arXiv:2303.02714v1 [cs.DC] 5 Mar 2023

# 精确分布式采样

Sriram V. Pemmaraju 和 Joshua Z. Sobel

美国爱荷华大学计算机科学系
{sriram-pemmaraju,joshua-sobel}@uiowa.edu

**摘要**。 输出约束满足问题（如极大独立集）可行解的快速分布式算法已得到广泛研究。对于分布式采样 问题，研究则少得多；这类问题旨在从所有可行解上的某个分布中进行采样（例如，均匀采样一个可行解）。近期研究（Feng、Sun、Yin，PODC 2017；Fischer和Ghaffari，DISC 2018；Feng、Hayes和Yin，arXiv 2018）表明，对于某些约束满足问题，存在分布式马尔可夫链，能在经典分布式计算 Local 模型中经过 $O(\log n)$ 轮混合。然而，这些方法返回的是来自某个接近目标分布的分布的样本，但仍存在少量误差。本文聚焦于精确分布式采样问题。我们的主要贡献是证明，这些分布式马尔可夫链结合序贯设置中的技术，即从过去耦合和界链，可以用于设计一类加权局部约束满足问题的 $O(\log n)$ 轮 Local 模型精确采样算法。这一一般性结果带来了针对若干重要特例的 $O(\log n)$ 轮精确采样算法；这些算法使用较小的消息（即在 Congest 模型中运行），并且局部计算为多项式时间，例如加权独立集（又称硬核模型）和加权支配集的采样。

**关键词：** 分布式采样，界链，完美采样，从过去耦合

## 1 引言

关于在图上求解局部约束满足问题（CSP）的分布式复杂度，已有大量研究 [2,24,28,22,21,3,5]。这里的“局部”指的是约束所涉及的顶点在底层图中的直径为常数。这些局部 CSP 包括经典的“对称性破缺”问题，例如极大独立集、($\Delta + 1$)-着色和极大匹配 [26,1,12,3]。求解这类局部 CSP 的分布式算法需要构造出该局部 CSP 的某个可行解。与此不同，本文关注的是对局部 CSP 的一个可行解进行采样的问题。在采样问题中，算法需要根据某个指定的概率分布，从 CSP 的所有可行解中抽取一个解。显然，采样问题至少与构造问题一样难，因为要解决采样问题，就必须先构造

一个可行解。更准确地说，我们关注局部加权 CSP 的解的采样。这里的“加权”是指为 CSP 的每个可行解赋予一个权重，并规定解被抽取的概率与其权重成正比。当权重相同时，抽样分布为均匀分布。

传统上，在序贯设置中，要从图上的加权局部约束满足问题中进行采样，需要运行一个遍历马尔可夫链，其平稳分布与所需分布相匹配。运行足够长的时间后，链当前状态的分布会任意接近（在全变差距离意义下，任意 $\epsilon$ ）所需分布。对于给定的 $\epsilon$，达到这一状态所需的时间称为混合时间。达到混合时间后，返回链的当前状态。用于从加权局部约束满足问题中采样的两种最简单的马尔可夫链示例是*Metropolis-Hastings* 算法 和*Glauber* 动力学 [23]。对于某些具有特定参数的加权局部约束满足问题（例如正常着色），这些链的混合时间为 $O(n\log \frac{n}{\epsilon})$，其中 $n$ 是图中的节点数。

–

一种用于从加权局部约束满足问题中采样的分布式马尔可夫链——$LocalMetropolis$ 链，由Feng、Sun和Yin [8]提出。该链允许每个顶点同时提出一个新标签，而不是仅由一个选定的顶点提出。该链很容易在分布式计算的 Local 模型中实现，每一步只需常数轮。对于某些加权局部约束满足问题，该链也可以在 Congest 模型中实现，每一步同样只需常数轮。Fischer和 Ghaffari [10] 以及Feng、Hayes和Yin [7]均指出，至少对于着色[1], ，可以改进该链：每一步只更新少量被标记的节点，而不是尝试在每一步更新所有节点。对于着色，当颜色集至少包含 $\alpha\Delta$ 种颜色时，只要 $\alpha > 2 + \sqrt{2}$为任意常数，Local Metropolis 链 [8] 的混合时间为$O(\log \frac{n}{\epsilon})$。 [10,7] 中的改进只需要 $\alpha > \underline{2}$, 同时还能达到相同的混合时间。这里， $n$ 表示顶点数， $\Delta$ 表示图的最大度。需要注意的是，这些算法返回的状态来自一个分布，该分布与目标分布之间的全变差距离不超过 $\epsilon$。此外，随着 $\epsilon$ 变小，混合时间的上界会增大。本文关注精确分布式采样，即 $\epsilon = 0$的情形。

在序贯设置中，一种优雅且广为人知的方法是从马尔可夫链的平稳分布中进行精确采样，即 从过去耦合（*CFTP*） [29], ，由 Propp 和 Wilson 提出。CFTP 最初的形式通常需要指数时间，因此其应用仅限于状态空间具有特殊性质（例如单调性）的马尔可夫链。随后，Nelander 和 Häggström [17] 以及 Huber [16] 指出，在某些情况下

[1] Fischer 和 Ghffari [10] 声称，他们的方法并非标记每个顶点，对于比着色更一般的一类加权约束满足问题,– 其具有 $O(\log \frac{n}{\epsilon})$ 轮的混合时间，但论文中似乎没有给出这一点的证明。

即使原始 CFTP 算法可能难以处理，通过加入界链来扩展算法，仍可能使其得以应用。本文的主要贡献是证明，可以在 Local 模型中使用 CFTP 和界链技术。我们将 CFTP 和界链技术与上一段所述的马尔可夫链结合起来，从加权局部约束满足问题中进行精确采样。我们的算法速度很快，在某些情况下还能在 Congest 模型中运行。下一节将更详细地介绍我们的结果。

可比结果。 尽管论文 [8,10,7] 关注的是近似分布式采样，但最近有两篇论文研究了某些加权局部约束满足问题的精确采样。Feng 和 Yin [9] 采用了 Jerrum、Valiant 和 Vazirani 的一项开创性成果[19], ，该成果表明，对于某些问题，借助拒绝采样过程，精确采样可以归约为近似计数。他们给出了这一方法的分布式实现。Guo、Jerrum 和 Liu [14] 提出了 Lovász 局部引理的一个采样版本，该版本可应用于分布式环境，从而对某些加权局部约束满足问题进行精确采样。

我们采用从过去耦合（CFTP）和界链的方法，与上述两种技术有显著差异。这三种技术在能够采样的加权局部约束满足问题方面也各不相同。不过，我们的方法在硬核模型方面取得了优于 [9,14] 结果的成果。更精确的比较将在下文给出。

### 1.1 主要结果

本文的主要结果可概括如下。

1. 我们提出了一种用于从加权局部约束满足问题中采样的分布式马尔可夫链，并证明它具有正确的平稳分布。该链基于 [8] 的局部 *Metropolis* 链以及[10,7]的着色链。我们认为，这可能就是Fischer和Ghaffari在 [10]中简要提及的推广。2. 我们将从过去耦合与界链方法应用于上述分布式马尔可夫链。随后，我们给出一个条件，在Local 模型中，该条件以高概率保证此算法在 $O$（log $n$）轮内终止。因此，在一个相当一般的条件下，我们得到了一个在Local 模型中运行 $O$（log $n$）轮、用于从加权局部约束满足问题中进行精确采样的算法。对于略有不同的条件，这一结果相较于[17]给出的序贯设置运行时间 $O$（$n$log $n$），提升了 $n$ 倍。3. 最后，我们证明上述通用算法能够导出 $O$（log $n$）轮、消息较小（即 Congest 模型）的采样算法，用于加权独立集（又称硬核模型）问题和加权支配集问题。对于硬核模型，我们能够在该问题困难阈值的常数倍范围内进行采样（见本节末尾）。我们的算法不会滥用 Congest 模型的能力，并确保每次局部计算都能在多项式时间内完成。

硬核模型由参数 $\lambda > 0$控制，该参数称为模型的逸度。每个大小为 $x$ 的独立集都被赋予 $\lambda^x$的权重；因此，目标概率分布会为所有大小相同的独立集赋予相同的概率。此外，当 $\lambda < 1$时，小独立集比大独立集更有可能出现。我们针对硬核模型的算法[2]要求满足 $\lambda \leq \frac{\alpha}{\Delta}$，其中 $\alpha < 1$为任意常数。这几乎与 $\lambda \leq \frac{\alpha}{\Delta-1}$ 的条件相匹配； [17] 给出的该条件可确保在序贯设置下以 $O(n \log n)$ 的时间运行。我们还推导出了加权支配集的类似条件。

Feng 和 Yin [9]还给出了硬核模型精确采样的结果。他们的算法比我们的慢得多，需要 $O(\log^3 n)$ 轮，而且还使用较大的消息和指数时间的局部计算。不过，他们的结果适用于更广的逸度参数范围，具体来说，当 $\lambda < \frac{(\Delta-1)^{\Delta-1}}{(\Delta-2)^{\Delta}}$ 时。请注意，根据 [8], ，在 Local 模型中，对 $\lambda > \frac{(\Delta-1)^{\Delta-1}}{(\Delta-2)^{\Delta}}$ 进行硬核模型采样是困难的。在序贯设置中，除非 RP$=$NP [34,31,11,32],，否则同一阈值也是多项式时间采样与非多项式时间采样之间的障碍；这是基于近似计数与采样之间的联系 [19,30]。与我们类似，Guo、Jerrum 和 Liu [14] 给出了一种 w.h.p. 的 $O(\log n)$ 轮 Congest 算法，可通过多项式时间局部计算对硬核模型进行精确采样；然而，他们要求的 $\lambda$ 范围比我们更小，具体来说是 $\lambda \leq \frac{1}{2\sqrt{e}\Delta-1}$。我们的算法优于这两种算法 [9,14], ，因为每个顶点总是会输出其在精确样本中的标签。来自 [9] 的算法以高概率成功，并在成功的条件下返回一个精确样本；但是，它可能失败，而且并非每个顶点都能在本地检测到失败。另一方面，来自 [14] 的算法和我们的一样，总会在随机时间内成功；但是，顶点无法在本地确定其输出部分何时最终确定。

## 2 技术预备知识

### 2.1 加权局部约束满足问题的采样

图 $G = (V, E)$ 上的加权约束满足问题由顶点标签集合 $L$ 、约束集 $\mathcal{S} \subseteq 2^V$ 以及每个约束集 $R$ 对应的约束 $C_R$ 组成。标记为图 $V$中的每个顶点分配一个 $L$ 中的元素；因此，$L^V$是 $G$的所有标记的集合。对于标记 $\ell \in L^V$、 $v \in V$和 $R \subseteq V$，我们用 $\ell(v)$ 表示 $\ell$ 分配给顶点 $v$ 的标签，用 $\ell \restriction_R$ 表示 $\ell$在 $R$上的限制。每个约束 $C_R$ 都将所有受限标记$\ell \restriction_R$ 的集合映射到非负实数。标记 $\ell$ 的权重 为 $\prod_{R \in \mathcal{S}} C_R(\ell \restriction_R)$。如果一个标记的权重大于零，我们就称其为有效 标记。约束满足问题 通常定义为

[2] 关于硬核模型的结果通常假设算法运行在常度图上。从这个意义上说，我们要求 $\lambda < \frac{1}{\Delta}$。此外，在有界度图上，使用 [8] 中的 Luby-Glauber 链可能会使我们的结果略有改进。

寻找任意一个有效标记的问题。加权约束满足问题 是对有效标记进行采样，其中选择某个标记的概率与其权重成正比。我们将这种标记的概率分布称为 $\pi$。

为便于记号，我们将假设 $\mathcal{S}$ 不包含任何单元素集合。相反，我们假设对于每个顶点 $v$，都存在一个单独的一元约束 $b_v\colon L \to \mathbb{R}^{\geq 0}$，它将赋予 $v$ 的标签映射为一个非负实数。请注意，这并不失一般性，因为对于任意 $v \in V$，我们可以令对所有 $x \in L$都有 $b_v(x) = 1$。借助这一额外记号，标记 $\ell$ 的权重可写为

$$\prod_{v} b_v(\ell(v)) \cdot \prod_{R \in \mathcal{S}} C_R(\ell \restriction_R). \tag{1}$$

当存在一个常数 $k$，使得每个约束集在图 $G$ 中的直径都由 $k$ 限制时，该加权约束满足问题称为加权局部约束满足问题。请注意，这里的直径是指 $G$ 中的距离，而不是由 $R$诱导的 $G$ 子图中的距离。

本文考虑了加权局部约束满足问题的三个例子：加权独立集（硬核模型）、加权支配集，以及（简要讨论的）伊辛模型。

– 加权独立集是一种加权局部约束满足问题，其参数$\lambda > 0$ 通常称为逸度。这里，标签集合为 $L = \{0, 1\}$，标记为 1 的顶点构成独立集。每个一元约束 $b_v$ 都是函数 $b_v(0) = 1, b_v(1) = \lambda$。约束集 $\mathcal{S}$ 的集合为 $E$，即图中的所有边。对于每条边 $e = \{u, v\}$，约束$C_e(\ell(u)\ \ell(v)) = 0$当 $\ell(u) = \ell(v) = 1$时成立；否则，$C_e(\ell(u)\ \ell(v)) = 1$。$C_e$只是确保有效标记是 $G$的独立集。这里，大小为 $x$ 的独立集权重为 $\lambda^x$。因此，所有大小相同的独立集具有相同的概率；然而，对于 $\lambda < 1$，小独立集比大独立集具有更高的概率。

– 加权支配集 是一种与加权独立集非常相似的加权局部约束满足问题。该约束满足问题同样采用参数 $\lambda > 0$，并具有相同的标签和一元约束。约束集的集合 $\mathcal{S}$ 由每个顶点 $v$对应的闭邻域 $N_v = Nbr^+(v)$组成。约束 $C_{n_v}$ 在闭邻域中的至少一个顶点具有标签 1 时映射为 1，否则映射为 0。

– 以 [8], 所给出的简单形式表示的伊辛模型是另一种加权局部约束满足问题。在此，每个顶点有两个可能的标签 $\{-1, 1\}$，并且 $b_v(-1) = b_v(1) = 1$。模型中给出了 $\beta > 0$。每一对相邻顶点都有一个约束：当这两个顶点具有相同标签时映射为 $\beta$，否则映射为 1。赋予某个标记的权重为 $\beta^a$，其中 $a$ 是两端顶点均被赋予相同标签的边的数量。

### 2.2 下界相关工作

前面的讨论主要涉及上界。不过，对于在 Local 模型中从硬核模型进行采样，也存在一些有趣的下界 [8,14]。

Feng、Sun 和 Yin 证明了一个 $\Omega(Diam)$ 轮下界，该下界适用于直径为 $Diam = \Omega(n^{1/11})$ 的 $n$ 个顶点的图，其中 $\lambda > \frac{(\Delta-1)^{\Delta-1}}{(\Delta-2)^{\Delta}}$。Guo、Jerrum 和 Liu[14] 证明了一个更一般的 $\Omega(\log n)$ 轮下界。其他加权局部约束满足问题也存在类似的下界，或可推导出此类下界，详见所引用的两篇论文。

## 3 分布式马尔可夫链

本节中，我们介绍一种用于从加权局部约束满足问题中进行采样的分布式马尔可夫链（见算法1）。在后续章节中，我们将说明，可以在 Local 模型中（并在某些情况下在 Congest 模型中）利用该链高效地对加权局部约束满足问题的解进行精确采样。我们的马尔可夫链是对 [8] 中给出的 LocalMetropolis 马尔可夫链所做的简单修改。LocalMetropolis 链包含一个提议步骤，在该步骤中，每个顶点$v$ 独立地以与 $b_v(\sigma_v)$ 成正比的概率，在 $L$ 中提出一个标签 $\sigma_v$。随后，对每个约束集应用概率性的局部过滤器。我们将在下一段中对此作更详细的描述。如果包含某个顶点 $v$ 的所有约束集都通过局部过滤器，那么 $v$ 就采用 $\sigma_v$；否则，它保留原有标签。我们对该马尔可夫链进行如下修改：首先以固定概率 $p$ 独立地标记每个顶点，然后在每一步中只允许被标记的顶点处于活动状态。随机抽取将处于活动状态的顶点这一做法，是随机化分布式算法中的标准思路（例如 Luby 算法 [1,26]）；更具体地说，[10,7] 曾用这一思路加速其用于着色的分布式马尔可夫链。尤其是，[10,7]均介绍了通过为着色的 LocalMetropolis 链增设一组被标记顶点而得到的链。此外，我们推断，本文介绍的马尔可夫链正是 [10] 所提及的推广。

现在我们来描述局部过滤步骤。在链的每一步中，如果某个顶点 $v$ 被标记，那么它有一个当前标签 $X_v$ 和一个提议标签 $\sigma_v$；否则，它只有一个当前标签 $X_v$。对于每个约束集 $R$，我们现在考虑 $R$的标记集合 $\mathcal{L}(R)$。具体而言，如果每个标签 $\ell(v_i)$都从 $X_{v_i}$ 或 $\sigma_{v_i}$中选取，并且至少有一个 $|R|$ 选择是从 $\sigma$中做出的，那么我们就称 $(\ell(v_1)\ \ell(v_2)\ldots,\ell(v_{|R|}))$ 是 $R$的一个潜在标记。现在令 $\mathcal{L}(R)$ 表示所有潜在标记的集合。需要注意的是，如果存在多种有效的选取方式，同一个元素可能会在其中出现多次。严格来说，每个潜在标记都应表示为一个二进制向量；不过，为简便起见，我们将潜在标记视为约束集的一个标记。每个约束集 $R$ 通过局部过滤器的概率为

$$\prod_{\ell \in \mathcal{L}(R)} \frac{C_R(\ell)}{C_R^*}. \tag{2}$$

这里，$C_R^*$ 指约束在其整个定义域 $L^R$ 上可以取到的最大值。$C_R^*$ 可以假定为非零；否则，每种标记都会无效。

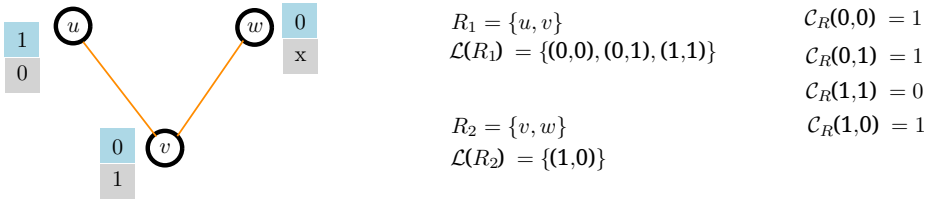


**图1.** 展示加权独立集问题中局部过滤概率计算过程的示例。

图1展示了如何将局部过滤器应用于加权独立集问题的示例。图中显示了一个包含 3 个顶点的子图，沿每个顶点旁边标出了其当前标签（上方）和提议标签（下方）。顶点 $w$ 的提议标签为“x”，因为它在这次迭代中未被标记为活动状态。顶点 $v$ 参与两个约束集 $R_1$ 和 $R_2$，分别对应与其相 incident 的两条边。每个约束集的潜在标记 $\mathcal{L}$（$R_1$）和 $\mathcal{L}$（$R_2$）如图所示。 $\mathcal{L}$（$R_1$）中的每个元组（以及 $\mathcal{L}$（$R_2$）中的每个元组）都先显示 $u$ 的标签（以及 $v$ 的标签），随后显示 $v's$ 的标签（以及 $w$ 的标签）。请注意，元组 (1,0) 未出现在 $\mathcal{L}$（$R_1$）中，因为这意味着两个标签都会从当前标签中选取。最后，右侧显示了约束函数的取值。在此例中，所有约束集都使用同一个约束函数。请注意，对于 $R_1$，式 (2) 的计算结果为 0，这表明 $R_1$ 未通过局部过滤器。对于 $R_2$，局部过滤器的计算结果为 1，这表明 $R_2$ 通过了局部过滤器。由于 $v$ 并非所有约束集都通过局部过滤器， $v$ 不会更新其标签。

**算法1**

**要求：** 每个顶点 $v$ 最初都有标签 $X_v$
  每个 $v \in V$ 以概率 $p$被标记为活跃
  **对于** 每个活跃顶点 $v \in V$ **执行** ▷提议步骤
    $v$ 以与 $b_v(\sigma_v)$ 成正比的概率选择 $\sigma_v \in L$
  **结束循环**
  **对于** 每个约束集 $R \in \mathcal{S}$ **执行** ▷局部过滤器步骤
    $R$ 以概率 $\prod_{\ell \in \mathcal{L}(R)} \frac{C_R(\ell \mid R)}{C_R^*}$ 通过局部过滤器
  **结束循环**
  **对于** 每个活跃顶点 $v \in V$ **执行** ▷最终确定标签
    **如果** $\mathcal{S}$ 中包含 $v$ 的所有约束集均通过检查 **则**
      $X_v = \sigma_v$
    **结束 if**
  **结束 for**

接下来我们证明，在一个温和条件下，由算法1给出的马尔可夫链以 $\pi$ 为其平稳分布，且该链是遍历的（非周期且不可约）；对于任意两个有效状态 $X$ 和 $Y$，存在一系列有效状态

$X = Z_1$、.....、 $Z_n = Y$，其中相邻状态仅在一个顶点上不同。回想一下， $\pi$ 是 $G$ 上所有标记的分布，其中每个标记 $\ell$ 的概率与其权重成正比，即表达式 (1)。此证明基于并扩展了 [8] 中的证明。该链显然是非周期的，因为每个状态都可以转移到自身。此外，上述条件确保了不可约性。接下来只需证明 $\pi$ 是平稳分布。证明某个分布 $\pi$ 对转移矩阵为 $M$ 的马尔可夫链是平稳分布的一种标准方法，是验证细致平衡方程，

$$\pi(X) \cdot M[X, Y] = \pi(Y) \cdot M[Y, X]$$

对于链 $X, Y$ 的所有状态。正如 [8], 所指出的，如果链从权重为 0 的状态开始，要使其具有正确的极限分布，还需要一个稍强的条件。这一点与我们无关，因为我们将链视为仅定义在有效状态上。

**定理 1.** 设 $M$ 为由算法*1*定义的马尔可夫链的转移矩阵。对于所有状态 $X$， $Y$，都有 $\pi(X) \cdot M[X, Y] = \pi(Y) \cdot M[Y, X]$。

证明。 设 $X \neq Y$ 为两个有效标记，因此 $X$ 和 $Y$ 也是马尔可夫链中的状态。设 $X_v$ 为顶点 $v$ 当前的标签， $\sigma_v$ 为该顶点被标记时提议的标签；否则，设 $\sigma_v = \sqcup$。我们还定义二进制向量 $\mathbf{I}$，对于每个约束集 $T \in \mathcal{S}$，若约束集通过检查，则 $\mathbf{I}_T = 1$，否则 $\mathbf{I}_T = 0$。如果顶点 $v$ 属于某个约束集 $T$，且 $\mathbf{I}_T = 0$，则称 $v$ 受限。注意，(σ,**I**) 定义了一个从一个状态到另一个状态的函数。

给定一对状态 $X$ 和 $Y$，可能有许多元组 (σ, I) 将 $X$ 映射到 $Y$，同样也可能有许多元组 (σ′, I′) 将 $Y$ 映射到 $X$。现在我们证明，所有将 $X$ 映射到 $Y$ 的元组与所有将 $Y$ 映射到 $X$的元组之间存在一个双射。设 (σ, I) 是一个将 $X$映射到 $Y$的元组。由 (σ, I) 构造 (σ′, I′)，得到一个将 $Y$映射到 $X$ 的函数，方法如下。对于满足 $Y_v \neq X_v$的每个顶点，令 $\sigma'_v = X_v$。对于其他所有顶点，令 $\sigma'_v = \sigma_v$。最后，令 $\mathrm{I} = \mathrm{I}'$。要证明 (σ′,I′) 将 $Y$映射到$X$，首先注意，对于满足 $X_v \neq Y_v$的任意顶点 $v$，必有 $\sigma_v = Y_v$，且$v$ 在 I 中必须是不受限制的。这意味着 $v$ 在 I′ 中不受限制；又由于 $\sigma'_v = X_v$，可知 (σ′, I′) 将 $Y_v$ 映射到 $X_v$。对于满足 $X_v = Y_v$的顶点 $v$，情况可能是 (a) $\sigma_v = Y_v = X_v$、(b) $\sigma_v = \sqcup$，或 (c) $v$ 在 I 中受到限制。在情况 (a) 中，$\sigma'_v = Y_v = X_v$；在情况 (b) 中，$\sigma'_v = \sqcup$；在情况 (c) 中， $v$ 在 I′中受到限制。在这三种情况下，(σ′, I′) 都将 $Y_v$ 映射到 $X_v$。可以验证，这一构造给出了一个双射 $(\sigma, \mathcal{C}) \leftrightarrow (\sigma', \mathcal{C}')$，它将从 $X$映射到 $Y$的元组与从 $Y$映射到 $X$的元组一一对应。

现在只需证明

$$\frac{P(\sigma)P(\mathbf{I}|\sigma, X))}{P(\sigma')P(\mathbf{I}'|\sigma', Y))} = \frac{\pi(Y)}{\pi(X)}. \tag{3}$$

这是因为

$$\pi(X) \cdot M[X, Y] = \pi(X) \sum P(\sigma)P(\mathbf{I}|\sigma, X)) = \pi(Y) \sum P(\sigma')P(\mathbf{I}'|\sigma', X)) = \pi(Y)M[Y, X],$$

其中，中间的等式由（3）得出。

为证明 (3)，我们首先注意到

$$\frac{P(\sigma)}{P(\sigma')}=\prod_{v|X_v\neq Y_v}\frac{p\cdot b_v(Y_v)}{p\cdot b_v(X_v)}=\prod_v\frac{b_v(Y_v)}{b_v(X_v)}.$$

现在考虑 $P(\mathbf{I}|\sigma,\ X))P(\mathbf{I}'|\sigma',\ Y))$。由于每个约束都独立地通过或未通过，

$$\frac{P(\mathbf{I}|\sigma,X))}{P(\mathbf{I}'|\sigma',Y))}=\prod_{T\in\mathcal{S}}\frac{P(\mathbf{I}_T|\sigma,X))}{P(\mathbf{I}'_T|\sigma',Y))}.$$

现在需要考虑两种情况。

**情况 $\mathbf{I}_T=0$。** 在这种情况下，约束集 $T$ 中的每个顶点都受到限制。对于这些顶点中的每一个，都必须满足 $X_v=Y_v$，且 $\sigma_v=\sigma'_v$也必须成立。这意味着，在局部筛选概率 (2) 中使用的潜在标记集合 $\mathcal{L}(T)$，对于状态为 $X$ 的链和状态为 $Y$的链是相同的。因此$P(\mathbf{I}_T=0|\sigma,\ X)=P(\mathbf{I}'_T=0|\sigma',\ Y)$。因此，我们可以将比值$P(\mathbf{I}_T=0|\sigma,\ X)/P(\mathbf{I}'_T=0|\sigma',\ Y)$改写为

$$\frac{P(\mathbf{I}_T=0|\sigma,X))}{P(\mathbf{I}'_T=0|\sigma',Y))}=1=\frac{C_T(Y_{v_1},\ldots,Y_{v_{|T|}})}{C_T(X_{v_1},\ldots,X_{v_{|T|}})}.$$

**情形 $\mathbf{I}_T=1$。**我们在状态 $X$ 的集合 $\mathcal{L}(T)$ 中的潜在标签与状态 $Y$ 的集合 $\mathcal{L}(T)$ 中的潜在标签之间建立一个几乎是双射的映射。设 $\mathcal{X}=(\mathcal{X}_{v_1},\ \mathcal{X}_{v_2},\ .....,\ \mathcal{X}_{v_{|T|}})$ 是状态 $X$ 的一个潜在标记。根据 $\mathcal{X}$，我们如下为状态 $Y$ 构造一个潜在标记 $\mathcal{Y}=(\mathcal{Y}_{v_1},\ \mathcal{Y}_{v_2}\ldots,\ \mathcal{Y}_{v_{|T|}})$。

– 如果 $\mathcal{X}_{v_i}$ 是从 $X_{v_i}$ 中选取的，且 $X_{v_i}=Y_{v_i}$，我们可以令 $\mathcal{Y}_{v_i}$ 从$Y_{v_i}$中选取。– 如果 $\mathcal{X}_{v_i}$ 是从 $X_{v_i}$ 中选取的，且 $X_{v_i}\neq Y_{v_i}$，我们可以令 $\mathcal{Y}_{v_i}$ 从$\sigma'_i$中选取。注意，在这种情况下，$\sigma'_{v_i}=X_{v_i}$。– 如果 $\mathcal{X}_{v_i}$ 是从 $\sigma_{v_i}$ 中选取的，且 $X_{v_i}=Y_{v_i}$，我们可以令 $\mathcal{Y}_{v_i}$ 从$\sigma'_{v_i}$中选取。– 如果 $\mathcal{X}_{v_i}$ 是从 $\sigma_{v_i}$ 中选取的，且 $X_{v_i}\neq Y_{v_i}$，我们可以令 $\mathcal{Y}_{v_i}$ 从$Y_{v_i}$中选取。

请注意，在所有 4 种情况下，$\mathcal{X}_{v_i}=\mathcal{Y}_{v_i}$。

请注意，只要并非每个选择都来自 $Y_{v_i}$，$\mathcal{Y}$ 就是从 $\mathcal{L}(T)$ 得到的一个潜在标记。对于 $\mathcal{X}=(\mathcal{X}_{v_1},\ \mathcal{X}_{v_2},\ \ldots,\ \mathcal{X}_{v_{|T|}})$ 中的标签，恰好有一种选择会映射到 $\mathcal{Y}=(Y_{v_1},\ Y_{v_2},\ \ldots,\ Y_{v_{|T|}})$。在这种选择中，每个 $\mathcal{X}_{v_i}$ 在 $X_{v_i}\neq Y_{v_i}$ 时都选自 $\sigma_{v_i}$，而在 $X_{v_i}=Y_{v_i}$时则选自 $X_i$。我们将此标签记作 $\mathcal{X}'$，并可知 $\mathcal{X}'=(Y_{v_1},\ Y_{v_2},\ \ldots,\ Y_{v_{|T|}})$。此外，由于 $X\neq Y$ 至少有一个针对 $\mathcal{X}'$ 的选择取自 $\sigma$，因此 $\mathcal{X}'$ 是一个有效标记。现在回想一下，根据 (2)，$P(\mathbf{I}_T=1|\sigma,\ X)=\prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)}C_T(\ell|T)\,C^*_T$。因此，在比值 $P(\mathbf{I}_T=1|\sigma,\ X)/P(\mathbf{I}'_T=1|\sigma,\ Y)$ 中，分子中的所有项都相消，只剩下 $C_T(Y_{v_1},\ Y_{v_2},\ \ldots,\ Y_{v_{|T|}})$。根据对称论证，分母中只剩下一项 $C_T(X_{v_1},\ X_{v_2},\ \ldots,\ X_{v_{|T|}})$。

综上所述，这表明

$$\frac{P(\mathbf{I}_T = 1|\sigma, X))}{P(\mathbf{I}'_T = 1|\sigma', Y))} = \frac{C_T(Y_{v_1}, ..., Y_{v_{|T|}})}{C_T(X_{v_1}, ..., X_{v_{|T|}})},$$

完成证明。

## 4 从过去耦合进行分布式采样

### 4.1 从过去耦合

从过去耦合（*CFTP*）由 [29], 引入，是一种从遍历马尔可夫链的平稳分布中精确采样的技术。关于从过去耦合的章节可见于 [23]。假设马尔可夫链定义在状态集合 $\Omega$ 上，且具有转移矩阵 $M$。沿用 [33], 中的记号，令 $f$: $\Omega \times \{0,1\}^* \to \Omega$ 为一个函数，使得当 $r$ 是从 $\{0,1\}^*$ 中均匀随机选取的字符串时， $P(f(X,r) = Y) = M[X,Y]$。函数 $f$ 称为转移矩阵 $M$ 的随机映射表示, 并且已知它总是存在（见 [23] 中的命题 1.5）。

函数 $f$ 使我们能够使用共同的随机源，以“耦合”的方式从每个状态 $\sigma \in \Omega$ 开始演化一条链。更准确地说，对于整数 $t$，令 $r_t \in \{0,1\}^*$ 为均匀随机选取的。令 $f_t : \Omega \to \Omega$ 为函数 $f_t(X) = f(X, r_t)$。现在，对整数 $t_2 \geq t_1$ 定义函数 $F_{t_1}^{t_2}$: $\Omega \to \Omega$ 如下

$$F_{t_1}^{t_2}(X) = (f_{t_2-1} \circ f_{t_2-2} \circ \cdots \circ f_{t_1})(X) = f_{t_2-1}(f_{t_2-2}(\ldots f_{t_1}(X))).$$

函数 $F_{t_1}^{t_2}$ 定义了从时间 $t_1$ 到时间 $t_2$的状态耦合演化，并具有以下性质： $P(F_{t_1}^{t_2}(X) = Y) = M^{t_2-t_1}[X,Y]$。对于每个 $\sigma \in \Omega$， $F_0^t(\sigma)$ 定义了一个马尔可夫链在时间 $t$ 的状态，该链从 $\sigma$ 开始，并使用转移矩阵 $M$。以这种方式演化的所有马尔可夫链构成的整体——从 $\Omega$ 的每个状态出发，并使用共同的随机字符串——称为全局耦合 [23]。

现在考虑函数

$$F_{-T}^{0}(X) = (f_{-1} \circ f_{-2} \circ \cdots \circ f_{-T})(X) = f_{-1}(f_{-2}(\ldots f_{-T}(X))).$$

CFTP 技术的核心思想是：如果我们能够证明，以概率 1 存在一个 $T$，使得 $F_{-T}^{0}$ 是一个常值函数（也就是说， $\Omega$中的每个状态都经由 $F_{-T}^{0}$映射到同一个状态），那么这个像中的唯一元素就恰好是从马尔可夫链的平稳分布 $\pi$ 中抽取的。现在我们来直观解释这一或许令人惊讶的结论。首先请注意，如果 $F_{-T_1}^{0}$ 将 $\Omega$中的所有元素都映射到 $\omega \in \Omega$，那么对于任意 $T_2 > T_1$，函数 $F_{-T_2}^{0}$ 也会将 $\Omega$ 中的所有元素都映射到 $\omega$。请注意，对于对称且无效的采样技术“向未来耦合”，情况并非如此；在该方法中，我们使用 $F_0^T$ 而不是

$F^0_{-T}$。关键区别在于，即使当 $T$足够大时 $F^T_0$变成常值函数，我们也未必有 $F^{T+1}_0 = F^T_0$。因此，我们可以直观地将 CFTP 理解为计算 $F^0_{-\infty}$。由于平稳分布是遍历马尔可夫链的极限分布， $F^0_{-\infty}$像中的唯一元素恰好是从平稳分布中抽取的。

这一洞见为精确采样提供了一种自然的算法。从$T' = 1$开始，计算 $F^0_{-T'}(\Omega)$，并检查 $|F^0_{-T'}(\Omega)| = 1$。如果是，则输出 $F^0_{-T'}(\Omega)$ 中唯一的元素（状态）；否则将 $T'$的值加倍并重复此过程。Propp 和 Wilson 指出，通过在每次迭代中选择将 $T'$ 加倍，我们只会以常数倍 [29]超出满足 $|F^0_{-T}(\Omega)| = 1$的 $T$的最小值。为避免使样本产生偏差，至关重要的是，每次增加 $T'$时，都使用相同的函数选择 $f_{-1}, f_{-2}, \ldots$来计算 $F^0_{-T'}$，并且即使 $T'$变得很大而 $F^0_{-T'}$仍未变为常数，也不能停止该过程。

鉴于 $|\Omega|$ 相对于输入规模可能呈指数级增长，该算法的一个问题是难以高效地检查 $F^0_{-T'}$是否为常函数。另一个问题是，通常所需的 $T'$ 最终值可能很大。

### 4.2 界链

在全局耦合具有一种称为单调性 [29]的性质这一特殊情况下，检查 $F^0_{-T}$ 是否为常函数很容易；然而，我们希望从带权局部约束满足问题中采样，而其中可能不存在单调性。Häggström 和 Nelander [17] 以及 Huber [16]介绍了界链技术，用于确定从过去耦合何时会得到一个常函数。其思路是，对于每个顶点，我们计算一个标签超集，其中包含对于某个未知的有效输入标记而言，该顶点可能被赋予的所有标签。若每个顶点的标签集都是单元素集， $F^0_{-T}$ 就是常函数。请注意，反过来并不一定成立。当每个顶点的标签集都是单元素集时，我们称 $F^0_{-T}$ 为奇异（承认这里稍有滥用术语，因为奇异性也取决于计算标签集的方法）。我们可以通过检查 $F^0_{-T}$ 是否奇异，而不是是否为常函数，来实现从过去耦合。请注意，每个标签集的一个平凡选择是 $L$，但这会导致算法永不终止。

为了给出一个具体的实际例子，考虑在序贯设置下使用界链从硬核模型中采样 [17]。马尔可夫链的一步定义如下：均匀随机选取一个顶点 $v$，并以概率 $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ 掷出正面。如果掷出反面，则从独立集中移除 $v$。如果掷出正面，且当前独立集中没有 $v$ 的邻居，则将 $v$ 加入独立集。这个马尔可夫链的随机映射表示 $f$ 可以用一种自然的方式定义：随机字符串 $r$ 对应一个顶点和一次掷币结果，并按照正确的分布从所有（顶点、掷币结果）组合中选取。

现在，我们计算每个顶点通过 $F^0_{-T}$ 可以被赋予的标签超集。我们使用递归方法。在平凡的基本情形中， $T = 0$，每个顶点都会收到标签集 $\{0, 1\}$，这表示在某些状态下该顶点不属于

独立集，而在另一些状态下该顶点属于独立集。对于$T \geq 1$，我们首先计算 $F^0_{-T+1}$中每个顶点的标签集。如果 $f_{-T}$ 操作是将顶点 $v$ 从独立集中移除，那么无论输入状态如何，我们都可以确定 $v$ 的标签为 0。因此，将 v 的可能标签集设为 $\{0\}$。另一方面，当 $f_{-T}$ 表示 $v$ 试图加入独立集时，有几种情况。如果 $v$ 的每个相邻顶点在递归调用中都具有标签集 $\{0\}$，那么无论输入状态如何， $v$ 都会加入独立集，其标签集被设为 $\{1\}$。如果 $v$ 的任意相邻顶点在递归调用中具有标签集 $\{1\}$，那么无论输入状态如何，加入操作都会失败， $v$ 将获得标签集 $\{0\}$。在其余情况下，加入操作能否成功可能取决于输入状态。因此，我们为 $v$ 赋予标签集$\{0,1\}$。其他每个顶点都直接保留递归调用中的标签集。 [17], 证明，只要逸度 $\lambda \leq \frac{\alpha}{\Delta-1}$，对于任意常数 $\alpha < 1$，这一过程的奇异性在期望意义下以 $T = O(n\log\ n)$ 的规模出现。这一结论以高概率也成立。

### 4.3 分布式界链

本节给出我们的主要结果，展示如何将从过去耦合和界链技术应用于算法1中定义的分布式马尔可夫链。由此得到定理 2：如果加权局部约束满足问题满足一个一般条件，我们就能在 Local 模型中用 $O(\log n)$ 轮进行精确采样。在附加条件下，我们可以得到一个 $O(\log n)$ 轮的 Congest 算法。请注意，对于某些加权局部约束满足问题（例如着色），该算法可能会永远运行下去。此外，如前所述，在返回样本之前终止运行时间过长的算法实例可能会使结果产生偏差。

首先，我们注意到，对于算法1所描述的链，随机映射表示有一种显而易见的选择。在算法1中，会进行三次随机选择：(i) 每个 $v \in V$ 以 $p$ 的概率被标记为活跃；(ii) 每个活跃顶点 $v$按与 $b_v(\sigma_v)$ 成正比的概率选择一个标签 $\sigma_v$；(iii) 每个约束集 $R$ 以一定概率通过局部过滤器（该概率在公式 (2) 中定义）。这些随机选择可以统一由一个均匀随机选取的字符串 $r \in \{0,1\}^*$ 指定。由于我们要在 Local 模型中执行该算法，因此注意到可以以分布式方式生成 $r_t$。每个顶点 $v$ 都可以在本地随机选择一个比特，以确定自己是否被标记为活跃，并按与其 $b_v$ 值成正比的概率从 $L$ 中随机选择 $\sigma_v$。为了确定约束集 $R$ 是否通过局部过滤器，我们可以让 $R$ 中的一个顶点（例如， $R$ 中 ID 最高的顶点）从 $[0,1]$ 中均匀随机选取一个数。为避免精度方面的问题，我们实际上让该顶点生成一个二进制表（精度任意），用于指定在每一种可能的当前标签和提议组合下，该约束是否通过。

算法从 $T' = 1$ 开始，此时每个顶点的标签集均为 $\{l \in L : b_v(l) > 0\}$。随后，算法依次进入 阶段 1、2、.....。每个阶段结束后， $T'$ 都会加倍。在阶段开始时，有些顶点已经输出了标签；我们称这些顶点为合并顶点，其余顶点则称为未合并顶点。每个阶段都由未合并顶点启动。合并顶点处于“待命”状态

以等待阶段开始，只有在未合并顶点发出提示时才会变为活跃状态。在阶段结束时，任何此时标签集为单元素标签集的未合并顶点，都会输出其标签集中的唯一标签。每个顶点都输出标签后，算法即告完成。

每个阶段包含两个阶段：预处理 阶段和主 阶段。现在我们分别介绍这两个阶段。回想一下， $k$ 是任意约束的最大直径。

**预处理阶段**。 首先，每个未合并的顶点 $v$ 都会通知其（包含自身的） $kT'$ 跳邻域中的每个顶点 $w$，告知它们 $w$ 将在该阶段处于活跃状态。每个活跃顶点还会获知其到某个未合并顶点的最短路径长度。接下来，每个活跃顶点都会生成随机字符串 $r_{-T'}$, ..., $r_{-(T'/2)-1}$ 中属于自己的部分。这些字符串对应于函数 $f_{-(T'/2+1)}$ $f_{-(T'/2+2)}$ $\cdots$, $f_{-T'}$。注意，随机字符串 $r_i$, $i > -(T'/2) - 1$ 会从上一阶段保留下来。

**主阶段**。 每个活跃顶点在阶段开始时，都会将其标签集重置为$\{l \in L\colon\ b_v(l) > 0\}$。主阶段由 $T'$ 个步骤组成 $\{0, ..., T' - 1\}$。

在步骤 $i$中，每个与某个尚未合并顶点的距离至多为 $k(T' - 1 - i)$的活跃顶点 $v$，都会从其 $k$ 跳邻域中的每个顶点收集 $r_{-T'+i}$ 以及当前标签集。现在， $v$ 拥有足够的信息，可以计算出对于其 $k$ 跳邻域的每种标记， $f_{-T'+i}$ 为 $v$ 分配的标签。 $v$ 现在可以将其标签集更新为：对于其 $k$ 跳邻域的每种可能的 标记，$f_{-T'+i}$ 为其分配的标签的并集。只有当每个顶点都被赋予其标签集中的一个标签时，一种标记才是可能的。

在阶段结束时，任何拥有单元素标签集的顶点都会输出其标签集中的唯一标签。

### 4.4 分析

在主阶段结束时，每个在阶段开始时尚未合并的顶点都已计算出一个上界，确定它可能被 $F^0_{-T'}$ 赋予的标签集合。现在考虑一个在主阶段结束时具有单元素标签集的顶点 $v$。这意味着无论输入标记如何，$F^0_{-T'}$ 都会为 $v$ 赋予单个标签 $l$。由于函数是按“反向”顺序复合的，我们还知道，对于所有 $T'' > T'$， $F^0_{-T''}$ 都会为 $v$ 赋予单个标签 $l$。一旦每个顶点都输出了一个标签，我们就可以看出 $F^0_{-T'}$ 是奇异的。此外，顶点输出的标记是 $F^0_{-T'}$ 像集中的唯一标记。因此，输出标签赋值恰好取自 $\pi$，也就是所需的抽样分布，因为根据定理 1， $\pi$ 也是该马尔可夫链的平稳分布。

该算法在 Local 模型中运行 $O(k \cdot T^*)$ 轮，其中 $T^*$ 是使 $F^0_{-T^*}$ 为奇异的最小值。当 $k = 1$ 且顶点的标签集合大小为常数时，该算法在 Congest 模型中运行 $O(T^*)$ 轮。从理论上讲，我们的算法要求每台机器执行指数级工作量；然而，对于一些实际例子，例如硬核模型和加权支配集，每台机器只需执行多项式级工作量。这是因为我们可以通过一条简单规则确定顶点所有可能的标签。

现在我们证明一个定理，表明在某些情况下，以高概率有 $T^* = O(\log\ n)$。该定理的表述与 [17] 中的定理 2 类似；不过，我们的证明方法略有不同。借鉴该论文的思路（作者将其中一些想法归功于 Murdoch 和 Green [27]），我们选择 $\gamma$ 作为下界：对于每个顶点 $v$，它都是无论输入标记如何，$f_i$ 为 $v$ 分配单个标签 $l \in L$ 的概率下界，条件是 $v$ 被标记为活跃。我们还选择 $\beta$ 作为上界：对于每个顶点 $v$，它都是任意两个标记 $l_1$，$l_2$ 满足 $l_1(v) = l_2(v)$ 时，我们有 $(f_i(l_1))(v) \neq (f_i(l_2))(v)$ 的概率上界，条件是 $v$ 被标记为活跃。直观地说，$\gamma$ 和 $\beta$ 分别描述了顶点趋向单例标签或远离单例标签的可能性。

**定理 2.** 如果 $\gamma > \Delta_k\beta$，那么分布式界定链以高概率具有 $T^* = O(\frac{1}{p\gamma - \Delta_k p\beta} \log\ n)$，其中 $\Delta_i$ 是图中最大（不含自身）$i$ 跳邻域内的节点数，$k$ 是任意约束的最大直径。

证明。我们将采用一种标准技巧：考虑使 $F_0^T$ 奇异所需的 $T$ 值，而不是直接考虑 $T^*$。尽管“向未来耦合”并非有效的采样技术，但对于 $F_0^T$ 和 $F_{-T}^0$，奇异性所需时间的分布相同。令 $Y_t^v$ 为指示随机变量，用于指示顶点 $v$ 是否始终由 $F_0^t$ 赋予单元素标签集。令 $Y_t$ 为所有 $Y_t^v$ 之和。假设每个顶点的可能标签集至少包含两个元素，则有 $Y_0 = n$。具有单元素标签集的顶点只有在与具有非单元素标签集的顶点共享约束时，其标签集大小才会增加。现在我们可以看到

$$E[Y_{t+1}] \leq Y_t + Y_t\Delta_k p\beta - Y_t p\gamma = Y_t(1 + \Delta_k p\beta - p\gamma) = Y_t(1 - (p\gamma - \Delta_k p\beta)).$$

我们希望得到 $p\gamma - \Delta_k p\beta > 0$，这等价于条件 $\gamma > \Delta_k\beta$。令 $\alpha = (p\gamma - \Delta_k p\beta)$，现在对于 $0 < \alpha < 1$，有

$$E[Y_{t+1}] = \sum_{i=0}^{n} E[Y_{t+1}|Y_t = i]P(Y_t = i) \leq \sum_{i=0}^{n}(1-\alpha)iP(Y_t = i) = (1-\alpha)E[Y_t].$$

由归纳法可得 $E[Y_t] \leq (1-\alpha)^t n$。由马尔可夫不等式，对于 $T = O(\frac{1}{\alpha}\log\ n)$，可得 $P(Y_T \geq 1) \leq \frac{1}{n}$，证毕。 –

**推论 1.** 当 $\gamma - \Delta_k\beta > r$ 对某个常数 $r > 0$ 成立时，该算法在 $(k \log n)$ 轮内完成，适用于 Local 模型。此外，如果 $k = 1$ 且 $L$ 大小有限，该算法在 Congest 模型中于 $O(\log n)$ 轮内完成。

## 5 特定约束满足问题的结果

**定理3。** 当逸度 $\lambda \leq \frac{\alpha}{\Delta}$ 满足任意常数 $\alpha < 1$时，存在一种 $O(\log n)$ 轮的 Congest 算法，可用于从硬核模型中进行采样。

证明。 注意， $\gamma$ 的取值为 $\frac{1}{1+\lambda}\left(1-\Delta p\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$，因为如果没有相邻顶点被标记且提议加入独立集，那么顶点总会接受离开独立集的提议。 $\beta$ 的取值为 $\frac{\lambda}{1+\lambda}$，因为只有当顶点提议加入独立集时，该顶点的标签集才会增大。最后， $\Delta_k=\Delta$。因此，对于某个常数 $r$，我们需要 $\gamma-\Delta\beta>r>0$。

注意

$$\frac{1}{1+\lambda}\left(1-\Delta p\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)-\Delta\frac{\lambda}{1+\lambda}\geq\frac{1}{1+\lambda}\left(1-p\frac{\alpha}{1+\lambda}\right)-\frac{\alpha}{1+\lambda}=$$

$$\frac{1-\alpha}{1+\lambda}-\frac{p\alpha}{(1+\lambda)^2}\geq\frac{1-\alpha-p\alpha}{1+\lambda}\geq\frac{1-\alpha(1+p)}{1+\alpha}$$

选择足够小的 $p$，即可完成。

**定理 4.** 存在一个 $O(\log n)$ CONGEST 算法，可用于对加权支配集进行采样，其中 $\lambda\geq\alpha\Delta^2$，对任意常数 $\alpha>1$ 均成立。

证明。 虽然现在存在非一元或二元约束，但我们仍然能够在 Congest 模型中运行该算法。这是因为必要的信息可以汇总到每个约束中心的顶点处，然后再分发给该约束中的其他顶点。

与硬核模型类似，我们可以选择 $\gamma=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(1-\Delta_k p\frac{1}{1+\lambda}\right)$ 和 $\beta=\frac{1}{1+\lambda}$。注意这里 $\Delta_k=\Delta+\Delta(\Delta-1)=\Delta^2$。同样，对于某个常数 $r$，只需满足 $\gamma-\Delta_k\beta>r>0$ 即可。

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(1-\Delta_k p\frac{1}{1+\lambda}\right)-\Delta_k\frac{1}{1+\lambda}\geq\frac{\alpha\Delta_k}{1+\alpha\Delta_k}\left(1-\frac{\Delta_k p}{1+\alpha\Delta_k}\right)-\frac{\Delta_k}{1+\alpha\Delta_k}=$$

$$\frac{\Delta_k}{1+\alpha\Delta_k}\left(\alpha\left(\frac{1+\Delta_k(\alpha-p)}{1+\alpha\Delta_k}\right)-1\right)\geq\frac{1}{1+\alpha}\left(\alpha\left(\frac{\alpha-p}{\alpha}\right)-1\right)=\frac{a-p-1}{1+a}$$

只要 $p$ 足够小，我们就完成了。

备注 *1.* 参数为 $\beta>1$ 的简化伊辛模型在分布式设置下仍然是单调的；关于顺序设置下更详细的解释，请参见 [29]。我们的算法可以修改为从伊辛模型中采样。每个顶点不再跟踪其可能的标签，而是跟踪当 $F_{-T}$ 的输入为 $\top$ 和 $\perp$ 时自身的标签。当这些标签相同时，该顶点便输出此标签。我们无法对此方法的运行时间给出上界；不过，结合单调 CFTP [29] 的分析和 [10][3] 的注释，或许可以为某些取值范围内的 $\beta$，得到一个高效的 $O(\log^2 n)$ 轮 Congest 算法。

[3]他们提到，Dobrushin 条件 [6] 足以使他们的链快速混合，但我们无法保证自己使用的是他们所提及的推广版本，而且他们也没有证明这一说法。

## 6 结论

我们已经证明，对于某些加权局部约束满足问题，CFTP 与界链技术相结合，可以在 Local 模型，有时甚至在 Congest 模型中实现高效的精确采样。此前实现精确分布式采样的工作 [9,14] 使用了截然不同的技术，因此，本文在概念上的一项贡献是指出，CFTP 和界链也应加入我们用于精确分布式采样的工具箱。我们希望强调这项工作所引出的两个开放问题。

是否存在一种对数轮 Congest 或 Local 算法，能够从大小为 $O(\Delta)$ 的颜色集中对均匀着色进行精确采样？在序贯设置中，最早描述界链的论文之一表明，当颜色数量为 $\Theta(\Delta^2)$ [16] 时，存在一种多项式时间精确着色算法。近期关于序贯设置下界链的研究表明，仅使用 $\Theta(\Delta)$ 种颜色 [4,18]，即可在多项式时间内对着色进行均匀精确采样。

与 Congest 模型相比，在 CongestedClique 模型等“全对全”通信模型中，许多问题都能更快地得到解决[25,13,15,20]。近期关于分布式采样的研究提出了一个问题：能否针对 CongestedClique 模型设计出速度快得多的分布式采样算法——无论是精确算法还是近似算法。

## 参考文献

1. Alon, N., Babai, L., Itai, A.：一种用于极大独立集问题的快速、简单的随机化并行算法。《算法杂志》**7**(4), 567–583（1986年12月）。 https://doi.org/10.1016/0196-6774(86)90019-2, https://doi.org/10. 1016/0196-6774(86)90019-2 2. Awerbuch, B., Luby, M., Goldberg, A.V., Plotkin, S.A.：分布式计算中的网络分解与局部性。载于：第30届计算机科学基础年度研讨会论文集。第364–369页。SFCS ’89，IEEE计算机学会，美国（1989）。 https://doi.org/10.1109/SFCS.1989.63504, https: //doi.org/10 63504 3 1109 1989 . / SFCS. . Barenboim, L., Elkin, M., Pettie, S., Schneider, J.：分布式对称性破缺的局部性。《ACM杂志》**63**(3)（2016年6月）。https://doi.org/10.1145/2903137, https://doi.org/10 2903137 4 1145. / . Bhandari, S., Chakraborty, S.：改进图中 k-着色完美采样的界。载于：第52届ACM SIGACT计算理论研讨会年会论文集。第631–642页。STOC 2020，计算机协会，纽约，纽约州，美国（2020）。 https://doi.org/10.1145/3357713.3384244, https://doi.org/10 3384244 5 1145 3357713 . / . . Chang, Y.J., Kopelowitz, T., Pettie, S.：Local 模型中随机化复杂度与确定性复杂度之间的指数级分离。《SIAM计算杂志》**48**(1), 122–143（2019年1月）。 https://doi.org/10.1137/17M1117537, https://doi.org/ 10.1137/17M1117537 6. Dobruschin, P.L.：通过条件概率描述随机场及其正则性条件。《概率论及其应用理论》。

13(2), 197–224（1968）。https://doi.org/10.1137/1113026, https://doi. org/10 1113026 7 1137. / . Feng, W., Hayes, T.P., Yin, Y.：采样中的分布式对称性破缺（使用更少颜色实现最优分布式随机着色）（2018）。https://doi.org/ 10 06953 8 48550 1802 06953, 1802 . /ARXIV. . https://arxiv.org/abs/ . . Feng, W., Sun, Y., Yin, Y.：什么可以在局部采样？《分布式计算》**33**(3), 227–253（2020年6月）。https://doi.org/10.1007/s00446-018-0332-8, https://doi.org/10 8 9 1007 00446 018 0332 . /s - - - . Feng, W., Yin, Y.：关于局部分布式采样与计数。载于：2018年ACM分布式计算原理研讨会论文集。第189–198页。PODC '18，计算机协会，纽约，纽约州，美国（2018）。https://doi.org/10.1145/3212734.3212757, https://doi.org/10. 1145/3212734.3212757 10. Fischer, M., Ghaffari, M.：一种简单的并行与分布式采样技术：局部 Glauber 动力学。载于：Schmid, U., Widder, J.（编）第32届分布式计算国际研讨会（DISC 2018）。信息学莱布尼茨国际会议论文集（LIPIcs），第121卷，第26:1–26:11页。Dagstuhl–莱布尼茨信息学中心，德国Dagstuhl（2018）。https://doi.org/10.4230/ LIPIcs.DISC.2018 9815 11 26, 2018 . http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/ / . Galanis, A., Štefankovič, D., Vigoda, E.：反铁磁伊辛模型和硬核模型的配分函数不可近似性。《组合学、概率与计算》**25**(4), 500–559（2016）。https://doi.org/10.1017/ S0963548315000401 12. Ghaffari, M.：一种改进的极大独立集分布式算法。载于：第二十七届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集。第270–277页。SODA '16，工业与应用数学学会，美国（2016）13. Ghaffari, M., Parter, M.：拥塞团中对数星轮次的最小生成树。载于：2016年ACM分布式计算原理研讨会论文集，PODC 2016，美国伊利诺伊州芝加哥，2016年7月25–28日。第19–28页（2016）。https://doi. org/10 2933103 14 1145 2933057 2933103, 10 1145 2933057 . / . https://doi.org/ . / . . Guo, H., Jerrum, M., Liu, J.：通过 Lovász 局部引理进行均匀采样。载于：第49届ACM SIGACT计算理论研讨会年会论文集。第342–355页。STOC 2017，计算机协会，纽约，纽约州，美国（2017）。https://doi.org/10.1145/3055399.3055410, https://doi.org/10. 1145/3055399.3055410 15. Hegeman, J.W., Pandurangan, G., Pemmaraju, S.V., Sardeshmukh, V.B., Sc- quizzato, M.：迈向拥塞团中的最优界：图连通性与最小生成树。载于：2015年ACM分布式计算原理研讨会论文集。第91–100页。PODC '15，ACM，纽约，纽约州，美国（2015）。https://doi.org/10.1145/2767386.2767434, http://doi.acm.org/ 10.1145/2767386.2767434 16. Huber, M.：精确采样与近似计数技术。载于：第三十届ACM计算理论研讨会年会论文集。第31–40页。STOC '98，计算机协会，纽约，纽约州，美国（1998）。https://doi.org/10.1145/276698.276709, https://doi.org/10.1145/ 276698.276709 17. Häggström, O., Nelander, K.：利用从过去耦合对马尔可夫随机场进行精确模拟。《斯堪的纳维亚统计学杂志》**26**(3), 395–411（1999），http://www.jstor.org/stable/4616564

18. Jain, V., Sah, A., Sawhney, M.：在图中完美采样 k $\geq (8/3 + o(1))\Delta$-着色。载于：第53届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集。第1589–1600页。STOC 2021，计算机协会，纽约，NY，美国（2021 3451012 19 10 1145 3406325），https://doi.org/。/。。Jerrum, M.R., Valiant, L.G., Vazirani, V.V.：从均匀分布中随机生成组合结构。理论计算机科学**43**，169–188（1986）20. Jurdziński, T., Nowicki, K.：在拥塞团中以 o(1) 轮构造最小生成树。载于：第二十九届 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集。第2620–2632页。SODA '18，工业与应用数学学会，费城，PA，美国（ 2018 =3174304 3175472 ），21 http://dl.acm.org/citation.cfm?id。。Kuhn, F., Moscibroda, T., Wattenhofer, R.：局部计算：下界与上界。《ACM杂志》**63**(2)（2016年3月）。https://doi.org/10.1145/2742012，https: //doi.org/10 2742012 22 1145。/。Kuhn, F., Moscibroda, T., Wattenhofer, R.：哪些问题无法在局部计算！载于：第二十三届 ACM 分布式计算原理研讨会论文集。第300–309页。PODC '04，计算机协会，纽约，NY，美国（2004）。https://doi.org/10.1145/1011767.1011811，https://doi.org/10 1011811 23 1145 1011767。/。。Levin, D.A., with, Y.P.：马尔可夫链与混合时间。美国数学学会（2017年10月）。https://doi.org/10.1090/mbk/107，https://doi.org/10.1090/mbk/107 24. Linial, N.：分布式图算法中的局部性。《SIAM计算杂志》**21**(1)，193–201（1992年2月）。https://doi.org/10.1137/0221015，https://doi.org/10. 1137/0221015 25. Lotker, Z., Patt-Shamir, B., Pavlov, E., Peleg, D.：在 $O(\log \log n)$ 轮通信中构造最小权生成树。SIAM计算杂志**35**(1)，120–131（2005）26. Luby, M.：一种用于极大独立集问题的简单并行算法。载于：第十七届 ACM 计算理论研讨会论文集。第1–10页。STOC '85，计算机协会，纽约，NY，美国（1985）。https://doi.org/10.1145/22145.22146，https://doi.org/10. 1145/22145.22146 27. Murdoch, D.J., Green, P.J.：从连续状态空间进行精确采样。《斯堪的纳维亚统计学杂志》**25**(3)，483–502（1998），http://www.jstor.org/stable/4616516 28. Naor, M., Stockmeyer, L.：哪些问题可以在局部计算？载于：第二十五届 ACM 计算理论研讨会论文集。第184–193页。STOC '93，计算机协会，纽约，NY，美国（1993）。https://doi.org/10.1145/167088.167149，https://doi.org/10.1145/ 167088.167149 29. Propp, J.G., Wilson, D.B.：利用耦合马尔可夫链进行精确采样及其在统计力学中的应用。《随机结构与算法》**9**(1–2)，223–252（1996年8月）30. Sinclair, A., Jerrum, M.：近似计数、均匀生成与快速混合马尔可夫链。《信息与计算》**82**(1)，93–133（1989）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0890-5401(89)90067-9，https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0890540189900679 31. Sly, A.：唯一性阈值处的计算转变。载于：2010年 IEEE 第51届计算机科学基础年度研讨会论文集。第

287–296页。FOCS '10，IEEE计算机学会，美国（2010）。https://doi.org/10. 1109 34 32 2010 34, 10 1109 2010 /FOCS. . https://doi.org/。/FOCS.。。Sly, A., Sun, N.：d-正则图上二自旋模型的计数。《概率年刊》**42**24519110 33 6 2383 2416 2014（），–（），http://www.jstor.org/stable/。Vigoda, E.：马尔可夫链蒙特卡洛方法讲义，佐治亚理工学院（206年9月），https://faculty.cc.gatech.edu/~vigoda/MCMC_ Course/ CouplingFromPast.pdf 34. Weitz, D.：计数达到树阈值的独立集。载于：第三十八届 ACM 计算理论年度研讨会论文集。第140–149页。STOC '06，计算机协会，纽约，NY，美国（2006）。https://doi.org/10.1145/1132516.1132538, https://doi.org/10. 1145/1132516.1132538