arXiv:2303.02709v1 [math.FA] 5 Mar 2023

A Lorentz invariant sharp Sobolev inequality on the circle

Pengyu Le

摘要

我们证明圆上的以下尖锐索博列夫不等式

$$\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta\geq-\frac{4\pi^2}{\int_{\mathbb{S}^1}v^{-2}\mathrm{d}\theta},$$

等号在 $v^{-2}(\theta)=\frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_o)}$ 时成立，其中 $k>0,\ \alpha\in(-1,1),\theta_0\in\mathbb{R}$。若 v 在圆上的某处为零，则

$$4\int_{\mathbb{S}^1}(v')^2\mathrm{d}\theta\geq\int_{\mathbb{S}^1}v^2\mathrm{d}\theta.$$

证明该不等式的基本工具是圆上的重排不等式和变分法。我们研究泛函 $\mathcal{F}[v]=\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta$ 在约束 $\int_{\mathbb{S}^1}v^{-2}\mathrm{d}\theta=2\pi$ 下的变分问题。泛函 $\mathcal{F}$ 的一个重要几何特征是它在洛伦兹群作用下保持不变，因为 $\mathcal{F}[v]$ 是一条由函数 v^{-2} 参数化、位于三维闵可夫斯基时空光锥中的类空曲线的两个零膨胀之积的积分。该约束下 $\mathcal{F}$ 的全局极小值由光锥的类空平面截面给出。我们介绍一种结合对称递减重排与洛伦兹变换的方法。此方法并不局限于本文的范围，也适用于 $\mathbb{S}^n,n\geq1$ 上的其他洛伦兹不变变分问题。作为示例，我们简要介绍如何用此方法证明 $\mathbb{S}^n,n\geq3$ 上的尖锐索博列夫不等式。

目录

1 引言 2 2 问题的动机 5 2.1 光锥中类空曲面的参数化.5 2.2 光锥中类空曲面的几何.6 2.3 泛函 $\mathcal{F}$ 及相应的变分问题.8 3 泛函 $\mathcal{F}$ 10的洛伦兹不变性 4 约束下 $\mathcal{F}$ 的临界点及临界点处的局部分析 12 4.1 约束下 $\mathcal{F}$ 的欧拉-拉格朗日方程.12 4.2 约束下 $\mathcal{F}$ 的临界点.12 4.3 约束下临界点处 $\mathcal{F}$ 的二阶变分.13 5 对称递减重排与重排不等式 15 6 $\mathcal{F}$ 的递减序列及其非递减的最小值 15 6.1 通过洛伦兹变换增大函数的最小值.16 6.2 构造 $\mathcal{F}$ 的递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使其最小值非递减 . . . 18

6.3 递减序列的子序列极限 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathcal{F}$ .206.4 的子序列极限的有界性 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ .21子序列极限的泛函 $\mathcal{F}$ 的子序列极限 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ .24

7 临界点是全局极小化子：不等式的证明 **25**
8 不等式的一些变体 **27**8.1 关于函数的不等式 $[0,l]$ .278.2 立体投影变换.27

9 $\mathbb{S}^n$、$n\geq 3$上的尖锐索博列夫不等式的简要证明 **29**
致谢 **32**
A 推论的证明 **7.2** **32**

1 引言

{节 1}

在本文中，我们证明了圆上的一个尖锐索博列夫不等式

$$\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta\geq-\frac{4\pi^2}{\int_{\mathbb{S}^1}v^{-2}\mathrm{d}\theta}, \tag{1.1}$$

{eqn 1.1}

等号在以下情况下成立：$v^{-2}(\theta)=\frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha}\cos(\theta-\theta_0)$ ~~其中 $k>0$~~, $\alpha\in(-1,1)$, $\theta_0\in\mathbb{R}$。参见定理 7.1。作为上述结果的推论，我们证明，若 v 在圆上某处取值为零，则

$$4\int_{\mathbb{S}^1}(v')^2\mathrm{d}\theta\geq\int_{\mathbb{S}^1}v^2\mathrm{d}\theta.$$

我们从几何考量的角度研究上述不等式。首先考察闵可夫斯基时空中光锥的类空截面 S 的几何，特别是研究一个泛函 $\mathcal{F}[S]$，它是相对于该类空截面的共轭零标架的两个零膨胀乘积的积分。这个积分与广义相对论中的霍金质量密切相关，参见 [H68]。我们观察到关于这个泛函的以下有趣事实（详情见第2.3 小节）：

a. 当闵可夫斯基时空的维数为 ≥ 5 时，我们观察到该泛函与标准圆球面的共形类的Yamabe不变量之间存在有趣的联系；b. 当闵可夫斯基时空的维数为 4 时，该泛函为常数，恰好是 2π（二维球面的欧拉示性数）的倍数；c. 当闵可夫斯基时空的维数为 3 时，泛函 $\mathcal{F}[S]$ 具有如下简单形式

$$\mathcal{F}[S]=\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta,$$

其中，v 与光锥中 S 的参数化有关。

在 a. 和 c. 两种情形下，自然要考虑相应的变分问题 $\mathcal{F}[S]$，并要求面积（在 c. 情形下为长度）$|S|$ 为常数。a. 情形下的变分问题等价于标准圆球面的 Yamabe问题，该问题已得到解决

最初由 [A76a] 利用 $\mathbb{R}^n$ 中独立证明的 [A76b] 最优 Sobole夫不等式 [Ta76]基本解决。我们还要指出，维数 ≥ 6 的紧致且非局部共形平坦黎曼流形上的 Yamabe问题由 [A76a], 解决，而剩下的维数为 3、4、5 的情形，或局部共形平坦的情形，则由 [S84] 借助 [SY79][SY88] 中证明的正质量定理$c.$中的变分问题表述为问题 2.4，也可以表述如下。

问题 1.1。求泛函 $\mathcal{F}[v]=\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta$ 的极值，并满足约束 $\int_{\mathbb{S}^1}v^{-2}\mathrm{d}\theta=2\pi$。此外，求出达到极值的函数。 {pro 1.1}

问题1.1 是本文的主要动机，而 Sobole夫不等式（1.1）给出了它的答案。关于球面上的 Sobole夫型不等式，$\mathbb{S}^n$，$n\geq 2$ 此前已有许多研究进行了深入探讨。例如，对于二维标准圆球面的情形，文献 [O82] 中得到的奥诺弗里不等式指出，若 $w\in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^2)$，则 v 满足

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}|\nabla v|^2\mathrm{d}\mu+\frac{\int_{\mathbb{S}^2}2v\mathrm{d}\mu}{4\pi}\geq\log\frac{\int_{\mathbb{S}^2}e^{2v}\mathrm{d}\mu}{4\pi}. \tag{1.2}$$ {eqn 1.2}

奥诺弗里不等式与文献 [Tr67][M71][A79]中的 Moser-Trudinger 不等式密切相关。对于高维圆球面 $\mathbb{S}^n$，$n\geq 3$，尖锐索博列夫不等式表明

$$\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla v|^2\mathrm{d}\mu+\frac{n(n-2)}{4}\int_{\mathbb{S}^n}v^2\mathrm{d}\mu\geq\frac{n(n-2)}{4}|\mathbb{S}^n|^{\frac{2}{n}}\Big(\int_{\mathbb{S}^n}v^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{n-2}{n}}, \tag{1.3}$$ {eqn 1.3}

通过立体投影变换，这等价于文献 $\mathbb{R}^n$，$n\geq 3$ 中的 [A76b][Ta76] 关于 $n=1$ 的尖锐索博列夫不等式。注意，形式上令 1.1在上述不等式中，便得到不等式（ $n=1$）。有趣的是，当 v 时，右端包含

奥诺弗里不等式（1.2）和尖锐索博列夫不等式（1.3）在 $\mathbb{S}^n$、$n\geq 2$ 的共形变换下均保持不变，见 [O82][L83][CL90][LL01][C04]<style id='23>。不等式（1.1）具有与上述两个不等式类似的性质：由于泛函 $\mathcal{F}$ 在三维闵可夫斯基时空中的几何意义，不等式（1.1）在洛伦兹变换下保持不变，见第 3 节和命题3.1。这一不变性可以明确表述如下。设 $\nu_{\alpha,\bar{\theta}_0}(\bar{\theta})=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha}\cos(\bar{\theta}-\bar{\theta}_0)$，并且 $\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar{\theta}_0}$ 是 $\mathbb{S}^1$ 之间的变换

$$\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar{\theta}_0}:\quad \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1,\quad \theta\mapsto\bar{\theta},$$

其中

$$\cos(\bar{\theta}-\bar{\theta}_0)=\frac{\alpha+\cos(\theta-\theta_0)}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)},\quad \sin(\bar{\theta}-\bar{\theta}_0)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\theta-\theta_0)}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)},$$

t则定义圆上函数的变换 $\gamma_{\alpha,\theta_0,\bar{\theta}_0}$，使得 $\bar{v}=\gamma_{\alpha,\theta_0,\bar{\theta}_0}(v)$ wit h

$$\bar{v}(\bar{\theta})=[\nu_{\alpha,\bar{\theta}_0}(\bar{\theta})]^{-\frac{1}{2}}v(\theta),\quad \bar{\theta}=\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar{\theta}_0}(\theta). \tag{1.4}$$ {eqn 1.4}

我们有

$$\mathcal{F}[\bar{v}]=\mathcal{F}[v],\quad \int_{\mathbb{S}^1}\bar{v}^{-2}(\bar{\theta})\mathrm{d}\bar{\theta}=\int_{\mathbb{S}^1}v^{-2}(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

为了更清楚地看出不等式（1.1）的洛伦兹不变性与奥诺弗里不等式（1.2）及尖锐索博列夫不等式（1.3）的共形不变性之间的类比，我们注意到

标准圆球面 $\mathbb{S}^n$ 的共形群与（$n+2$）维闵可夫斯基空间的洛伦兹群同构。

在证明不等式（1.2）和（1.3）时，共形不变性发挥着双重作用：运用变分法直接方法证明这些不等式时，圆球面的共形群不紧性会带来困难；与此同时，共形不变性也赋予我们自由度，可以调整相应泛函的极小化序列，使调整后的序列确实能够收敛或弱收敛到该泛函的一个极值点。奥诺弗里不等式的证明（见 [O82] ）以及尖锐索博列夫不等式（1.3）的证明（见 [L83][CL90]）正是如此。

Moser-Trudinger 不等式、奥诺弗里不等式和尖锐索博列夫不等式（1.3）证明中的一个重要思想是重排不等式：对称递减重排保持 L^p 范数不变，且不会增大 $W^{1,\,p}$ 范数。重排不等式将上述不等式归结为 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的一维问题。

如上所述，奥诺弗里不等式和尖锐索博列夫不等式（1.3）还有一个优点，即具有共形不变性。 [CL90] 利用这种共形不变性，对尖锐索博列夫不等式（1.3给出了概念性的证明。该证明引入了竞争对称性方法，交替运用 $\mathbb{R}^n$ 上的对称递减重排与 $\mathbb{S}^n$ 的旋转（这是 $\mathbb{R}^n$上的一个共形映射），从而构造出一个收敛到相应泛函极值函数的序列。“竞争对称性”这一名称指的是对称递减重排所产生的球面对称性，以及极限函数的共形对称性。关于这种方法的阐述，另见[LL01][B09] 。

我们以另一种方式，运用对称递减重排和洛伦兹变换的方法，证明圆上的尖锐索博列夫不等式（1.1）。下面概述这一方法。

基本思路是关于洛伦兹变换 $\gamma_{\alpha,0,0}$的以下几何观察：如果 v是正连续函数，且在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上不取其最小值，那么存在 $\alpha>0$，使得变换 $\gamma_{\alpha,0,0}$ 提高 v的最小值，即 $\min\{\gamma_{\alpha,0,0}(v)\}>\min\{v\}$。参见引理 6.1和 6.2。利用这一观察，我们可以交替应用对称递减重排和洛伦兹变换 $\gamma_{\alpha,0,0}$ 来构造一个序列 $\{v_n\}$，使得每个 v_n 在 $[-\pi,\pi]$ 上都是对称递减的，并且

$$\int_{\mathbb{S}^1} v_n^{-2}\mathrm{d}\theta=2\pi,\quad \mathcal{F}[v_n] \text{ is nonincreasing and } \min\{v_n\} \text{ is nondecreasing as } n\to+\infty.$$

构造方法见定义 6.4。根据定义，序列 $\{v_n\}$ 有下界，而且我们实际上还可以证明，这样构造出的 $\{v_n\}$ 也有上界。参见引理 6.11。考察序列 $\{v_n\}$的收敛性，该序列的极限函数 $\{v_n\}$必定在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$上为常数，参见引理 6.8。因此，我们引入以下函数集 S_c，它满足 $v\in S_c$ 当

a. v is symmetric nonincreasing on $[-\pi,\pi]$,

b. $v\in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$,

c. v is constant on $[\frac{\pi}{2},\pi]$,

d. $\int_0^{2\pi} v^{-2}\,\mathrm{d}\theta=2\pi$.

我们证明，在约束 $\mathcal{F}[v]$ $\int_0^{2\pi} v^{-2}\,\mathrm{d}\theta=2\pi$ 下，其下确界等于 $\mathcal{F}[v]$ 中的 S_c 下确界；当且仅当 S_c中的下确界可以取到时，该下确界也可以取到。参见命题 6.13。由于 $\mathcal{F}[v]$ 在集合 S_c 中的变分问题简单得多

1. 函数 $v \in S_c$ 自动存在一个下界，

2. 本质上，这是一个关于半圆的变分问题，它消除了非紧洛伦兹群带来的不变性。

因此，我们通过研究第 7 节中 $\mathcal{F}[v]$ 里的S_c 变分问题，成功证明了不等式（1.1）。

我们指出，上述用于证明不等式（1.1）的方法，或许也适用于其他洛伦兹不变变分问题。作为一个例子，我们将在第 9 节中用此方法概述 $\mathbb{S}^n$ 上的 $n \geq 3$ 尖锐索博列夫不等式（1.3）的证明。

2 问题的动机

{sec 2}

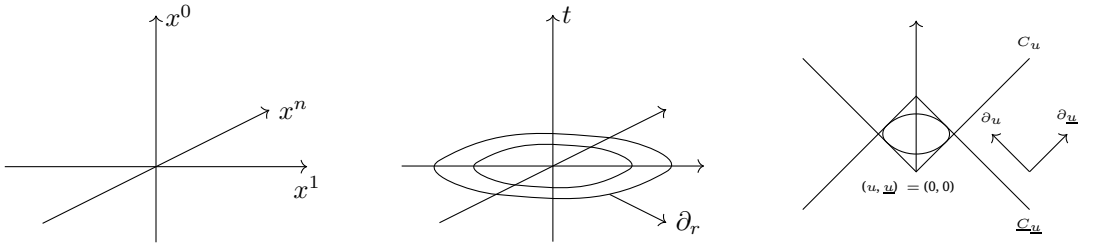
本节首先介绍光锥中类空曲面（在三维闵可夫斯基时空中即为曲线）的几何性质。随后，我们将引入本文所研究的泛函 $\mathcal{F}$。

2.1 光锥中类空曲面的参数化

{小节 2.1}

令 $(\mathbb{M}^{n+1}, g)$ 为 $(n+1)$ 维闵可夫斯基时空。考虑三种坐标系（见图 1）：

a. 矩形坐标：$\{x^0, x^1, \cdots, x^n\}$ $g = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2$；b. 空间极坐标：$\{t, r, \vartheta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$， $g = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathring{g}$，其中 $\mathring{g}$ 是半径为 1 的球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的标准圆度量；
c. 双零坐标：$\{u, \underline{u}, \vartheta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$， $g = -4\mathrm{d}u\mathrm{d}\underline{u} + r^2 \mathring{g}$。



(a) 矩形坐标 $\{x^0, x^1, \cdots, x^n\}$。

(b) 空间极坐标 $\{t, r, \vartheta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$。

(c) 双零坐标 $\{u, \underline{u}, \vartheta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$。

图 1： $\mathbb{M}^{n+1}$的坐标系

{图 1}

坐标之间通过以下变换相互关联：

a.→b. $t = x^0$， $r = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$， $\partial_t = \partial_0$， $\partial_r = \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{r} \partial_i$；

b.→c. $u = \frac{t-r}{2}$， $\underline{u} = \frac{t+r}{2}$， $\partial_u = \partial_t - \partial_r$， $\partial_{\underline{u}} = \partial_t + \partial_r$.

在双零坐标系 $\{u, \underline{u}, \vartheta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ 中， u 和 v 的水平集是 $\mathbb{M}^{n+1}$ 中的光锥。我们有如下

C_u： u 的水平集，即 $\mathbb{M}^{n+1}$ 中的出射光锥；

$\underline{C}_u$： $\underline{u}$ 的水平集，它是 $\mathbb{M}^{n+1}$ 中的入射光锥。

考虑出射光锥 $C_{u=0}$ （以下简称 C_0 ）， $\{\underline{u} \geq 0, \vartheta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ 是 C_0的一个坐标系。于是，我们可以用正函数 S 在 C_0 中参数化类空曲面 f，将其表示为 $\underline{u}$ 在 ϑ 区域上的图像（见图 2）：

$$S = \{(v, \vartheta) : v = f(\vartheta) > 0\}.$$

设 $\not{g}$ 是 S 的内蕴度量，其中 $g|_S$，则 $\not{g} = f^2 \mathring{g}$。

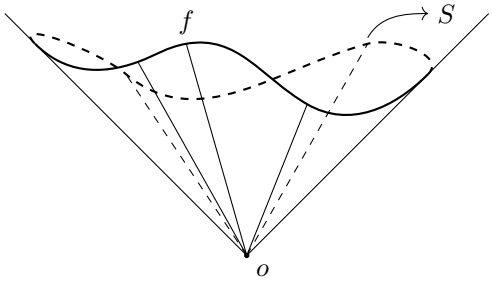


图 2： S 的参数化

{图 2}

2.2 光锥中类空曲面的几何

{子节 2.2}

类空曲面 $\{L, \underline{L}\}$ 的一个共轭零标架 S 由两个未来指向的法向零向量组成，并满足以下条件

$$g(L, \underline{L}) = -2.$$

见图 3。与类空曲面 S 中的 C_0相关联，我们在其法丛中引入以下特殊的共轭零标架 $\{L, \underline{L}\}$ ，使得

$$L = f\partial_{\underline{u}}, \quad g(L, \underline{L}) = -2.$$

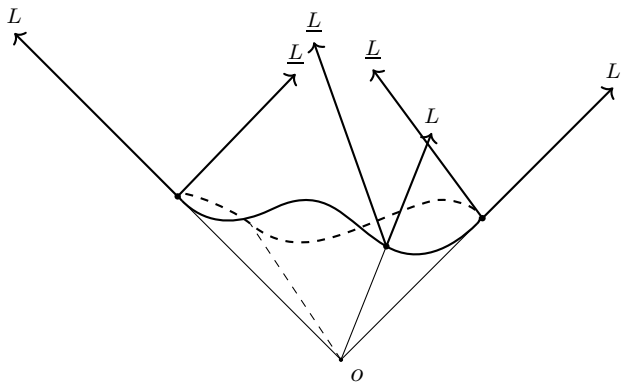


图3：共轭零标架 $\{L, \underline{L}\}$。

{图 3}

然后，我们可以相对于这个共轭零标架定义第二基本形式和挠率。

{def 2.1}

定义 2.1. 设 S 是出射光锥 C_0中的一个类空曲面。设 $\{L,\underline{L}\}$ 是 S的一个共轭零标架，则我们定义第二基本形式 χ、 $\underline{\chi}$ 以及挠率 η如下：设 ∇ 是 g的协变导数，则对于 X、$Y\in TS$，

$$\chi(X,Y)=g(\nabla_X L,Y),\quad \underline{\chi}(X,Y)=g(\nabla_X \underline{L},Y),\quad \eta(X)=\frac{1}{2}g(\nabla_X L,\underline{L}).$$

将 χ 和 $\underline{\chi}$ 分解为迹部分和无迹部分，

$$\chi=\hat{\chi}+\frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\chi \not{g},\quad \underline{\chi}=\underline{\hat{\chi}}+\frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\underline{\chi}\not{g}.$$

我们称 $\mathrm{tr}\chi$ 为出射零膨胀，$\mathrm{tr}\underline{\chi}$ 为入射零膨胀，$\hat{\chi}$ 和 $\underline{\hat{\chi}}$ 分别为出射剪切和入射剪切。

我们很容易计算得出 χ，其中 $\chi=\not{g}$ 且 $\mathrm{tr}\chi=n-1$，因为 $\nabla_X L=X$。下面计算 $\underline{\chi}$ 和 η。设 $\{\theta^1,\cdots,\theta^{n-1}\}$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$的一个坐标系，则我们引入 $\mathbb{M}^{n+1}$ 和 S的以下坐标系：

a. $\{u,\underline{u},\theta^1,\cdots,\theta^{n-1}\}$：$\mathbb{M}^{n+1}$的一个双零坐标系，其坐标向量为

$$\partial_u,\quad \partial_{\underline{u}},\quad \partial_i,\quad i=1,\cdots,n-1.$$

坐标向量的协变导数为

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\partial_i}\partial_{\underline{u}}=\frac{1}{r}\partial_i,\quad \nabla_{\partial_i}\partial_u=-\frac{1}{r}\partial_i,\\
&\nabla_{\partial_{\underline{u}}}\partial_i=\frac{1}{r}\partial_i,\quad \nabla_{\partial_u}\partial_i=-\frac{1}{r}\partial_i,\\
&\nabla_{\partial_u}\partial_{\underline{u}}=\nabla_{\partial_{\underline{u}}}\partial_u=0,\quad \nabla_{\partial_i}\partial_j=\mathring{\nabla}_{\partial_i}\partial_j-\frac{r}{2}\mathring{g}_{ij}\partial_{\underline{u}}+\frac{r}{2}\mathring{g}_{ij}\partial_u,
\end{aligned}$$

其中 $\mathring{\nabla}$ 是 $\mathring{g}$ 的协变导数。

b. $\{\theta^1,\cdots,\theta^{n-1}\}$：$S$ 在其上的限制所形成的坐标系，其坐标向量为

$$\dot{\partial}_i=\partial_i+f_i\partial_{\underline{u}},\quad f_i=\frac{\partial f}{\partial\theta^i}.$$

共轭零标架 $\{L,\underline{L}\}$ 由下式给出

$$L=f\partial_{\underline{u}},\quad \underline{L}=f^{-1}\big[\partial_u+\big(f^{-2}\mathring{g}^{ij}f_if_j\big)\partial_{\underline{u}}+2\big(f^{-2}\mathring{g}^{ij}f_j\big)\partial_i\big].$$

因此，我们得到 $\underline{\chi}$ 和 η的以下结果。

$\underline{\chi}$: $\underline{\chi}_{ij}=g(\nabla_{\dot{\partial}_i}\underline{L},\dot{\partial}_j)=-g(\nabla_{\dot{\partial}_i}\dot{\partial}_j,\underline{L})$. Since

$$\nabla_{\dot{\partial}_i}\dot{\partial}_j=\mathring{\nabla}_{\partial_i}\partial_j-\frac{f}{2}\mathring{g}_{ij}\partial_{\underline{u}}+\frac{f}{2}\mathring{g}_{ij}\partial_u+f_if^{-1}\partial_j+f_{ij}\partial_{\underline{u}}+f_jf^{-1}\partial_i,$$

then

$$\begin{aligned}
&\underline{\chi}_{ij}=-g(\nabla_{\dot{\partial}_i}\dot{\partial}_j,\underline{L})=-\mathring{g}_{ij}+f^{-2}\mathring{g}^{kl}f_kf_l\mathring{g}_{ij}+2f^{-1}\mathring{\nabla}^2_{ij}f-4f^{-2}f_if_j,\\
&\mathrm{tr}\underline{\chi}=-(n-1)f^{-2}+(n-5)f^{-4}\mathring{g}^{ij}f_if_j+2f^{-3}\mathring{\Delta}f.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

{eqn 2.1}

η: 由于 $\nabla_{\dot\partial_i} L = \partial_i$, 因此

$$\eta_i = \frac{1}{2} g(\nabla_{\dot\partial_i} L, \underline{L}) = \frac{1}{2} g(\dot\partial_i, \underline{L}) = 0.$$

设 R_{ijkl} 是曲率[1] （S, $\not{g}$）。我们有高斯方程

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\chi_{ik}\underline{\chi}_{jl} + \underline{\chi}_{ik}\chi_{jl} - \chi_{jk}\underline{\chi}_{il} - \underline{\chi}_{jk}\chi_{il}) \\ &= \frac{1}{2}(\not{g}_{ik}\underline{\chi}_{jl} + \underline{\chi}_{ik}\not{g}_{jl} - \not{g}_{jk}\underline{\chi}_{il} - \underline{\chi}_{jk}\not{g}_{il}) \qquad (2.2) \quad \texttt{\{eqn 2.2\}} \\ \Rightarrow \quad \mathrm{R}_{ij} &= -\frac{n-3}{2}\underline{\chi}_{ij} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\underline{\chi}\cdot\not{g}_{ij}, \quad \mathrm{R} = -(n-2)\mathrm{tr}\underline{\chi}. \end{aligned}$$

2.3 泛函 $\mathcal{F}$ 及相应的变分问题

下面，我们首先介绍 C_0中闭类空曲面的泛函 $\mathcal{F}$，然后给出 $\mathcal{F}$的几何解释。我们还将根据 S的参数化推导出 $\mathcal{F}$ 的公式。 {subsec 2.3}

定义 2.2. 设 S 是闵可夫斯基时空 $\mathbb{M}^{n+1}$中光锥 C_0 上的一个闭类空曲面。设 $\{L, \underline{L}\}$ 是 S的一般共轭零标架。我们将 S的泛函 $\mathcal{F}$ 定义为 {def 2.2}

$$\mathcal{F}[S] = \int_S \mathrm{tr}\chi \cdot \mathrm{tr}\underline{\chi}\, \mathrm{dvol}_{\not{g}}.$$

特别地，对于满足 $L = f\partial_{\underline{u}}$的共轭零标架 $\{L, \underline{L}\}$，我们有

$$\mathcal{F}[S] = \int_S (n-1)\mathrm{tr}\underline{\chi}\, \mathrm{dvol}_{\not{g}}.$$

F由高斯方程（2.2），我们得到该泛函的以下几何解释

化数 $\mathcal{F}$

- 根据$\mathrm{tr}\underline{\chi}$ 的几何意义， $\int_S \mathrm{tr}\underline{\chi}\mathrm{dvol}_{\not{g}}$ 表示 S 沿 $\underline{L}$ 方向的面积（若 $n = 2$，则为长度）的无穷小变化。

- $n = 3$，维数为 $S = 2$。我们有 $\mathrm{R} = -\mathrm{tr}\underline{\chi}$。令 K 为 $(S, \not{g})$ 的高斯曲率，则 $\mathrm{R} = 2K$，并且

$$\mathcal{F}[S] = -\int_S 2\mathrm{R}\, \mathrm{dvol}_{\not{g}} = -4\int_S K\, \mathrm{dvol}_{\not{g}} = -8\pi.$$

- $n \geq 4$，维数为 $S = n - 1 \geq 3$。我们有 $\mathrm{R} = -(n-2)\mathrm{tr}\underline{\chi}$，因此

$$\mathcal{F}[S] = -\frac{n-1}{n-2}\int_S \mathrm{R}\, \mathrm{dvol}_{\not{g}}.$$

注意，积分 $\int_S \mathrm{R}\, \mathrm{dvol}_{\not{g}}$ 是 $(S, \not{g})$ 的爱因斯坦-希尔伯特泛函。

[1]此处黎曼曲率算子的约定为：$\mathrm{R}_{ijkl} = g(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k, \partial_l)$。

泛函 $\mathcal{F}[S]$ 自然会让人联想到维数为 $S=n-1\geq 3$ 时的 Yamabe问题。关于 Yamabe问题的深入讨论，请参阅优秀的综述文章 [LP97][S89] 。回想一下，Yamabe问题要求：对于黎曼流形 (M,g_0)，维数 $M\geq 3$，在共形类 $\mathcal{M}_1$ 中，找出 g_0 的爱因斯坦-希尔伯特泛函的极值点，使其体积等于 1，即令

$$I(M,g_0)=\inf\{\int_M \mathrm{R}_g\,\mathrm{dvol}_g : g\in\mathcal{M}_1\},$$
$$\mathcal{M}_1=\{g: g=e^h g_0, \mathrm{Vol}(M,g)=\int_M \mathrm{dvol}_g=1\},$$

求出 $I(M,g_0)$，并判断其是否能由共形度量 $g\in\mathcal{M}_1$ 达到。Yamabe问题的另一种等价表述是：求出共形度量 g，使黎曼流形 (M,g_0)（维数为 $M=n-1\geq 3$）的以下 Yamabe不变量 $\lambda(M,g_0)$ 达到，

$$\lambda(M,g_0)=\inf\{Q(M,g): g=e^h g_0\}\quad Q(M,g)=\frac{\int_M \mathrm{R}_g \mathrm{dvol}_g}{[\mathrm{Vol}(M,g)]^{\frac{n-3}{n-1}}}.$$

受 Yamabe问题启发，我们可以针对泛函 $\mathcal{F}$ 提出以下问题 {命题 2.3}

问题 2.3. 在闵可夫斯基时空 $(\mathbb{M}^{n+1},g)$ $n\geq 2$ 中，求以下泛函的极值点

$$\mathcal{Q}(S)=\frac{\mathcal{F}[S]}{|S|^{\frac{n-3}{n-1}}}=\frac{\int_S \mathrm{tr}\chi\cdot\mathrm{tr}\underline{\chi}\,\mathrm{dvol}_g}{\left[\int_S \mathrm{dvol}_{\not g}\right]^{\frac{n-3}{n-1}}}.$$

对于情形 $n\geq 3$，我们已经得到上述问题的答案如下。

- $n=3$，维数为 $S=2$。 $\mathcal{Q}(S)=-8\pi$ 是一个常数。该问题是平凡的。
- $n\geq 4$，维数为 $S=n-1\geq 3$。该问题等价于标准圆球面（$\mathbb{S}^{n-1}$，$\mathring{g}$）上的 Yamabe问题。我们有

$$\sup\{\mathcal{Q}[S]\}=-\tfrac{n-1}{n-2}\inf\{Q(\mathbb{S}^{n-1},e^h\mathring{g})\}=-\tfrac{n-1}{n-2}\lambda(\mathbb{S}^{n-1},\mathring{g})=-(n-1)^2\left[\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1},\mathring{g})\right]^{\frac{2}{n-1}},$$
$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1},\mathring{g})=\tfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

且 $\sup\{\mathcal{Q}[S]\}$ 由光锥 C_0的类空超平面截面达到。

该问题剩余的情形是 $n=2$，其中 S 是光锥 C_0中的一条类空曲线。该问题可化为圆上的一个变分问题。我们将在下文推导该问题的显式公式。

i. 设 θ 为圆的参数。C_0 中的任意闭类空曲线 S 都可用圆上的一个正函数 f 参数化。于是，S 上的度量和体积形式为

$$\not g=f^2\mathrm{d}\theta^2,\quad \mathrm{dvol}_{\not g}=f\mathrm{d}\theta.$$

ii. 根据方程（2.1），我们得到

$$\mathrm{tr}\underline{\chi}=-f^{-2}-3f^{-4}(f_\theta)^2+2f^{-3}f_{\theta\theta}.$$

iii. 滥用记号表示 $\mathcal{F}[f]=\mathcal{F}[S]$和 $\mathcal{Q}[f]=\mathcal{Q}[S]$。那么

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f]&=\int_S \mathrm{tr}\underline{\chi}\,\mathrm{dvol}_{\not g}=\int_0^{2\pi}\big[-f^{-1}+f^{-3}(f_\theta)^2\big]\mathrm{d}\theta,\\ \mathcal{Q}[f]&=\mathcal{F}[f]\cdot|S|=\int_0^{2\pi}\big[-f^{-1}+f^{-3}(f_\theta)^2\big]\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}f\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{2.3}$$ {eqn 2.3}

iv. 我们通过 $h=\log f$ and $v=f^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{h}{2}}$ 引入两个不同的函数，并滥用记号，将 $\mathcal{F}[f]=\mathcal{F}[h]=\mathcal{F}[v]$ and $\mathcal{Q}[f]=\mathcal{Q}[h]=\mathcal{Q}[v]$ 记作，那么

$$\mathcal{F}[h]=\int_0^{2\pi}e^{-h}\big[(h_\theta)^2-1\big]\mathrm{d}\theta,\qquad \mathcal{Q}[h]=\int_0^{2\pi}e^{-h}\big[(h_\theta)^2-1\big]\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}e^h\mathrm{d}\theta,\tag{2.4}$$ {eqn 2.4}

$$\mathcal{F}[v]=\int_0^{2\pi}\big[4(v_\theta)^2-v^2\big]\mathrm{d}\theta,\qquad \mathcal{Q}[v]=\int_0^{2\pi}\big[4(v_\theta)^2-v^2\big]\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi}v^{-2}\mathrm{d}\theta,\tag{2.5}$$ {eqn 2.5}

我们可以将问题 2.3 改写如下。

{pro 2.4}

问题 2.4。在闵可夫斯基时空 $(\mathbb{M}^3,g)$ 中，求 $\mathcal{Q}[f]=\mathcal{Q}[h]=\mathcal{Q}[v]$ 的极值点，其中 $f=e^h=v^{-2}$ 是光锥 C_0 中一条类空曲线的参数化。

$\mathcal{Q}$ 的上述变分问题等价于求解以下变分问题：e 在约束 $|S|=\int_0^{2\pi}f\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}e^h\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}v^{-2}\mathrm{d}\theta=2\pi$ 下求 $\mathcal{F}$ 的极值点。

3 泛函 $\mathcal{F}$的洛伦兹不变性

{节 3}

从 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{Q}$ 在定义 2.2 及问题 2.3的几何意义可知，显然它们在闵可夫斯基时空（$\mathbb{M}^3$，g）的洛伦兹群下是不变的。也就是说，设 S 是 C_0中的任意一条类空曲线，则有

$$\mathcal{F}[\varphi(S)]=\mathcal{F}[S],\quad \mathcal{Q}[\varphi(S)]=\mathcal{Q}[S],\quad \text{for every Lorentz transformation } \varphi \text{ of } (\mathbb{M}^3,g).$$

接下来，我们推导参数化函数 f 关于 S的洛伦兹变换的显式公式。（$\mathbb{M}^3$，g）的洛伦兹群是三维的。它可以由三个参数 $\alpha\in(-1,1)$ θ_0、$\theta_0\in\mathbb{R}$ 参数化；在空间极坐标系（t，r，θ）中，相应的洛伦兹变换 $\varphi_{\alpha,\ \theta_0,\ \bar\theta_0}$ 具有如下形式

$$\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}:\quad (t,r,\theta)\quad\mapsto\quad(\bar t,\bar r,\bar\theta),$$

其中

$$\bar t=\frac{t+\alpha r\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{1-\alpha^2}},\quad \bar r=\sqrt{\frac{\big(r+\alpha t\cos(\theta-\theta_0)\big)^2-\alpha^2(r^2-t^2)\sin^2(\theta-\theta_0)}{1-\alpha^2}},$$

¯和 θ 由以下方程组解得

$$\begin{aligned}\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)&=\frac{\alpha t+r\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{\big(r+\alpha t\cos(\theta-\theta_0)\big)^2-\alpha^2(r^2-t^2)\sin^2(\theta-\theta_0)}},\\ \sin(\bar\theta-\bar\theta_0)&=\frac{r\sin(\theta-\theta_0)\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{\big(r+\alpha t\cos(\theta-\theta_0)\big)^2-\alpha^2(r^2-t^2)\sin^2(\theta-\theta_0)}}.\end{aligned}$$

在坐标系（$\underline{u}$, θ）中，$\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}$ 在 C_0 上的限制为

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}:\quad (\underline{u},\theta) &\mapsto (\bar{\underline{u}},\bar\theta)=\Big(\frac{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\underline{u},\bar\theta\Big),\\ \varphi_{-\alpha,\bar\theta_0,\theta_0}=\varphi^{-1}_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}:\quad (\bar{\underline{u}},\bar\theta) &\mapsto (\underline{u},\theta)=\Big(\frac{1-\alpha\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\bar{\underline{u}},\theta\Big),\end{aligned}$$

其中，θ 由方程组求解得到

$$\begin{aligned}&\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)=\frac{\alpha+\cos(\theta-\theta_0)}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)},\quad \sin(\bar\theta-\bar\theta_0)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\theta-\theta_0)}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)},\\ \Leftrightarrow\quad &\cos(\theta-\theta_0)=\frac{\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)-\alpha}{1-\alpha\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)},\quad \sin(\theta-\theta_0)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\bar\theta-\bar\theta_0)}{1-\alpha\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

{eqn 3.1}

设 f 为 $\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(S)$ 的参数化函数，则有如下 f公式,

$$\bar f(\bar\theta)=\frac{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{1-\alpha^2}}f(\theta)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)}f(\theta),$$

其中，θ 由方程（3.1）确定。我们引入记号 $\nu_{\alpha,\bar\theta_0}$ 以表示乘子函数

$$\nu_{\alpha,\bar\theta_0}(\bar\theta)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos(\bar\theta-\bar\theta_0)}.$$

现在可以陈述泛函 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的洛伦兹不变性。

{pro 3.1}

命题 3.1。设 S 为 C_0 中 $(\mathbb{M}^3,g)$ 的一条类空曲线。设 $f=e^h=v^{-2}$ 为 S的参数化函数。设$\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}$ 为洛伦兹变换。则

$$\mathcal{F}[\varphi(S)]=\mathcal{F}[S],\quad \mathcal{Q}[\varphi(S)]=\mathcal{Q}[S].$$

设 $\bar f=e^{\bar h}=\bar v^{-2}$ 为 $\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(S)$ 的参数化函数。则 $\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}$ 将参数化函数 f变换为 $f=\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(f)$,

$$\bar f(\bar\theta)=\nu_{\alpha,\bar\theta_0}(\bar\theta)f(\theta),\quad \textit{where } \theta \textit{ and } \bar\theta \textit{ are related by equations } (3.1).$$

于是我们有

$$\mathcal{F}[\bar f]=\mathcal{F}[\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(f)]=\mathcal{F}[f],\quad \mathcal{Q}[\bar f]=\mathcal{Q}[\varphi_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(f)]=\mathcal{Q}[f].$$

用参数化函数 h,v和 $h=\rho_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(h)$ $\bar v=\gamma_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(v)$表示，其中变换的形式为

$$\bar h(\bar\theta)=h(\theta)+\log\nu_{\alpha,\bar\theta_0}(\bar\theta),\quad \bar v(\bar\theta)=[\nu_{\alpha,\bar\theta_0}(\bar\theta)]^{-\frac12}v(\theta).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[\bar h]=\mathcal{F}[\rho_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(h)]=\mathcal{F}[h],\qquad &&\mathcal{Q}[\bar h]=\mathcal{Q}[\rho_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(h)]=\mathcal{Q}[h],\\ &\mathcal{F}[\bar v]=\mathcal{F}[\gamma_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(v)]=\mathcal{F}[v],\qquad &&\mathcal{Q}[\bar v]=\mathcal{Q}[\gamma_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}(v)]=\mathcal{Q}[v].\end{aligned}$$

4 $\mathcal{F}$ 在约束下的临界点及临界点处的局部分析

{sec 4}

在本节中，我们推导约束 $|S| = 2\pi$ 下 $\mathcal{F}$ 的临界点所满足的欧拉-拉格朗日方程，并求解该方程。我们计算 $\mathcal{F}[S]$ 在临界点处的二阶变分，并由此得出它们是满足该约束的 $\mathcal{F}[S]$ 的局部极小值点。

4.1 约束下 $\mathcal{F}$ 的欧拉-拉格朗日方程

{第 4.1} 小节

设 S_t 是 C_0 中一族满足约束 $|S_t| = 2\pi$ 的类空曲线。设 f_t 是 S_t 的参数化函数，则

$$\int_0^{2\pi} f_t \,\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

下文中，我们用点号 $\cdot$ 表示对 t 求导，用撇号 $'$ 表示对 θ 求导。于是

$$\int_0^{2\pi} \dot{f}_t \,\mathrm{d}\theta = 0.$$

我们计算 $\mathcal{F}[f_t]$的一阶变分。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}[f_t] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\big[-f_t^{-1} + f_t^{-3}(f_t')^2\big]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\big[f_t^{-2}\dot{f}_t - 3f_t^{-4}(f_t')^2\dot{f}_t + 2f_t^{-3}f_t'\dot{f}_t'\big]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\big[f_t^{-2} + 3f_t^{-4}(f_t')^2 - 2f_t^{-3}f_t''\big]\dot{f}_t\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

因此， $\mathcal{F}$ 在约束条件下的临界点满足欧拉-拉格朗日方程

$$f^{-2} + 3f^{-4}(f')^2 - 2f^{-3}f'' = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

{eqn 4.1}

4.2 $\mathcal{F}$ 在约束条件下的临界点

{小节 4.2}

我们将在下文求解上述方程。由方程（4.1），

$$[f^{-3}(f')^2]' + (f^{-1})' + \lambda f' = 0 \quad \Rightarrow \quad (f')^2 = -f^2 + \mu f^3 - \lambda f^4.$$

Thus

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{-\lambda f^2 + \mu f - 1}} = \theta.$$

由于我们希望在圆上得到 f 的正解，因此二次方程 $-\lambda f^2 + \mu f - 1$ 应有两个实根（按重数计）。若两个实根相等，则 f 是圆上的常函数。下文考虑两个不同根的情形。设

$$f_{\min} = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\lambda}}{2\lambda} > 0, \quad f_{\max} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda}}{2\lambda}, \quad \mu^2 - 4\lambda > 0,\ \mu > 0,\ \lambda > 0,$$

为求解 f，我们引入如下记号

$$\alpha=\sqrt{\frac{\mu^2-4\lambda}{\mu^2}}<1,\quad f_{\min}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},\quad f_{\max}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}},$$
$$\bar{\theta}=\pi-\arccos\Big(\frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{1-\alpha^2}f-1}{\alpha}\Big),$$

then

$$\int\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\bar{\theta}}\mathrm{d}\bar{\theta}=\theta\quad\Rightarrow\quad\tan\frac{\bar{\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\tan\frac{\theta-\theta_0}{2}.$$

因此

$$f=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)}.$$

根据约束，我们确定 λ 的值为 1

$$2\pi=\int_0^{2\pi}f\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

命题 4.1. 泛函 $\mathcal{F}$ 在约束 $\int_0^{2\pi}f\mathrm{d}\theta=2\pi$ 下的临界点集合由以下函数组成 {pro 4.1}

$$f(\theta)=e^{h(\theta)}=v^{-2}(\theta)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\cos(\theta-\theta_0)}=\nu_{-\alpha,\theta_0}(\theta),\quad\alpha\in(-1,1),\quad\theta_0\in\mathbb{R}.$$

这些临界点都通过命题 *3.1* 中的洛伦兹变换相互关联。

4.3 约束下临界点处 $\mathcal{F}$ 的二阶变分

{ 小节 4.3}

接下来，我们主要使用参数化函数 v。我们计算泛函 $\mathcal{F}[v]=\int_0^{2\pi}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta$ 在约束 $\int_0^{2\pi}v^{-2}\mathrm{d}\theta=2\pi$ 下 $v_0=1$ 处的二阶变分。设 v_t 是在该约束下 v_0 的一个变分。我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}v_t^{-2}\mathrm{d}\theta&=\int_0^{2\pi}-2\dot{v}_t\cdot v_t^{-3}\mathrm{d}\theta=0,\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_0^{2\pi}v_t^{-2}\mathrm{d}\theta&=\int_0^{2\pi}-2(\ddot{v}_tv_t-3\dot{v}_t^2)\cdot v_t^{-4}\mathrm{d}\theta=0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}[v_t]&=-2\int_0^{2\pi}(4v_t''+v_t)\cdot\dot{v}_t\,\mathrm{d}\theta,\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathcal{F}[v_t]&=-2\int_0^{2\pi}(4v_t''+v_t)\cdot\ddot{v}_t\,\mathrm{d}\theta-2\int_0^{2\pi}(4\dot{v}_t''+\dot{v}_t)\cdot\dot{v}_t\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

因此，在 $t=0$ 处我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\int_0^{2\pi}v_t^{-2}\mathrm{d}\theta&=\int_0^{2\pi}-2\dot{v}\,\mathrm{d}\theta=0,\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}\int_0^{2\pi}v_t^{-2}\mathrm{d}\theta&=\int_0^{2\pi}-2(\ddot{v}-3\dot{v}^2)\mathrm{d}\theta=0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\mathcal{F}[v_t] = -2\int_0^{2\pi}\dot{v}\,\mathrm{d}\theta = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}\mathcal{F}[v_t] = -2\int_0^{2\pi}\ddot{v}\,\mathrm{d}\theta - 2\int_0^{2\pi}(4\dot{v}''+\dot{v})\cdot\dot{v}\,\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{2\pi}[(\dot{v}')^2-\dot{v}^2]\mathrm{d}\theta.$$

因此我们得出结论：在约束 $\int_0^{2\pi} v^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$下， $\mathcal{F}[v]$ 在 $v_0 = 1$ 处的二阶变分非负，其零空间由 $\{\sin\theta$、$\cos\theta\}$张成。定义算子 $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}v = -8v'' - 8v,$$

那么， $\mathcal{F}$ 的二阶变分具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}\mathcal{F}[v_t] = \int_0^{2\pi}\dot{v}\cdot\mathcal{L}\dot{v}\mathrm{d}\theta.$$

$\{v$ 空间中 $\int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}\theta = 0\}$ 上 $\mathcal{L}$ 的特征值与特征函数为

$$\kappa_m = 8m(m+2), \quad V_m = \mathrm{span}\{\sin\big((m+1)\theta\big), \cos\big((m+1)\theta\big)\}, \quad n\in\mathbb{N}$$

注意，零空间 V_0 对应于沿临界点$v^{-2} = \nu_{\alpha,\ \theta_0}$对 $v_0 = 1$ 进行变分。从上述对 $\mathcal{F}[v]$ 在 $v_0 = 1$处的局部分析，我们得出以下命题。

命题 4.2。临界点 $v^{-2} = \nu_{\alpha,\ \theta_0}$ 是约束 $\int_0^{2\pi} v^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$下 $\mathcal{F}[v] = \int_0^{2\pi}[4(v')^2 - v^2]\mathrm{d}\theta$ 的局部极小值点。局部最小值为 -2π。 {pro 4.2}

等价地，临界点 $v^{-2} = a\nu_{\alpha,\ \theta_0}, a>0$ 是 $\mathcal{Q}[v] = \int_0^{2\pi}[4(v')^2 - v^2]\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{2\pi} v^{-2}\mathrm{d}\theta$的局部极小值点。局部最小值为 $-4\pi^2$。

根据命题 4.1 和 4.2，我们看到所有临界点在洛伦兹变换下都相同，并且它们都是局部极小值点。因此，自然可以猜想如下断言。

断言 4.3. 临界点 $v^{-2} = \nu_{\alpha,\ \theta_0}$ 实际上是 $\mathcal{F}[v] = \int_0^{2\pi}[4(v')^2 - v^2]\mathrm{d}\theta$ 在约束 $\int_0^{2\pi} v^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$ 下的全局极小值点，这等价于以下不等式： {cla 4.3}

$$\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2 - v^2]\mathrm{d}\theta \geq -\frac{4\pi^2}{\int_{\mathbb{S}^1} v^{-2}\mathrm{d}\theta}.$$

证明这一断言的一种可能方法是应用极小极大方法和山路定理：假设存在满足约束 $\int_0^{2\pi} v^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$ 的点 v_1 $\mathcal{F}[v] < -2\pi$，那么可以通过极小极大方法，在从 $v_0 = 1$ 到 v_1 的曲线集合中找到临界点，

$$\min_{\gamma}\max_{t\in[0,1]}\Big\{\mathcal{F}[\gamma(t)] : \gamma(0) = v_0, \gamma(1) = v_1, \gamma(t) = v_t, \int_0^{2\pi} v_t^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi\Big\}.$$

然而，上述方法存在一个难点：由于 $\mathcal{F}$ 的不变群不紧致，泛函 $\mathcal{F}$ 不满足 Palais–Smale 紧致性条件。因此，要用这种方法回答 $v^{-2} = \nu_{\alpha,\ \theta}$ 是否是满足约束的 $\mathcal{F}$ 的全局极小值点，还需要做更多工作。

本文探讨了另一种证明命题 4.3 的方法，该方法采用洛伦兹变换和对称递减重排。这种方法类似于 [CL90]，中证明尖锐 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式时所采用的竞争对称性方法，在那里我们也找到了一种选取特殊极小化子 $\nu_{\alpha,\ \theta_0}$ 以打破洛伦兹变换对称性的方法。

5 对称递减重排与重排不等式

{节 5}

In t本节回顾圆上的重排不等式。设 v 是定义在
circ下。引入以下记号

$$L_v(t) = \{\theta \in [-\pi, \pi] : v(\theta) > t\}$$

We 通过对 v a 的水平集进行对称化，定义其对称递减重排 v^* v s
foll.....。 v^* 在 $[0, \pi]$ 上单调不增，使得

$$v^*(\theta) = v^*(-\theta), \quad |L_v(t)| = |L_{v^*}(t)|.$$

见图 4。另一种等价表述为，

$$v^*(\theta) = \sup\{t : |L_v(t)| > 2|\theta|\}.$$

v^* 是下半连续的。如果 v 是连续的，那么它的对称递减重排 v^*也是连续的。此外， v^* 是一致连续的，且与v具有相同的连续模。

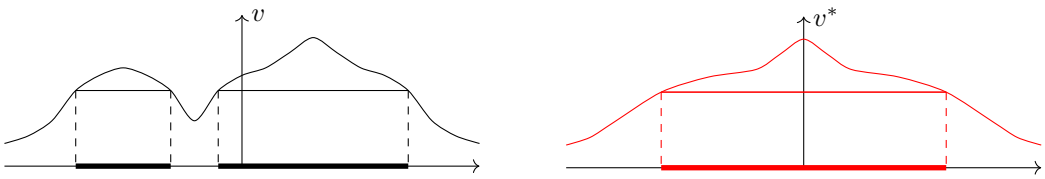


图 4：对称递减重排

{fig 4}

对于 v 和 v^*，我们有以下恒等式和不等式：

$$\int_0^{2\pi} v^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (v^*)^2 \mathrm{d}\theta, \quad \int_0^{2\pi} v^{-2} \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (v^*)^{-2} \mathrm{d}\theta,$$
$$\int_0^{2\pi} (v')^2 \mathrm{d}\theta \geq \int_0^{2\pi} (v^{*\prime})^2 \mathrm{d}\theta.$$

接下来，我们给出关于对称递减重排和泛函$\mathcal{F}$的引理。

{lem 5.1}

引理 5.1. 在约束条件下，对称递减重排不会增大泛函 $\mathcal{F}$；也就是说，对于圆上的正函数 v 及其对称递减重排 v^*，我们有

$$\mathcal{F}[v^*] \leq \mathcal{F}[v], \quad \int_0^{2\pi} (v^*)^{-2} \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} v^{-2} \mathrm{d}\theta.$$

6 $\mathcal{F}$ 的递减序列及其非递减的最小值

{秒 6}

本节中，我们介绍一种方法，利用对称递减重排和洛伦兹变换，构造泛函 $\mathcal{F}$的递减序列，同时使其最小值非递减。

6.1 通过洛伦兹变换增大函数的最小值

{第 6.1} 小节

本小节中，我们证明两个关于函数的最小值/下确界以及洛伦兹变换的引理，为构造 $\mathcal{F}$的递减序列做准备。这里的引理针对圆上的函数和三维闵可夫斯基时空中的函数证明，但很容易推广到 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数和 $(n+1)$ 维闵可夫斯基时空中的情形。

为保证一般性，本节中的大多数结果都针对正下半连续函数进行证明，这使得证明过程稍微复杂一些。首次阅读时，可以简单地假设引理条件中的所有函数都是连续的。

{lem 6.1}

引理 6.1. 设 v 是圆上的正下半连续函数，满足 $v(\theta)=v(-\theta)$，并且在 $[0,\pi]$ 上单调不增，即 $v=v^*$。如果 $v^{-2}(\pi) > \lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} v^{-2}(x) = v^{-2}(\frac{\pi}{2})$，那么存在 $\alpha_0\in(0,1)$，使得对于任意洛伦兹变换 $\varphi_{\alpha,0,0}$，$\alpha\in(0,\alpha_0]$ 我们有 [2]

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\theta)\} < \max_\theta\{v^{-2}(\theta)\},\quad \min_\theta\{\gamma_{\alpha,0,0}(v)(\theta)\} > \min_\theta\{v(\theta)\}.$$

证明。从几何角度来看，如图5所示，该引理很容易看出。对于 α 足够小的情形，洛伦兹变换 $\varphi_{\alpha,0,0}$ 会在区间 $[\frac{\pi}{2}+\epsilon,\pi]$ 内减小函数 v^{-2}，其中某个较小的 ϵ 取决于 α，因此我们可以应用 $\varphi_{\alpha,0,0}$ 来减小 v 的最大值。

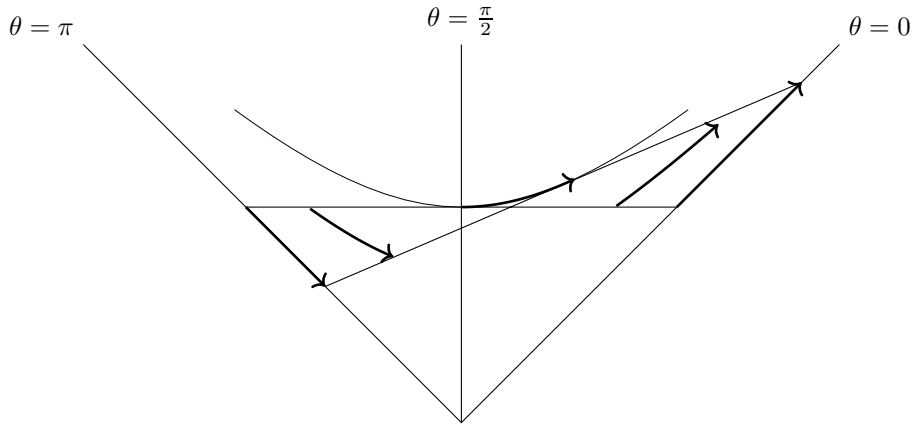


图 5：洛伦兹变换 $\varphi_{\alpha,0,0}$ 在 v^{-2} 上。

{图 5}

我们用上述思路严格证明这个引理。回顾 $\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})$ 的公式：

$$\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\bar\theta)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\bar\theta}v^{-2}(\theta),\quad \cos\theta=\frac{\cos\bar\theta-\alpha}{1-\alpha\cos\bar\theta}.$$

由于假设 $v^{-2}(\pi) > v^{-2}(\frac{\pi}{2}^+)$，存在一个正数 $1>\epsilon>0$ 使得

$$v^{-2}\big(\frac{\pi}{2}+\epsilon\big) < (1-\epsilon)v^{-2}(\pi).$$

[2]注意，v 在 $[0,\pi]$ 上单调不增，而正下半连续性意味着 v^{-2} 在 $[0,\pi]$ 上单调不减且正上半连续。因此 $\lim_{x\to\theta} v^{-2}(x) = \lim_{x\searrow\theta} v^{-2}(x)$，$v^{-2}(\theta) = \lim_{x\searrow\theta} v^{-2}(x) = v^{-2}(\theta^+)$ 对于 $\theta\in[0,\pi]$，并且 $\max_\theta\{\overline{\varphi_{\alpha,0,0}}(v^{-2})(\theta)\}$ 存在。

选择足够小的 $\alpha_0 > 0$，使得

$$\cos\big(\frac{\pi}{2}+\epsilon\big) < -\alpha_0, \quad \sqrt{\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}\cdot(1-\epsilon) < 1.$$

那么，对于任意 $\alpha \in (0, \alpha_0]$，我们有

$$\cos\big(\frac{\pi}{2}+\epsilon\big) < -\alpha_0 \le -\alpha, \quad \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\cdot(1-\epsilon) \le \sqrt{\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}\cdot(1-\epsilon) < 1.$$

¯第一个不等式意味着，如果 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，则 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}+\epsilon]$。我们证明，上述选取的$\alpha$意味着

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\theta)\} < \max_\theta\{v^{-2}(\theta)\} = v^{-2}(\pi).$$

¯由于对于 $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$,

$$\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\bar\theta) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\bar\theta}v^{-2}(\theta) \le \sqrt{1-\alpha^2}v^{-2}(\pi) < v^{-2}(\pi),$$

¯并且对于 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\bar\theta) &= \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\bar\theta}\cdot v^{-2}(\theta)\\ &\le \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\cdot v^{-2}\big(\frac{\pi}{2}+\epsilon\big) < \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\cdot(1-\epsilon)v^{-2}(\pi) < v^{-2}(\pi).\end{aligned}$$

然后我们证明该引理。 □

采用类似的方法，我们可以证明以下引理。

{lem 6.2}

引理 6.2. 设 v 是圆上的一个正函数，满足 $v(\theta) = v(-\theta)$。设 $m = \sup_\theta\{v^{-2}(\theta)\}$。

a. 若对每个 $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$，$\lim_{x\to\theta} v_0^{-2}(x) < m$，则存在 $\alpha_0 \in (0, 1)$，使得对每个洛伦兹变换 $\varphi_{-\alpha,0,0}, \alpha \in (0, \alpha_0]$，都有

$$\sup_\theta\{\varphi_{-\alpha,0,0}(v^{-2})(\theta)\} < \sup_\theta\{v^{-2}(\theta)\} = m, \quad \inf_\theta\{\gamma_{-\alpha,0,0}(v)(\theta)\} > \inf_\theta\{v(\theta)\}.$$

b. 若对每个 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，$\lim_{x\to\theta} v^{-2}(x) < m$，则存在 $\alpha_0 \in (0, 1)$，使得对每个洛伦兹变换 $\varphi_{\alpha,0,0}, \alpha \in (0, \alpha_0]$，都有

$$\sup_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\theta)\} < \sup_\theta\{v^{-2}(\theta)\} = m, \quad \inf_\theta\{\gamma_{\alpha,0,0}(v)(\theta)\} > \inf_\theta\{v(\theta)\}.$$

证明. a. 存在 $\epsilon > 0$，使得 $v_0^{-2}(\theta) < (1-\epsilon)m, \theta \in [\frac{\pi}{2} - \epsilon, \pi]$。取 α_0 使得

$$\cos\big(\frac{\pi}{2}-\epsilon\big) > \alpha_0, \quad \sqrt{\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}(1-\epsilon) < 1.$$

证明的其余部分与引理 6.1的证明相同。参见图 6，其中$\varphi_{-\alpha_0,\ 0,\ 0}$。

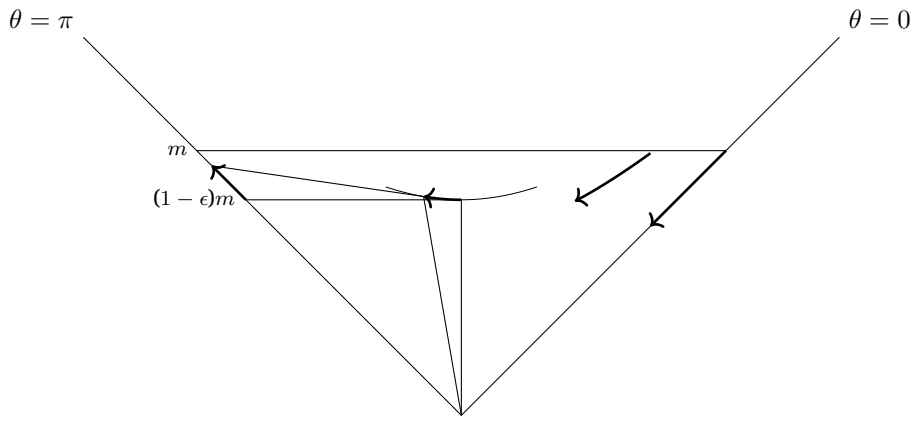


图 6：洛伦兹变换 $\varphi_{-\alpha_0,\ 0,\ 0}$。 {图 6}

b. 存在 $\epsilon > 0$，使得 $v_0^{-2}(\theta) < (1-\epsilon)m, \theta \in [0, \frac{\pi}{2} + \epsilon]$。取 α_0 使得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) < -\alpha_0, \quad \sqrt{\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}(1-\epsilon) < 1.$$

然后，证明的其余部分也与引理 6.1 的证明相同。

□ {rem 6.3}

注释 6.3。对于函数的最大值/上确界以及洛伦兹变换，我们也有与引理 *6.1*、*6.2* 类似的引理。

6.2 构造具有不递减最小值的 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 递减序列 $\mathcal{F}$

{小节 6.2}

在本小节中，我们从圆上的任意正函数 v 出发，利用对称递减重排和洛伦兹变换，构造一个最小值不减的 $\mathcal{F}$ 递减序列。不失一般性，假设 $v = v^*$，因为对称递减重排不会增大 $\mathcal{F}$。构造递减序列的思路是交替应用对称递减重排和洛伦兹变换。

{def 6.4}

定义 6.4. 设 v_0 是圆上的一个正下半连续函数，满足$v_0(\theta) = v_0(-\theta)$，并且在 $[0,\pi]$上单调不增，即 $v_0 = v_0^*$。我们构造序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $v_n = v_n^*$：假设已得到 v_n，则按如下方式构造 v_{n+1}，

a. 考虑函数集合 $\{\varphi_{\alpha,0,0}(v_n^{-2})\}_{\alpha\geq 0}$。选取 α_n 使得

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\theta)\} = \min_{\alpha\geq 0}\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v_n^{-2})(\theta)\},$$

以及对于所有 $\alpha \in [0,\alpha_n)$,

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v_n^{-2})(\theta)\} > \min_{\alpha\geq 0}\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v_n^{-2})(\theta)\}.$$[3]

.

[3]这个条件不能省略，因为存在像 $v^{-2}(\theta) = \min\{1, \nu_{-\alpha,0}(\theta)\}$这样的函数

b. 令 v_{n+1} 为 $\gamma_{\alpha_n,\ 0,\ 0}(v_n)$ 的对称递减重排。

我们可以很容易地得到上述构造的序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的以下性质。

{lem 6.5}

引理 6.5. $\{v_n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的最小值单调不减，$\{v_n^{-2}(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的最大值以及序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的泛函 $\mathcal{F}$ 均单调不增，即

$$\min_\theta\{v_{n+1}(\theta)\}\geq\min_\theta\{v_n(\theta)\},\quad \max_\theta\{v_{n+1}^{-2}(\theta)\}\leq\max_\theta\{v_n^{-2}(\theta)\},\quad \mathcal{F}[v_{n+1}]\leq\mathcal{F}[v_n],$$

且积分 $\int_0^{2\pi}v_n^{-2}\mathrm{d}\theta$ 保持不变。

由于序列 $\{v_n^{-2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，且每个 v_n^{-1}在$[0,\pi]$上单调不减，因此存在一个收敛子列 $\{v_{n_i}^{-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$。我们将在下一小节研究极限函数。我们证明一个关于定义 *a.* 中步骤 6.4的有用引理，该步骤在下一小节中起着重要作用。

{lem 6.6}

引理 6.6. 设 v 是圆上的一个正下半连续函数，满足 $v(\theta)=v(-\theta)$ 且在 $[0,\pi]$上单调不增，即 $v=v^*$。设 α_v 按定义*6.4*.a. 选取，

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta)\}=\min_{\alpha\geq0}\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\theta)\}.$$

那么两个断言中至少有一个成立。

a. $\varphi_{\alpha_v,\ 0,\ 0}(v^{-2})(\frac{\pi}{2})=$最大值$_\theta\{\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta)\}$。

b. 存在 $\theta_1\in[0,\frac{\pi}{2})$ 和 $\theta_2\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ 使得

$$\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta_1)=\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta_2)=\max_\theta\{\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta)\}.$$

证明。我们用反证法证明该引理。令 $m=\max_\theta\{\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta)\}$。假设断言 a. 和 b. 均不成立。令 $v_0=\gamma_{\alpha_v,\ 0,\ 0}(v)$，即 $v_0^{-2}=\varphi_{\alpha_v,\ 0,\ 0}(v^{-2})$。那么有两种情况：

i. $\overline{\lim}_{x\to\theta}v_0^{-2}(x)=v_0^{-2}(\theta)<m,\forall\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$,

ii. $\overline{\lim}_{x\to\theta}v_0^{-2}(x)=v_0^{-2}(\theta)<m,\forall\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

在情况 i. 中，根据引理 6.6。*a.*，我们有 $\alpha_v>0$ 并且存在 $\alpha_v>\alpha_0>0$ 充分sm所有，使得

$$\max_\theta\{\varphi_{-\alpha_0,0,0}(v_0^{-2})(\theta)\}=\max_\theta\{\varphi_{-\alpha_0,0,0}\circ\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta)\}<m,$$

这与 $m=\min_{\alpha\geq0}\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\theta)\}$ 矛盾。

在情形 ii. 根据引理 6.6。*b.*，我们有：存在 $\alpha_0>0$ 足够小，使得

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha_0,0,0}(v_0^{-2})(\theta)\}=\max_\theta\{\varphi_{\alpha_0,0,0}\circ\varphi_{\alpha_v,0,0}(v^{-2})(\theta)\}<m,$$

这与 $m=\min_{\alpha\geq0}\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v^{-2})(\theta)\}$ 矛盾。 □

{备注 6.7}

注释 6.7。我们使用洛伦兹变换来降低定义 $\mathcal{F}$ 中的递减序列的最大值 *6.4*。如注释 *6.3*所述，也可以使用洛伦兹变换来降低函数的最大值/上确界，因此可以引入一个类似的递减序列 $\mathcal{F}$，但其最大值单调不增。

6.3 递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ （ $\mathcal{F}$）的子序列极限

{第 6.3} 小节

设 v_0 以及递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如定义 6.4所述。设 v_∞^{-1}为收敛子列 $\{v_{n_i}^{-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$的极限，其中 v_∞ 取值于扩展正实数集 $(0,+\infty]$。我们也称 $\{v_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$收敛到 v_∞。 $\{v_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$和 v_∞满足以下性质。

{lem 6.8}

引理 6.8。 设 v_0 和递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如定义 6.4中所述。设 v_∞ 是子序列 $\{v_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$的极限，它总是存在。则子序列极限 v_∞ 满足

a. v_∞ 在 $[0,\pi]$ 上单调不增，且 $v_\infty(\theta) = v_\infty(-\theta)$。

b. $\max_\theta\{v_\infty^{-2}(\theta)\} \le \max_\theta\{v_n^{-2}(\theta)\}, \min_\theta\{v_\infty(\theta)\} \ge \min_\theta\{v_n(\theta)\}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

c. $\int_0^{2\pi} v_\infty^{-2}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{i\to\infty}\int_0^{2\pi} v_{n_i}^{-2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} v_n^{-2}\,\mathrm{d}\theta, \quad n\in\mathbb{N}.$

d. v_∞ 在 $(\frac{\pi}{2},\ \pi]$ 上为常数。见图 7。

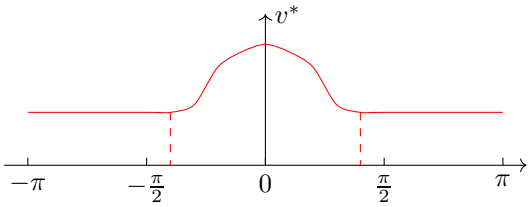


图 7： v_∞。

{图 7}

证明。a. 由此可得 $v_{n_i} = v_{n_i}^*$。

b. 由引理 6.5可得。

c. $\int_0^{2\pi} v_\infty^{-2}\mathrm{d}\theta = \lim_{i\to\infty}\int_0^{2\pi} v_{n_i}^{-2}\mathrm{d}\theta$ 由 $\{v_{n_i}^{-2}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的一致上有界性可得。

d. 反证法：假设 v_∞ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 上不为常数，那么 $v_\infty^{-2}(\pi) > v_\infty^{-2}(\frac{\pi}{2}^+)$。因此由引理 6.1 存在 $\alpha_\infty > 0$ 使得

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha_\infty,0,0}(v_\infty^{-2})(\theta)\} < \max_\theta\{v_\infty^{-2}(\theta)\}.$$

由于 v_{n_i} 收敛到 v_∞，我们有

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha_\infty,0,0}(v_{n_i}^{-2})(\theta)\} \longrightarrow \max_\theta\{\varphi_{\alpha_\infty,0,0}(v_\infty^{-2})(\theta)\} \text{ as } i\to\infty,$$

因此存在 $i\in\mathbb{N}$，使得

$$\max_\theta\{\varphi_{\alpha_\infty,0,0}(v_{n_i}^{-2})(\theta)\} < \max_\theta\{v_\infty^{-2}(\theta)\}.$$

那么根据定义6.4,

$$\max_\theta\{v_{n_i+1}^{-2}(\theta)\} = \min_{\alpha\ge0}\max_\theta\{\varphi_{\alpha,0,0}(v_{n_i}^{-2})(\theta)\} \le \max_\theta\{\varphi_{\alpha_\infty,0,0}(v_{n_i}^{-2})(\theta)\} < \max_\theta\{v_\infty^{-2}(\theta)\},$$

这与 b 矛盾。因此， v_∞ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$上为常数。

□

6.4 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$子序列极限的有界性

{第 6.4} 小节

假设 v_0 满足约束 $\int_0^{2\pi} v_0^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$。根据上述引理 6.8，$c$，$v_\infty$ 也满足约束 $\int_0^{2\pi} v_\infty^{-2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$。由于 $\{\mathcal{F}[v_n]\}$ 是非递增的，我们想知道$\mathcal{F}[v_\infty] \le \lim_{n\to+\infty}\mathcal{F}[v_n]$是否存在。为回答这个问题，我们首先证明以下引理，这些引理保证 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有上界。

{lem 6.9}

引理 6.9。 设 v_0 和递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如定义 *6.4*中所述。设 $\{\alpha_n \ge 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也如定义 *6.4*中所述。则存在正数 $1 > \bar{\alpha} > 0$ 使得$0 \le \alpha_n \le \bar{\alpha}$。

*Pro*属于。设 $m_n = \max_\theta\{v_n^{-2}(\theta)\}$ 以及 $m_\infty = \lim_{n\to\infty}\max_\theta\{v_n^{-2}(\theta)\}$。那么对于任意 $\epsilon > 0$，存在exis足够大，使得

$$m_\infty \le \max_\theta\{v_n^{-2}(\theta)\} < m_\infty + \epsilon, \quad n \ge N_\epsilon.$$

¯根据引理 6.6，存在 $\theta_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 使得

$$\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta}_n) = \max_\theta\{\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta})\}.$$

¯设 $\theta_n \in [\theta_{n_k}, \pi]$ 由方程（3.1）定义

$$\cos\theta_n = \frac{\cos\bar{\theta}_n - \alpha_n}{1 - \alpha_n\cos\bar{\theta}_n}, \tag{6.1}$$

{eqn 5.1}

我们用反证法证明该引理。反设存在一个子序列 $\{\alpha_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到 1，当 $k \to +\infty$ 时，于是有

$$\cos\theta_{n_k} = -\alpha_{n_k} + (1-\alpha_{n_k}^2)\frac{\cos\bar{\theta}_{n_k}}{1-\alpha_{n_k}\cos\bar{\theta}_{n_k}} \to -1 \text{ as } k \to +\infty,$$

$$\theta_{n_k} \to \pi \text{ as } k \to +\infty.$$

见图8。我们将证明 $\int_0^\pi v_{n_k}^{-2}\mathrm{d}\theta$ 收敛于 0，这与 $\int_0^\pi v_{n_k}^{-2}\mathrm{d}\theta = \pi$ 矛盾。为简洁起见，下文用 $\bar{v}_n$ 表示 $\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n)$。

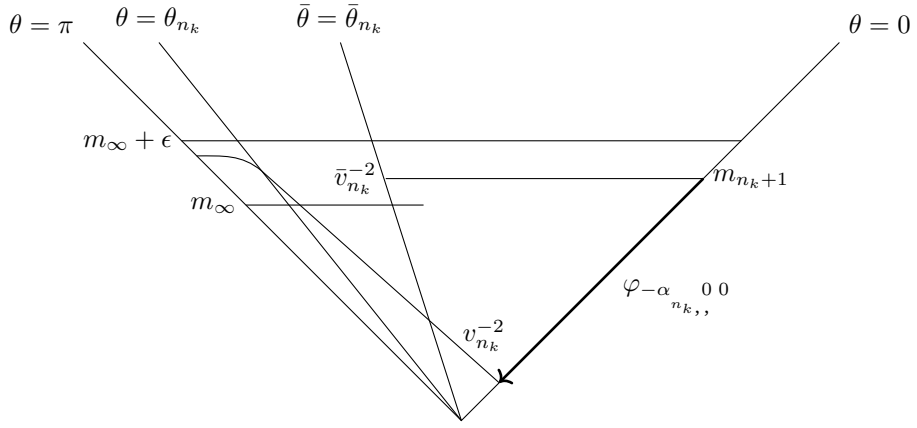


Figure 8: $v_{n_k}^{-2}$, $\alpha_{n_k} \to 1$, $\theta_{n_k} \to \pi$.

{图 8}

在 $[\theta_{n_k},\pi]$ 上， $v_{n_k}^{-2}<m_\infty+\epsilon$。 在 $[0,\theta_{n_k}]$ 上，

$$v_{n_k}^{-2}(\theta)=\varphi_{-\alpha_{n_k},0,0}(\bar{v}_n^{-2})(\theta)=\frac{\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}}{1+\alpha_{n_k}\cos\theta}\cdot\bar{v}_{n_k}^{-2}(\bar{\theta})\le\frac{\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}}{1+\alpha_{n_k}\cos\theta}\cdot m_{n_k+1}.$$

注意，在 θ_{n_k} 处我们有

$$v_{n_k}^{-2}(\theta_{n_k})=\frac{\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}}{1+\alpha_{n_k}\cos\theta_{n_k}}\cdot\bar{v}_{n_k}^{-2}(\bar{\theta}_{n_k})=\frac{\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}}{1+\alpha_{n_k}\cos\theta_{n_k}}\cdot m_{n_k+1}<m_\infty+\epsilon,\qquad\text{for } n_k\ge N_\epsilon.$$

那么在 $[0,\theta_{n_k}]$上

$$\begin{aligned}v_{n_k}^{-2}(\theta)&\le(m_\infty+\epsilon)\cdot\frac{1+\alpha_{n_k}\cos\theta_{n_k}}{1+\alpha_{n_k}\cos\theta}\\&\overset{(6.1)}{=}(m_\infty+\epsilon)\cdot\frac{\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}}{1-\alpha_{n_k}\cos\bar{\theta}_{n_k}}\cdot\frac{\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}}{1+\alpha_{n_k}\cos\theta}\\&\le(m_\infty+\epsilon)\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}\cdot\nu_{\alpha_{n_k},0}(\theta),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由$\alpha_{n_k}\ge 0$、 $\bar{\theta}_{n_k}\in[\frac{\pi}{2},\pi]$得出。因此现在我们可以估计 $\int_0^\pi v_{n_k}^{-2}\mathrm{d}\theta$,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi v_{n_k}^{-2}\,\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\theta_{n_k}}v_{n_k}^{-2}\,\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_{n_k}}^\pi v_{n_k}^{-2}\,\mathrm{d}\theta\\&\le\int_0^{\theta_{n_k}}(m_\infty+\epsilon)\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}\cdot\nu_{\alpha_{n_k},0}(\theta)\,\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_{n_k}}^\pi(m_\infty+\epsilon)\,\mathrm{d}\theta\\&\le(m_\infty+\epsilon)\sqrt{1-\alpha_{n_k}^2}\pi+(m_\infty+\epsilon)(\pi-\theta_{n_k})\\&\to 0\text{ as }k\to+\infty.\end{aligned}$$

由此我们得到了所需的矛盾。 □

事实上，我们有一个更强得多的结果，它将引理 6.9 作为推论推出。

{lem 6.10}

引理 6.10. 设 v_0 以及递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如定义 *6.4*所述。设 $\{\alpha_n\ge 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也如定义 *6.4*所述。那么

$$\prod_{n\in\mathbb{N}}\sqrt{1-\alpha_n^2}\ge\frac{m_\infty}{m_0}.$$

证明。 采用引理 6.9中的记号，我们有

$$\cos\theta_n=\frac{\cos\bar{\theta}_n-\alpha_n}{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}_n}\overset{\bar{\theta}_n\in[\frac{\pi}{2},\pi]}{\le}-\alpha_n.$$

根据公式

$$\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta}_n)=\frac{1+\alpha_n\cos\theta_n}{\sqrt{1-\alpha_n^2}}v_n^{-2}(\theta_n)=\max_\theta\{\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta})\}=\max_\theta\{v_{n+1}^{-2}(\bar{\theta})\},$$

我们得到

$$\sqrt{1-\alpha_n^2}\cdot m_n\ge m_{n+1}.$$

因此，对上述不等式取乘积即可轻松得到该引理。 □

{引理 6.11}

引理 6.11。 设 v_0 以及递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如定义 6.4所述。则 $\{v_n\}_{i\in\mathbb{N}}$从上方有一个有限正数作为界。

证明。 只需证明 $\{v_n^{-2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 从下方被一个正数所界。采用引理 6.9、6.10中的记号。我们估计 $\varphi_{\alpha_n,\ 0,\ 0}(v_n^{-2})$ $(\bar{\theta})$。首先，我们定义 $\theta'_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$， θ'_n 类似于引理 θ_n， θ_n 6.9 中的定义为

$$\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta}'_n) = \max_{\theta}\{\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta})\}, \quad \cos\theta'_n = \frac{\cos\bar{\theta}'_n - \alpha_n}{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}'_n}.$$

见图 9。引理 θ'_n 证实了存在这样的 θ'_n。

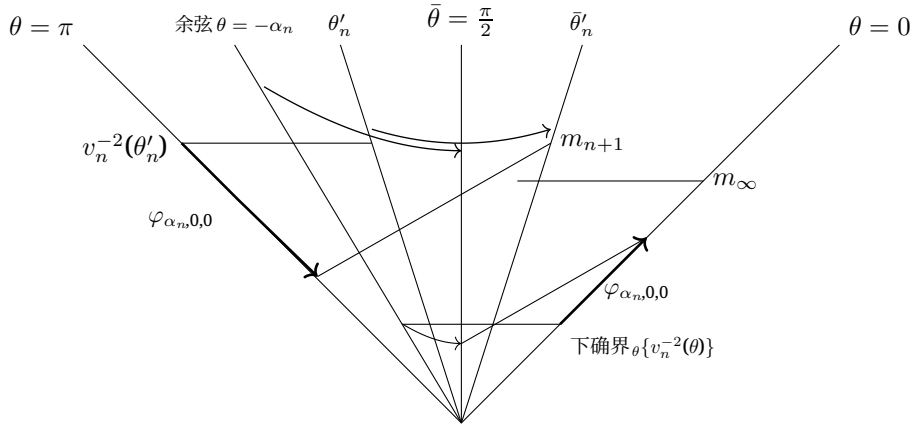


图 9：$\varphi_{\alpha_n,\ 0,\ 0}(v_n^{-2})$的下界。

{图 9}

对于$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta}) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\bar{\theta}}\cdot v_n^{-2}(\theta) &\geq \sqrt{1-\alpha_n^2}\cdot v_n^{-2}(\theta), \quad \bar{\theta}\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ &\geq \sqrt{1-\alpha_n^2}\cdot\inf_\theta\{v_n^{-2}(\theta)\}.\end{aligned}$$

对于 $\theta\in[\theta'_n,\pi]$（对应于 $\theta\in[\theta'_n,\pi]$），

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta}) &= \frac{\sqrt{1-\alpha_n^2}}{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}}\cdot v_n^{-2}(\theta) \geq \frac{\sqrt{1-\alpha_n^2}}{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}}\cdot v_n^{-2}(\theta'_n)\\ &= \frac{\sqrt{1-\alpha_n^2}}{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}}\cdot\frac{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}'_n}{\sqrt{1-\alpha_n^2}}\cdot\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta}'_n)\\ &\geq \frac{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}'_n}{1-\alpha_n\cos\bar{\theta}}\cdot m_\infty \qquad (0\leq\bar{\theta}'_n\leq\bar{\theta}\leq\pi)\\ &\geq \frac{1-\alpha_n}{1+\alpha_n}\cdot m_\infty \qquad (0\leq\alpha_n\leq\bar{\alpha}<1 \text{ by lemma } 6.9)\\ &\geq \frac{1-\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}m_\infty.\end{aligned}$$

Thus

$$\inf_{\theta}\{v_{n+1}^{-2}(\theta)\} = \inf_{\bar{\theta}}\{\varphi_{\alpha_n,0,0}(v_n^{-2})(\bar{\theta})\} \geq \min\left\{\sqrt{1-\alpha_n^2}\cdot\inf_{\theta}\{v_n^{-2}(\theta)\}, \frac{1-\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}m_\infty\right\}$$
$$\geq \prod_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{1-\alpha_k^2}\cdot\frac{1-\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}m_\infty \geq \frac{1-\bar{\alpha}}{1+\bar{\alpha}}\cdot\frac{1}{m_0} > 0.$$

于是引理得证。 □

6.5 $\mathcal{F}$ 的子序列极限的泛函 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

{小节 6.5}

我们已经证明，在定义 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 6.4 中构造的递减序列下界为一个正数（引理6.8），上界为一个有限正数（引理6.11）。于是，我们可以推导出序列 $\mathcal{F}$ 的泛函 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的推论。

{pro 6.12}

命题 6.12。设 v_0 和递减序列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如定义*6.4*所述。设 v_∞为子序列$\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$的极限。假设 $v_0 \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$，则有以下结论：

a. $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$ 中的有界序列，b. $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 v_∞，且 v_∞ 连续，c. $v_\infty \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^2)$ 且 $\mathcal{F}[v_\infty] \leq$ 极限 $_{n\to+\infty}\mathcal{F}[v_n]$。

证明。利用前几小节中的准备工作，现在很容易证明该命题。

a. 由 $\{\mathcal{F}[v_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ 非增且 v_n 被某个有限正数从上方界定可得。b. a. 蕴含 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是等度连续的，因此 $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的收敛是一致的，且极限函数 v_∞ 是连续的。c. $\{v_{n_k}\}$ 在 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$ 中弱收敛于 v_∞，因此 $v_\infty \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$。 $\mathcal{F}[v_\infty] \leq \lim_{n\to+\infty}\mathcal{F}[v_n]$由

$$\int_0^{2\pi}(v_\infty')^2\mathrm{d}\theta \leq \lim_{k\to+\infty}\int_0^{2\pi}(v_{n_k}')^2\mathrm{d}\theta, \quad \int_0^{2\pi}v_\infty^2\mathrm{d}\theta = \lim_{k\to+\infty}\int_0^{2\pi}v_{n_k}^2\mathrm{d}\theta, \quad \mathcal{F}[v_{n+1}] \leq \mathcal{F}[v_n].$$

□

于是，我们得到关于泛函 $\mathcal{F}$ 的全局最小值/下确界的如下命题。

{命题 6.13}

命题 6.13。设 S 为圆上满足以下条件的函数集：

a. $v > 0$ 在 $[-\pi,\pi]$上是对称非增的，

b. $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$，c. v在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$上为常数。

令 S_c 为 S 满足以下附加约束条件的子集：

d. $\int_0^{2\pi}v^{-2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$.

于是我们有

$$\inf\left\{\mathcal{F}[v] : v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1), v > 0, \int_0^{2\pi} v^{-2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\right\} = \inf_{v\in S_c}\{\mathcal{F}[v]\},$$

左侧的 $\mathcal{F}$ 下确界可以达到，当且仅当它可以在 S_c中达到

Pro。 该命题由定义 $\mathcal{F}$ 中构造的递减序列 6.4得出 □

{注 6.14}

注释6.14。 命题 *6.13* 与条件c. 存在类比，只需将其替换为

c′。 v 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$上为常数。

通过将定义 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的递减序列 *6.4*替换为 $\mathcal{F}$，即可用同样的方法推导出该结论；该序列具有非递增的最大值，如注释 *6.7*中所述。

7 临界点是全局极小值点：不等式的证明

{节 7}

本节中，我们证明命题 4.3 ： 泛函 $v^{-2} = \nu_{\alpha,\theta_0}$ 的临界点 $\mathcal{F}[v] = \int_0^{2\pi}[4(v')^2 - v^2]\mathrm{d}\theta$ 在约束 $\int_0^{2\pi} v^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$ 下实际上是全局极小值点，这可由命题 6.13得出。

回顾一下，命题6.13 指出，要找出泛函 $\mathcal{F}[v]$在满足约束条件的 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$ 正函数上的下确界 $\int_0^{2\pi} v^{-2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$，只需在受限得多的函数类 $\mathcal{F}$中求出 S_c，其中 v在$[\frac{\pi}{2}, \pi]$上为常函数。我们将证明， $\mathcal{F}$ 在 S_c 中的极小化序列收敛到极限函数 $v_\infty \in S_c$，这意味着 $\mathcal{F}$ 的下确界可以达到，且该序列收敛到常函数。

断言的证明*4.3*。令 $\{v_n\}$ 为泛函 $\mathcal{F}$ 在 S_c 中的一个极小化序列，该泛函定义于命题6.13。引入记号

$$m_n = \min_{\theta\in[0,\pi]}\{v_n(\theta)\}, \quad M_n = \max_{\theta\in[0,\pi]}\{v_n(\theta)\}.$$

由于 $v_n \in S_c$，我们有 $v_n([\frac{\pi}{2}, \pi]) = \{m_n\}$, $v_n(0) = M_n$，并且

$$2\pi = \int_0^{2\pi} v_n^{-2}\mathrm{d}\theta \begin{cases} \geq 2\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} v_n^{-2}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{m_n^2} & \Rightarrow \quad m_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \leq 2\displaystyle\int_0^{\pi} m_n^{-2}\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{m_n^2} & \Rightarrow \quad m_n \leq 1. \end{cases}$$

现在，如果 $\{v_n\}$ 也有上界，即 $\sup\{M_n\} < +\infty$，那么 $\{v_n\}$ 在 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$ 中有界，因为

$$\|v_n\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}[v_n] + \|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)})^{\frac{1}{2}} + \|v_n\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}$$

一致有界。因此，通过取一个子序列，我们总可以假设 $\{v_n\}$弱收敛于函数 $v_\infty \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$，这同时也是一致收敛。于是根据

$\{v_n\}$ 和 $\{v_n^{-1}\}$的有界性，我们有 $v_\infty \in S_c$。由于 $\{v_n\}$ 是一个极小化序列， v_∞ 在约束条件下达到 $\mathcal{F}$ 的全局下确界，并且

$$\mathcal{F}[v_\infty] \leq \lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}[v_n].$$

根据命题4.1， v_∞ 必定是常函数 1。因此结论得证。

因此，为了证明该结论，只需证明 $\{v_n\}$ 有上界。下面我们用反证法证明。假设相反，即 $\sup\{M_n\} = +\infty$，那么通过取一个子序列，我们总可以假设 $M_n \to +\infty$ as $n \to +\infty$。我们证明，当 $n \to +\infty$ 时， $\mathcal{F}[v_n]$ 趋于 $+\infty$。注意，

$$(M_n - m_n)^2 = \Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n' \mathrm{d}\theta\Big]^2 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (v_n')^2 \mathrm{d}\theta,$$

thus

$$\mathcal{F}[v_n] = 2\int_0^{\pi} [4(v_n')^2 - v_n^2]\mathrm{d}\theta \geq \frac{16}{\pi}(M_n - m_n)^2 - \pi M_n^2 - \pi m_n^2 \to +\infty,$$

当 $M_n \to +\infty$ 时， $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m_n \leq 1$。这与 v_n 是极小化序列相矛盾。因此，我们证明了 $\{v_n\}$ 有上界，证明完毕。 □

我们看到，命题6.13 在上述证明中起着关键作用，它限制了变分问题中函数的类别。现在我们给出该不等式的完整表述。

{thm 7.1}

定理 7.1. 设 v 是 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$ 中的一个函数，则 v 满足以下不等式

$$\int_{\mathbb{S}^1} [4(v')^2 - v^2]\mathrm{d}\theta \geq -\frac{4\pi^2}{\int_{\mathbb{S}^1} v^{-2}\mathrm{d}\theta},$$

等号在 $v^{-2}(\theta) = \frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha}\cos(\theta-\theta_o)$ 处成立，~~其中 $k > 0$~~, $\alpha \in (-1, 1)$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$。

证明。首先注意，只需证明非负函数满足该不等式，因为可以用 $|v|$ 替换 v。对于非负函数 v，定义 $v_n = \max\{v, 1/n\}$。令 $1/n \to 0^+$ 趋于，由 v_n 的不等式取极限，即得 v 的不等式。 □

{cor 7.2}

推论 7.2。事实上，若 $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)$ 在某点处为零，则 $\int_{\mathbb{S}^1} v^{-2}\mathrm{d}\theta = +\infty$,[4]，因此

$$4\int_{\mathbb{S}^1} (v')^2\mathrm{d}\theta \geq \int_{\mathbb{S}^1} v^2\mathrm{d}\theta \ \textit{if}\ v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1)\ \textit{vanishes somewhere.}$$

注意，这与圆 $\int_{\mathbb{S}^1}(v')^2\mathrm{d}\theta \geq \int_{\mathbb{S}^1}(v-\overline{v})^2\mathrm{d}\theta$ 上的庞加莱不等式相似，其中 $\overline{v} = \frac{\int_{\mathbb{S}^1} v\mathrm{d}_{2\pi}\theta}{}$。

我们将推论的证明7.2 留在附录A中。

[4]然而，与这一事实的优美简洁相比，我们知道该事实的证明相当繁琐。我们需要{脚注 4} 研究函数类$B^M_{m,\,c}$ 中狄利克雷能量 $E(v) = \int_0^\pi (v')^2\mathrm{d}\theta$ 的最小值，该函数类由以下条件定义：

a. $v \in \mathrm{H}^1([0,\pi])$,

b. $\min_{\theta\in[0,\pi]}\{v(\theta)\} = m$、$\max_{\theta\in[0,\pi]}\{v(\theta)\} = M$ 以及 $\int_0^\pi v^{-2}\mathrm{d}\theta = c \in (\frac{\pi}{M^2}, \frac{\pi}{m^2})$。

接着研究狄利克雷能量最小值 $\min^{v\in B^M_{m,\,c}}\{E(v)\}$ 在 $m \to 0^+$ 时的极限，其中 M、 c 保持固定，这给出：

$$\min_{v\in B^M_{m,c}} \{E(v)\} \to +\infty, \text{ as } m \to 0^+,$$

其中 c、 M、 M^{-1} 可以变化，但在取极限时一致有界。

8 不等式的若干变体

本节中，我们推导不等式 $\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta \geq -\int_{\mathbb{S}^1}\frac{4\pi^2}{v^{-2}\mathrm{d}\theta}$ 的一些变体。 {sec 8}

8.1 定义在 $[0,l]$ 上的函数的不等式

自然会想到，对于函数 v 定义在 $[0,2\pi]$ 上且满足$v(0)\neq v(2\pi$的情况，是否也成立类似的不等式。由定理 7.1可得以下推论。

{cor 8.1}

推论 8.1. 设 v 是 $\mathrm{H}^1([0,l])$ 中的函数，则 v 满足以下不等式

$$\int_0^l [\frac{4l^2}{\pi^2}(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta \geq -\frac{l^2}{\int_0^l v^{-2}\mathrm{d}\theta},$$

等号在 $v^{-2}(\theta) = \frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha}\cos(\frac{\pi}{l}\theta)$， ~~$k>0,\quad \alpha\in$~~$(-1,1)$ 时成立。

证明。 注意，我们可以将定义在 v 上的连续函数 $[0,\pi]$ 延拓为周期为 2π的偶周期连续函数，因此由定理 7.1 可得

$$\int_0^\pi [4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta \geq -\frac{\pi^2}{\int_0^\pi v^{-2}\mathrm{d}\theta},$$

等号在 $v^{-2}(\theta) = \frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha}\cos\theta$, $k>0$, $\alpha\in(-1,1)$ 处成立。经过简单的重新缩放$\theta\to\frac{\pi}{l}\theta$，即可得到该推论。 □

{cor 8.2}

推论 8.2。 由推论 *7.2*，可得

$$\frac{4l^2}{\pi^2}\int_0^l (v')^2\mathrm{d}\theta \geq \int_0^l v^2\mathrm{d}\theta,$$

如果 $v\in\mathrm{H}^1([0,l])$ 在某处为零。

8.2 通过立体投影进行变换

我们通过立体投影，将圆上的不等式变换为实数线上的不等式。回顾从圆到实数线的立体投影：

$$\psi:\quad \mathbb{S}^1\to\mathbb{R},\quad \theta\mapsto x=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}.$$

我们有

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta-1},\quad \mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Thus

$$\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right|^2\mathrm{d}\theta=\frac{1+x^2}{2}\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x,\quad v^2\mathrm{d}\theta=\frac{2v^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$
$$v^{-2}\mathrm{d}\theta=\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}v\right)^{-2}\mathrm{d}x=\frac{2}{1+x^2}v^{-2}\mathrm{d}x,$$

因此，我们得到以下推论。

{推论 8.3}

推论 8.3. 设 v 是 $\mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R})$ 中的一个函数。

a. 若极限 $v(\infty)=\lim_{x\to+\infty}v(x)=\lim_{x\to-\infty}v(x)$ 存在，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1+x^2)\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|^2-\frac{v^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x\geq-\frac{\pi^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v^{-2}}{1+x^2}\mathrm{d}x},$$

等号在 $v^{-2}=\frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\left[\frac{1-x_0^2}{1+x_0^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x_0}{1+x_0^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\right]}$ 处取得，其中 $k>0$, $\alpha\in(-1,1)$, $x_0\in\mathbb{R}$。

b. 若极限 $v(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}v(x)$, $v(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}v(x)$ 均存在，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[4(1+x^2)\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|^2-\frac{v^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x\geq-\frac{\pi^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v^{-2}}{1+x^2}\mathrm{d}x},$$

等号在 $v^{-2}=\frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\frac{\alpha x}{\sqrt{1+x^2}}}$ 处取得，其中 $k>0$, $\alpha\in(-1,1)$。

证明。a. 等价于 $\int_{\mathbb{S}^1}[4(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta\geq-\int_{\mathbb{S}^1}\frac{4\pi^2}{v^{-2}}\mathrm{d}\theta$，而 b. 等价于 $\int_0^{2\pi}[16(v')^2-v^2]\mathrm{d}\theta\geq-\int_0^{2\pi}\frac{4\pi^2}{v^{-2}}\mathrm{d}\theta$。

□

{cor 8.4}

推论 8.4。由以下推论 *7.2*, *8.2*，可得

1. 若 v 在 $(-\infty,+\infty)\cup\{\infty\}$ 上某处为零，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x\geq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v^2}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

2. 若 v 在 $[-\infty,+\infty]$ 上某处为零，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}4(1+x^2)\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x\geq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v^2}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

定义 $u=\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}v$，并用 u 重写该不等式。我们有以下推论。推论 8.5。设 $u\in\mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R})$。

{cor 8.5}

a. 若极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$ 存在，则

$$\lim_{M,N\to+\infty}\left(\int_{-N}^{M}\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x-\frac{xu^2}{1+x^2}\Big|_{-N}^{M}\right)\geq-\frac{4\pi^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}u^{-2}\mathrm{d}x},$$

等号在 $u^{-2}=\frac{2k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\left[\frac{1-x_0^2}{1+x_0^2}\cdot\frac{1-x^2}{()}+\frac{2x_0}{1+x_0^2}\cdot2x\right]}$ 处成立，~~其中 $k>0$, $\alpha\in(-1,1)$, $x_0\in\mathbb{R}$。~~

b. 如果极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$、$\lim_{x\to-\infty}\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$ 都存在，那么

$$\lim_{M,N\to+\infty}4\Big(\int_{-N}^{M}\Big|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x-\frac{xu^2}{1+x^2}\Big|_{-N}^{M}\Big)+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3u^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\geq-\frac{\pi^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}u^{-2}\mathrm{d}x},$$

等号在 $u^{-2}=\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\frac{\alpha x}{\sqrt{1+x^2}}}$ 处成立，其中 $k>0,\alpha\in(-1,1)$。

证明。由 $u=\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}v$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}&=\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}v,\\ \Big|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|^2&=\frac{1+x^2}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big|^2+xv\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{x^2}{2(1+x^2)}v^2,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x+\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\Big[xv\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{x^2}{2(1+x^2)}v^2\Big]\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+x^2)}v^2\mathrm{d}x+\lim_{N\to+\infty}\frac{xv^2}{2}\Big|_{-N}^{N}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+x^2)}v^2\mathrm{d}x+\lim_{N\to+\infty}\frac{xu^2}{1+x^2}\Big|_{-N}^{N},\end{aligned}$$

因此，$|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}|^2$通常不可积，并且

$$\lim_{M,N\to+\infty}\Big(\int_{-N}^{M}\Big|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x-\frac{xu^2}{1+x^2}\Big|_{-N}^{M}\Big)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+x^2)}v^2\mathrm{d}x.$$

因此，不等式可用 u 改写为

$$\lim_{M,N\to+\infty}\Big(\int_{-N}^{M}\Big|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|^2\mathrm{d}x-\frac{xu^2}{1+x^2}\Big|_{-N}^{M}\Big)\geq-\frac{\pi^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}u^{-2}\mathrm{d}x},$$

其中 $\lim_{x\to+\infty}\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$ =$\lim_{x\to-\infty}\frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$ 存在。类似的推导可得 b。 □

{rem 8.6}

注记 8.6. 容易看出，与推论 *8.4* 中类似的不等式也成立。

9 关于 $\mathbb{S}^n$、$n\geq3$ 上尖锐索博列夫不等式的简要证明

{节 9}

本节将用第 1.3 节和 $\mathbb{S}^n$、$n\geq3$ 节介绍的方法，简述 上尖锐索博列夫不等式（1.3）的另一种证明。回顾一下，尖锐索博列夫不等式（1.3）表明

$$\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla v|^2\mathrm{d}\mu+\frac{n(n-2)}{4}\int_{\mathbb{S}^n}v^2\mathrm{d}\mu\geq\frac{n(n-2)}{4}|\mathbb{S}^n|^{\frac{2}{n}}\Big(\int_{\mathbb{S}^n}v^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{n-2}{n}},\quad n\geq3,$$

并且当 $v^{\frac{2n}{n-2}}(p)=\frac{k\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha\cos(d_{p,p_0})}$ 时取等号，其中 $k>0,\alpha\in(-1,1)$，$p_0\in\mathbb{S}^n$ 和 $d(p,p_0)$ 是 p,p_0 之间的距离。

我们首先介绍 $\mathbb{S}^n$ 与闵可夫斯基时空 $\mathbb{M}^{n+2}$ 之间的关系。考虑 $\mathbb{S}^n$ 的坐标系 $\{\theta,\vartheta\}$，其中 $\theta\in[0,\pi]$, $\vartheta\in\mathbb{S}^{n-1}$。然后，我们可以引入 $\mathbb{M}^{n+2}$ 的空间极坐标系 $\{t,r,\theta,\vartheta\}$，其到直角坐标系的变换由[5]给出

$$(t,r,\theta,\vartheta)\mapsto(t,r\cos\theta,r\sin\theta\cdot\vartheta).$$

利用上述（t, r, θ, ϑ）$\mathbb{M}^{n+2}$坐标系，我们引入洛伦兹变换φ_α，类似于$\varphi_{\alpha,\ \theta_0,\ \bar\theta_0}$第3 节中的变换

$$\varphi_\alpha:\quad (t,r,\theta,\vartheta)\quad\mapsto\quad(\bar t,\bar r,\bar\theta,\bar\vartheta),$$

其中 $\bar t=\frac{t+\alpha r}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, $\bar r=\sqrt{\frac{(r+\alpha t\cos\theta)^2-\alpha^2r^2-t^2}{1-\alpha^2}}$, $\tan\bar\theta=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\,r\sin\theta}{t+\alpha r\cos\theta}$, $\bar\vartheta=\vartheta$ 且 $\bar\theta$由下式求解

$$\cos\bar\theta=\frac{\alpha t+r\cos\theta}{\sqrt{(r+\alpha t\cos\theta)^2-\alpha^2(r^2-t^2)\sin^2\theta}},\quad \sin\bar\theta=\frac{r\sin\theta\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{(r+\alpha t\cos\theta)^2-\alpha^2(r^2-t^2)\sin^2\theta}}.$$

将洛伦兹变换 φ_α限制在光锥 C_0上，采用坐标系 $(\underline{u},\theta,\vartheta)$，其中 $\underline{u}=\frac{t+r}{2}$，

$$\varphi_\alpha:\quad(\underline{u},\theta,\vartheta)\quad\mapsto\quad(\underline{\bar u},\bar\theta,\bar\vartheta)=(\tfrac{1+\alpha\cos\theta}{\sqrt{1-\alpha^2}}\underline{u},\bar\theta,\vartheta),$$

其中

$$\cos\bar\theta=\tfrac{\alpha+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta},\quad \sin\bar\theta=\tfrac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}.\tag{9.1}$$

{ 9 1}方程. 方程.

考虑 S 中的一个截面 C_0，其参数化表示为 $\{\underline{u},\theta,\vartheta\}$ 坐标系中 (θ,ϑ) 区域上函数 f 的图像 $\underline{u}$，那么 φ_α将 S变换为 $\varphi_\alpha(S)$，其参数化表示为 $\bar f=\varphi_\alpha(f)$，且

$$\bar f(\bar\theta,\bar\vartheta)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\bar\theta}f(\theta,\vartheta)=\frac{1+\alpha\cos\theta}{\sqrt{1-\alpha^2}}f(\theta,\vartheta),$$

其中 $\bar\vartheta=\vartheta$，且 θ 由洛伦兹变换 φ_α的方程 (9.1) 确定。引入$\nu_\alpha(\bar\theta)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha\cos\bar\theta}$，则 f 的变换 φ_α可写为 $\bar f(\bar\theta,\bar\vartheta)=\nu_\alpha(\bar\theta)f(\theta,\vartheta)$。令$f=v^{\frac{2}{n-2}}$，则我们引入与变换$\gamma_{\alpha,\theta_0,\bar\theta_0}$类似的变换 γ_α，用于 v，如命题 3.1 中所述:

$$\bar v=\gamma_\alpha(v),\quad \bar v(\bar\theta,\bar\vartheta)=[\nu_\alpha(\bar\theta)]^{\frac{n-2}{2}}v(\theta,\vartheta).$$

注意，形式上令 $n=1$，上面的公式便化为第 3节中对应的公式。引入泛函 $\mathcal{F}[v]$ 使得

$$\mathcal{F}[v]=\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla v|^2\mathrm{d}\mu+\frac{n(n-2)}{4}\int_{\mathbb{S}^n}v^2\mathrm{d}\mu,$$

且约束 $\int_{\mathbb{S}^n}v^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu=|\mathbb{S}^n|=\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$。泛函 $F[v]$和约束在洛伦兹变换 γ_α下均保持不变。

[5]我们滥用记号 ϑ，将其表示为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的坐标系，同时也表示 $\mathbb{S}^{n-1}$ 到 $\mathbb{E}^n$ 的嵌入

球面上的对称递增重排定义如下：设 v 是 $\mathbb{S}^n$ 上的一个函数，v^* 是 v 的对称递增重排，其定义为

$$v^*(\theta,\vartheta)=v^*(\theta)>0,\quad v^*(\theta_1)\geq v^*(\theta_2)\text{ if }\theta_1\geq\theta_2,\quad |L_v(t)|=|L_{v^*}(t)|,$$

其中 $L_v(t)=\{p\in\mathbb{S}^n:\ v(p)>t\}$，$L_{v^*}(t)$ 的情形也类似。我们有

$$\|\nabla v\|_{L^2}\geq\|\nabla v^*\|_{L^2},$$

由球面上的 P´olya-Szeg˝o 不等式。我们引入以下函数集 $S_c(\mathbb{S}^n)$，它与 S_c 命题6.13 中的情形类似：

a. $v=v^*>0$,

b. $v\in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^n)$,

c. v is constant on $[\frac{\pi}{2},\pi]$,

d. $\int_{\mathbb{S}^n} v^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu=|\mathbb{S}|^n$.

那么，命题 6.13 关于 $\mathcal{F}[v]$ 在 $\mathbb{S}^n$ 上的类比结论如下。

{命题 9.1}

命题 9.1。我们有

$$\inf\left\{\mathcal{F}[v]:v\in\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^n),v>0,\int_{\mathbb{S}^n}v^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu=|\mathbb{S}|^n=2\pi\right\}=\inf_{v\in S_c(\mathbb{S}^n)}\{\mathcal{F}[v]\},$$

and 当且仅当左侧 $\mathcal{F}$ 的下确界能在 $S_c(\mathbb{S}^n)$ 中取到时，它才能取到 .

证明概要。该证明与命题 6.13 的证明类似。对于任意正函数$v\in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^n)$，我们可以如定义 6.4 所示构造一个 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 递减的 $\mathcal{F}$ 序列，其中$v^{\frac{2n}{n-2}}$ 起到 v^{-2}的作用。于是 $\{\sup\{v_n\}\}$ 单调不增，$\int_{\mathbb{S}^n} v_n^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu$ 保持不变，而$\{\mathcal{F}[v_n]\}$ 也单调不增，这与引理 6.5 类似。引理 6.10、6.11 的证明中的相同论证表明，$\{v_n\}$ 有一致正下界。于是，存在 $\{v_n\}$的一个子序列极限，记为 v_∞，使得 $v_\infty\in S_c(\mathbb{S}^n)$且 $\mathcal{F}[v_\infty]\leq\mathcal{F}[v]$。命题得证。

□

注 9.2。事实上，如果我们将 $S_c(\mathbb{S}^n)$中的条件 a. 放宽为 $v=v^*\geq 0$，那么证明中实际上不需要 $\{v_n\}$ 的一致正下界。因此，命题 9.1 的证明比命题 6.13 简单得多，因为 $\{v_n\}$ 在 $\mathbb{S}^n$、$n\geq 3$ 上的定义会自动给出 v_∞ 的上界，而对于 $\{v_n\}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上的上界，我们则需要引理 6.11。使 $\mathbb{S}^n$、$n\geq 3$ 的情形更简单的另一个原因是，$\int_{\mathbb{S}^n} v^2\mathrm{d}\mu$ 在 $\mathcal{F}[v]$中的系数为正，与 $\int_{\mathbb{S}^1} v^2\mathrm{d}\theta$ 在 $\mathcal{F}[v]$ 的 $\mathbb{S}^1$ 上所对应的负系数相反。

根据命题9.1，为了研究 $\mathcal{F}[v]$ 的下确界这一变分问题，只需研究 $S_c(\mathbb{S}^n)$ 中 $\mathcal{F}[v]$ 的下确界。容易证明，由于 $v\in S_c(\mathbb{S}^n)$ 自动具有上界 $2^{\frac{n-2}{2n}}$，因此 $\inf_{v\in S_c(\mathbb{S}^n)}\{\mathcal{F}[v]\}$ 可以在 $S_c(\mathbb{S}^n)$ 中取得，因为

$$v^{\frac{2n}{n-2}}\leq v^{\frac{2n}{n-2}}(\pi)=\frac{\int_{\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]}v^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu}{|\mathbb{S}^n|/2}\leq\frac{\int_{\mathbb{S}^n}v^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu}{|\mathbb{S}^n|/2}=2.$$

于是我们看到，$S_c(\mathbb{S}^n)$中 $\mathcal{F}[v]$ 的任意极小化序列 $\{v_n\}$ 都有一个子序列极限 v_∞，使得 $\mathcal{F}[v_\infty]$ 达到$\inf_{v\in S_c(\mathbb{S}^n)}\{\mathcal{F}[v]\}$。容易验证 $v\in S_c(\mathbb{S}^n)$，但假设a. $v>0$除外。不过，由于 v 只是坐标 θ 的函数，我们可以通过显式求解 $\mathcal{F}$的欧拉-拉格朗日方程证明 $v\equiv 1$。然后，我们证明 $\mathbb{S}^n$、$n\geq 3$上的尖锐索博列夫不等式（1.3）。关于等号成立的情形，参见 [Ta76] 。

致谢

作者感谢国家自然科学基金（项目编号：12201338）的资助。

推论的证明 7.2

{appen A}

只需证明以下命题。

{cla A.1}

命题 A.1. 若 $v \in \mathrm{H}^1[0,\pi]$ and $v(\pi) = 0$，则 $\int_0^\pi v^{-2}\mathrm{d}\theta = +\infty$。

为了证明该命题，按照脚注 4 中所述的策略，我们研究函数类 $B^M_{m,\,c}$ 中狄利克雷能量 $E(v) = \int_0^\pi (v')^2\mathrm{d}\theta$ 的最小值，该函数类定义如下：

a. $v \in \mathrm{H}^1([0,\pi])$,

b. $\min_{\theta\in[0,\pi]}\{v(\theta)\} = m > 0$, $\max_{\theta\in[0,\pi]}\{v(\theta)\} = M > 0$ and $\int_0^\pi v^{-2}\mathrm{d}\theta = c \in (\frac{\pi}{M^2}, \frac{\pi}{m^2})$.

我们断言以下命题，它蕴含命题 A.1。

{cla A.2}

命题 A.2. 狄利克雷能量的最小值 $\min^{v\in B^M_{m,\,c}}\{E(v)\}$ 当 $m \to 0^+$ 时满足

$$\min_{v\in B^M_{m,c}}\{E(v)\} \to +\infty,\ as\ m \to 0^+,$$

其中 c、M、M^{-1} 可以变化，但在取极限时一致有界。

命题 A.2 可由 $\min^{v\in B^M_{m,\,c}}\{E(v)\}$的显式计算得出。根据重排不等式，我们可以将函数类 $B^M_{m,\,c}$ 限制为 $B'^M_{m,\,c}$，方法是假设满足以下附加条件，

c. v 单调不增，$v(\pi) = m$，$v(0) = M$。

于是我们有 $\min^{v\in B^M_{m,\,c}}\{E(v)\} = \min^{v\in B'^M_{m,\,c}}\{E(v)\}$。狄利克雷能量 $E(v)$在 $B'^M_{m,\,c}$ 上的欧拉-拉格朗日方程为

$$v'' = \lambda v^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad v'^2 = \mu - \lambda v^{-2} \quad \underset{v'\le 0}{\Leftrightarrow} \quad \int^v \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\mu - \lambda v^{-2}}} = -\theta - \Lambda,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu \neq 0: & \sqrt{\mu v^2 - \lambda} = -\mu(\theta + \Lambda) \quad \Rightarrow \quad v^2 = \mu(\theta+\Lambda)^2 + \dfrac{\lambda}{\mu}, \\ \mu = 0: & v^2 = -2\sqrt{-\lambda}(\theta + \Lambda). \end{cases}$$

我们有如下关于 $B'^M_{m,c}$ 中 $E(v)$ 的欧拉-拉格朗日方程解的引理。

{lem A.3}

引理 A.3. 设 $M > m > 0$ 和 $c \in (\frac{\pi}{M^2}, \frac{\pi}{m^2})$。$B'^M_{m,c}$ 中狄利克雷能量 $E = \int_0^\pi |v'|^2\mathrm{d}\theta$ 的欧拉-拉格朗日方程的解，根据 c 的取值可分为若干种情形。

a. $c \in \left(\frac{\pi}{M^2}, \frac{\pi}{2M\sqrt{M^2-m^2}}\log\left(\frac{M+\sqrt{M^2-m^2}}{M-\sqrt{M^2-m^2}}\right)\right)$：解的形式如下，其中 α 是区间 $(0,\pi)$ 内的一个参数，且

$$v_0^2(\theta) = \begin{cases} M^2, & \theta \in [0,\alpha], \\ -\dfrac{M^2-m^2}{(\pi-\alpha)^2}(\theta-\alpha)^2 + M^2, & \theta \in (\alpha,\pi]. \end{cases}$$

b. $c \in \left[\frac{\pi}{2M\sqrt{M^2-m^2}}\log\ \left(\frac{M+\sqrt{M^2-m^2}}{M-\sqrt{M^2-m^2}}\right), \frac{\pi}{M^2-m^2}\log\ \frac{M^2}{m^2}\right)$：解的形式如下

$$v_0^2(\theta) = \mu(\theta+\Lambda)^2 + \frac{\lambda}{\mu}.$$

其中，$\mu < 0$、λ、Λ 是可由方程 $v_0(\pi) = m$、$v_0(0) = M$ 确定的参数 $\frac{\lambda}{\mu} \in [M^2, +\infty)$，$m$、$M$。

c. $c = \frac{\pi}{M^2-m^2}$ 对数 $\frac{M^2}{m^2}$：解为

$$v_0^2(\theta) = -\frac{M^2-m^2}{\pi}\theta + M^2.$$

d. $c \in \left(\frac{\pi}{M^2-m^2}\text{对数}\ \frac{M^2}{m^2}、\ \frac{\pi}{m\sqrt{M^2-m^2}}\text{反正切}\ \frac{\sqrt{M^2-m^2}}{m}\right]$：解的形式如下

$$v_0^2(\theta) = \mu(\theta+\Lambda)^2 + \frac{\lambda}{\mu},$$

其中，$\mu > 0$、λ、Λ 是可由 $\frac{\lambda}{\mu} \in (-\infty、m^2]$、$m$、$M$ 方程 $v_0(\pi) = m$、$v_0(0) = M$ 确定的参数。

e. $c \in \left(\frac{\pi}{m\sqrt{M^2-m^2}}\text{反正切}\ \frac{\sqrt{M^2-m^2}}{m}、\ \frac{\pi}{m^2}\right)$：解具有以下形式，其中 β 是区间 $(0,\pi)$ 中的参数，并且

$$v_0^2(\theta) = \begin{cases} \dfrac{M^2-m^2}{\beta^2}(\theta-\beta)^2 + m^2, & \theta \in [0,\beta), \\ m^2, & \theta \in [\beta,\pi]. \end{cases}$$

上述解 v_0 实现了狄利克雷能量的最小值 $\min^{v\in B^{IM}_{m},\ c}\{E(v)\}$。上述情形的解如图所示*10* 和 *11*。

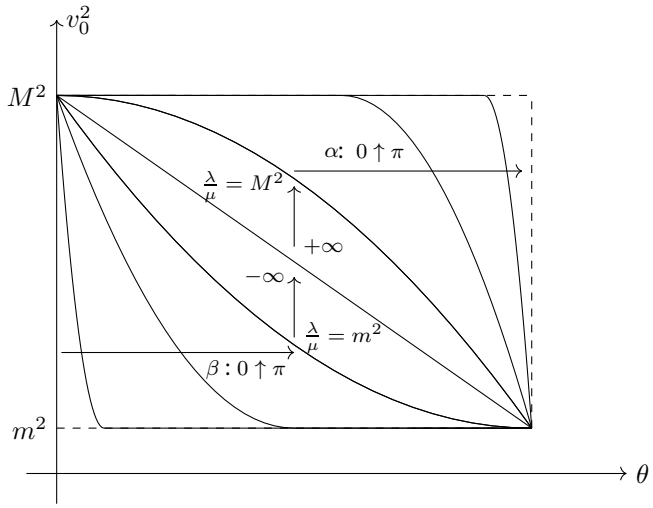


图10： v_0的总结。参数$c = \int_0^\pi v_0^{-2}\mathrm{d}\theta$ 沿箭头方向递减。

{图 10}

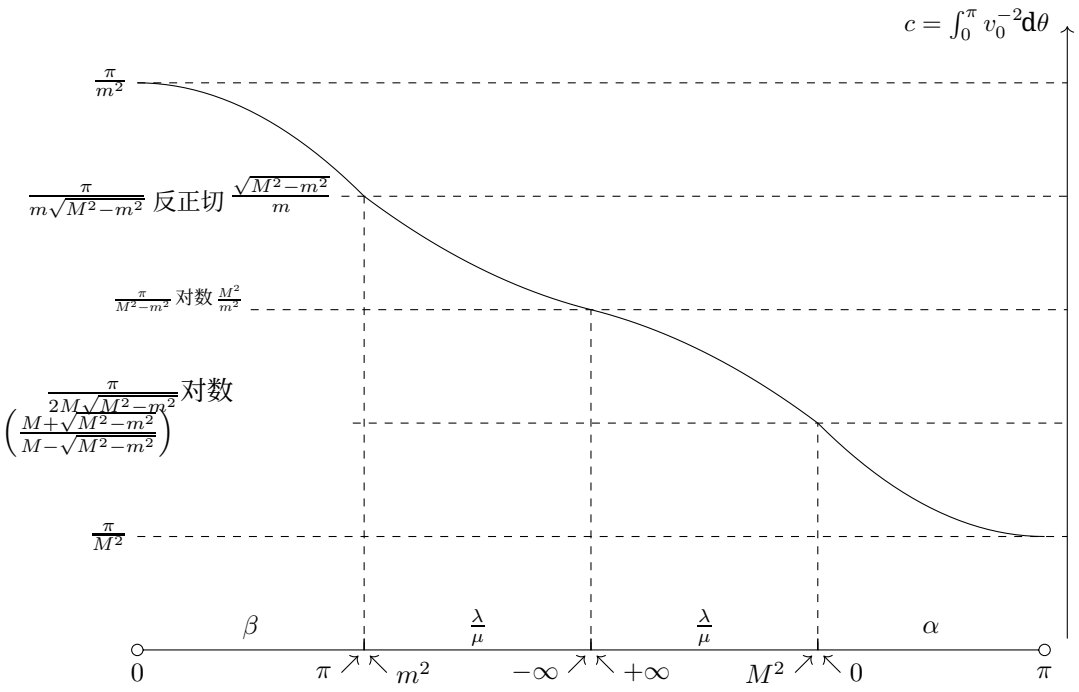


图 11：参数 $c=\int_0^\pi v_0^{-2}\mathrm{d}\theta$ 的总结。 {fig 11}

接下来，我们研究狄利克雷能量的最小值 $\min^{v\in B'^{M}_{m,\ c}}\{E(v)\}$ 对参数 $c=\int_0^\pi v^{-2}\mathrm{d}\theta$ 的依赖关系。我们首先证明一个引理，说明 $\min^{v\in B'^{M}_{m,\ c}}\{E(v)\}$ 关于参数 c 的单调性。

{lem A.4}

引理 A.4。狄利克雷能量 E in $B'^{M}_{m,c}$ 的最小值关于 c 的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}E(v_0)$ 为 λ，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}E(v_0)=\lambda$。因此，$E(v_0)$ 关于 c 的单调性由 λ 的符号决定。

证明。计算导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}E(v_0)$。用上方的点 $\dot{\cdot}$ 表示导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}$。令 $\beta=\pi$ 在以下情形中 *a. b. c. d.*，并令 $\alpha=0$ 在以下情形中 *b. c. d. e.* 引理 A.3。那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}E(v_0)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int_\alpha^\beta|v_0'|^2\mathrm{d}\theta\\&=\dot\beta|v_0'(\beta)|^2-\dot\alpha|v_0'(\alpha)|^2+2\int_\alpha^\beta v_0'\cdot\dot v_0'\mathrm{d}\theta=-2\int_\alpha^\beta v_0''\cdot\dot v_0\mathrm{d}\theta+2v_0'\cdot\dot v_0\Big|_\alpha^\beta\\&=-2\int_\alpha^\beta\lambda v_0^{-3}\cdot\dot v_0\mathrm{d}\theta=\lambda\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}(v_0^{-2})\mathrm{d}\theta=\lambda\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}(v_0^{-2})\mathrm{d}\theta\\&=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int_0^\pi v_0^{-2}\mathrm{d}\theta=\lambda.\end{aligned}$$

□

然后，我们可以得到 $\min^{v\in B'^{M}_{m,\ c}}\{E(v)\}$ 对参数 $c=\int_0^\pi v^{-2}\mathrm{d}\theta$ 的详细依赖关系。

{引理 A.5}

引理 A.5。 采用引理 v_0 狄利克雷能量的极小化子 $E(v)$ 在 $B'^{M}_{m,\,c}$ 中的记号及分类，见引理 *A.3*。

1. 存在唯一的 c值，记为 $c_{\lambda=0}$，它满足$\mathrm{d}\ \mathrm{d}c E(v_0) = \lambda = 0$。 $c_{\lambda=0}$ 位于区间 $\left(\frac{\pi}{M^2-m^2}\log\frac{M^2}{m^2}, \frac{\pi}{m\sqrt{M^2-m^2}}\arctan\frac{\sqrt{M^2-m^2}}{m}\right]$，对应于引理 *A.3*中的情形 d。

2. $\mathrm{d}\,\mathrm{d}c E(v_0) = \lambda < 0$当 $c \in (\frac{\pi}{M^2}, c_{\lambda=0})$ 时，以及 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}c E(v_0) = \lambda > 0$当 $c \in (c_{\lambda=0}, \frac{\pi}{m^2})$ 时。

3. $\lambda \to -\infty$当 $c \to (\frac{\pi}{M^2})^+$时，以及 $\lambda \to +\infty$当 $c \to (\frac{\pi}{m^2})^-$时。

4. 在 $c_{\lambda=0}$ 处的极小化子记为$v_{0,\,c_{\lambda=0}}$。我们有

$$v^2_{0,c_{\lambda=0}}(\theta) = \mu(\theta+\Lambda)^2 = \frac{(M-m)^2}{\pi^2}\left(\theta - \frac{\pi M}{M-m}\right)^2.$$

5. $c_{\lambda=0} = \frac{\pi}{mM}$。

6. 狄利克雷能量 $E(v_{0,\,c_{\lambda=0}}) = \frac{(M-m)^2}{\pi}c$

7. 记 E in $B^{M}_{m,\,c}$ 的极小化子为 $v_{0,\,c}$，则

$$\lim_{c\to(\frac{\pi}{M^2})^+} E(v_{0,c}) = \lim_{c\to(\frac{\pi}{m^2})^-} E(v_{0,c}) = +\infty.$$

参见图 *12* 中引理的示意图。

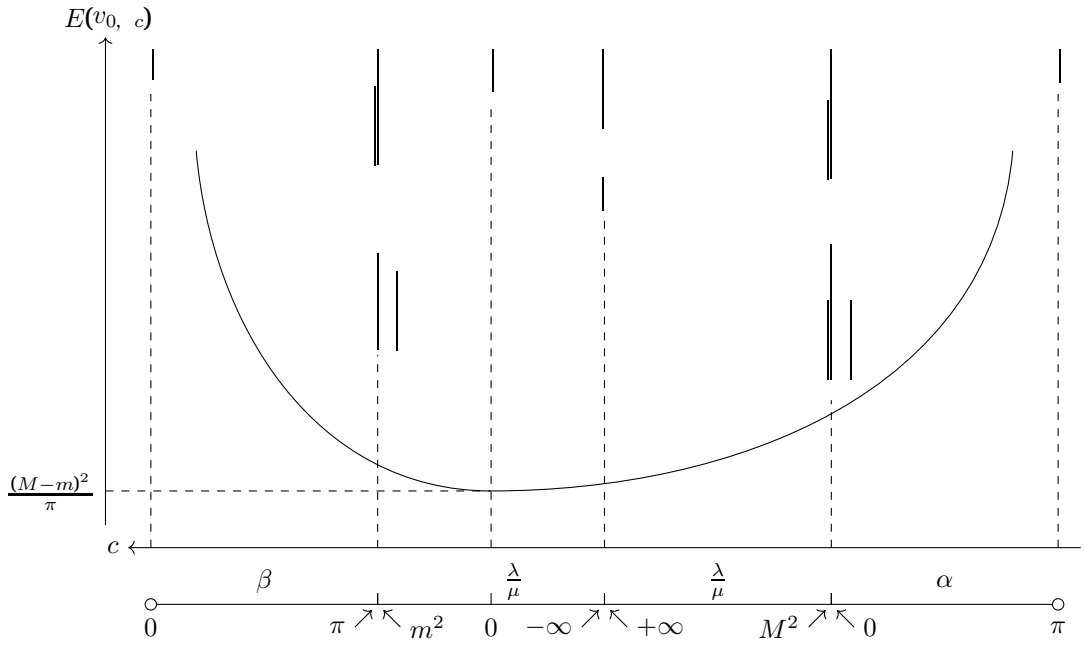


图 12：$B^{M}_{m,\,c}$ 中狄利克雷能量最小值的总结： $E(v_{0,\,c})$。

{图 12}

证明。 所有结论都可以通过显式计算证明。我们仅简要证明 7.。对于引理 A. 的情形 A.3，我们有

$$\begin{aligned} E(v_{0,c}) &= \mu(\pi-\alpha) - \lambda\int_{\alpha}^{\pi} v_{0,c}^{-2}\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{M^2-m^2}{\pi-\alpha} + \frac{M\sqrt{M^2-m^2}}{2(\pi-\alpha)}\log\Big(\frac{M+\sqrt{M^2-m^2}}{M-\sqrt{M^2-m^2}}\Big) \to +\infty, \quad \alpha\to\pi^-. \end{aligned} \tag{A.1}$$

{eqn A.1}

在引理 A.3的情形 e中，我们有

$$\begin{aligned} E(v_{0,c}) &= \mu\beta - \lambda\int_{0}^{\beta} v_{0,c}^{-2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{M^2-m^2}{\beta} - \frac{m\sqrt{M^2-m^2}}{\beta}\arctan\frac{\sqrt{M^2-m^2}}{m} \to +\infty, \quad \beta\to 0^+. \end{aligned}$$

于是得到 7。 □

现在我们可以证明断言 A.2了。它可由以下引理推出。

{lem A.6}

引理 A.6. 在取极限过程中，给定的 M、 M^{-1} 和 $c>\pi/M^2$ 均一致有界，则狄利克雷能量 E 在 $B'^{M}_{m,c}$ 上的最小值趋于 $+\infty$，当 $m\to 0^+$ 时。

为证明上述引理，我们先引入一些记号。见图 13。

- $c_{\alpha=0}$：在引理 c 的情形 a下对应的值 A.3 当 $\alpha=0$时。我们有

$$c_{\alpha=0} = \frac{\pi}{2M\sqrt{M^2-m^2}}\log\Big(\frac{M+\sqrt{M^2-m^2}}{M-\sqrt{M^2-m^2}}\Big).$$

- $v_{0,\ c_{\alpha=0}}$：在 E 中的B^{M}_{m}的极小化子，$c_{\alpha=0}$。根据引理A.3，我们得到

$$v^2_{0,c_{\alpha=0}}(\theta) = -\frac{M^2-m^2}{\pi^2}\theta^2 + M^2.$$

- $E(v_{0,\ c_{\alpha=0}})$：v_0的狄利克雷能量，$c_{\alpha=0}$它是 E 在B^{M}_{m}中的$c_{\alpha=0}$最小值。由方程（A.1），

$$E(v_{0,c_{\alpha=0}}) = -\frac{M^2-m^2}{\pi} + \frac{M\sqrt{M^2-m^2}}{2\pi}\log\Big(\frac{M+\sqrt{M^2-m^2}}{M-\sqrt{M^2-m^2}}\Big).$$

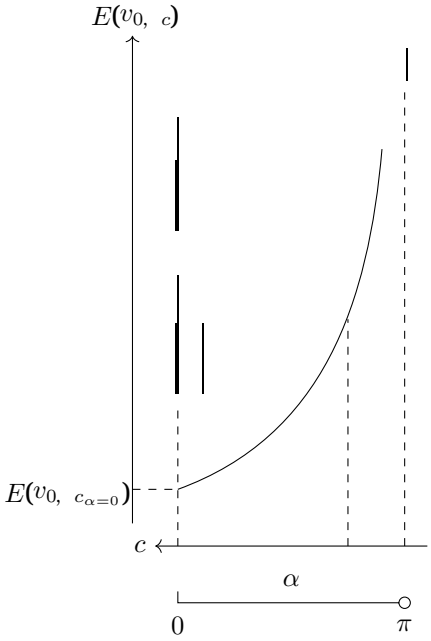


图13： $c_{\alpha=0}$ 和 $E(v_{0,\ c_{\alpha=0}})$。 {图 13}

简单计算可知，当 $m \to 0^+$ 给定且 M, M^{-1} 均有界时， $c_{\alpha=0} \to +\infty$, $E(v_{0,\ c_{\alpha=0}}) \to +\infty$；因此，当 $m \to^+$ 给定且 M, M^{-1} 以及 $c > \frac{\pi}{M^2}$ 均有界时，有 $E(v_{0,\ c}) \to +\infty$。

引理证明 *A.6*。 由于 $c_{\alpha=0} \to +\infty$ 当 $m \to 0^+$时，则 $c \in (\frac{\pi}{M^2},\ c_{\alpha=0})$ 当 m 足够小时。因此

$$E(v_{0,c}) > E(v_{0,c_{\alpha=0}}) \to +\infty, \text{ as } m \to 0^+,$$

因为 $\mathrm{d}\sout{\mathrm{d}c} E(v_{0,\ c}) < 0$ 对于任意 $c \in (\frac{\pi}{M^2},\ c_{\alpha=0})$，根据引理 A.5。见图 13 以了解证明过程的示意图。 □

参考文献

[A76a] Aubin, T. ´非线性微分方程与关于标量曲率的 Yamabe 问题。《纯粹与应用数学杂志》(9) 55 (1976)，第 3 期，269–296 页。[A76b] Aubin, T. 等周问题与 Sobole夫空间。《微分几何杂志》11 (1976)，第 4 期，573–598 页。[A79] Aubin, T. Sobole夫嵌入定理中的最佳常数，以及关于标量曲率共形变换的一个非线性 Fredholm 定理。（法文，附英文摘要）《泛函分析杂志》32 (1979)，第 2 期，148–174 页。[B09] Burchard, A. 重排不等式简明教程。讲义，2009 年 6 月。47 页。http://www.math.utoronto.ca/almut/rearrange.pdf

[CL90] Carlen, E. A.; Loss, M. 具有竞争对称性的泛函的极值函数。《泛函分析杂志》88 (1990)，第 2 期，437–456 页。[C04] Chang, S.-Y. A. 共形几何中的非线性椭圆方程。苏黎世高级数学讲座。欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2004 年。viii+92 页。ISBN：3-03719-006-X[H68] Hawking, S. W. 膨胀宇宙中的引力辐射，《数学物理杂志》9 (1968)，598–604 页。[LP97] Lee, J. M.; Parker, T. H. Yamabe 问题。《美国数学会通报》（新系列）17 (1987)，第 1 期，37–91 页。[L83] Lieb, E. H. Hardy-Littlewood-Sobole夫不等式及相关不等式中的最佳常数。《数学年刊》（第二辑）118 (1983)，第 2 期，349–374 页。[LL01] Lieb, E. H.; Loss, M. 分析。第二版。数学研究生丛书，第 14 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001 年。xxii+346 页。ISBN：0-8218-2783-9[M71] Moser, J. N. Trudinger 不等式的一个最佳形式。《印第安纳大学数学杂志》20 (1971)，第 11 期，1077–1092 页。[O82] Onofri, E. 随机曲面理论中有效作用量的正性。《数学物理通讯》86 (1982)，第 3 期，321–326 页。[S84] Schoen, R. 将黎曼度量共形变形为常标量曲率。《微分几何杂志》20 (1984)，第 2 期，479–495 页。[S89] Schoen, R. 关于黎曼度量总标量曲率泛函的变分理论及相关主题。变分法专题（蒙特卡蒂尼泰尔梅，1987），120–154 页，数学讲义第 1365 卷，施普林格，柏林，1989 年。[SY79] Schoen, R.; Yau, S.-T. 关于广义相对论中正质量猜想的证明。《数学物理通讯》65 (1979)，第 1 期，45–76 页。[SY88] Schoen, R.; Yau, S.-T. 共形平坦流形、克莱因群与标量曲率。《数学发明》92 (1988)，第 1 期，47–71 页。[Ta76] Talenti, G. Sobole夫不等式中的最佳常数。《纯粹与应用数学年刊》（第四辑）110 (1976)，353–372 页。[Tr67] Trudinger, N. S. 关于嵌入 Orlicz 空间及其若干应用。《数学与力学杂志》17 (1967)，473–483 页

Yanqi Lake Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, Beijing, China

E-mail address: pengyu.le@bimsa.cn