beta \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),\ g_\ell \in \mathcal{G}_\ell(Y),\ g_r \in \mathcal{G}_r(X).$$

这一等价关系以图示形式呈现在图 3.4.2中。因此，诠释端点所需的一般数据，是在 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$（函子 $\mathcal{G}_\ell$ 和 $\mathcal{G}_r$如上所述）。

命题 3.8. 每个如上所述的数据 (C,G_ℓ, G_r) 都会导出一个刚性对称幺半范畴 $\mathsf{B}^!$(C) := B(C,G_ℓ, G_r)。在此范畴中，单位对象的自同态幺半群 End(1) 是由以下集合自由生成的交换幺半群

$$L(\mathcal{C}) \sqcup (\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r).$$

注意，End(1) 由 C 中的环和浮动区间自由生成，后者由 $G_\ell \times_{\mathcal{C}} G_r$ 中的元素参数化。范畴 $B^!(C)$ 的一个 R-值求值函数 α 由如下集合映射给出

$$\alpha : L(\mathcal{C}) \sqcup (\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r) \longrightarrow R. \tag{3.13}$$

每个这样的赋值 都会产生一个 R-线性的刚性对称幺半范畴，记作 $B^!_\alpha(C)$.

作为一个特例，可以分别取 $\mathcal{G}_r$ 和 $\mathcal{G}_\ell$ 为左理想 $\mathcal{I}^0$，和右理想 $\mathcal{I}^1$ （分别）$\mathcal{C}$中的理想，从而恢复第 3.3 节中的设置。更具体地说，左理想 $\mathcal{I}^0$定义了一个协变函子

$$\mathcal{G}(\mathcal{I}^0) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Sets}$$

该函子将对象 X of C 赋予所有 $f \in I^0$, $f \in \mathrm{Hom}(Y, X)$，其中 $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ 中的某个对象。函子 $G(I^0)$ 在态射上的定义通过复合给出。于是我们可以取 $G_r = G(I^0)$。注意左与右之间的转换：左理想 I^0 产生函子 G_r，它在纤维积 $G_\ell \times_{\mathcal{C}} G_r$中出现在右侧。

同样，右理想 I^1 定义了一个函子 $G(I^1) : C^{op} \to$ 集合，我们可以令 $G_\ell = G(I^1)$。再次注意，从右理想到函子 G_ℓ存在一个转换；该函子在纤维积 $G_\ell \times_{\mathcal{C}} G_r$中出现在左侧。

非幺半情形。 非幺半范畴的泛构造 $\mathcal{C}$ 在第 2.2节中的内容可按如下方式扩展到这一设置。首先取一个小范畴 $\mathcal{C}$，选取一个集合预层 $\mathcal{G}_\ell$ 在 $\mathcal{C}$上的，见（3.11），以及一个集合预层 $\mathcal{G}_r$ 在 $\mathcal{C}^{op}$上的，见（3.10）。选取一个半环 R，它不必是交换的。考虑集合 $\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r$ ，并选取一个集合映射

$$\alpha \ : \ \mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r \longrightarrow R. \tag{3.14}$$

第2.2 节中的构造可以扩展到这一设置。对于对象 $X \in$Ob(C)，定义 $Fr_r(X)$ 为以 $G_r(X)$ 为基的自由右 R-模，并定义 $Fr_\ell(X)$ 为以 $G_\ell(X)$ 为基的自由左 R-模。记 $[g]$ 为与 $G_r(X)$ 或 $G_\ell(X)$ 中元素 g 对应的基元素。这些模的元素可分别写成 $\sum_i [g_{r,i}]a_i$, $g_{r,i} \in G_r(X)$ $a_i \in R$ 和 $\sum_j b_j[g_{\ell,j}]$, $g_{\ell,j} \in G_\ell(X)$ $b_j \in R$。映射 α定义了一个 R-双线性配对

$$(\ ,\ )_N \ : \ \mathrm{Fr}_\ell(X) \times \mathrm{Fr}_r(X) \longrightarrow R, \quad \text{where} \quad ([g_r], [g_\ell]) := \alpha(g_r \times g_\ell). \tag{3.15}$$

对于任意线性组合，该映射为

$$\left(\sum_j b_j[g_{\ell,j}], \sum_i [g_{r,i}]a_i \right) = \sum_{i,j} b_j \alpha(g_{\ell,j} \times g_{r,i}) a_i. \tag{3.16}$$

然后，我们可以按照第 2.2 节中的方式，在 $Fr_\ell(X)$ 和 $Fr_r(X)$ 上定义等价关系，将与对侧自由模中的任意元素求值结果相同的元素视为等价，并得到商 R-模：右 R-模 $A_r(X) :=Fr_r(X)/\sim$，以及左 R- 模 $A_\ell(X) :=Fr_\ell(X)/\sim$。双线性配对

$$A_\ell(X) \times A_r(X) \longrightarrow R \tag{3.17}$$

是非退化的。态射 $\beta : X \to Y$ in C 诱导出 R-线性映射

$$A_r(\beta) : A_r(X) \longrightarrow A_r(Y), \quad A_\ell(\beta) : A_\ell(Y) \longrightarrow A_\ell(X). \tag{3.18}$$

这些映射在 C 中的所有态射 β 上定义了一个表示

$$A_{\alpha,r} = A_r \ : \ \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{mod}\text{-}R,$$

一个从 C 到右 R-模范畴的协变函子，以及一个表示

$$A_{\alpha,\ell} = A_\ell \ : \ \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \longrightarrow R\text{–}\mathsf{mod},$$

从 $\mathcal{C}$ 到左 R-模范畴的反变函子。这些函子应被视为非幺半群情形下泛构造的类比。命题 2.2 可扩展到如下情形。

命题 3.9。设有一个小范畴 C、函子 $\mathsf{G}_r : \mathsf{C} \not\to$ 集合、$\mathsf{G}_\ell : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \not\to$集合、一个半环 R 以及一个求值映射 $\alpha : \mathsf{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathsf{G}_r \not\to R$。如上所述的泛构造将得到

- 态空间 $A_\ell(X)$， $X \in \mathsf{Ob(C)}$，它们是左 R-模，并通过映射（3.18）组装成一个反变函子 $A_\ell : \mathsf{C}_{\mathsf{op}} \not\to R$–模。
- 态空间 $A_r(X)$， $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$，它们是右 R-模，并通过映射 (3.18)组装成一个协变函子 $A_\ell : \mathcal{C} \longrightarrow$模–$R$。

配对(3.17)是非退化的。

第 2.2 节的设定S_i， $i \in I$以及 T_j， $j \in J$在$\mathcal{C}$中选取对象集合并将函子特化为以下情形时，便可恢复

$$\mathcal{G}_r(X) := \sqcup_{i\in I}\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(S_i, X), \quad \mathcal{G}_\ell(X) := \sqcup_{j\in J}\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_j),$$

也就是说，在这些集合中，取关于 i 和 j 的可表函子的并。在这种情况下

$$\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r = \bigsqcup_{i,j} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(S_i, T_j).$$

4. Pseudocharacters and one-dimensional topological theories

4.1. 拓扑理论与拓扑量子场论：一个实现问题。设定一个交换半环 R 和一个刚性对称幺半范畴 C（为简便起见，我们仅讨论这种情形）。我们作如下区分： R 值的拓扑量子场论与 C 的 R 值拓扑理论：

- R 值的拓扑量子场论是一个对称幺半函子

$$\mathcal{F} \ : \ \mathcal{C} \longrightarrow R\text{–}\mathsf{fgpmod} \tag{4.1}$$

  从 C 到有限生成投射 R-模的范畴 R–fgpmod .
- 拓扑理论是一个松对称幺半函子

$$A_\alpha \ : \ \mathcal{C} \longrightarrow R\text{–}\mathsf{mod} \tag{4.2}$$

  通过对某个求值从 C 得到的泛构造

$$\alpha : \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \longrightarrow R$$

  (一种幺半群同态，它将自同态的复合与 R中的乘法联系起来）， 参见第2.1节。

在拓扑量子场论 F 中，存在自然同构

$$\mathcal{F}(N_0) \otimes_R \mathcal{F}(N_1) \cong \mathcal{F}(N_0 \otimes N_1), \quad N_0, N_1 \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}), \tag{4.3}$$

而在拓扑理论中，只有态射

$$A_\alpha(N_0) \otimes_R A_\alpha(N_1) \longrightarrow A_\alpha(N_0 \otimes N_1), \quad N_0, N_1 \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}), \tag{4.4}$$

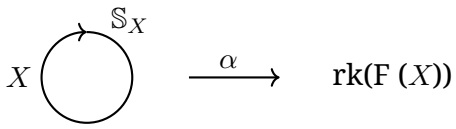


FIGURE 4.1.1. 单位元的自同态环 $\mathbb{S}_X$ （圆携带恒等自同态 id_X）及其 α-求值（投射模 F(X) 的秩）。

并满足适当的相容性条件。等价地， A_α 给出了一个松弛拓扑量子场论。请注意，在我们的方法中，态射（4.4）并非公理体系的一部分；相反，它们是由求值 α的泛构造导出的。

注 4.1。 将范畴 R–fgpmod （4.1）替换为更大的范畴 R–mod ，即所有 R-模，并不会导出任何新的函子。由于 $\mathcal{C}$ 的刚性，任何对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 必然被映射到有限生成投射 R-模，参见 [GIK+23] 。

注 4.2。更一般地，可以考虑由松弛对称幺半函子给出的弱拓扑理论，而不要求它们来自某个求值 α。这是一个更灵活的定义，但在本文中我们限制在上述更具刚性的情形。

定义 4.3. 交换半环 R 上求值 α （或拓扑理论的一种实现），是指一个以 R 为基底的拓扑量子场论 F，它在单位对象的自同态上限制为求值 α，

$$\mathcal{F}(x) = \alpha(x), \quad x \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}).$$

并非所有求值 α 都来自拓扑量子场论。例如，C 的每个对象 X 都定义了 1（由 X 标记的定向圆）的一个自同态 $\mathbb{S}_X$ ，该自同态由两个关于 X 的刚性态射复合而成，见图 4.1.1。于是 $\alpha(\mathbb{S}_X) = \mathrm{rk}(\mathrm{F}(X))$，其中 rk($P$) 是有限生成投射 R-模 P 的 Hattori–Stallings 秩，见 [GIK+23, 第 2 节1], 。另见[Hat65、Sta65、Han13、Kad99]。特别地，若 R 是域 k，且在这类自同态上的 α 取值不属于 $\mathbb{Z}_+$ 在 k 中的像，那么 α 就不可能来自 C 的任何拓扑量子场论 F。事实上，在这种情况下，对于某个 n，$\mathrm{F}(X) \cong \mathrm{k}^n$，而 $\alpha(\mathbb{S}_X) = n$，视为 k 的一个元素。

从现在起，假设 R 是一个交换环。那么对于任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{C})$，我们都可以构造反对称化算子

$$e^-_{X,n} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\ell(\sigma)} \sigma, \qquad e^-_{X,n} \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}), \tag{4.5}$$

其中 $\ell(\sigma)$ 是置换的长度 σ ，该置换属于对称群 S_n ，而元素 σ 通过置换 $X^{\otimes n}$中的项来作用。将$e^-_{X,\,n}$ 表示为一个标记为 n 的方框，其中有 n 条入边和 n 条出边，每条边都标记为 X，见图4.1.2。注意

$$e^-_{X,n} e^-_{X,n} = n! e^-_{X,n},$$

并且，如果 $n!$ 在 R 中可逆，则可以定义自同态 $\frac{1}{n!}e^-_{X,n}$ ，且它是一个幂等元。在 C 的 Karoubi 包络中，对象 $(X^{\otimes n}, \frac{1}{n!}e^-_{X,n})$ 可以解释为定义了 X 的第 n 个外幂。

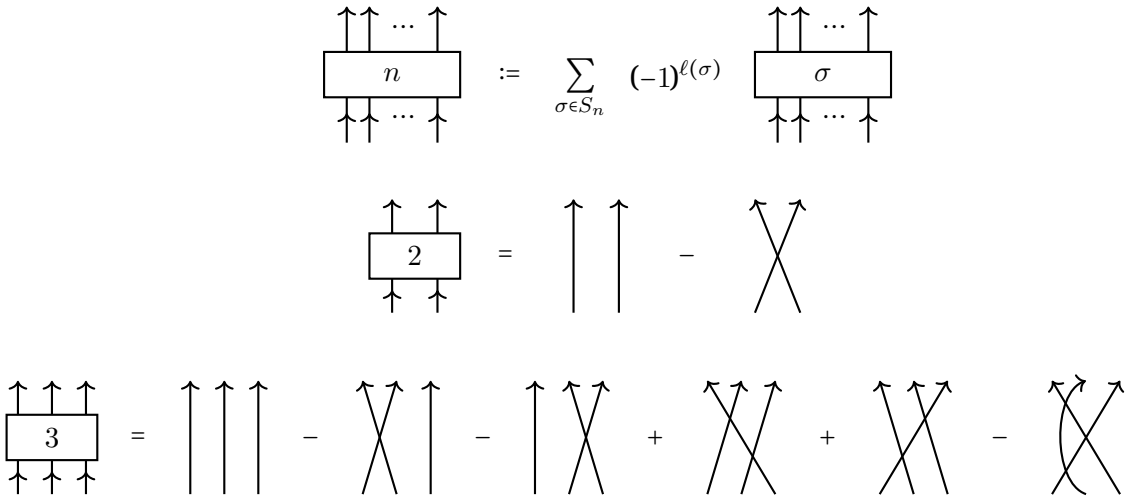


FIGURE 4.1.2. 带有 n条入边和 n条出边、且边上均标记为 X的方框，表示 $X^{\otimes n}$ 的反对称化子端同态，它等于置换 $\sigma \in S_n$的交错和。接下来的两行给出了 $n = 2$、3 的例子。

对于 C 上的拓扑量子场论 F， R-模 F (X) 是有限生成投射的，因此它是某个 n 的直和项。于是 F $(e_{X,n}^{-}) = 0$，因为 $\Lambda^{n+1}(R^n) = 0$。

若求值 α 来自一个拓扑量子场论 F，那么对于任意 X，存在 $d \geq 0$ 使得：

- 无论以何种方式将 $e_{X,\,d+1}^{-}$ 闭合成 $\mathbf{1}$ 的自同态，其求值均为 0，方法是 α，见图 4.1.3。

● α 将 e_X^{-}的某种闭合，d 求值为 R中的一个非零元素。

注意 ，$e_{X,\,0}^{-}$是 $X^{\otimes 0} = \mathbf{1}$ 的恒等自同态，并且在.....下求值得到 $1 \in R$ α.

由于 $\mathcal{C}$ 是刚性对称幺半的，$e_{X,\,n}^{-}$ 的任意闭合都可以表示为将其与某个自同态 h 复合，后者是 $X^{\otimes n}$ 的自同态，并通过 n 同心弧闭合端点，见图 4.1.3。

对于求值 α 和对象 X，若存在满足这些条件的非负整数 d，则其唯一。若存在这样的 d，我们令 $\deg_\alpha(X) = d$；否则，定义 $\deg_\alpha(X) = \infty$。随后称 $\deg_\alpha(X)$ 为求值 α 下 X 的次数。

定义 4.4。设 $\mathbb{Q}$ 是 R 的子环。求值 $\alpha : \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \to R$ 是 C 的一个伪拓扑量子场论，当且仅当对 C 的任意对象 X，$\deg_\alpha(X) < \infty$。

伪拓扑量子场论也可称为取值于 R 的 C 的伪特征标 .

定义 4.5。 拓扑量子场论 F 在（4.1）中的 特征 是由 $\alpha_{\mathcal{F}}$: 自同态环$_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \longrightarrow R$诱导的求值 $\mathcal{F}$。

或者， $\alpha_{\mathcal{F}}$ 可以称为 F 的迹。拓扑量子场论 F 的特征 $\alpha_{\mathcal{F}}$ 是一个伪拓扑量子场论。可以提出如下问题：

问题 4.6. 对幺半范畴 C 和交换环$R \supset \mathbb{Q}$ 施加什么条件时，C 上取值于 R 的任意伪拓扑量子场论都由某个 C 上的拓扑量子场论 F 的特征 $\alpha_{\mathcal{F}}$ 给出?

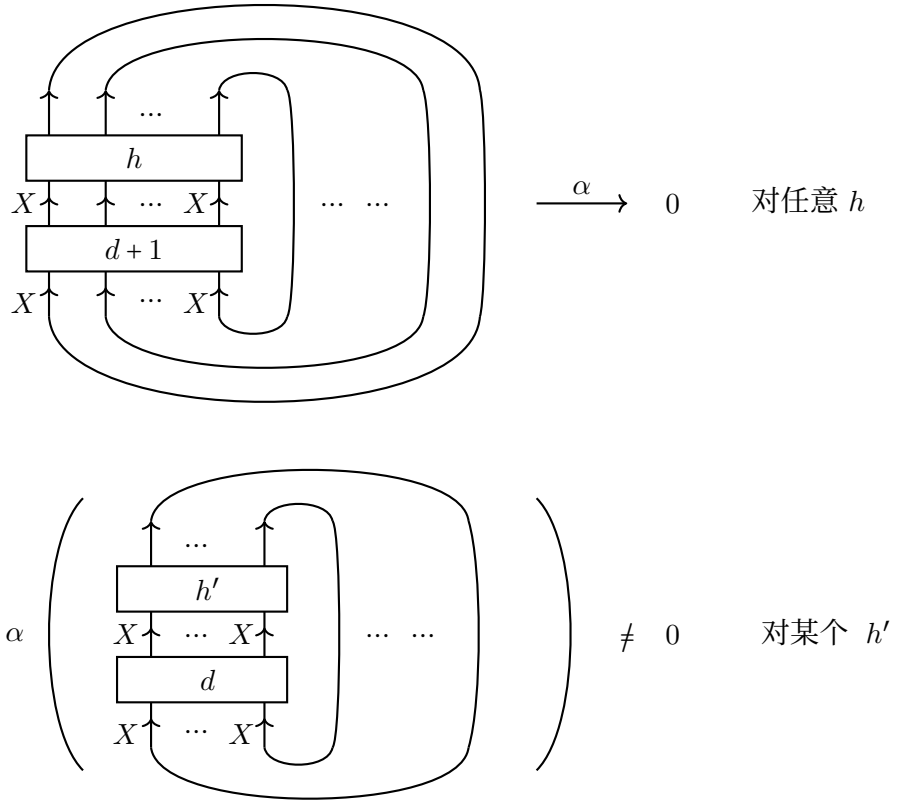


FIGURE 4.1.3. 上：$(d+1)$-反对称化算子的消失条件。该反对称化算子可以与 $X^{\otimes(d+1)}$ 的任意自同态 h 复合，并闭合成 $\mathbf{1}$ 的一个自同态。对于任意h，其求值应为 0。下： α 在 d-反对称化算子的某个闭合上应非零。若这两个条件均成立，则定义次数 $\deg_\alpha(X) = d$。



FIGURE 4.1.4. 求值 α 由其在用 $g \in G$ 装饰的圆上的取值决定，模去 G 中的共轭等价关系（点对 g,h 和 h,g 分别合并为单个点 gh 和 hg）。

为论证这些定义，首先从一个群或幺半群开始 G 并将其关联到一个单对象范畴$\mathcal{C}_G$，其对象为 X，且其自同态环$\mathcal{C}_G(X) = G$。考虑布劳尔范畴$\mathcal{B}(\mathcal{C}_G)$ 及其可能的求值 α。$\mathbf{C}$ 中的环$\mathcal{C}_G$ 由 G中的共轭类参数化。对于幺半群 G，共轭类是在由以下关系生成的关系下的等价类 $gh \sim hg$，对于 g， $h \in G$见图4.1.4。

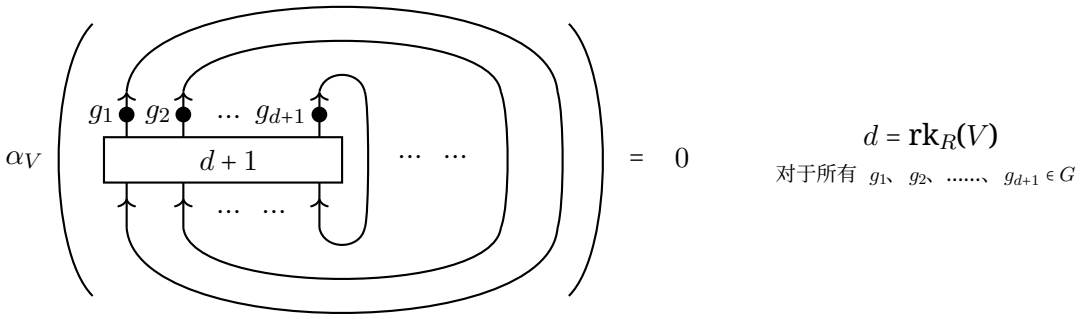


FIGURE 4.1.5. 在 C_G 的布劳尔包络中，$e^-_{X,\,d+1}$ 的任意闭合都是与 $g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_{d+1}$ 复合所给出的闭合的线性组合。

求值 $\alpha : L(\mathsf{C}_G) \to R$ 是共轭类上的任意 R-值函数。设给定了 G 在有限生成的 R-模 V 上的一个表示。求值 $\alpha_V(g) := \mathrm{tr}_V(g)$ 还具有被某个反对称化算子 $e^-_{X,\,d+1}$ 湮灭的性质，见前文。由于 C_G 的布劳尔范畴中态射的结构，该条件可以改写为

$$\mathrm{tr}_\alpha((g_1 \otimes \cdots \otimes g_{d+1})e^-_{X,d+1}) = 0, \quad \text{for each } g_1, \ldots, g_{d+1} \in G, \tag{4.6}$$

并见图 4.1.5。让我们特化到 R，使任意投射模成为自由模（例如，R 域或局部环）。那么图 4.1.5 中的条件对 $d = \mathrm{rk}_R(V)$成立。如果$\mathrm{rk}_R(V)!$ 在 R 中可逆，那么该 d 就是可能的最小值。

共轭不变函数 α 在 G 满足（4.6）对某个 d 成立时，称其为伪特征标的 G。伪特征标 d 的次数 α 是满足性质（4.6）的最小非负整数。任何 G 在有限生成 R-模上的表示的特征都是伪特征标。

注 4.7。一些这类迹的图解计算示例见图 4.1.6 和 4.1.7，其中反对称化算子方框出口处的点除一个外，均标记为 $x \in G$，剩余的点标记为 $y \in G$。一般而言，该图的计算结果为 $\alpha(P_\alpha(x)y)$，其中 $P_\alpha(Y)$ 可定义为一般$d \times d$矩阵 Y的特征多项式，且 $\alpha(Y^k) := \mathrm{tr}(Y^k)$；一般性结论参见 [Dot11，定理 2]。

Taylor [Tay91]、Rouquier [Rou96] 和 Nyssen [Nys96]（受 Wiles [Wil88] 和 Procesi [Pro76, Pro87] 早期工作的启发；另见 Carayol [Car94] 及 Mazur [Maz97，第 2 章，第 7] 节）的一项重要见解是，对于某些域和局部环 R，这些条件已经足够：任何取值于 R 的伪特征标 α 在 G 上都是某个表示 V 的迹，其中该表示是 G的表示。

命题 4.8（[Tay91, Rou96, Nys96]）。设 $R = \mathsf{k}$ 是一个可分闭域，$\alpha : G \to \mathsf{k}$ 是一个次数为 d 的伪特征标，并假设 $d!$ 在 k 中可逆。那么 α 是 G在 k 上维数为 d的一个半单表示 V 的迹（特征）。表示 V由 α 唯一确定，至多相差一个同构。

命题 4.9 ([Tay91，Rou96，Nys96])。设 R 是一个 Hensel 局部环，其剩余域 $\mathsf{k} = R/\mathfrak{m}$ 是可分闭的，并且 G 是一个幺半群。设有一个伪特征标 $\alpha : G \longrightarrow R$

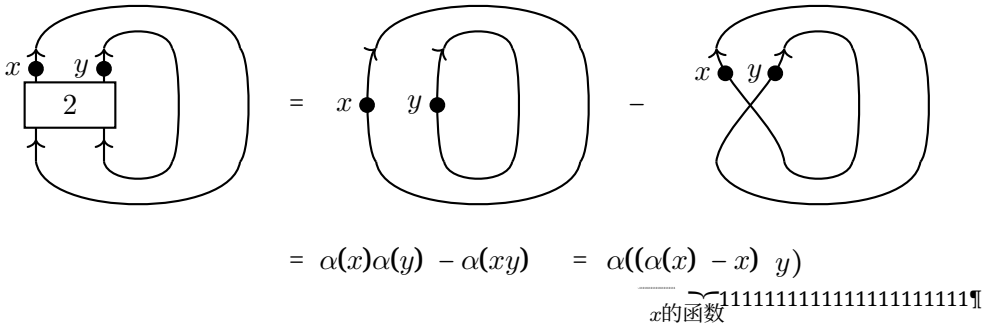


FIGURE 4.1.6. 相对于次数为 1 的伪表示 α， $x \in \mathrm{End}(X)$ 的特征多项式为 $\alpha(x) - x$。

次数为 d （其中 $d!$ 在 R 中可逆），使得约化 $\overline{\alpha} : G \twoheadrightarrow \Bbbk$ 是不可约的，即不是两个非平凡伪特征标之和。则 α 是 G 在 R^d 上某个表示的迹。

有关这些结果的介绍和证明，除了上述原始论文外，我们还可参阅 Dotsenko [Dot11] 和 Bellaïche [Bel09]。

数论中重要的情形是 G 为某个域 F的伽罗瓦群。关于在伽罗瓦表示理论中使用伪特征标的一个很好的动机，可见 [Bel12]的引言。有关进一步的发展和更多应用，请参阅 [Bel09、Bel12、Bel21] 以及 [WWE17、WWE18]。当 $d!$ 在 R中不可逆时，需要对伪特征标的定义作进一步细化，参见 [Che14、Eme18]。

Johnson [Joh19] 介绍了伪特征标的其他用途和应用，包括 Buchstaber 和 Rees 关于交换环及连续函数环上伪特征标的研究；另见 [BR04] 及其中的参考文献。

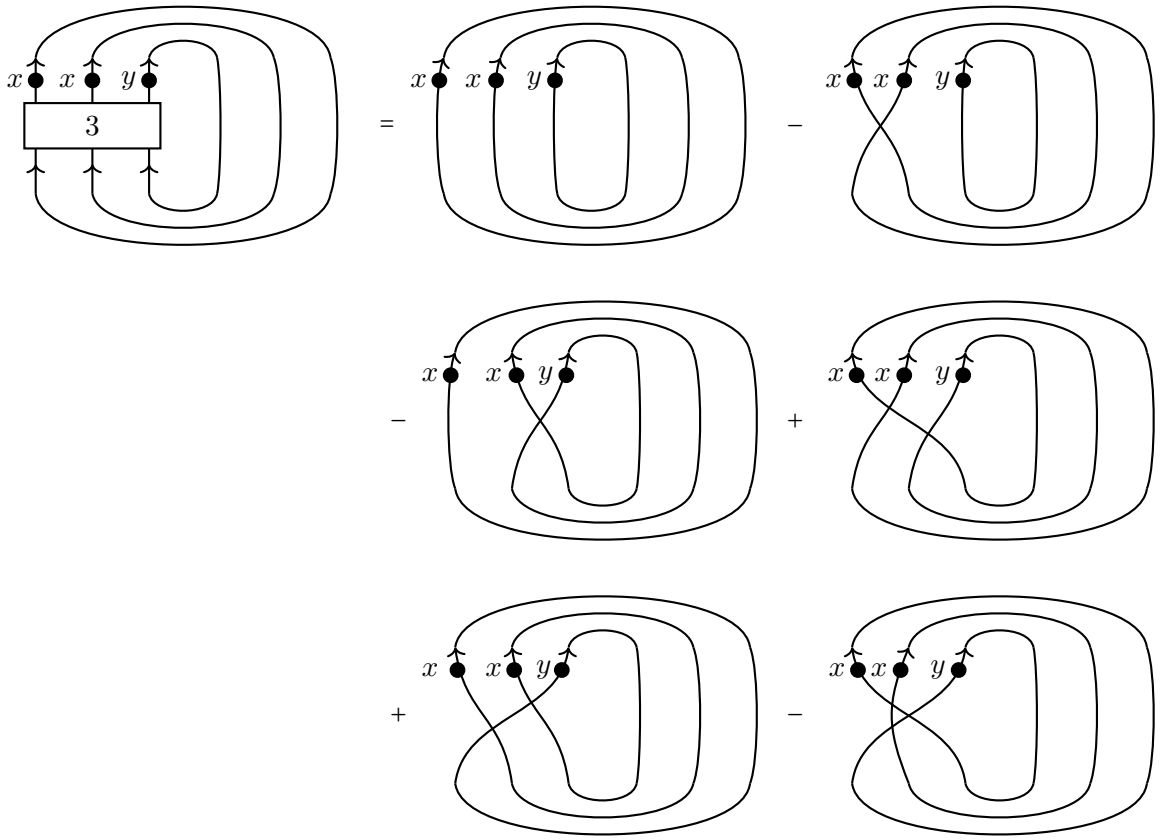
我们看到，定义 4.4 中针对刚性对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 的伪拓扑量子场论概念，是对群或幺半群伪特征标概念的自然推广G，二者都仅考虑取值于交换 $\mathbb{Q}$-代数 R中的求值。幺半群的伪特征标 G 对应于范畴 $\mathcal{B}(\mathcal{C}_G)$ 的布劳尔包络上的伪拓扑量子场论$\mathcal{C}_G$ ，其中该范畴只有一个对象，其自同态幺半群为 G。

探索上述范畴 C（而非 $\mathsf{B}(\mathsf{C}_G)$）上的伪拓扑量子场论（以及提升为拓扑量子场论的存在性）是一个非常有趣的问题。下一节将朝这个方向迈出一小步：我们将考察 $\mathsf{B}(\mathsf{C})$ 形式的布劳尔范畴上的伪拓扑量子场论，其中 C 有多个对象；还将考察具有内部端点的布劳尔范畴（车 Brauer 范畴）。

4.2. 布劳尔包络的伪特征标。我们将交替使用“布劳尔包络”和“布劳尔范畴”这两个术语。

我们希望将命题 4.8推广到布劳尔范畴 $\Bbbk$上的伪拓扑量子场论；为简单起见，该命题仅限于特征零的域 $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ （小）范畴 $\mathcal{C}$中的一组对象可以用它们的直和来替代。$\mathcal{C}$ 。

先假设 C 有有限个对象 X_1、……、X_n。选取交换环 R 上的一个伪特征标 $\alpha : L(\mathsf{C}) \twoheadrightarrow R$ 。首先将 C 线性化，并转到 $R\mathsf{C}$，即一个与 C 具有相同对象、且态射是 C 中态射的 R-线性组合的范畴。



$$= \alpha(x)^2\alpha(y) - \alpha(x^2)\alpha(y) - 2\alpha(x)\alpha(xy) + 2\alpha(x^2y)$$

$$= \alpha(\overbrace{(\alpha(x)^2 - \alpha(x^2) - 2\alpha(x)x + 2x^2)}^{2\times 2\text{ 矩阵的特征多项式 } X} \quad y)$$

$$2x^2 - 2\alpha(x)x + (\alpha(x)^2 - \alpha(x^2)) = 2(x^2 - \alpha(x)x + \tfrac{1}{2}(\alpha(x)^2 - \alpha(x^2)))$$

where $\alpha(x^m) \mapsto \mathsf{tr}(Y^m)$, Y is a 2×2 matrix

FIGURE 4.1.7. 对于伪表示 α，其次数为 d，带有 d 个标签 x 和一个标签 y 的上述图示闭合，其取值为 $\alpha(P(x)y)$，其中P是相对于伪表示 α的 $x \in \mathsf{End}(X)$ 的特征多项式。上述例子中，α 的次数为 2。

伪特征标 α 可线性扩张为一个伪特征标，也记作 α，定义在 $R\mathcal{C}$上。对于 R-线性范畴，方便起见，可以假设伪特征标也是 R-线性的；在我们的情形中确实如此。许多论文将伪特征标限定为由映射 $\alpha : G \longrightarrow R$给出的情形，其中 G是一个群或半群，而 Rouquier [Rou96] 则将 $R[G]$ 替换为任意 R-代数，并且很容易将定义 4.4 和 4.5 从 C 推广到一个 R-线性范畴，并且

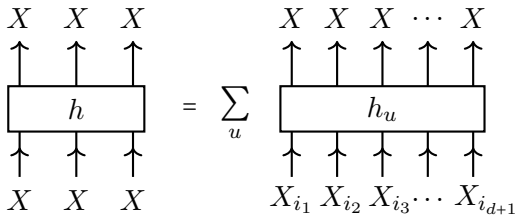


FIGURE 4.2.1. 将 h 写成项 h_u之和。

将刚性幺半范畴 C 上拓扑量子场论 F 的概念，替换为这种范畴 C 上的拓扑量子场论概念，其中 C 还具有 R-线性结构。

通过形式地向 $R\mathsf{C}$ 添加对象 $X := X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$，构造范畴 C'。记$p_i : X \twoheadrightarrow X_i$ 为从 X 到 X_i 的投影，记 $\iota_i : X_i \twoheadrightarrow X$ 为将 X_i 包含到 X中的包含映射。 X的自同态 $x = (x_{ij})$ 是 $R\mathsf{C}$ 中的态射矩阵，其中 $x_{ij} \in \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(X_j, X_i)$。在此表示中，态射 $\iota_i p_j$ 由初等的 (i, j) 矩阵给出，而投影算子$\iota_i p_i$ 是初等幂等矩阵。

考虑由单个对象 X 生成的 C' 的满子范畴，并将此子范畴记为 C_X。它是一个 R-线性范畴，其态射是若干映射 $\iota_i p_j$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_k, X_l)$ 中态射的各种复合的 R-线性组合。C' 的求值 α 限制为自同态代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_X}(X)$ 上的求值。

现在假设 $R = \Bbbk$ 是特征为 0 的域。

命题 4.10。求值 α 是 C_X 上的伪特征标，并且

$$\deg_\alpha(X) = \sum_{i=1}^{n} \deg_\alpha(X_i).$$

证明。只需对 $n = 2$ 证明该命题，其中 $X = X_1 \oplus X_2$，并对 n 应用归纳法。令 $d_i = \deg_\alpha(X_i)$、$i = 1$、2，并设 $d = d_1 + d_2$。由于 $\mathrm{id}_X = \iota_1 p_1 + \iota_2 p_2$，一个自同态 $h \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}_X}(X^{\otimes(d+1)})$ 可以写成 $(\iota_1 p_1 + \iota_2 p_2)^{\otimes(d+1)} \bigcirc h \bigcirc (\iota_1 p_1 + \iota_2 p_2)^{\otimes(d+1)}$。因此，$h$ 可以写成若干项 h_u 的和，这些项通过 X_1 或 X_2 分解（在 h 的每条线股上分别通过 $\iota_1 p_1$ 或 $\iota_2 p_2$ 分解）（在较大的范畴 C' 中）；见图 4.2.1。

由于 $d = d_1 + d_2$，在每一项 h_u 中，至少有 $d_1 + 1$ 条标记为 X_1 的股，或至少有$d_2 + 1$ 条标记为 X_2的股。假设给定项 h_u中有 $t \geq d_1 + 1$ 条标记为 X_1 的股。通过 S_{d+1} 中的一个置换进行共轭，可以将这些股聚拢并移至最左侧，见图 4.2.2。复合 $h_u \bigcirc e^-_{X,\ d+1} = h_u \sigma^{-1} \bigcirc \sigma e^-_{X,\ d+1}$ 可经由映射分解到 $X_1^{\otimes t} \otimes X_2^{\otimes(d+1-t)}$，其中 t 是序列 $(i_1, \ldots, i_{d+1})$ 中 1 的个数。

置换 σ 紧邻符号幂等元，因而可以将其移除，代价至多是引入一个符号 $(-1)^{\deg \sigma}$ 的符号，见图4.2.3.

接下来，可以从大小为 $d+1$ 的符号幂等元中提取出一个更小的符号幂等元：

$$\begin{aligned}((\iota_1 p_1)^{\otimes(d_1+1)} \otimes \mathrm{id}_X^{\otimes d_2}) e^-_{X,d+1} &= \frac{1}{(d_1+1)!}\big((\iota_1 p_1)^{\otimes(d_1+1)} \otimes \mathrm{id}_X^{\otimes d_2}\big)\big((e^-_{X,d_1+1} \otimes \mathrm{id}_X^{\otimes d_2}) \circ e^-_{X,d+1}\big) \\ &= \frac{1}{(d_1+1)!}\Big(\big(\iota_1^{\otimes(d_1+1)} \circ e^-_{X_1,d_1+1} \circ p_1^{\otimes(d_1+1)}\big) \otimes \mathrm{id}_X^{\otimes d_2}\Big) \circ e^-_{X,d+1},\end{aligned}$$

另见图 4.2.3。

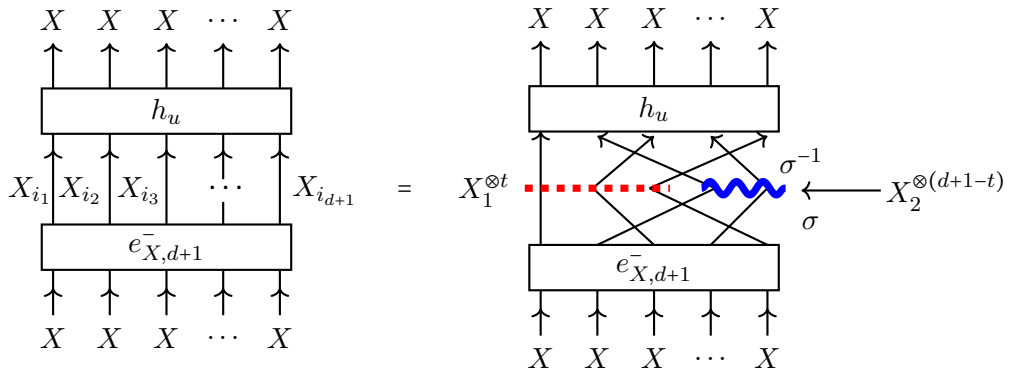


FIGURE 4.2.2. 经由 $h_u \bigcirc e^-_{X,d+1}$ $X_1^{\otimes t} \otimes X_2^{\otimes(d+1-t)}$ 进行因式分解。

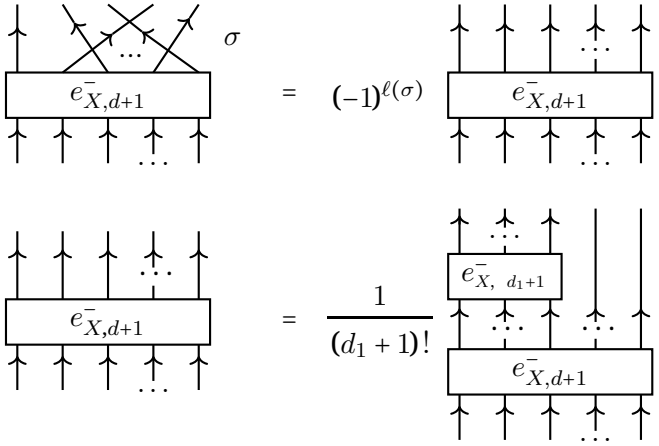


FIGURE 4.2.3. 上图：移除与符号幂等元相邻的一个置换。下图：从 $e^-_{X,d+1}$ 中提出一个较小的符号幂等元。

由于 $t \geq d_1+1$，反对称化算子 $e^-_{X,\ d_1+1}$ 如图 4.2.3（将其插入右侧图 4.2.2 中的适当位置时），其所有顶部端点都标记为 X_1，因此可以改写为 $e^-_{X_1,\ d_1+1}$。

后一个幂等元 $e^-_{X_1,d_1+1}$ 与 $X^{\otimes(d_1+1)}$) 1 的任意自同态复合后再闭合求值，结果均为 0，因为 $\deg_\alpha(X_1) = d_1$。因此，每一项 h_u with $t \geq d_1+1$ 闭合后的值均为 0。用 X_2 替换 X_1 作同样的论证可知，每一项 h_u with $t < g_1+1$ 的值均为 0，因此 h 的值为 0。

这意味着 $\deg_\alpha(X_1 \oplus X_2) \leq d_1 + d_2$。由于 $\mathbf{k}$ 的特征为零，若 α 是一个伪特征，其次数 $\deg_\alpha(X) = \mathrm{tr}_\alpha(\mathrm{id}_X)$，见 [Dot11，命题 3]。因此

$$\deg_\alpha(X) = \mathrm{tr}_\alpha(\mathrm{id}_X) = \mathrm{tr}_\alpha(\mathrm{id}_{X_1}) + \mathrm{tr}_\alpha(\mathrm{id}_{X_2}) = d_1 + d_2,$$

也就是说，α 是 C_X 上的一个次数为

$$\deg_\alpha(X) = \deg_\alpha(X_1) + \deg_\alpha(X_2).$$

□

现在假设 $\mathbf{k}$ 是特征为 0 的代数闭域。根据提升性质（命题 4.8），α 是一个 d_1+d_2 维半单表示 V，它是 $\mathbf{k}$-代数 自同态环$\mathcal{C}_X(X)$ ≅ 自同态环$(X_1 \oplus X_2)$的特征；这里假设该代数作用在 V的左侧。此表示是半单的，而商代数

$$B := \mathsf{End}_{\mathcal{C}_X}(X)/\ker(\phi) \tag{4.7}$$

由该作用的核可知，$\phi : \mathsf{End}\mathcal{C}_X(X) \twoheadrightarrow \mathsf{End}_{\mathbf{k}}(V)$ 是有限多个矩阵代数的直积，

$$B \cong \prod_i \mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbf{k}). \tag{4.8}$$

自同态 $e_i := \iota_i p_i$是 $\mathsf{End}\mathcal{C}_X(X)$ 中两两正交的幂等元，且 $1 = e_1 + e_2$。令 $V_i = e_i V$，$i = 1, 2$。态射 $f \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{k}\mathcal{C}}(X_i, X_j)$ 诱导一个 $\mathbf{k}$-线性映射 $V_i \twoheadrightarrow V_j, e_i v_i \mapsto f e_i v_i$，$v_i \in V_i$。这给出了范畴 C 和 $\mathbf{k}\mathsf{C}$ 的表示 V。为简便起见，我们对代数 $\mathsf{End}\mathcal{C}_X(X)$ 和范畴 C 的表示均使用相同的记号 V。

$\mathsf{End}_{\mathbf{k}\mathcal{C}}(X_i)$ 的元素在 V_j, $j \neq i$ 上的作用为零，并且它们在 V_i 上的迹为 α, $i = 1$, 2。因此，$\dim_{\mathbf{k}}(V_i) = d_i$。

映像 e_1'、e_2' 在 e_1、e_2 中，在 B 经商映射（4.7）作用下，可在每个矩阵代数 $\mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbf{k})$ 内同时共轭为对角形式，因此它们在$\mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbf{k})$（对 $\mathbf{k}^{n_i}$更换一组基后）的像为

$$e_1' = \sum_{j=1}^{m_i} e_{jj}, \qquad e_2' = \sum_{k=m_1+1}^{n_i} e_{kk}.$$

这说明了商代数 $B_i := \mathsf{End}_{\mathbf{k}\mathcal{C}}(X_i)/\ker(\phi_i)$ 的结构，其中

$$\phi_i : \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X_i) \longrightarrow \mathsf{End}_{\mathbf{k}}(V_i).$$

不失一般性，假设 $n_i \geq m_i$。相应的表示 V_i（它们是 B_i 的半单表示）为：

$$B_1 \cong \prod_i \mathsf{Mat}_{m_i}(\mathbf{k}), \quad V_1 \cong \bigoplus_i \mathbf{k}^{m_i}, \quad B_2 \cong \prod_i \mathsf{Mat}_{n_i-m_i}(\mathbf{k}), \quad V_2 \cong \bigoplus_i \mathbf{k}^{n_i-m_i}. \tag{4.9}$$

模 V_1 是列模 $\mathbf{k}^{m_i}$ 的直和，矩阵因子 B_1 作用于相应的直和项；V_2 和 B_2也同理。

特别地，$\mathsf{End}_{\mathbf{k}\mathcal{C}}(X_i)$ 的表示 V_i 及其商代数 B_i 的表示都是半单的。它是在同构意义下唯一的表示，其迹由将 α 限制到 C 中（或 $R\mathsf{C}$ 中） X_i 的自同态所得。

C 的表示 V是半单的，并由 α唯一确定（相差一个同构）。

上述构造给出以下结果。

命题 4.11. 设 C 是一个对象有限的范畴，且 α 是一个取值于特征零代数闭域 $\mathbf{k}$ 的 C 的伪特征。则 α 是 C 的一个半单表示 V 的特征。表示 V 在同构意义下唯一。

特别地， $V = \oplus_i V_i$，其中 i 参数化 C 的对象 X_i。态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j)$ 诱导一个映射 $V_i \to V_j$，并与态射的复合相容。维数 $\dim V_i = \deg_\alpha(X_i)$，且 $\alpha(f) = \mathrm{tr}_{V_i}(f)$，其中 $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$。$k\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ 的每个表示 V_i 都是半单的。

接下来，我们将此命题推广到具有可数多个对象的范畴 C。

命题 4.12. 设 C 是一个具有可数多个对象的范畴， α 是 C 上取值于特征零代数闭域 k 的伪特征标。那么， α 是 C 的一个半单表示 V 的特征。表示 V 在同构意义下唯一。

证明. 将 C 的对象依次列为 $X_1, X_2, \ldots$. 考虑由对象 $X_1, \ldots, X_N$ 生成的满子范畴 C_N，以及将 α 限制到 C_N 所得的 α_N。在同构意义下，存在唯一的 C_N 的半单表示 V^N，其迹为 α_N。加入直和对象 $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_N$ 后，表示 V^N 是 $k\mathrm{End}(X)$ 的半单表示。

构造直和 $X \oplus X_{N+1} \cong \oplus_{i=1}^{N+1} X_i$。伪特征 α_{N+1} 是 C_{N+1} 的一个在同构意义下唯一的半单表示 W 的迹。分解 $W \cong W_1 \oplus W_2$，其中 W_1 是 $\mathrm{End}(X)$ 的一个表示，而 W_2 是 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_{N+1})$ 的一个表示。请注意， X 与 X_{N+1} 之间的态射会在 W_1、W_2 之间诱导线性映射。

固定一个 C_N 的半单表示同构 $V^N \cong W_1$。借助此同构，我们将 $V^N \oplus W_2$ 视为 C_{N+1} 的一个表示。它是一个迹为 α_{N+1} 的半单表示。

令 $G_N = \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_N}(V^N)$ 为 C_N 的表示 V^N 的自同构群。从 C_{N+1} 到 C_N 的限制诱导一个同态 $\rho_N : G_{N+1} \to G_N$。

从一个固定的 N 开始，并对 N 进行归纳，我们得到 C 的一个表示 V。它有一个分解 $V \cong \oplus_{i=1}^{\infty} V_i$；一个态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j)$ 会诱导一个 k-线性映射 $V_i \to V_j$，且这些映射与态射的复合相容。每个 V_i 都是有限维 k-向量空间，并且 $\dim_{\mathsf{k}}(V_i) = \deg_\alpha(X_i)$。表示 V 是半单的，并且每个 V_i 都是 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ 的半单表示，其迹由将 α 限制到 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ 得到。表示 V 是 C 的唯一（在同构意义下）半单表示，其迹由 α 给出。□

注释 4.13. 令 $G_N = \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_N}(V^N)$ 为 C_N 的表示 V^N 的自同构群。从 C_{N+1} 到 C_N 的限制诱导一个同态 $\rho_N : G_{N+1} \to G_N$。 V 的自同构群，

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(V) \cong \lim_{\rho_N} G_N,$$

同构于群及其同态的逆极限

$$G_1 \xleftarrow{\rho_1} G_2 \xleftarrow{\rho_2} G_3 \xleftarrow{\rho_3} \ldots$$

注释 4.14。我们所讨论的 C 的表示可称为 C 的左表示，因为它们是从 C 到有限维向量空间范畴 k→fdvect 的协变函子。右表示可定义为从 C 到 k–fdvect 的反变函子。将从 C 到 k–fdvect 的协变或反变函子与有限维向量空间取对偶的操作复合，会在 C 的左表示范畴与右表示范畴之间诱导出反变等价。这也给出了到 k–fdvect 的协变函子与反变函子的同构类之间的双射。此双射保持半单性。特别地，上述命题对 C 的右表示同样成立。

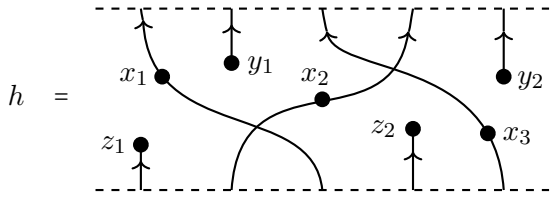


FIGURE 4.3.1. $X^{\otimes(d+1)}$ 在带边界的 Brauer 范畴中的一个自态射。

我们预计将命题 4.12 推广到具有不可数多个对象的小范畴不会遇到困难，但本文不尝试进行这种推广。

4.3. 带边界的 Brauer 范畴的伪特征标。现在来讨论带端点的 Brauer 范畴的伪特征标。这些范畴在第 3.4 节中定义（而一组限制更多的例子则见第 3.3 节）。现在来讨论带端点的 Brauer 范畴的伪特征标。这些范畴在第 3.4 节中定义（而一组限制更多的例子则见第 3.3 节）。

假设 给定数据 $(\mathcal{C},\mathcal{G}_\ell,\mathcal{G}_r)$ 如第 3.4 节所述，其中包含一个小范畴 $\mathcal{C}$ 和函子 ors

$$\mathcal{G}_\ell : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Sets}, \quad \mathcal{G}_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Sets}$$

在 (3.10)、(3.11) 中。接着可以构造带边界的刚性对称幺半 Brauer 范畴 $\mathcal{B}'(\mathcal{C}) := \mathcal{B}(\mathcal{C},\mathcal{G}_\ell,\mathcal{G}_r)$。

此外，选取一个求值函数 α，如（3.13）所示，其取值于 $R \supset \mathbb{Q}$，

$$\alpha : L(\mathcal{C}) \sqcup (\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r) \longrightarrow R. \tag{4.10}$$

假设在定义 4.4 的意义下，B′(C) 中 1 的自同态上的求值 α 是一个伪拓扑量子场论或伪特征标。那么，C 的对象 X 有一个次数$d = \deg_\alpha(X)$。对 $(d+1)$-反对称化算子 $e^-_{X,d+1}$ 的任意闭合，应用 α 后结果均为零；参见图 4.1.3。对于 B′(C)，这一条件可写为如下形式。

图 h 中的 $X^{\otimes(d+1)}$ 自同态4.1.3 可以写成端点集合 $\{1,2,\dots,d+1\}$之间的一个部分双射，其中双射中的每条弧和每个半区间都带有一个标签：弧的标签是 X 的一个自同态，半区间的标签是$\mathcal{G}_\ell(X)$ 或$\mathcal{G}_r(X$ 中的一个元素；参见图 4.3.1。

在反对称化算子的顶端或底端施加置换 $e^-_{X,\ d+1}$ 至多只会使其相差一个符号。对 h 的顶端和底端施加置换，可将其化为如下形式：所有半区间都位于弧的右侧，且各弧互不相交（定义 $\{1,\dots,d+1-m\}$上的恒等置换，其中 m 是顶端（和底端）的半区间数，见图4.3.2。

在反对称化算子一侧施加相同的置换，至多只会给它添上一个负号。将所得态射 h' 与反对称化算子复合，并将复合结果闭合，得到图4.3.3中的图。

现在可以完全或部分展开反对称化算子，将其写成由带标记圆和区间上的求值 α 之积组成的项的交错和。例如，图4.3.4 展示了对 $d = 2$ 和 $m = 1$的展开。

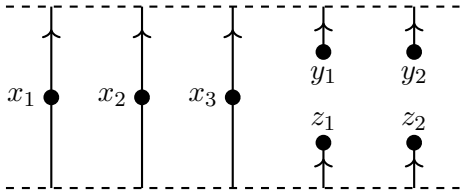


FIGURE 4.3.2. 通过在自同态两侧与置换复合，对 $X^{\otimes(d+1)}$ 的自同态进行 h' 约化。

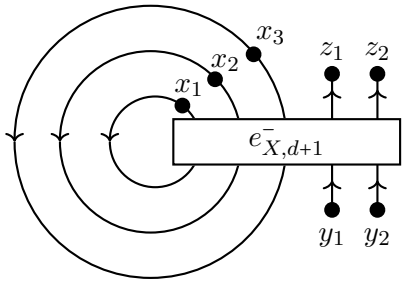


FIGURE 4.3.3. h' $\bigcirc e^-_X$的闭合$d+1$。

回到布劳尔范畴 B′(C)，并进一步假设伪特征标求值 α 的取值落在特征零的代数闭域 k 中。

命题 4.15。假设 C 具有有限个对象，且求值

$$\alpha : L(\mathcal{C}) \sqcup (\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r) \longrightarrow \mathbf{k}, \quad \mathsf{char}(\mathbf{k}) = 0,\ \overline{\mathbf{k}} = \mathbf{k}, \tag{4.11}$$

是一个伪特征标。那么， α 是 (C, G_ℓ, G_r) 的某个半单表示的特征 V 。该表示 V 在同构意义下唯一。

注意，(C, G_ℓ, G_r) 的一个表示 V由以下数据组成：对每个 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$，给出 k-向量空间 V_X；对每个态射 $\beta \in \mathrm{Hom}_C(X,Y)$，给出线性映射 $V_X \xrightarrow{Đ} V_Y$；对每个 $\gamma \in \mathsf{G}_r(X)$，给出一个向量 $v_\gamma \in V_X$；对每个 $\tau \in \mathsf{G}_\ell(X)$，给出一个余向量 $f_\tau \in V_X^*$。这些数据满足由 C 是一个范畴且 G_ℓ、G_r 是从其到集合的函子这一事实所给出的标准相容关系。

证明。构造 C 的 k-线性闭包 kC，并将求值 α 按 k-线性方式延拓到其中。由此得到刚性对称幺半范畴 B'_α(C)。C 的对象 X_1、……、 X_k 自然也是 B'_α(C) 的对象。

回顾一下，B′(C) 中 1 的端同态环由浮动装饰圆和区间生成。圆上可以带有点（标记 C 中的态射），点之间的圆环区域则由相应的 C 中对象着色。区间的端点由 $\mathsf{G}_\ell(X_i)$、$\mathsf{G}_\ell(X_j)$ 中的元素装饰，而区间本身则由 $\mathsf{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathsf{G}_r$ 中的元素装饰。

经过求值 α 后，浮动区间和圆变为 k 中的元素，并且在范畴 B'_α(C) 中，End(1) $\cong$k。令 $X_0 = \mathbf{1}$ 为 B'_α(C) 的单位对象。

我们形式地构造直和 $X = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$。它可视为 B'_α(C) 的加性闭包中的一个对象，并将其在该加性闭包中的自同态环$\widetilde{\ }$记为 End(X)。考虑 k-线性范畴 C_X ，它只有一个对象 X ，且其自同态环 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}_X}(\widetilde{X})$ = End(X)。

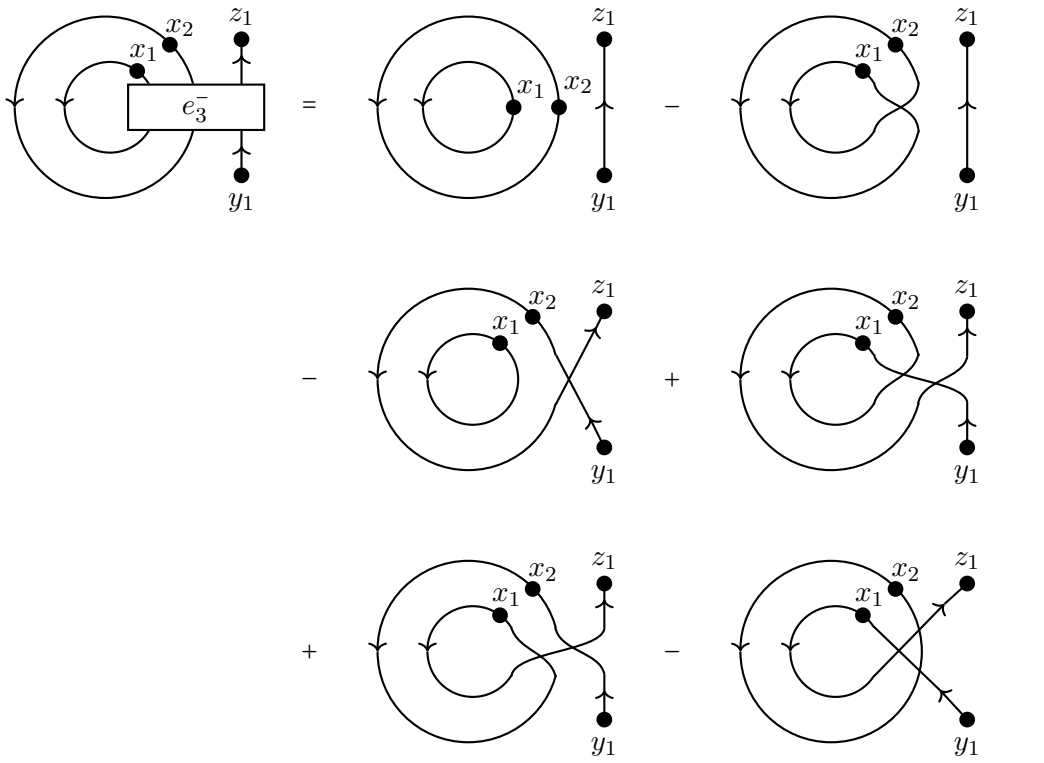


FIGURE 4.3.4. 在 $d+1=3$ 和 $m=1$ 的闭合中展开反对称化算子的示例。

$\mathsf{B}'(\mathsf{C})$ 的伪特征 α 可延拓为 $\mathsf{B}(\mathsf{C}_X)$ 的一个伪特征 $\widetilde{\alpha}$ 。求值 $\widetilde{\alpha}$由 α 如下构造。C 中任意自同态 $t \in \mathsf{End}(X_i)$，通过与包含映射和投影 $X_i \xrightarrow{\iota_i} X$、$X \xrightarrow{p_i} X_i$ 复合，给出 X 的一个自同态$\widetilde{t} := \iota_i \circ t \circ p_i$，并且我们定义 $\widetilde{\alpha}(\widetilde{t}) = \alpha(t)$。

自同态 $X_i \xrightarrow{u_i} \mathbf{1} \xrightarrow{v_i} X_i$ 其经过 $\mathbf{1}$ 分解的态射，其求值为 $\alpha(u_iv_i)$。注意，u_iv_i 是 $\mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r$ 的元素的线性组合，对它们应用 α 会得到基域中的元素。从图示上看，$u \times v \in \mathcal{G}_\ell \times_{\mathcal{C}} \mathcal{G}_r$ 是一个浮动区间，而我们在某种意义上是通过一条特殊的线（图 4.3.5 中的虚线）将其闭合起来，从而把它变成一个圆；这条线表示单位对象 $\mathbf{1}$。因此，$u \times v$的求值可视为对一个带装饰的圆求值，而不是对一个带装饰的区间求值。

图 4.3.5 中显示了虚线上的其他关系。它们由 自同态环$(\mathbf{1}) \cong \mathbf{k}$属于 $\mathcal{B}'_\alpha(\mathcal{C})$ 得出。

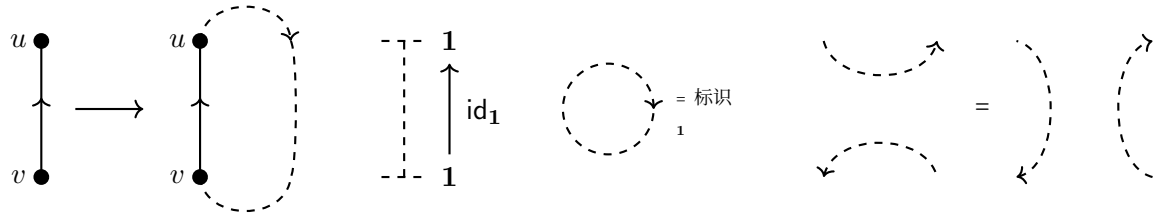


FIGURE 4.3.5. 左：将带装饰的区间闭合成一个圆，并用虚线表示。虚线表示对象 1 的恒等态射。右：虚线关系。

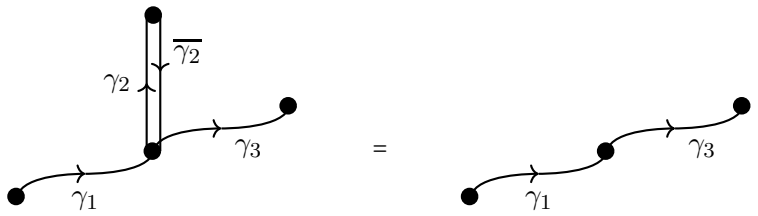


FIGURE 4.4.1. 路径回溯等价。

我们有

$$\deg_{\widetilde{\alpha}}(X) = \sum_{i=1}^{k} \deg_{\alpha}(X_i) + 1,$$

并且 $\widetilde{\alpha}$ 是一个伪特征标。根据命题 4.11 ，它于是是 $\mathcal{B}(C_X)$的唯一（在同构意义下）半单表示的特征。将投影应用于 X_i，$i = 0$、1、...、k可知， α是$\mathcal{B}'(\mathcal{C})$的唯一（在同构意义下）半单表示的特征。□

将此命题推广到具有可数多个对象的 C 上是直接的。

4.4. 伪 holonomy。 设 M 是一个紧致光滑连通的 n维流形。为 M 赋予范畴 $\mathcal{C}_M$ ，其对象为 M中的点。从 p_0 到 p_1 的态射是一条分段光滑路径 $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ ，满足 $p_0 = \gamma(0)$ 对应于 $p_1 = \gamma(1)$。这些路径视为模去回溯等价，见图 4.4.1，以及重参数化（ $[0,1]$上的分段光滑保定向同胚）。

态射的复合由路径的复合给出。范畴 C_M 是一个群胚，其中任意路径 γ 的逆路径为 $\overline{\gamma}$。该范畴等价于其骨架子范畴：选取一点 $p \in M$ ，并将其限制为 $\mathsf{C}_M(p)$ 的满子范畴；该子范畴由 C_M 中对象 p的自同态组成。

设实向量丛 E 位于 M 上，并且在 E上给定联络 ∇ 。它可以描述为一个 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

其中， $\Gamma(E)$ 是 E 的光滑截面空间；对于光滑函数 f 和光滑截面 s ， $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$ of E。

联络沿丛的任意分段光滑路径 γ 诱导纤维之间的平行传输映射 $\gamma_*: E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$。分段光滑环 $\gamma: [0,1] \to M$， $\gamma(0) = \gamma(1)$ 沿路径诱导 ∇ 的线性自同构，即 holonomy: $\gamma_* \in \mathrm{GL}(E_{\gamma(0)})$。对于闭路径 γ，整体单值群的迹 $\mathrm{tr}_\nabla(\gamma, p) \in \mathbb{R}$ 不依赖于环上基点 $p = \gamma(x)$ $x \in [0,1)$ 的选择。将此迹记作 $\mathrm{tr}_\nabla(\gamma)$。它也仅取决于联络的规范等价类。

以下命题显然成立。

命题 4.16. 对于丛 E上的任意联络 ∇，所有环 γ上的迹 $\mathrm{tr}_\nabla(\gamma)$ 构成一个取值于 $\mathbb{R}$ 的布劳尔范畴 $\mathrm{B}(\mathsf{C}_M)$ 的伪特征标，其次数为 $\dim(E)$。

反过来，假设给定一个次数为 n 的 $\mathrm{B}(\mathsf{C}_M)$ 伪特征标。固定一点 $p \in M$，该伪特征标限制为群 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_M}(p)$ 上的伪特征标。此伪特征标的次数为 n，并且存在唯一的、在同构意义下唯一的群 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_M}(p)$ 的半单表示 E_p，其维数为 n。选取一条从 q 到 p 的路径 γ_q，对于每个点 $q \in M$，都可以将 E_p 视为 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_M}(q)$ 的表示 E_q，并由此定义布劳尔范畴 $\mathrm{B}(\mathsf{C}_M)$ 的一个半单表示。

注 4.17. 更一般地，范畴 $F: \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ 之间的等价会在这些范畴 $L(\mathsf{C}_1) \cong L(\mathsf{C}_2)$ 的环之间诱导一个双射，并在 k-赋值之间诱导一个双射。此双射保持伪特征标性质。因此， F 在 Brauer 范畴 $\mathrm{B}(\mathsf{C}_1)$ 和 $\mathrm{B}(\mathsf{C}_2)$ 的伪特征标之间诱导一个双射。本例对应于范畴 $\mathsf{C}_M(p) \to \mathsf{C}_M$ 之间的等价；该等价通过将 p 的自同态所成的满子范畴包含到路径范畴 C_M 中给出，后者是一个群胚。

可以探讨在什么条件下，表示 E_q在 $q \in M$上能够粘合成一个丛 E，其底空间为 M，纤维为 V_q，且路径范畴$\mathcal{C}_M$ 的作用来自联络 ∇。关于相关问题的详细研究，请参阅 [Lew93、CP94、BEP22], 及其中的参考文献。这里，我们只指出存在一个映射

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^n\text{-丛在 } M \text{ 上的联络的规范等价}\\ \text{类}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\mathrm{B}(\mathsf{C}_M) \text{ 的 } \mathbb{R}\text{-值次数为 } n \text{ 的}\\ \text{伪特征标}\end{array}$$

并要求在两边添加额外条件，使该映射成为双射。注意，该映射通常并非单射。取一个具有 $\pi_1(M)$ 的流形，它允许一个非半单表示 $\pi_1(M) \to \mathrm{GL}(n)$，并在 M 上构造相应的带平坦联络的丛。对该表示进行半单化，会得到一个带平坦联络的丛，但它与原丛并不规范等价。这两个平坦联络产生相同的 C_M 伪特征标。

注 4.18。 范畴等价会在它们之间诱导环的双射，以及它们的求值之间的双射，见注 4.17。对于带端点的 Brauer 范畴，见第 3.4 节，等价 $\mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ 不会在求值上诱导双射。例如，一个区间可以标记为 $\mathsf{G}_{\ell,\,2} \times_{\mathcal{C}_2} \mathsf{G}_{r,\,2}$ 中的元素，而该元素无法通过此等价拉回为 $\mathsf{G}_{\ell,\,1} \times_{\mathcal{C}_1} \mathsf{G}_{r,\,1}$ 中的元素，其中 $\mathsf{G}_{\ell,\,i}$、$\mathsf{G}_{r,\,i}$ 是从 C_i 到集合、 $i = 1$、2 的适当（分别为逆变、协变）函子。相反，需要有一个双射

$$\mathcal{G}_{\ell,1} \times_{\mathcal{C}_1} \mathcal{G}_{r,1} \cong \mathcal{G}_{\ell,2} \times_{\mathcal{C}_2} \mathcal{G}_{r,2}$$

以获得求值之间相应的双射，或进一步对这些集合取商以得到一个双射。

5. Two-dimensional pseudo-TQFTs

为了理解二维伪拓扑量子场论，我们首先讨论二维拓扑量子场论及其生成函数。

5.1. 二维拓扑量子场论与生成函数。二维拓扑量子场论是一个对称幺半函子 $\mathsf{F} : \mathsf{Cob}_2 \to \mathbf{k}\text{–vect}$，它从定向二维协边范畴映射到域 $\mathbf{k}$ 上的向量空间范畴。这类拓扑量子场论由交换弗罗贝尼乌斯代数 (B,ε) 决定，其中 $B = \mathsf{F}(\mathbb{S}^1)$ 是 F 与圆相对应的交换代数，而 $\varepsilon : B \to \mathbf{k}$ 是 B 上的非退化迹，由帽协边给出（将二维圆盘视为一个从 $\mathbb{S}^1$ 到空一维流形的协边）。

一个带有一个边界分支的二维环面，见左侧的图 5.2.1 ，定义了一个元素$h_B \in B$，我们称之为把手元，属于$(B,\ \varepsilon)$。该元素导出把手映射$B \longrightarrow B$，它将 $u \in B$ 映射为 $h_B u$。此映射由右侧图 5.2.1 中的配边所诱导。

设 $\{u_1,\dots,u_r\}$ 是 B 的一组基，$\{v_1,\dots,v_r\}$ 是其对偶基，使得 $\varepsilon(u_i v_j) = \delta_{i,\ j}$. 于是

$$h_B \ = \ \sum_{i=1}^{r} u_i v_i. \tag{5.1}$$

令 $\alpha_{B,\ g} = \mathsf{F}(S_g) \in \mathbf{k}$ 表示拓扑量子场论 (B,ϵ) 中定向亏格为 g 的曲面的值，其中省略了该值对迹 ε 的依赖。它可以用两种方式计算，

$$\alpha_{B,g} = \varepsilon(h_B^g),\quad g \geq 0;\quad \alpha_{B,g} = \mathsf{tr}_B(h_B^{g-1}),\quad g \geq 1 \tag{5.2}$$

通过将迹 ε 作用于把手元的 g 次幂，或作为算子 h_B^{g-1} 作用在 B 上的迹，其中 $g \geq 1$。第二个公式可通过将 S_g 表示为带有额外 $g-1$ 个孔的环面得到，见右侧图 5.3.5 。必然有，

$$\alpha_{B,1} \ = \ \dim(B), \tag{5.3}$$

也就是说，环面的值等于 B 的维数。

通过将值 $\alpha_{B,\ g}$ 合并为关于一个形式变量 T 的幂级数，定义拓扑量子场论 (B,ε) 的生成函数:

$$Z_{(B,\varepsilon)}(T) \ := \ \sum_{g\geq 0} \alpha_{B,g} T^g,\ \in \mathbf{k}[\![T]\!]. \tag{5.4}$$

这由拓扑理论中的相应事实 [Kho20b、KS21、KOK22] 可知$Z_{(B,\varepsilon)}$（T）是 T的有理函数。线性项的系数 T是 B的维数，见（5.3）。

代数 B 是交换的，并且任意幂等元 e 在 B、 $e^2 = e$中都给出一个直积约化 $B \cong eB \times (1-e)B$，且保持 Frobenius 代数结构，因为只需取出 1 的各个分量以及迹映射 ε 在直积每一项中的对应部分即可。余乘法由迹决定，同样具有直积分解。$(B,\ \varepsilon)$的生成函数等于各个直和项（$eB,\ \varepsilon|_{eB}$）、（$(1-e)B,\ \varepsilon|_{(1-e)B}$）的生成函数之和。交换弗罗贝尼乌斯代数以及更一般的拓扑量子场论的直积约化曾在 [Saw95] 中得到研究。

为了更详细地分析可能的生成函数，以下假设域 $\mathbf{k}$ 是代数闭的，$\mathbf{k} = \mathbf{k}$。考虑由 B 生成的柄子代数 $\mathbf{k}h_B$

由 h_B生成。乘法算子 h_B 的最小多项式 $P_{h_B}(x)$，无论考察 h_B 在 B 上还是在 $\mathbf{k}h_B$上的作用，都是相同的。

在 $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$ 上，多项式 $P_{h_B}(x)$ 根据 h_B 的特征值分解为线性因子的乘积。如果特征值不止一个，子代数 $\mathbf{k}h_B$ 存在一组幂等元，使得可以将 (B,ϵ) 分解为 Frobenius 代数 (B_i,ε_i) 的直积；在每个代数中，把手元 h_{B_i} 都有唯一的广义特征值 λ_i，使得 $h_{B_i} - \lambda_i\mathrm{id}$ 是幂零的。

假设 (B,ε) 具有这种形式，因此 $h_B - \lambda\mathrm{id}$ 在 B 上是幂零的。那么 $\mathrm{tr}_B(h_B^k) = \dim(B)\lambda^k$，且生成函数具有如下形式

$$Z_{(B,\varepsilon)} = \varepsilon(1) + \sum_{g\geq 1} \mathrm{tr}_B(h_B^{g-1})T^g = \varepsilon(1) + \dim(B)\sum_{g\geq 1}\lambda^{g-1}T^g. \tag{5.5}$$

自然可以分为两种情况：

$$Z_{(B,\varepsilon)} = \varepsilon(1) + \dim(B)T, \quad \text{if} \quad \lambda = 0, \tag{5.6}$$

$$Z_{(B,\varepsilon)} = \varepsilon(1) + \frac{\dim(B)T}{1-\lambda T}, \quad \text{if} \quad \lambda \neq 0. \tag{5.7}$$

注意，$\dim(B) \geq 1$。如果 $\dim(B) = 1$，那么 $\varepsilon(1) = \lambda^{-1}$，因为把手元 $h_B = \lambda \neq 0$，且生成函数为

$$Z_{(B,\varepsilon)} = \lambda^{-1} + \frac{T}{1-\lambda T} = \frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda T}, \quad \lambda \in \mathbf{k}^*. \tag{5.8}$$

任何有限维交换 k-代数都是局部代数的乘积。如果 B 有除 0、1 以外的幂等元，Frobenius 代数 (B,ε) 还可以进一步分解。因此，我们可以假设 B 是一个局部环，且有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$。必然有 $B/\mathfrak{m} \cong \mathbf{k}$，并且存在分解 $B \cong \mathbf{k}1 \oplus \mathfrak{m}$。

现在假设 $\dim(B) \geq 2$。选取 B 的一组基 $\{1, u_2, \ldots, u_r\}$，$u_i \in \mathfrak{m}$, $r = \dim(B) \geq 2$，它确定了对偶基 $\{v_1, \ldots, v_r\}$，把手元为

$$h_B = v_1 + \sum_{i=2}^{r} u_i v_i \in v_1 + \mathfrak{m}. \tag{5.9}$$

(1) 首先考虑以下情形 $\lambda = 0$，参见（5.6）。于是 $h_B \in \mathfrak{m}$，因为它在 B 上幂零作用。我们得到 $v_1 \in \mathfrak{m}$。

取 $B = \mathbf{k}[x]/(x^m)$ 并

$$\varepsilon(x^i) = \begin{cases} 1, & i = m-1, \\ 0, & 1 \leq i \leq m-2, \\ \mu, & i = 0, \end{cases}$$

使得 ε 分别在 1 和 x^{m-1} 上取值 μ 和 1，而在 x 的所有其他幂上取值 0。这里$\mu \in \mathbf{k}$ 不受任何限制。显然，ε 是非退化的，因为它在 B 的唯一极小理想（x^{m-1}）上非零，并使 B 成为 Frobenius 代数。取一组基 $\{1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}\}$。则对偶基为 $\{x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x, 1-\mu x^{m-1}\}$，可直接验证。把手元 $h_B = rx^{m-1}$ 确实是幂零的，$h_B^2 = 0$。生成函数为

$$Z_{(B,\varepsilon)} = \mu + mT, \quad \mu \in \mathbf{k}, r \geq 2. \tag{5.10}$$

(2) 现在考虑 $\lambda \neq 0$ 的情形，见（5.7）。和前面一样，我们假设 B 是局部的，$B \cong \mathbf{k}1 \oplus \mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}$ 是极大理想。

众所周知，对于 h_B 交换局部弗罗贝尼乌斯代数 (B,ε)，其把手元 $\mathbf{k}$ 代数闭时，属于 B 的底；参见用户 Mare 在 [SP22] 讨论中的回答，以及 [Zim14] 中的命题 3.6.14 和 1.10.18。

特别地，若 B 不是基域 $\mathbf{k}$，则 $h_B^2 = 0$ 和 h_B 是幂零的。因此，若 $\lambda \neq 0$，代数 B 是若干个一维 Frobenius 代数 $\mathbf{k}$ 的直积，每一项中 $\varepsilon(1) = \lambda^{-1}$，其生成函数为

$$Z_{(B,\varepsilon)}(T) = \frac{\dim(B)\lambda^{-1}}{1-\lambda T}.$$

注 5.1。对于一维代数 $B = \mathbf{k}$，若其余乘法为 $\Delta(1) = \gamma 1 \otimes 1$，迹为 $\varepsilon(1) = \gamma^{-1}$，则 $\gamma \in \mathbf{k}^*$ 中把手元的值为 γ，生成函数为

$$\gamma^{-1} + T + \gamma T^2 + \ldots = \frac{\gamma^{-1}}{1-\gamma T}.$$

注意，T 处的系数为 1，这就是 B的维数。

综合这些信息，就得到了 $\mathbf{k} = \mathbf{k}$ 上交换 Frobenius 代数的可能生成函数的完整答案。

命题 5.2。设 (B,ε) 是代数闭域 $\mathbf{k}$ 上的交换 Frobenius 代数。那么，其生成函数 $Z_{(B,\varepsilon)}(T)$ 具有以下形式之一：

$$(5.11)\ Z_{(B,\varepsilon)} = \mu + mT + \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i \lambda_i^{-1}}{1-\lambda_i T}, \quad \mu \in \mathbf{k},\ m \in \{2,3,\ldots\},\ m_i \in \{1,2,\ldots\},\ \lambda_i \in \mathbf{k}^*,$$

$$(5.12)\ Z_{(B,\varepsilon)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i \lambda_i^{-1}}{1-\lambda_i T}, \quad m_i \in \{1,2,\ldots\},\ \lambda_i \in \mathbf{k}^*,$$

并且参数的所有可能取值都能实现。

注意，在情形（5.11）下，该生成函数展开为

$$Z_{(B,\varepsilon)} = \left(\mu + \sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i^{-1}\right) + \left(m + \sum_{i=1}^{s} m_i\right) T + \ldots$$

常数项中的任意系数都可以通过适当的 μ实现，并且需要 $m \geq 2$。如果 特征$(\mathbf{k}) = p$，则生成函数中系数 α_1 =维数(B) 的取值属于 $\mathbb{Z}/p$，从而在其余参数固定时，为选取 m 提供了额外的灵活性。于是，通过将（5.12）中的不可能取值 $m = 0$，1 替换为（5.11）中的 $m = 0 + p$，$1 + p \geq 2$,

从现在起，我们将考察范围限制在特征零域上，在这些域中，维数无法模素数约化。然后，令B 取为上文例（1）中维数为 m 的幂零代数与m_i 个一维弗罗贝尼乌斯代数的直积，其中 $\varepsilon(1) = \lambda_i^{-1}$、$1 \leq i \leq s$，从而实现上述生成函数。

需要强调的是，当特化到 特征$(\mathbf{k}) = 0$时，在 $m \geq 2$ 情形下，生成函数具有 (5.11) 中最一般的形式；情形 $m = 1$ 不可能成立（非平凡幂零理想的 Frobenius 代数不可能具有维数 1）；而在 $m = 0$ 情形下，T^0 处的系数由 m_i 和 λ_i 决定，为 $\sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i$。

在情形（5.12）中，这对应于一个半单的 B （由 m_i 个一维 Frobenius 代数的副本的乘积组成，其中 $\varepsilon(1) = \lambda_i^{-1}$，$1 \leq i \leq s$），生成函数展开为

as

$$Z_{(B,\varepsilon)} = \left(\sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i^{-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{s} m_i\right) T + \dots$$

并且不存在选择常数项的额外自由度，这一点不同于（5.11 ）.

5.2. 二维拓扑场论。取值于域 k、定义在定向二维协边上的拓扑场论 α 由其求值的生成函数确定

$$Z_\alpha(T) := \sum_{g\geq 0} \alpha_g T^g, \quad \alpha_g \in \mathbf{k}. \tag{5.13}$$

这里 T 是一个形式变量，而$\alpha_g = \alpha(S_g)$ 是亏格为 g的连通定向曲面的求值。关于二维拓扑场论的详情，请参阅 [Kho20b、KS20、KOK22] 。

在 [Kho20b] 中已指出，一维流形 $A_\alpha(m)$ 的态空间 $\sqcup_m \mathbb{S}^1$（即圆的并）有限维，当且仅当

$$Z_\alpha(T) = \frac{P(T)}{Q(T)}, \quad Q(0) \neq 0, \tag{5.14}$$

存在某些多项式 $P(T)$ $Q(T)$，也就是说，当且仅当 $Z_\alpha(T)$ 是 T 的有理函数。我们从现在起假设这一点成立（这类拓扑场论称为有理拓扑场论）。拓扑场论 α 给出一个松对称幺半函子

$$\mathcal{F}_\alpha : \mathsf{Cob}_2 \longrightarrow \mathbf{k}\text{–vect} \tag{5.15}$$

将 $\sqcup_m \mathbb{S}^1$ 映射到其状态空间 $A_\alpha(m)$，并为一维流形之间的定向配边诱导映射。

我们可以问，在 $Z_\alpha(T)$ 满足什么条件时，这个理论可以提升为 k 上的二维定向拓扑量子场论。此前本节已讨论过这种拓扑量子场论，它们对应于交换 Frobenius k-代数 (B,ε)。

一个提升 ϕ 是一个自然变换

$$\phi : \mathcal{F}_\alpha \longrightarrow \mathcal{F}_{(B,\varepsilon)} \tag{5.16}$$

从松幺半函子 F_α 到幺半函子 $\mathrm{F}^{(B,\varepsilon)}$ ，并且保持闭曲面的求值：

$$\mathcal{F}_\alpha(S) = \alpha(S), \tag{5.17}$$

对于所有闭曲面 S。

它由一组 k-线性映射 $\phi_m : A_\alpha(m) \to B^{\otimes m}$ 构成，对所有 $m \geq 0$ 均如此；这些映射与由 m 和m' 个圆组成的并集之间的二维定向配边所诱导的所有映射相交织。闭曲面 S 是 Cob_2 （空一维流形）的单位对象 $\varnothing_1$ 的自同态。在函子 F_α 和 $\mathrm{F}^{(B,\varepsilon)}$ 作用下，它映为乘以 $\mathrm{F}_\alpha(S)$ 和 $\mathrm{F}^{(B,\varepsilon)}(S)$ 的自同态

$$\mathbf{k} = \mathcal{F}_\alpha(\varnothing_1) = \mathcal{F}_{(B,\varepsilon)}(\varnothing_1). \tag{5.18}$$

必然地，映射 ϕ_m 是包含映射，因为 $A_\alpha(m)$ 与自身的配对（通过管状配边）是非退化的。



FIGURE 5.2.1. 把手元 h_α （以及 h_B）显示在左侧，手柄态射（在 $A_\alpha(1)$ 上乘以 h_α，在 B 上乘以 h_B）显示在右侧。

由于 ϕ 保留了闭曲面的求值，拓扑理论 α 与交换弗罗贝尼乌斯代数 (B,ε) 所对应的拓扑量子场论的生成函数相等：

$$Z_\alpha(T) = Z_{(B,\varepsilon)}(T). \tag{5.19}$$

推论 5.3。一个二维拓扑理论 α 定义在代数闭域 $\mathbf{k}$ 上，且嵌入到定义在 $\mathbf{k}$ 上的拓扑量子场论中，其生成函数为 $Z_\alpha(T)$，如 (5.11) 或 (5.12)所示。

这直接由命题 5.2得出。该推论给出了 必要 条件，使α 能够嵌入拓扑量子场论。注意，方程（5.11）和（5.12）对 $Z_\alpha(T)$ 的限制比有理性条件 $Z_\alpha(T) = P(T)/Q(T)$严格得多；后者是 α具有有限维态空间的判据。不过，这一条件对域没有任何限制。

注 5.4. 在求值 α 的拓扑理论中，单个圆的状态空间 $A_\alpha(1)$ 也自然构成一个交换弗罗贝尼乌斯代数，其乘法、单位和迹配边分别给出相应结构。因此，

$$\phi_1 : A_\alpha(1) \longrightarrow B$$

是交换弗罗贝尼乌斯代数的态射。

代数 $A_\alpha(1)$ 有一个生成元，即把手元 h_α，见图 5.2.1。乘以此元即为把手态射 $A_\alpha(1) \xrightarrow{Đ} A_\alpha(1)$，见图 5.2.1。同样，$B$有把手元 h_B，且 $\phi_1(h_\alpha) = h_B$。于是，我们可以将 $A_\alpha(1)$ 认作由 h_B生成的 B 的子代数 $\mathbf{k}h_B$：

$$A_\alpha(1) \cong \phi_1(A_\alpha(1)) = \mathbf{k}\langle h_B\rangle \subset B. \tag{5.20}$$

5.3. 二维伪拓扑量子场论。现在假设求值 α 是范畴 Cob_2 的一个伪特征标，该范畴由二维定向配边构成，其取值于特征零的代数闭域 $\mathbf{k}$。我们交替使用“伪特征标”和“伪拓扑量子场论”这两个术语。

由于 Cob_2 只有一个生成对象 $\mathbb{S}^1$（圆），因此伪特征标 α（或其生成函数 $Z_\alpha(T)$）具有这样的性质：对于某个 $d \geq 0$，将反对称化算子$e^-_{X,d+1}$ 补全为任意闭配边，并通过 α 求值，结果均为 0。满足这一条件的最小 d 称为 α 在 $\mathbb{S}^1$上的次数。

取一个配边 h，从 $d+1$ 个圆的副本 $\sqcup_{d+1}\mathbb{S}^1$ 映到自身。假设在 h 同一侧的两个圆 h（要么在顶部，要么在底部）属于 h的同一个连通分支。必要时，按照命题 $he^-_{\mathbb{S}^1}$、$_{d+1}$ 或 $e^-_{\mathbb{S}^1}$ 的证明中所述，通过置换对 $_{d+1}h$ 进行共轭，我们可以使这两个圆彼此相邻，见图 4.10和图 5.3.1。

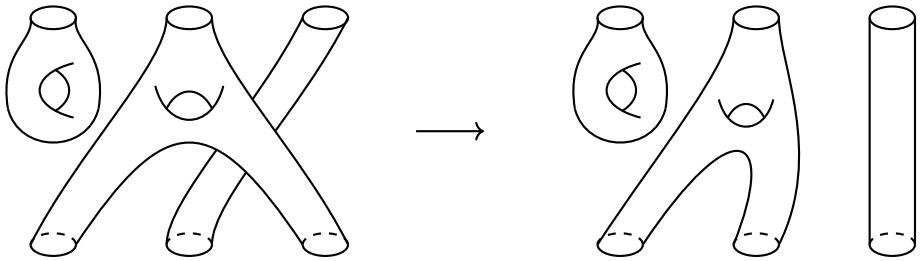


FIGURE 5.3.1. 在图的底部乘以一个置换h，会使同一连通分支上的两个圆靠到一起。于是得到$he^{-}_{\mathbb{S}^1,\ 3} = h(23)(23)e^{-}_{\mathbb{S}^1,\ 3} = -(h(23))e^{-}_{\mathbb{S}^1,\ 3}$。在配边 $h(23)$ 中，同一分支上的两个圆彼此相邻。

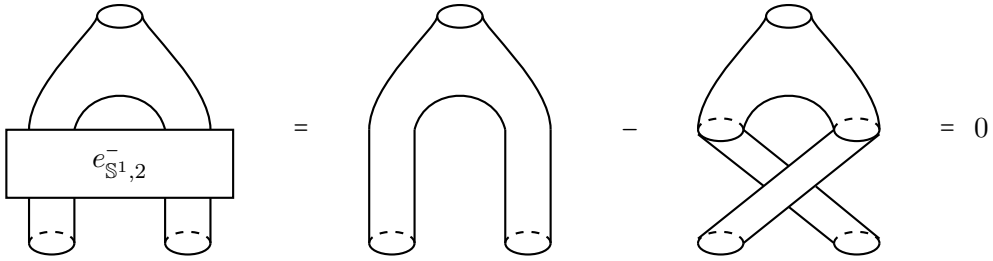


FIGURE 5.3.2. 沿同一连通分支上的两个圆进行反对称化，结果为 0。

从较大的反对称化算子 $e^{-}_{\mathbb{S}^1}$中，取出作用在这两个圆上的二阶反对称化算子 $d{+}1$，见图 5.3.2 ，可得 $he^{-}_{\mathbb{S}^1,\ d+1} = 0$ 或 $e^{-}_{\mathbb{S}^1,\ d+1}h = 0$，具体取决于这些圆是在底部还是顶部。

这就将伪特征条件归结为这样的配边：所有 $d+1$ 底部的圆都 h属于不同的分支 h，顶部的 $d+1$圆也同样如此。进一步通过置换进行共轭（由于反对称化算子，这些置换至多改变 $he^{-}_{\mathbb{S}^1}$的闭合 $d{+}1$ 求值的符号），我们可以将考察范围缩小到 h 由左侧的若干竖直环带构成的配边，每个环带可以带有一个或多个把手；右侧则是亏格为 0 或更高的曲面，用来封闭圆以及顶部和底部，见左侧的图5.3.3 。

这些二维配边可以用带缺陷的一维配边进行组合编码，如右侧图5.3.3 所示。

我们看到，只需针对能够用一维直线和半区间编码的特殊配边来检验 α 上的伪特征条件；这些直线和半区间所带的缺陷类型均为单一类型，且不需要其他标签（直线上的 n 缺陷用一个点表示，其旁边标有 n ）。这些带缺陷的一维配边可以解释为带内部端点的布劳尔范畴的一个特例，具体如下。

考虑范畴 C_1 ，它只有一个对象 X ，以及一个生成态射 $x : X \to X$，且对 x 的幂没有任何关系。构造布劳尔范畴 $\mathsf{B}(\mathsf{C}_1)$。后者是一个由一维定向配边构成、带有无标记点的范畴。

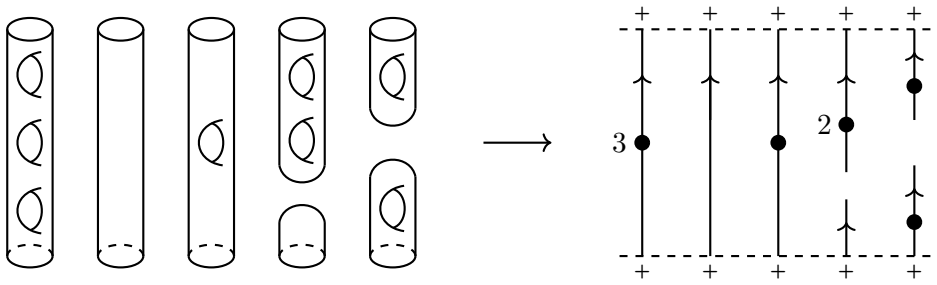


FIGURE 5.3.3. 左：配边的标准形，在 S_n 上下两端置换作用下的等价类；其中同一侧的任意两个圆都不属于同一个连通分支。右：用带内部端点和缺陷的一维配边对这类配边进行编码。

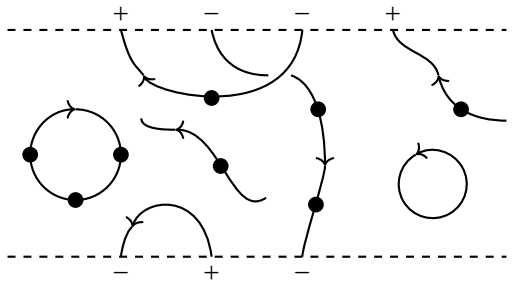


FIGURE 5.3.4. $\mathrm{B}'(\mathrm{C}_1)$中的一个态射。

接下来,我们将 $\mathrm{B}(\mathrm{C}_1)$ 扩展为带端点的 Brauer 范畴。我们使用协变函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X,*) \ :\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathsf{Sets}, \tag{5.21}$$

分别为反变函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(*,X) \ :\mathcal{C}_1^{\mathsf{op}} \longrightarrow \mathsf{Sets}, \tag{5.22}$$

并为范畴 C_1 和上述两个函子构造带端点的 Brauer 范畴 $\mathrm{B}'(\mathrm{C}_1)$。

由此得到的幺半范畴，其态射是定向一维流形之间的定向一维配边。每个连通分支都可以带有若干个点。浮动分支是饰有点的定向区间和圆。图5.3.4 给出了范畴 $\mathcal{B}'(\mathcal{C}_1)$中的一个态射示例。

存在一个对称幺半函子

$$\mathcal{F}_1 \ : \ \mathcal{B}'(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathsf{Cob}_2 \tag{5.23}$$

它将 X 映到一个定向圆，并将一条带点的竖直线映到图5.2.1中的手柄态射。对偶对象 X^* 则映到一个方向相反的圆。特别地，尽管 X 和 X^* 在$\mathcal{B}'(\mathcal{C}_1)$中并不同构，但它们在$\mathsf{Cob}_2$ 中的像是同构的。

函子 $\mathcal{F}_1$将带有 n个点的圆映射到亏格为 $n+1$的连通曲面，见图 5.3.5。该函子还将带有 n 个点的区间映射到亏格为 n 的连通曲面。

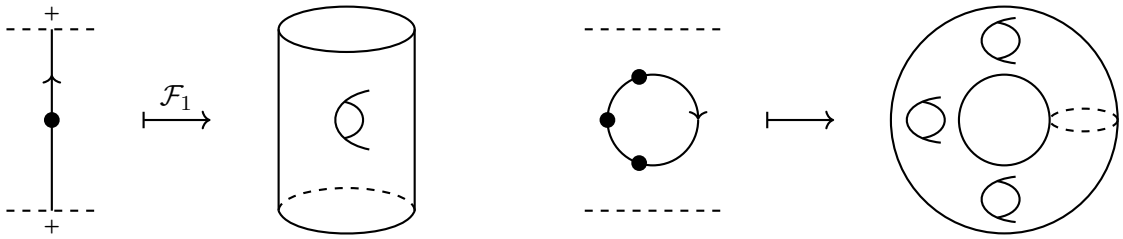


FIGURE 5.3.5. 左：函子 F_1 将一个带有一个缺陷的一维配边映射到一个带有一个把手的曲面。右：一个带有三个缺陷的圆映射到一个亏格为四的曲面。

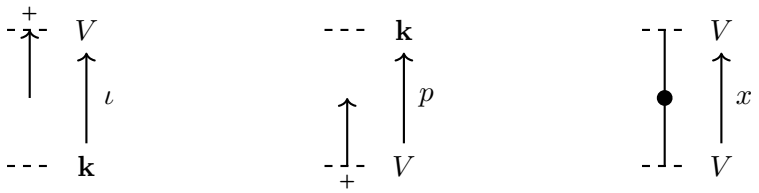


FIGURE 5.3.6. 诱导映射 ι, p, x 的表示 $V_1 = \mathbf{k} \oplus V$ 的配边。

假设 α 是 Cob_2 上的伪特征标，它将亏格为 n 的闭连通曲面映射为 α_n, $n \geq 0$。

通过函子 F_1 将 α 从 Cob_2 拉回到 $\mathsf{B}'(\mathsf{C}_1)$，得到 $\mathsf{B}'(\mathsf{C}_1)$上的一个伪特征标，记作 α^*；它将带有 n个点的圆映为 α_{n+1}，将带有 n个点的区间映为α_n。

由命题 4.15 可知，任意取值于一个代数闭域 $\mathcal{B}'(\mathcal{C}_1)$ 的伪特征标 $\mathbf{k}$ （其特征为零）都来自某个半单表示的特征 V_1，该表示是 $\mathcal{C}_1$ 的表示，以及两个函子(5.21), (5.22).

表示 V_1 将基域 $\mathbf{k}$ 赋予单位对象 $\mathbf{1}$，并将一个向量空间 V赋予对象 X。定向半区间诱导出映射 ι 和 p，它们分别在 $\mathbf{k}$ 与 V之间沿相反方向作用；而自同态 $x : X \longrightarrow X$ 在 V 上诱导出一个自同态，记作 h，见图 5.3.6。

我们用图 ι、 p、 h 表示这两个向量空间及其映射；该图见图 5.3.7，包含两个顶点 v_0、 v_1 两条定向边和一个环，环位于 v_1。数据 $\mathbf{k}$ V 以及这三个映射定义了相应箭图的一个特定表示。

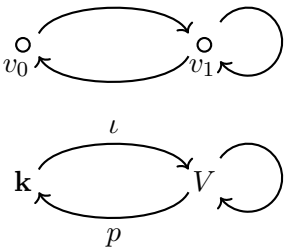
复合

$$p h^n \iota : \mathbf{k} \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{h^n} V \xrightarrow{p} \mathbf{k}$$

是一个标量，等于带有 n个点的定向区间 I_n 的求值 α^*。函子 F_1将 I_n 映射为 S_n，即亏格为 n的闭连通曲面，因此

$$p h^n \iota = \alpha^*(I_n) = \alpha(S_n) = \alpha_n.$$

同样，$\mathcal{F}_1$ 将一个带有 n 个点的圆映射为 S_{n+1}，一个亏格为 $n+1$ 的连通曲面，见图5.3.5。在拓扑量子场论 V_1 中，带有 n 个点的圆映射为 n的次方的迹



$$\left.\begin{array}{c} ph^n\iota = \alpha_n \\ \mathrm{tr}_V(h^n) = \alpha_{n+1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad ph^{n+1}\iota = \mathrm{tr}_V(h^n)$$

FIGURE 5.3.7. 左：表示我们空间与映射数据的箭图。右：关于 ι、p 和 h的关系。

h，因此 $\mathrm{tr}_V(h^n) = \alpha_{n+1}$ 综上，我们得到以下关系

$$p\,h^n\iota = \alpha_n, \quad \mathrm{tr}_V(h^n) = \alpha_{n+1}, \quad n \geq 0. \tag{5.24}$$

在代数闭域 $\mathbf{k}$ 上，自同态 h 的 V可化为上三角形式。假设 h的特征值 0 的重数为 $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$，非零特征值为 λ_1、…、λ_s，其重数分别为 m_1、…、$m_s \in \{1, 2, \dots\}$。那么

$$\mathrm{tr}_V(h^n) = \sum_{i=1}^{s} m_i\lambda_i^n$$

and

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_{n+1}T^n = \sum_{n\geq 0} \mathrm{tr}_V(h^n)T^n = m + \sum_{n\geq 0}\sum_{i=1}^{s} m_i\lambda_i^n T^n = m + \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{1-\lambda_i T}.$$

附加项 m 来自 h的核，它对 h^0 的迹有贡献，但对 $n \geq 1$的迹 h^n 没有贡献。注意，h^n 的迹无法提供关于 α_0 （二维球面的求值）的信息，因为将 $\mathbf{F}_1$ 作用于带点的圆时，只会出现亏格为 1 或更高的曲面。将上式乘以 T 并加上 α_0，我们便得到关于 α生成函数的强约束：

命题 5.5. 取值于特征为零的代数闭域 $\mathbf{k}$ 的 Cob 上伪特征标 α 的生成函数是有理的，且具有以下形式：[2]

$$Z_\alpha(T) = \alpha_0 + mT + \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i T}{1-\lambda_i T} = \mu + mT + \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i\lambda_i^{-1}}{1-\lambda_i T}, \quad m \in \{0,1,\dots\},\ m_i \in \{1,2,\dots\},\ \lambda_i \in \mathbf{k}^*, \tag{5.25}$$

[s]其中 $\mu = \alpha_0 - \sum m_i\lambda_i^{-1}$。该伪特征标的次数为 [i=1]

$$\deg_\alpha(\mathbb{S}^1) = m + \sum_{i=1}^{s} m_i,$$

这也是 $Z_\alpha(T)$ 中一次项的系数。

允许 $s = 0$ 这种情形，此时生成函数是线性的。

我们将证明，上述生成函数并非都来自伪特征标。首先注意，二维拓扑量子场论的生成函数必然是 Cob_2 的伪特征标的生成函数。代数闭

域$\mathbf{k}$ 上的分类见命题 5.2。注意，该分类与命题 5.5 针对 $m \geq 2$的分类相同。特别地，我们得到以下结果。

推论 5.6。 任何形如 (5.25) 且满足 $m \geq 2$ 的函数，都是 $\mathbf{k}$值伪特征标 Cob_2 的生成函数，其中 $\mathsf{char}(\mathbf{k}) = 0$ 且 $\mathbf{k} = \mathbf{k}$。

现在考虑剩余的情形 $m = 0, 1$. 当 $m = 0$时，二维拓扑量子场论的生成函数受到更多限制，见（5.12）；而 $m = 1$ 对于二维拓扑量子场论是不可能的。由于 $m =$ 核的维数(h)，这些情形分别对应于 $h : V \longrightarrow V$可逆（$m = 0$），以及核(h)为一维（$m = 1$）。

回顾关系式（5.24），如下所示：

$$p h^n \iota = \alpha_n, \quad \mathsf{tr}_V(h^n) = \alpha_{n+1}, \quad n \geq 0. \tag{5.26}$$

特别地，

$$p h^{n+1} \iota = \mathsf{tr}_V(h^n), \quad n \geq 0. \tag{5.27}$$

由于 $p h^{n+1} \iota = \mathsf{tr}_V(\iota p h^{n+1})$，我们看到

$$\mathsf{tr}_V(h^n(h \iota p - \mathsf{id}_V)) = 0, \quad n \geq 0. \tag{5.28}$$

现在考虑 $m = 0$ 在生成函数中的情形，即 $\ker(h) = 0$ 以及自同态 h 可逆的情形。设 $h^{-1} = P(h)$ 是 h中的某个多项式。对方程（5.28）作线性组合，得到

$$\mathsf{tr}_V(h^{-1}(h \iota p - \mathsf{id}_V)) = 0$$

或者说

$$\mathsf{tr}_V(\iota p) = \mathsf{tr}_V(h^{-1}).$$

因此，

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i^{-1}$$

并且，当 $m = 0$ （等价地，当 h 可逆时），伪特征标 α 的生成函数具有如下形式

$$Z_\alpha(T) = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i \lambda_i^{-1}}{1 - \lambda_i T}, \quad m_i \in \{1, 2, \dots\}, \ \lambda_i \in \mathbf{k}^*,$$

这与把手元 h 可逆的二维拓扑量子场论可能具有的生成函数相同，见命题 5.2 和（5.12）。因此，所有这类函数确实都是 Cob_2 的伪特征标生成函数。

剩下的情形是 $m = 1$。我们分几步来处理。

I. 首先考虑对角 h 的情形，其特征值为 0、λ_1、.....、λ_N，且必有 $\lambda_i \neq 0, 1 \leq i \leq N$。在 V的某个适当基下，我们可以写成

$$p = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_N \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}, \quad \iota = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

这些关系为

$$\alpha_0 = \sum_{i=0}^{N} p_i a_i, \tag{5.30}$$

$$\alpha_n = p_1 a_1 \lambda_1^n + \ldots + p_N a_N \lambda_N^n, \quad n \geq 1, \tag{5.31}$$

$$\alpha_1 = N + 1, \tag{5.32}$$

$$\alpha_n = \lambda_1^{n-1} + \ldots + \lambda_N^{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{5.33}$$

令关于 $n = 2$、3、...、$N+1$ 的第二个和第四个关系中的右端项相等，并将所得关系写成矩阵形式，得到方程

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_N^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \ldots & \lambda_N^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N+1} & \lambda_2^{N+1} & \ldots & \lambda_N^{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 a_1 \\ p_2 a_2 \\ \vdots \\ p_N a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \ldots + \lambda_N \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_N^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{N+1} + \ldots + \lambda_N^{N+1} \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

左端的 $N \times N$ 矩阵是一个对角矩阵与范德蒙德矩阵的乘积，其中对角矩阵的元素为 λ_i^2。假设 λ_1、...、λ_N 互不相同。那么该矩阵可逆，且方程组有唯一解

$$p_i a_i = \lambda_i^{-1}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

将其代入关于（5.31）的关系 $n = 1$，得到 $\alpha_1 = N$，这与关系$\alpha_1 = N + 1$相矛盾，见（5.32）。假设 λ_i 两两互不相同，便得到矛盾。

为处理某些特征值 λ_i 相等的情形，假设其中互不相同的特征值为 μ_1、...、μ_r，其重数分别为 m_1、...、m_r，从而 $m_1 + \ldots + m_r = N$。对 V 的基向量重新排列，使特征值依次为 0、μ_1、...、μ_1、μ_2、...、μ_2、μ_3、...、μ_r，且 h 的矩阵具有分块形式 $h = (0) \oplus \mu_1 \mathrm{I}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mu_r \mathrm{I}_{m_r}$，其中 I_m 是 $m \times m$ 单位矩阵。计算复合 $p h^k \iota$，对于 $k > 0$，得到

$$\begin{aligned} \alpha_k &= p h^k \iota = p_1 \mu_1^k a_1 + \ldots + p_N \mu_r^k a_N = (p_1 a_1 + \ldots + p_{m_1} a_{m_1}) \mu_1^k + \\ &\quad + (p_{m_1+1} a_{m_1+1} + \ldots + p_{m_1+m_2} a_{m_1+m_2}) \mu_1^k + \ldots + (p_{N+1-m_r} a_{N+1-m_r} + \ldots + p_N a_N) \mu_r^k \\ &= PA_1 \mu_1^k + PA_2 \mu_2^k + \ldots + PA_r \mu_r^k, \end{aligned}$$

其中

$$PA_1 := p_1 a_1 + \ldots + p_{m_1} a_{m_1}, \quad PA_2 := p_{m_1+1} a_{m_1+1} + \ldots + p_{m_1+m_2} a_{m_1+m_2}, \quad \ldots$$

连同以下关系

$$\alpha_{n+1} = \mathrm{tr}_V(h^n) = \sum_{i=1}^{r} m_i \mu_i^n,$$

将 α_2、.....、α_{r+1} 中每个元素对应的两个表达式相等，得到矩阵方程

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_r^2 \\ \mu_1^3 & \mu_2^3 & \ldots & \mu_r^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{r+1} & \mu_2^{r+1} & \ldots & \mu_r^{r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PA_1 \\ PA_2 \\ \vdots \\ PA_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \mu_1 + \ldots + m_r \mu_r \\ m_1 \mu_1^2 + \ldots + m_r \mu_r^2 \\ \vdots \\ m_1 \mu_1^r + \ldots + m_r \mu_r^r \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

左侧的 $r \times r$ 矩阵是非退化的，因为 $\mu_i \neq 0$ 两两不同。因此，这个系统有一个唯一解，很容易猜出：

$$PA_i = \frac{m_i}{\mu_i}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

写下 α_1 的两个表达式：

$$p\,h\iota \;=\; \alpha_1 \;=\; \mathrm{tr}_V(h^0) \;=\; \dim(V) = N+1,$$

导致矛盾

$$p\,h\iota = \sum_{i=1}^{r} PA_i\mu_i = \sum_{i=1}^{r} m_i = N \neq N+1.$$

我们看到，当 5.26 中的上述方程组在 h是半单的且 $\dim(\text{核}\,h) = 1$ 时没有解。

II. 接下来，设 h 至少有两个具有相同广义特征值 $\lambda \neq 0$ 的非半单Jordan块。这些块中的每一个都有一个向量 v_i, $i = 1, 2$，满足 $hv_i = \lambda v_i$。映射 $p : V \twoheadrightarrow \mathbf{k}$ 限制在 $\mathbf{k}v_1 \oplus \mathbf{k}v_2$ 上时具有核。取核 $p(v) = 0$ 中的非零向量 v。那么 $(0, \mathbf{k}v)$ 是 $(\mathbf{k}\ V)$ 的子表示，因为它在 p、ι 和 h 的作用下保持不变。

根据命题 $(\mathbf{k}\ V)$ 4.15，我们可以假设 5.3.7是图 中的箭图中的半单表示。于是 $(0,\mathbf{k}v)$ 具有补子表示。将作用限制到 h 上会导致矛盾，因为两个非半单Jordan块之和中的那个一维半单表示，即使与 $\mathbf{k}[h]$的任何其他有限维表示取直和，也不可能有补表示。注意，(p, ι, h) 的半单性条件并不能立即推出 h的半单性，但可以排除存在一对具有相同 λ的非半单Jordan块。

现在我们已将问题归结为以下情形：h 对其每个特征值至多有一个非半单 Jordan 块。

III. 接下来，我们讨论 h 有一个单个若尔当块$J_{\lambda,\ N}$（除 (0) 直和项外）的情形：

$$p = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_N \end{pmatrix}, \quad h = (0) \oplus \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, \quad \iota = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

h的幂很容易写出：

$$h^n = (0) \oplus \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{n-N+1}\lambda^{n-N+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{n-N+2}\lambda^{n-N+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & \binom{n}{n-N+3}\lambda^{n-N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

约定 $\binom{n}{m} = 0$ if $m < 0$。令

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{N+1-i} p_j a_{i+j}, \quad 0 \le i \le N-1 \tag{5.38}$$

方程（5.27），另见下文

$$p\,h^n\iota = \alpha_n = \mathsf{tr}_V(h^{n-1}),\quad n \geq 2, \tag{5.39}$$

对于 $n = 2,\ 3,\ \ldots,\ N+1$ 可写为

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \lambda^3 & \binom{3}{1}\lambda^2 & \binom{3}{2}\lambda & \ldots & 0 \\ \lambda^4 & \binom{4}{1}\lambda^3 & \binom{4}{2}\lambda^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{N+1} & \binom{N+1}{1}\lambda^N & \binom{N+1}{2}\lambda^{N-1} & \ldots & \binom{N+1}{N-1}\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\lambda \\ N\lambda^2 \\ N\lambda^3 \\ \vdots \\ N\lambda^N \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

注意，左侧的 $N \times N$ 矩阵由以下方式给出：取第一列 $(\lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^{N+1})^T$，其后的各列则是该列的 j 阶导数 $(j!)^{-1}d^j/d\lambda^j$，并依次乘以系数 $j = 1, \ldots, N-1$。

左侧的 $N \times N$ 矩阵 Y_N 可逆。我们可以先从最后一行减去第 $(N-1)$ 行乘以 λ，再从第 $N-1$ 行减去第 $(N-2)$ 行乘以 λ，最后从第二行减去第一行乘以 λ，由此看出这一点。所得矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^3 & \binom{3}{1}\lambda^2 & \binom{3}{2}\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda^N & \binom{N}{1}\lambda^{N-1} & \binom{N}{2}\lambda^{N-2} & \ldots & \binom{N}{N-2}\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

将截断矩阵 Y_{N-1} 放入右下角，再添加第一列 $(\lambda^2, 0, \ldots, 0)^T$ 和第一行 $(\lambda^2, 2\lambda, 1, 0, \ldots, 0)$，即可得到该矩阵。重复这一过程可知，$\det(Y_N) = \lambda^{2N} \neq 0$。因此，关于 $\gamma_0, \ldots, \gamma_{N-1}$ 的上述线性方程组有唯一解。它由下式给出

$$\gamma_0 = \frac{N}{\lambda},\quad \gamma_i = 0,\quad 1 \leq i \leq N-1.$$

写出方程

$$p\,h\iota = \alpha_1 = \mathsf{tr}_V(\mathsf{I}_{N+1}) = N+1 \tag{5.41}$$

得到 $\lambda\gamma_0 = N = N+1$，这产生了矛盾。

IV. 现在来看 h 带有一个非半单 λ-Jordan 块和一个或多个半单（或 1×1）λ-Jordan 块的情形：

$$p = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \ldots & p_M \end{pmatrix},\quad h = (0) \oplus J_{\lambda,N} \oplus (\lambda\mathsf{I}_1)^{M-N},\quad \iota = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

其中 $J_{\lambda,\ N}$ 是大小为 $N\times N$ 的 Jordan 块的标准形式，而 $(\lambda \mathrm{I}_1)^{M-N}$ 是大小为 $M-N$ 乘以 λ 的单位矩阵。在这种情况下，γ_i 对于 $1\le i\le N$ 的定义与（5.38）中相同，而

$$\gamma_0=\sum_{j=0}^{M}p_ja_j$$

通过增加对应于 h的半单尾部的额外项来延长。然后，方程（5.40）被替换为同一个方程，但其右侧列向量为$(M\lambda,M\lambda^2,\dots,M\lambda^N)^T$，只需将每一项中的系数 N转换为 M。该系统有唯一解

$$\gamma_0=\frac{M}{\lambda},\quad \gamma_i=0,\ 1\le i\le N-1.$$

将这些值代入关于 α_1 的方程后，再次得到矛盾，从而得出 $M=M+1$。

V. 现在假设 h 由（0）块和若干个非半单 Jordan 块 J_{λ_i,N_i}, $N_i>1$ 组成，其特征值 λ_i 两两不同：

$$h=(0)\oplus J_{\lambda_1,N_1}\oplus\ldots\oplus J_{\lambda_r,N_r},\quad N_1+\ldots+N_r=N.$$

对于每一对 (λ_i,N_i)，构造一个 $N\times N_i$ 矩阵 T_i，其第一列为 $(\lambda_i^2,\lambda_i^3,\ldots,\lambda_i^{N+1})^T$，后续各列则由对第一列各项 $j=1,\ldots,N_i-1$ 求归一化的 j 阶导数 $(j!)^{-1}d^j/d\lambda^j$ 得到，

$$T_i=\begin{pmatrix}\lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \dots & 0\\ \lambda_i^3 & \binom{3}{1}\lambda_i^2 & \binom{3}{2}\lambda_i & \dots & 0\\ \lambda_i^4 & \binom{4}{1}\lambda_i^3 & \binom{4}{2}\lambda_i^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_i^{N+1} & \binom{N+1}{1}\lambda_i^N & \binom{N+1}{2}\lambda_i^{N-1} & \dots & \binom{N+1}{N_i-1}\lambda_i^{N-N_i}\end{pmatrix}.\tag{5.43}$$

接下来，将这些矩阵组合成一个 $N\times N$ 矩阵

$$T=\begin{pmatrix}T_1 & T_2 & \dots & T_r\end{pmatrix}.\tag{5.44}$$

对于每个 Jordan 块$J_{\lambda_i,\ n_i}$ 定义

$$\gamma_{i,j}=\sum_{s=1}^{N_i+1-j}p_{i,s}a_{i,j+s},\quad 0\le s\le N_i-1,\tag{5.45}$$

其中

$$p_{i,s}=p_{N_1+\ldots+N_{i-1}+s},\quad a_{i,j+s}=a_{N+1+\ldots+N_{i-1}+j+s}.$$

定义 $N\times 1$ 矩阵 Γ 为

$$\Gamma^T=\begin{pmatrix}\gamma_{1,0} & \dots & \gamma_{1,N_1-1} & \gamma_{2,0} & \dots & \gamma_{2,N_2-1} & \dots & \gamma_{r,0} & \dots & \gamma_{r,N_r-1}\end{pmatrix}.$$

最后，考虑 $N\times 1$ 矩阵

$$R^T=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{r}N_i\lambda_i & \sum_{i=1}^{r}N_i\lambda_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{r}N_i\lambda_i^N\end{pmatrix}.$$

由 α_2，……， α_{N+1}的两个表达式所得的等式可以写成矩阵方程

$$T\Gamma = R. \tag{5.46}$$

引理 5.7。 T 的行列式具有如下形式

$$\det T = u \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{2N_i} \cdot \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^{N_i N_j},$$

其中， u 是一个可逆有理数。

该引理在 [MaS18] 中得到证明。该文第 5.1.1 节中的矩阵 $\mathrm{U}[0]$ 是上述矩阵 T 的一种推广。需要将 $\mathrm{U}[0]$ 的各列乘以阶乘，使第一行由 α_1的幂组成（采用 [MaS18]，中的记号）；然后还要将各行乘以阶乘，使各项成为二项式系数与 α_i^j 的乘积。将矩阵逆时针旋转 90 度，再令 $\ell_0 = 2$ 取特定值，并将 α_i 重新标记为 λ_i 、将 L_0 重新标记为$N+2$，即可得到上述矩阵 T。 [MaS18] 中的引理 5.2、引理 5.3 以及引理 5.4 的证明表明， T 的行列式具有引理 5.7 中所示的形式。 □

在我们的实验中，参数为 $u = \pm 1$。

由于 $\lambda_i \neq 0$ 和 λ_i两两不同，我们可知方程 (5.46) 有唯一解，可以猜测该解为

$$\gamma_{i,0} = \frac{N_i}{\lambda_i}, \quad \gamma_{i,j} = 0, \ j > 0, \quad 1 \le i \le r. \tag{5.47}$$

令 α_1 的两个表达式相等，现在得到矛盾 $N = N + 1$。

VI. 最一般的情形是：对于给定的特征值 λ_i，至多有一个非半单 Jordan 块和若干个 1×1块。此情形只需对上述论证稍作修改，仅改变 (5.46) 右侧的列矩阵 R。这恰好是前面所述步骤 **III**与 **IV**之间的区别，其中矩阵 T 保持不变，而唯一解则通过在 (5.47) 中用 M_i 替换 N_i 得到，其中 $M_i - N_i$ 是特征值为 λ_i的半单块数量。

至此，我们证明了不存在如上所述满足 $\dim \ker(h) = 1$ 的系统 (p, ι, h)。

注记 5.8. (T 5.44) 中的矩阵 是合流 Vandermonde 矩阵的一种变体。这些矩阵及其行列式出现在随机矩阵理论中[Meh67], ，也出现在逼近理论和丢番图几何中，参见 [MaS18] 及其中的参考文献。

注 5.9. 证明不可能性的另一种简短方法如下。序列$p\,h^n\,\iota$ 是矩阵 h^n各项的固定线性组合，也就是说，是形如 $\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n(n-1)\lambda^n$ 等的序列的线性组合。（从公式 (5.37) 中取出的有限个序列，用于 h^n 及其针对具有多个 Jordan 块和不同特征值 λ_i的 h 的版本。）一个经典结果指出，这些序列（甚至是将 $n > K$ 限制在某个固定数 K之后所得的尾部）线性无关。直接证明这一点很容易：如果存在一个线性关系，那么生成函数之间也存在相应的线性关系。如果考虑 $n > K$的尾部，那么生成函数之间就存在一个模次数至多为 K的多项式的线性关系。由于这些生成函数对不同的 $\lambda_i \neq 0$ 和 $s > 0$均为 $1/(1-\lambda_i T)^s$，结论便可得出。

另一方面，序列 $ph^n\iota$ 等于序列 $\mathrm{tr}_V(h^{n-1})$，其中$n \geq 2$。由此可知， $ph^n\iota$ 的线性组合中的系数与序列 $\mathrm{tr}_V(h^{n-1})$的系数完全相同；因此，同一公式甚至适用于 $n = 1$ ，而这会导致矛盾，因为 $\mathrm{tr}_V(h^0)$ 中多出了 $1 = \mathrm{tr}_V(\mathrm{I})$，对应于特征值为 0 的子空间。

这种障碍仅在 $m = 1$ 中出现。如果 $m = 2$ （更一般地说， $m > 2$），那么在 h 的分解中可能存在一个特征值为 0 的 2×2 约当块。此时， h^n 的矩阵元素之一就是序列 (0, 1, 0, 0, 0, . . .)。利用这个序列，可以调整 α_1 的错误取值，从而避免矛盾。

本文中我们给出了 $m = 1$ 情形不可能成立的两种证明。第一个证明篇幅较长，但揭示了其与合流范德蒙德行列式和丢番图逼近之间有趣的 [Meh67、MaS18]。

将情形 $m \geq 2$、 $m = 1$ 和 $m = 0$ 合并起来，可得代数闭且特征为 0 的域上二维拓扑场论的伪特征标分类。

定理 5.10. 设 α 是从定向二维余边界范畴Cob_2 到特征为 $\mathbf{k}$的代数闭域0取值的伪拓扑量子场论（伪特征标）。则生成函数 $Z_\alpha(T)$ 是有理的，且具有如下形式 (5.11)或 (5.12) ，如命题 *5.2*所述。特别地，任何这样的伪特征标都嵌入到一个以某个交换 Frobenius 代数 Cob_2 为对象、取值于 (B, ε) 的二维拓扑量子场论中，该代数定义在域 $\mathbf{k}$上。

这一结果可视为研究一维以上伪特征标的第一步。一维情形在数论中有所应用，其中带有 G 标记的缺陷放置在一维流形上；而上述定理讨论的是无缺陷的二维流形。将这一结果推广到带缺陷的二维流形，值得进一步研究。例如，在曲面上放置带标记的零维缺陷，相当于将范畴 Cob_2与一个交换代数耦合，见 [KOK22，节 8]。对这类带装饰的 Cob_2 范畴中的伪特征标进行分类，或可拓展 Buchstaber 和 Rees 关于交换环伪特征标的研究 [BR04] ，以及其向超情形的推广 [KV20]。

References

[BCNR17] Jonathan Brundan、Jonathan Comes、David Nash 和 Andrew Reynolds, *A basis theorem for the affine oriented Brauer category and its cyclotomic quotients* **8** 2017 , Quantum Topol. ( ), 第 1 期, 75 112– 。[BEAEO20] Jonathan Brundan、Inna Entova-Aizenbud、Pavel Etingof 和 Victor Ostrik, *Semisimplification of the category of tilting modules for GL_n* **375** 2020 107331, 37 , Adv. Math. ( ), 。[Bel09] Joel Bellaiche, *Ribet's lemma, generalizations, and pseudocharacters*, 2009年夏威夷檀香山 Clay Math. Institute 暑期学校的两场讲座, https://people.brandeis.edu/~jbellaic/RibetHawaii3.pdf。[Bel12] Jo¨el Bella¨ıche, *Pseudodeformations*, Math. Z. 270 (2012), 第 3-4 期, 1163–1180。[Bel21] , *The eigenbook—eigenvarieties, families of Galois representations, p-adic L-functions*, Pathways in Mathematics, Birkh¨auser/Springer, Cham, [2021] ©2021 。[BEP22] Daniel Berwick-Evans 和 Dmitri Pavlov, *Bundles one dimensional topological field theories are vector bundles with connection* 1501 00967 2022 1 23 , arXiv: . ( ), – 。[BGHL14] Anna Beliakova、Zaur Guliyev、Kazuo Habiro 和 Aaron D. Lauda, *Trace as an alternative decategorification functor* **39** 2014 4, 425 480 , Acta Math. Vietnam. ( ), 第 – 期。[BHLv17] Anna Beliakova、Kazuo Habiro、Aaron D. Lauda 和 Marko ˇZivkovi´c, *Trace decategorification of categorified quantum $\mathfrak{sl}_2$* **367** 2017 1 2, 397 440 , Math. Ann. ( ), 第 - 期, – 。

[BHMV95] Christian Blanchet、Nathan Habegger、Gregor Masbaum 和 Pierre Vogel，*Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket* **34** 1995 4, 883 927 ，Topology ( )，第 – 期。[BPW19] Anna Beliakova、Krzysztof K. Putyra 和 Stephan M. Wehrli，*Quantum link homology via trace functor I* **215** 2019 2, 383 492 ，Invent. Math. ( )，第 – 期。[BR04] Viktor M. Buchstaber 和 E. G. Rees，*Rings of continuous functions symmetric products and* ，，，Russ. Math. *Frobenius algebras* **59** 2004 1, 125 145 Surv. ( )，第 – 期。[BR11] Jean Berstel 和 Christophe Reutenauer，*Noncommutative rational series with applications*，数学及其应用百科全书，第 137 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2011年。[BSW20] Jonathan Brundan、Alistair Savage 和 Ben Webster，*On the definition of quantum Heisenberg category* **14** 2020 2, 275 321 ，Algebra Number Theory ( )，第 – 期。[BSW21] ，*Foundations of Frobenius Heisenberg categories*，J. Algebra 578 (2021)，115–185。[Car94] Henri Carayol，*Représentations and pseudo-representations (abstract)*，模空间、伽罗瓦表示和 *L*-函数（日文）（京都，1993年、1994年），第 884 号，京都大学数学科学研究所，1994年，第 24–26 页。[Che14] Ga ¨etan Chenevier，*The p-adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group and pseudorepresentations over arbitrary rings* ，自守形式和伽罗瓦表示。第 卷，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，第 414 卷，Cambridge Univ. Press，剑桥，2014年，第 221– 285 页。[CP94] Alcides Caetano 和 Roger Francis Picken，*An axiomatic definition of holonomy*，Internat. J. Math. 5 (1994)，第 6 期，835–848。[CSvdB21] Kevin Coulembier、Ross Street 和 Michel van den Bergh，*Freely adjoining monoidal duals*，Math. Structures Comput. Sci. 31 (2021)，第 7 期，748–768。[Del90] Pierre Deligne，*Catégories tannakiennes*，《格罗滕迪克纪念文集》，第 II 卷，Progr. Math.，第 87 卷，Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，1990年，第 111–195 页。[DKV09] Manfred Droste、Werner Kuich 和 Heiko Vogler（编），*Handbook of weighted automata*，理论计算机科学专著。欧洲理论计算机科学协会丛书，施普林格出版社，柏林，2009年。[DM82] Pierre Deligne 和 James S. Milne，*Tannakian Categories*，霍奇循环、动机和志村簇，Lecture Notes in Math. 900 (1982)，101–228。[Dot11] Vladimir Dotsenko，*Pseudo-characters (An extended discussion of § 7 in Mazur's paper)*，https://irma.math.unistra.fr/~dotsenko/research/files/Pseudo-characters.pdf (2011)，1–8。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik，*Tensor categories*，数学调查与专著，第 205 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。[EL16] Ben Elias 和 Aaron D. Lauda，*Trace decategorification of the Hecke category*，J. Algebra 449 (2016)，615–634。[Eme18] Kathleen Emerson，*Comparison of Different Definitions of Pseudocharacter*，DataSpace，2018年，博士学位论文——普林斯顿大学，dataspace.princeton.edu/handle/88435/dsp010c483n151。[EO22] Pavel Etingof 和 Victor Ostrik，*On semisimplification of tensor categories*，表示论和代数几何——庆祝 Sasha Beilinson 和 Victor Ginzburg 生日的会议，Trends Math.，Birkh¨auser/Springer，Cham，[2022] ©2022，第 3–35 页。[FKN+05] Michael H. Freedman、Alexei Kitaev、Chetan Nayak、Johannes K. Slingerland、Kevin Walker 和 Zhenghan Wang，*Universal manifold pairings and positivity*，Geom. Topol. 9 (2005)，2303–2317。[GHW22] Eugene Gorsky、Matthew Hogancamp 和 Paul Wedrich，*Derived traces of Soergel categories*，Int. Math. Res. Not. IMRN (2022)，第 15 期，11304–11400。[GIK+23] Paul Gustafson、MEE SEONG IM、Remy Kaldawy、MIKHAIL KHOVANOV 和 Zachary Lihn，*Automata and one-dimensional TQFTs with defects* 2301 00700 2023 1 35 ，arXiv: . ( )，– 。[Han13] Yang Han，*Hattori-Stallings trace and character*，arXiv:1302.7095 (2013)，1–11。[Hat65] Akira Hattori，*Rank element of a projective module*，Nagoya Math. J. 25 (1965)，113–120。[Hd14] Tom Halverson 和 Elise delMas，*Representations of the Rook-Brauer algebra*，Comm. Algebra 42 (2014)，第 1 期，423–443。[Hu20] Mengwei Hu，*Presentations of diagram categories*，PUMP J. Undergrad. Res. 3 (2020)，1–25。[IK21] MEE SEONG IM 和 MIKHAIL KHOVANOV，*Foams iterated wreath products field extensions and Sylvester sums* 2107 07845 2021 1 78 ，，，arXiv: . ( )，– 。

[IK22a] , *One-dimensional topological theories with defects: the linear case*, arXiv:2210.00371 (2022年), 1–41. [IK22b] , *Topological theories and automata*, arXiv:2202.13398 (2022年), 1–70. [Joh19] 肯尼斯·W·约翰逊, *Group matrices, group determinants and representation theory*, 《数学讲义》, 第2233卷, Springer, Cham, 2019, 《弗罗贝尼乌斯的数学遗产》. [Kad99] 拉尔斯·卡迪森, *New examples of Frobenius extensions*, 《大学讲座系列》, 第14卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999. [Kho04] Mikhail Khovanov, *sl(3) link homology*, Algebr. Geom. Topol. 4 (2004), 1045–1081. [Kho14] , *Heisenberg algebra and a graphical calculus*, Fund. Math. 225 (2014), 第1期, 169–210. [Kho20a] , *Decorated one-dimensional cobordisms and tensor envelopes of noncommutative recognizable power series* 2010 05730 2020 1 33 , arXiv: . ( ), – . [Kho20b] , *Universal construction of topological theories in two dimensions*, arXiv:2007.03361 (2020年), 1–56. [KL21] Mikhail Khovanov 和 罗伯特·劳格维茨, *Planar diagrammatics of self-adjoint functors and recognizable tree series* 2104 01417, *Pure Appl. Math. Quarterly* 2021 1 61 , arXiv: . 即将在 ( ) 发表 , – . [KOK22] Mikhail Khovanov 、 VICTOR OSTRIK 和 Yakov Kononov, *Two-dimensional topological theories, rational functions and their tensor envelopes* **28** 2022 4, , Selecta Math. (N.S.) ( ), 第 Paper No. 71 号, 68. [KS15] Mikhail Khovanov 和 拉德米拉·萨兹达诺维奇, *Categorifications of the polynomial ring*, Fund. Math. 230 (2015), 第3期, 251–280. [KS20] , *Bilinear pairings on two-dimensional cobordisms and generalizations of the Deligne category* 2007 11640 2020 1 15 , arXiv: . ( ), – . [KS21] , *Diagrammatic categorification of the Chebyshev polynomials of the second kind*, J. Pure Appl. Algebra 225 (2021年), 第6期, 论文编号106592, 23. [KT19] Mikhail Khovanov 和 田寅, *How to categorify the ring of integers localized at two*, Quantum Topol. 10 (2019), 第4期, 723–775. [KV20] 霍夫汉内斯·M·胡达维尔迪安 和 西奥多·Th·沃罗诺夫, *On our works on the Buchstaber–Rees theory and its generalization* 2002 02395 2020 1 9 , arXiv: . ( ), – . [Lau10] Aaron D. Lauda, *A categorification of quantum sl(2)*, Adv. Math. 225 (2010), 第6期, 3327–3424. [Lew93] 耶日·莱万多夫斯基, *Group of loops, holonomy maps, path bundle and path connection*, Classical Quantum Gravity 10 (1993), 第5期, 879–904. [Lor21] 福斯科·洛雷吉安, *(Co)end calculus*, 《伦敦数学会讲义系列》, 第468卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2021. [MaS18] 塔帕尼·马塔拉-阿霍 和 Louna Sepp¨a¨ala, *Hermite-Thue equation: Padé approximations and Siegel's lemma*, J. Number Theory **191** 2018 345 383 ( ), – . [Maz97] 巴里·马祖尔, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, 《模形式与费马大定理》(马萨诸塞州波士顿, 1995), Springer, 纽约, 1997, 第243–311页. [Meh67] 马丹·拉尔·梅塔, *Random matrices and the statistical theory of energy levels*, 学术出版社, 纽约-伦敦, 1967. [Mei21] Ehud Meir, *Interpolations of monoidal categories and algebraic structures by invariant theory*, arXiv:2105.04622 (2021年), 1–31. [Nys96] 路易丝·尼森, *Pseudo-représentations*, Math. Ann. 306 (1996), 第2期, 257–283. [Pro76] 克劳迪奥·普罗切西, *The invariant theory of n × n matrices* **19** 1976 3, , Advances in Math. ( ), 第 – . [Pro87] , *A formal inverse to the Cayley-Hamilton theorem*, J. Algebra 107 (1987), 第1期, 63–74. [Rey15] Andrew Reynolds, *Representations of the oriented Brauer category*, ProQuest LLC, 密歇根州安娜堡, 2015, 博士论文—俄勒冈大学. [Rou96] Rapha¨el Rouquier, *Caractérisation des caractères et pseudo-caractères*, J. Algebra 180 (1996), 第2期, 571–586. [RRV99] 弗拉基米尔·列塔赫、Christophe Reutenauer 和 阿尔卡季·温特罗布, *Noncommutative rational func-tions and Farber's invariants of boundary links*, 《微分拓扑、无限维李代数及其应用》, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 第194卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999, 第237–246页。

[RW20] Louis-Hadrien Robert 和 Emmanuel Wagner, *A closed formula for the evaluation of foams*, Quantum Topol. 11 (2020), 第3期, 411–487. [Saw95] Stephen Sawin, *Direct sum decompositions and indecomposable TQFTs*, J. Math. Phys. 36 (1995), 第12期, 6673–6680.[SP22] Chris Schommer-Pries, *Commutative Frobenius algebra with non-invertible window element, but not square zero* 434343 , https://mathoverflow.net/questions/ /commutative-frobenius-algebra-with-non-invertible-window-element-but-not-square (2022年), 1.[Sta65] John Stallings, *Centerless groups—an algebraic formulation of Gottlieb's theorem*, Topology 4 (1965), 129–134.[Tay91] Richard Taylor, *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. 63 (1991), 第2期, 281–332.[WE13] Carl William Wang Erickson, *Moduli of Galois Representations*, ProQuest LLC, 密歇根州安娜堡, 2013, 博士论文—哈佛大学. [Wil88] Andrew Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. 94 (1988), 第3期, 529–573. [WWE17] Preston Wake 和 Carl Wang-Erickson, *Ordinary pseudorepresentations and modular forms*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B 4 (2017), 53–71. [WWE18] , *Pseudo-modularity and Iwasawa theory*, Amer. J. Math. 140 (2018), 第4期, 977–1040.[Zim14] Alexander Zimmermann, *Representation theory: A homological algebra point of view*, Algebra and Applications, 第19卷, Springer, Cham, 2014.

Department of Mathematics, United States Naval Academy, Annapolis, MD 21402, USA*Email address*: meeseongim@gmail.com

Department of Mathematics, Columbia University, New York, NY 10027, USA*Email address*: khovanov@math.columbia.edu

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA
Email address: vostrik@math.uoregon.edu