arXiv:2303.02739v1 [math.GN] 5 Mar 2023

邻近集与图的连通性

KARIM CHAIRA 和 Oleksiy Dovgoshey

摘要。设 G 是一个顶点集为 V 的图。如果存在半度量 $d\colon\ V\times V\to[0,\infty[$，以及半度量空间（$V$，$d$）的两个不相交邻近子集，使得 $V=A\cup B$，且顶点 u、$v\in V$ 相邻当且仅当

$$d(u,v)\leqslant\inf\{d(x,y)\colon x\in A, y\in B\},$$

并且，对于每个 $p\in V$，在 G 中存在一条连接 A 和 B 的路径，且经过 p。文中证明，一个图是路径近似的，当且仅当其所有顶点都不是孤立顶点。还证明了，对于某个超度量，一个图同时是近似图和路径近似图，当且仅当其每个顶点的度都等于 1。

1. 引言与预备知识

1.1. 引言。 设二部图 G（A，B）具有固定部 A 和 B。如果存在半度量空间（X，d），使得 A 和 B 是 X 的不相交邻近子集，并且顶点 $a\in A$ 和 $b\in B$ 相邻当且仅当 d（a，b）$=$ 距离（A，B），则称其为近似图。文献 [4] 描述了半度量空间和度量空间中近似二部图的结构。特别地，文中证明，二部图 G 不是任何近似图的同构图，当且仅当 G 是有限的且为空。在 [5], 中，作者刻画了其近似图至多有一条边的半度量空间，以及其近似图仅含度不超过 1 的顶点的半度量空间。这使他们能够找出最佳邻近对和最佳逼近唯一性的充要条件。关于图和最佳近似点的一些参考文献见 [1, 4, 6–10]。

本文继续研究邻近与图之间的相互作用，将路径近似图定义为由所有满足不等式$d(x,y)\leqslant\operatorname{dist}(A,B)$的路径构成的并集；这些路径从 A 与 B 点之间最近的位置出发，且其边满足条件 $\{x,y\}$。

1.2. 半度量与邻近集。 设 X 为非空集。X上的一个半度量是一个函数 $d\colon\ X\times X\to[0,+\infty[$，满足 $d(a,b)=d(b,a)$，并且

$$\big(d(a,b)=0\big)\Leftrightarrow\big(a=b\big)$$

2020 数学主题分类。主要分类：54E35，次要分类：54E05，05C60，05C62。关键词和短语。最佳邻近对；二部图；图的连通分量；路径；近似集；半度量空间；超度量空间。

对所有 $a, b \in X$均成立。点对 (X, d)，其中 d 是 X上的半度量空间，称为半度量空间。若半度量 d 满足三角不等式，则称其为度量

$$d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$$

对所有 a、 b、 $c \in X$均成立。半度量 d 是<style id='5'>超度量，如果我们有

$$d(a,b) \leqslant \max\{d(a,c), d(c,b)\}$$

对所有 a、 b、 $c \in X$均成立。每个超度量空间都是度量空间，每个度量空间都是半度量空间。

定义 1.1。 设 (X, d) 是一个半度量空间，设 A 是 X 的一个非空子集，并设$x \in X$。如果点 $a_0 \in A$ 是 x （在 A中的）一个<style id='11'>最佳逼近，则

$$d(x, a_0) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}. \tag{1.1}$$

如果集合 A 满足： A 对 X中的每个点都包含一个最佳逼近，则称其为<style id='2'>近似集。

注 1.2。 在 [10] 中，伊万·辛格写道：“‘近似集’一词（由‘邻近’和‘极小’组合而成）由 R. Killgrove 提出，并由 R. R. Phelps 首次使用[7]。”

设 A 和 B 是半度量空间 (X, d) 的子集。若 A 和 B 在 (X, d) 中都是逼近的，则称点对 (A, B) 是逼近的 。

对于半度量空间 (X, d) 的非空子集 A 和 B，我们定义从 A 到 B 的距离为

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \colon a \in A \text{ and } b \in B\}. \tag{1.2}$$

若 A 是单点集 $A = \{a\}$，为简便起见，我们用 $\operatorname{dist}(a, B)$ 表示 $\operatorname{dist}(\{a\}, B)$。

定义 1.3. 设 (X, d) 是半度量空间，且 A、 B 是 X 的非空子集。记

$$A_0 := \{a \in A \colon d(a, b) = \operatorname{dist}(A, B) \text{ for some } b \in B\}, \tag{1.3}$$

$$B_0 := \{b \in B \colon d(a, b) = \operatorname{dist}(A, B) \text{ for some } a \in A\}. \tag{1.4}$$

若点对 $(a_0, b_0) \in A_0 \times B_0$ 满足以下条件，则称其为 A 和 B 的最佳邻近对

$$d(a_0, b_0) = \operatorname{dist}(A, B).$$

注 1.4. 对于半度量空间 (X, d) 的任意一对非空子集 A、 B， $A_0 \neq \varnothing$ 当且仅当 $B_0 \neq \varnothing$。若 $S \subseteq A \times B$ 是 A 和 B 的所有最佳邻近对构成的集合，则 A_0 (B_0) 是 S 在 A (B) 上的投影。

下一个结果是 [3] 中定理 2.6 的一部分。

定理 1.5。 设（A, B）是超度量空间（X, d）中的一个逼近对。则以下陈述等价：

（i）不等式直径（B）$\leqslant$距离（A, B）成立。（ii）集合 $A_0 \subseteq A$ 是 X 的邻近子集，且等式 $B_0 = B$ 成立，并且每个（a, b）$\in A_0 \times B_0$ 都是集合 A 和 B 的最佳邻近对。

1.3. 图。 简单图 是一个点对 (V, E)，由一个非空集合 V 和一个集合 E 组成，其中集合 E 的元素是 V 中不同元素的无序点对。在下文中，我们只考虑简单图。

对于图 $G = (V, E)$，集合 $V = V(G)$ 和 $E = E(G)$ 分别称为顶点集和边集。如果 $\{u, v\} \in E(G)$，则两个顶点 u、$v \in V$ 相邻 。完全 图是指任意两个不同顶点都相邻的图。如果不存在与 v 在 G 中相邻的顶点，则顶点 $v \in V(G)$ 称为孤立 顶点。如果 $E(G) = \varnothing$，则称 G 是空 的。因此，当且仅当 G 的所有顶点都是孤立顶点时， G 为空。

如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$ 有效，则图 H 是图 G 的子图 。

若 G 是非空图，则我们用 G' 表示 G 的一个子图，其顶点是 G 的非孤立顶点，并且满足 $E(G') = E(G)$。容易看出， $V(G')$是所有二点集 $\{a, b\} \in E(G)$的并集。

注 1.6。 图 G' 可由以下极值性质刻画：若H 是 G 的一个子图，满足 $G' \subseteq H$ ，且 H 没有任何孤立顶点，则 $G' = H$。

若 G 是有限图，则当且仅当 $V(G)$是有限集时， $|V(G)| < \infty$。沿用 [2] 的定义，我们将有限非空图 P 称为路径，当且仅当其顶点可以编号为

$$V(P) = \{u_0, u_1, \ldots, u_k\}, \quad k \geqslant 1, \quad \text{and} \quad E(P) = \{\{u_0, u_1\}, \ldots, \{u_{k-1}, u_k\}\}.$$

此时，我们称 P是连接 u_0与 u_k的路径，并记作 $P = (u_0, u_1, \ldots\ldots, u_k)$。若对于任意两个不同的 u、$v \in V(G)$，都存在一条连接u与 v的路径 $P \subseteq G$ ，则称图 G 为连通图。

设 $\mathcal{F}$ 是一个非空的图集。若

$$V(H) = \bigcup_{G \in \mathcal{F}} V(G) \text{ and } E(H) = \bigcup_{G \in \mathcal{F}} E(G).$$

若对任意两个不同的图 G_1、$G_2 \in \mathcal{F}$， $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ 均成立，则称并集 H 为不相交的。

图 G 的子图 H 是 G 的连通分支，若蕴含关系

$$(H \subseteq \Gamma) \Rightarrow (H = \Gamma) \tag{1.5}$$

对每个连通图 $\Gamma \subseteq G$ 都成立。

在论文的下一节中，我们将使用以下简单引理来描述连通子图的一些性质。

引理 1.7。 每个图都是其连通分支的不交并。

引理 1.8。 设 G_1 和 G_2 为连通图。若 $V(G_1) \cap V(G_2) \neq \varnothing$，则它们的并集 $G_1 \cup G_2$ 也是连通的。

引理 1.9。设 H 为一个图，且 H_1 是 H 的一个连通子图，使得 $V(H_1) = V(H)$。则 H 是连通的。

引理 1.10。设 W_a 是图 W, $a \in V(W_a)$ 的一个连通分支，且 W^* 是 W 的一个连通子图。若 $a \in V(W^*)$ 成立，则 W^* 是 W_a 的一个子图。

引理 1.7–1.9 的证明很简单，这里省略。引理 1.10 可由引理 1.8 和 (1.5) 推出。

设 S 是图 G 的任意非空顶点集。由 S 诱导出的子图 G 为是一个图 $G[S]$，满足 $V(G[S]) = S$，且对所有 $u, v \in S$，有 $\{u, v\} \in E(G[S])$ 当且仅当 $\{u, v\} \in E(G)$。

定义 1.11。若图 G 的顶点集 $V(G)$ 可以划分为两个非空且不相交的子集（或称部），使得没有边的两个端点位于同一部中，则称该图为二部图 。

设 G 是一个二部图，其部为 A 和 B。若 $\{a, b\} \in E(G)$ 对任意满足 $a \in A$ 和 $b \in B$ 的情形均成立，则称 G 为完全二分图 G 。

类比导出子图的概念，可以引入导出二部图的概念。

定义 1.12。设 G 是一个图，且 A、B 是 $V(G)$ 的不相交非空子集。G 的导出二部子图 $G[A, B]$ 是一个图，其顶点集为 $A \cup B$，边集由所有满足 $\{u, v\} \cap A \neq \varnothing \neq \{u, v\} \cap B$ 的 $\{u, v\} \in E(G)$ 组成。

根据导出子图和导出二部图的定义，下面的引理显然成立。

引理 1.13。设 G 是一个图，且 A、B 是 $V(G)$ 的不相交非空子集，并且满足 $A \cup B = V(G)$。那么，G 是导出子图 $G[A]$、$G[B]$ 与导出二部图 $G[A, B]$ 的并集。

定义 1.14 ([4])。一个具有固定部 A 和 B 的二部图 $G = G(A, B)$ 对于半度量空间 (X, d) 是逼近的，如果 A 和 B 是 X 的不交最佳逼近子集，并且等价关系

$$\big(\{a, b\} \in E(G)\big) \Leftrightarrow \big(d(a, b) = \operatorname{dist}(A, B)\big) \tag{1.6}$$

对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$ 都成立。

定理 1.15 ([4])。设 G 是一个具有固定部 A 和 B 的二部图。则以下陈述等价:

(i) 要么 G 非空，要么 G 为空但 A 和 B 为无限集。(ii) G 对于一个度量空间是逼近的。(iii) G 对于一个半度量空间是逼近的。

我们研究的主要对象是路径二分图和路径近似图，其定义如下。

定义 1.16。设 A 和 B 是两个非空不相交集。若 $V(P) \subseteq A \cup B$，且存在唯一的 $\{a_0, b_0\} \in E(P)$ 使得

$$A \cap \{a_0, b_0\} \neq \varnothing \neq B \cap \{a_0, b_0\}.$$

固定的 A和 B 的非空 be-路径集的并集称为 A 和 B的路径二部图 。若存在 A, $B \subseteq V(G)$，使得 G 是 A 和 B的路径二部图，则称图 G 为路径二分 的

定义 1.17。设 G 是集合 A 和 B的路径二部图，设 $X := A \cup B$，且设 d: $X \times X \to [0, +\infty[$ 为半度量。若 A, B 是 (X, d) 的邻近子集，并且等价关系

$$(\{x, y\} \in E(G)) \Leftrightarrow (d(x, y) \leqslant \operatorname{dist}(A, B)) \tag{1.7}$$

对所有不同的 x、 $y \in X$均成立。

如果存在定义在 X 上的半度量 $d : = V(G)$，以及不相交的非空 A、 $B \subseteq V(G)$，使得 G 是关于 A 和 B 的路径近似最近图（相对于 d），则称图 G 为 路径近似的。

本文组织如下。

定理 2.3 描述了路径二部图 G 的结构，其中给定的点 $a_1 \in A$ 和 $b_1 \in B$ 可通过 G 中的 be-路径连接。在定理 2.7 中，我们考虑与路径二部图 $G(A, B)$ 相对应的二部图 $\mathbf{G(A,B)}$，并证明：$\mathbf{G(A, B)}$ 是完全二分图，当且仅当 $a \in A$ 和 $b \in B$ 中任意二者均可通过 $G(A, B)$ 中的 be-路径连接。推论 2.8 描述了路径二部图 $G(A, B)$：它们是连通的，当且仅当相应的图 $\mathbf{G(A,B)}$ 是完全二分图。定理 2.10 给出了在固定 A、 $B \subseteq V(G)$ 的情况下， G 为路径二部图的充要条件。这是第 2 节的主要结果之一。利用该定理，我们在推论 2.11–2.12 中刻画了路径二部图（在同构意义下）的形式。

第 3 节研究了路径近似最近图的性质。

定理 3.1 描述了具有不相交逼近子集 A, B 的半度量空间 (X, d) 的结构，其中由 (1.7) 定义的图是路径二部图。定理 3.3 表明，对于每个路径二部图 G ，都存在一个度量，使得 G 关于该度量是路径近似的。借助这一结果，我们可以在定理 3.7 中刻画路径近似图在同构意义下的特征。在命题 3.8 和 3.9 中，我们描述了同时为近似图和路径近似图的图。最后一个结果，即定理 3.10 表明，近似图 G 关于某个超度量是路径近似图，当且仅当 G 的每个顶点的度均为 1。

2. 路径二部图

下面我们将考虑基数任意的路径二部图。

命题 2.1. 设 G 是 A 和 B的路径二部图。则 $V(G) = A \cup B$成立。

证明。 由定义 1.16 可得

$$A \cup B \subseteq V(G). \tag{2.1}$$

由于 G 是 A 和 B的路径二部图，因此存在一个由 A 和 B的 be-路径 P 组成的集合 $\mathbf{P}$ ，使得

$$V(G) \subseteq \bigcup_{P \in \mathbf{P}} V(P). \tag{2.2}$$

For 对每个 $P \in \mathbf{P}$，定义 1.16 蕴含 $V(P) \subseteq A \cup B$。因此，(2.2) 蕴含包含关系

$$V(G) \subseteq A \cup B. \tag{2.3}$$

现在，等式 $V(G) = A \cup B$ 可由 (2.1) 和 (2.3) 得出。 □

设 G 是由 A 和 B构成的路径二部图。于是记

$$\mathcal{B}_{path}(G) := \{(a, b) \in A \times B: \text{存在一条 be-路径 } P_{A,B} \subseteq G \text{ 连接 } a \text{ 和 } b\}. \tag{2.4}$$

若 $\mathcal{B}_{path}(G) = A \times B$，则称 G 为路径完备。

注 2.2. 对于任意由 A 和 B构成的路径二部图 G ， $\mathcal{B}_{path}(G)$ 都是非空集。

定理 2.3. 设 $G = G(A, B)$ 是由集合 A 和 B构成的路径二部图，设 $a_1 \in A$ 和$b_1 \in B$ 已给定，且 $G_{a_1}[A]$ 和 $G_{b_1}[B]$ 分别是导出子图 $G[A]$ 和 $G[B]$ 的连通分支，使得 $a_1 \in A_1$ 和 $b_1 \in B_1$，其中

$$A_1 := V(G_{a_1}[A]) \text{ and } B_1 := V(G_{b_1}[B]). \tag{2.5}$$

写出

$$C_1 := A_1 \cup B_1. \tag{2.6}$$

那么，下列陈述等价:

(i) 点对 (a_1, b_1) 属于 $\mathcal{B}_{path}(G)$。(ii) 由集合 C_1 在 G 中诱导的子图 $G[C_1]$ 是连通的。(iii) 包含关系 $A_1 \times B_1 \subseteq \mathcal{B}_{path}(G)$ 成立。

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$。假设 (i) 成立,

$$(a_1, b_1) \in \mathcal{B}_{path}(G). \tag{2.7}$$

那么存在一条连接 $a_1 \in A$ 和 $b_1 \in B$的 be-路径 $P_{A,B}$ 。根据引理 1.8，并集$P_{A,B} \cup G_{a_1}[A]$ 是连通的，因为 $a_1 \in V(P_{A,B}) \cap V(G_{a_1}[A])$，且图 $P_{A,B}$6

和 $G_{a_1}[A]$ 是连通的。同理，并集 $P_{A,B} \cup G_{b_1}[B]$ 也是连通的。我们来考虑一个图

$$H_1 := P_{A,B} \cup G_{a_1}[A] \cup G_{b_1}[B]. \tag{2.8}$$

再次利用引理 1.8，我们看到 H_1 是连通的。根据引理 1.9，要完成陈述 (ii) 的证明，只需证明

$$H_1 \subseteq G[C_1] \tag{2.9}$$

and

$$V(H_1) = V(G[C_1]). \tag{2.10}$$

由 (2.5)、(2.6) 和 (2.8) 可得

$$V(H_1) \supseteq A_1 \cup B_1 = V(G[C_1]).$$

因此，如果 (2.9) 成立，则 (2.10) 也成立。为证明 (2.9)，注意到 $G_{a_1}[A_1]$ 和 $G_{b_1}[B_1]$ 是 $G[C_1]$ 的子图

$$G_{a_1}[A_1] \subseteq G[C_1] \text{ and } G_{b_1}[B_1] \subseteq G[C_1]. \tag{2.11}$$

因此，当时 (2.9) 成立。

$$P_{A,B} \subseteq G[C_1]. \tag{2.12}$$

我们来证明最后一个包含关系。

根据定义 1.16，我们可以找到点 $a_0 \in A$、$b_0 \in B$ 和连通图 $P_A \subseteq G[A]$、$P_B \subseteq G[B]$，使得

$$a_0, a_1 \in V(P_A), \quad b_0, b_1 \in V(P_B) \tag{2.13}$$

and

$$P_{A,B} = P_A \cup P_B \cup P^0, \tag{2.14}$$

其中 P^0 是由下式定义的路径

$$V(P^0) := \{a_0, b_0\}, \quad E(P^0) := \{\{a_0, b_0\}\}. \tag{2.15}$$

由 (2.13)–(2.15) 可知，只要满足以下条件，(2.12) 就成立

$$P_A \subseteq G[C_1] \text{ and } P_B \subseteq G[C_1]. \tag{2.16}$$

引理 1.10 和 (2.13) 推出

$$P_A \subseteq G_{a_1}[A] \text{ and } P_B \subseteq G_{b_1}[B]. \tag{2.17}$$

现在由 (2.17) 和 (2.11) 可得 (2.16)。

$(ii) \Rightarrow (iii)$. 设 $G[C_1]$ 是一个连通图。那么存在点 $a_0 \in A_1$ 和$b_0 \in B_1$，使得

$$\{a_0, b_0\} \in E(G[C_1]).$$

显然，由 (2.15) 定义的图 P^0 是 A 和 B 的一条 be-路径，它连接 a_0 和 b_0。因此，我们有 $(a_0, b_0) \in \mathcal{B}_{path}(G)$。

现在考虑任意的 $a \in A_1$ 和 $b \in B_1$。如果 $a \neq a_0$ 和 $b \neq b_0$，那么存在一条 A_1 中的路径 P_a，连接 a 和 a_0；还有一条 B_1 中的路径 P_b，连接 b 和 b_0。那么并集 $P_a \cup P^0 \cup P_b$ 是 A 和 B 的一条 be-路径，连接 a 和 b。当 $a = a_0$ 或 $b = b_0$ 时，所需的 A 和 B 的 be-路径也可以类似地构造。

$(iii) \Rightarrow (i)$。设 (iii) 成立。那么 (i) 可由 $(a_1, b_1) \in A_1 \times B_1$ 和 $A_1 \times B_1 \subseteq \mathcal{B}_{path}(G)$ 得出。□

注 2.4。设图 G 对 A 和 B 是路径二分的。$\mathcal{B}_{path}(G)$ 中的一个元素 (a, b) 在 G 中可能有多条 be-路径连接 a 和 b。

注 2.5。设 G 是集合 A 和 B 的路径二部图。若 G 是路径完备的，则 G 是连通的；但一般而言，反之不成立（见下文的例 2.6）。

例 2.6。设 $P = (a_1, b_1, a_2, b_2)$ 是一条路径（见图1）。则 P 是一个连通

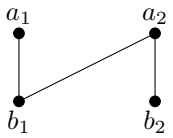


图1。路径 P 是集合 $A = \{a_1, a_2\}$ 和 $B = \{b_1, b_2\}$ 的路径二部图。

集合 $A = \{a_1, a_2\}$ 和 $B = \{b_1, b_2\}$ 的路径二部图，但 $(a_1, b_2) \notin \mathcal{B}_{path}(P)$。

考虑一个图 $G = G(A, B)$，其中 $V(G) = A \cup B$，其中 A 和 B 是不相交的非空集合，并记

$$\mathbf{A} := \{A^i : i \in I\} \quad (\mathbf{B} := \{B^j : j \in J\})$$

导出子图 $G[A]$ $(G[B])$ 的所有连通分支的集合。

现在，我们按照以下规则定义二部图 $\mathbf{G} = \mathbf{G(A, B)}$：$V\mathbf{(G)} := \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$，并且对于 $i_1 \in I$ 和 $j_1 \in J$，$\{A^{i_1}, B^{j_1}\} \in E\mathbf{(G)}$ 成立，当且仅当存在 $a_1 \in A^{i_1}$ 和 $b_1 \in B^{j_1}$ 使得

$$(a_1, b_1) \in \mathcal{B}_{path}(G). \tag{2.18}$$

定理 2.7。设 G 是由集合 A 和 B 构成的路径二部图。那么，下列陈述等价：

(i) G 是路径完备的。(ii) $\mathbf{G}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是完全二分图。

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$。设 G 是路径完备的。我们必须证明，$\mathbf{G(A,B)}$ 是完全二部图。当且仅当对所有 $i_1 \in I$ 和 $j_1 \in J$，存在 $a_1 \in A^{i_1}$ 和 $b_1 \in B^{j_1}$ 使得 (2.18) 成立。由于 G 是路径完备的，对于所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，$(a, b) \in \mathcal{B}_{path}(G)$ 均成立；特别地，对于每个 $a_1 \in A^{i_1}$ 和 $b_1 \in B^{j_1}$，(2.18) 也成立。

$(ii) \Rightarrow (i)$。设 **G(A,B)** 是一个完全二部图。等式

$$A \times B = \left(\bigcup_{i \in I} A^i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B^j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (A^i \times B^j)$$

意味着 G 是路径完备的，当且仅当包含关系

$$A^i \times B^j \subseteq \mathcal{B}_{path}(G) \tag{2.19}$$

对所有 $i \in I$ 和 $j \in J$都成立。

考虑任意的 $i_1 \in I$ 和 $j_1 \in J$。由于**G(A，B)** 是完全二分图，我们可以找到 $a_1 \in A^i$ 和 $b_1 \in B^j$，使得 $(a_1, b_1) \in \mathcal{B}_{path}(G)$。由定理 2.3 可知，包含关系 (2.19) 在 $A^i = A_1$ 和 $B^j = B_1$的条件下成立。□

推论 2.8。设 $G = G(A, B)$ 是集合 A 和 B的路径二部图。若集合 A, B 中至少有一个恰好包含一个点，

$$\min\{|A|, |B|\} \leqslant 1, \tag{2.20}$$

则以下陈述等价：

(i) G是连通的。

(ii) G是路径完备的。

这个推论可由定理 2.3 和定理 2.7 得出，不过，为求简洁，我们在下面给出一个直接的初等证明。

推论 *2.8* 的证明。蕴含关系 $(ii) \Rightarrow (i)$ 显然成立。我们来证明 $(i) \Rightarrow (ii)$ 成立。

设 G 连通。不失一般性，假设 $A = \{a_1\}$，其中 a_1 是 A的唯一点。于是，根据命题 2.1，$(G) \setminus \{a_1\}$ 成立。因此，根据定义 1.16，连接 a_1 与任意一个 $b \in B$ 的每条路径都是 A 的 be-路径，并且 B。现在，由 (2.4) 可知， G 是路径完备的。□

注 2.9。例 2.6 表明，对于不等式 (2.20)，整数 1 是可能的最佳取值。

定理 2.10。设 G 为一个图， A 和 B 是 $V(G)$ 的两个不相交非空子集，且$\{G_i: i \in I\}$ 是 G的所有连通分支构成的集合，并令$\mathbf{P}_{A,\,B}$ 为 P 的所有 *be*-路径构成的集合，其中 A 和 B 是 G, $P \subseteq G$的子图。则以下陈述等价：

(i) 等式

$$G = \bigcup_{P \in \mathbf{P}_{A,B}} P \tag{2.21}$$

成立，即， G 是由 A 和 B构成的路径二部图。

(ii) 我们有

$$V(G) = A \cup B \tag{2.22}$$

and

$$A \cap V(G_i) \neq \varnothing \neq B \cap V(G_i) \tag{2.23}$$

对每个 $i \in I$。

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$。等式 (2.22) 由命题 2.1 得出。为证明 (2.23)，反设存在 $i_0 \in I$ 使得

$$A \cap V(G_i) = \varnothing \text{ or } B \cap V(G_i) = \varnothing.$$

不失一般性，可以假设 $B \cap V(G_{i_0}) = \varnothing$ 成立。然后，利用最后一个等式和 (2.22)，得到

$$V(G_{i_0}) \subseteq A. \tag{2.24}$$

等式 (2.21) 意味着存在一条 be-路径 $P^0 \in \mathbf{P}_{A,\ B}$，使得 $a_{i_0} \in V(P^0)$。be-路径 P^0 是 G 的一个连通子图。因此，包含关系

$$P^0 \subseteq G_{i_0} \tag{2.25}$$

由引理 1.10 得出。特别地，由 (2.24) 和 (2.25) 可得

$$V(P^0) \subseteq A,$$

与定义 1.16 相反。因此，对每个 $i \in I$，(2.23) 都成立。

$(ii) \Rightarrow (i)$。设 (ii) 成立。我们必须证明等式 (2.21) 成立。下面来证明。

首先，我们注意到

$$G \supseteq \bigcup_{P \in \mathbf{P}_{A,B}} P$$

成立。因此，(2.21) 成立当且仅当

$$G \subseteq \bigcup_{P \in \mathbf{P}_{A,B}} P.$$

最后一个包含关系意味着

$$E(G) \subseteq \bigcup_{P \in \mathbf{P}_{A,B}} E(P), \tag{2.26}$$

$$V(G) \subseteq \bigcup_{P \in \mathbf{P}_{A,B}} V(P). \tag{2.27}$$

利用 (2.23)，我们看到 G 的每个连通分支 G_i 都至少包含两个不同的顶点，因此，

$$V(G_i) = \bigcup_{\{u,v\} \in E(G_i)} \{u, v\}$$

成立。最后一个等式和引理 1.7 可得

$$V(G) = \bigcup_{i \in I} V(G_i) = \bigcup_{\{u,v\} \in E(G)} \{u, v\}.$$

因此，(2.27) 由 (2.26) 得出。要证明 (2.26)，只需证明 G_i, $i \in I$ 的每条边也是 be-路径 $P \in \mathbf{P}_{A,B}$ 的一条边，即，

$$E(G_i) \subseteq \bigcup_{P \in \mathbf{P}_{A,B}} E(P) \tag{2.28}$$

对每个 $i \in I$ 均成立。

令 i_1 为族 I 的任意一个指标，并令

$$\{x, y\} \in E(G_{i_1}). \tag{2.29}$$

我们必须找到 $P \in \mathbf{P}_{A,\ B}$ 使得

$$\{x, y\} \in E(P). \tag{2.30}$$

如果我们有

$$A \cap \{x, y\} \neq \varnothing \neq B \cap \{x, y\}, \tag{2.31}$$

那么由下式定义的路径 P_{i_1}

$$V(P_{i_1}) = \{x, y\}, \quad E(P_{i_1}) = \{\{x, y\}\} \tag{2.32}$$

属于 $\mathbf{P}_{A,\ B}$。

如果不满足（2.31），那么不失一般性地，我们可以假设

$$\{x, y\} \subseteq V(G_1) \cap B.$$

记 $P^1 = (v_1, \ldots, v_n)$ 为连接集合 $\{x, y\}$ 与集合 $V(G_1) \cap A$ 中的 G_1 的最短部分。于是，对于每个 $i \in \{2, \ldots, n-1\}$，要么有 $v_1 = x$、$v_n \in A$ 和 $v_i \in B \setminus \{x, y\}$，要么对于每个 $i \in \{2, \ldots, n-1\}$，有 $v_1 = y$、$v_n \in A$ 和 $v_i \in B \setminus \{x, y\}$。在这两种情况下，都容易证明

$$P^1 \cup P_{i_1} \in \mathbf{P}_{A,B},$$

其中，P_{i_1} 是由（2.32）定义的路径。 □

定理 2.10 推出以下推论。

推论 2.11。对于每个图 G，以下陈述是等价的：

(i) 存在顶点集 $V(G)$ 的两个不相交非空子集 A 和 B，使得G 是以集合 A 和 B为部的路径二部图。(ii) 等式 $G = G'$ 成立。

推论 2.12. 对于每个图 G，以下命题等价：

(i) 每当 A 和 B 是 $V(G)$ 的两个不相交非空子集，且满足 $V(G) = A \cup B$ 时，G 就是以集合 A 和 B 为部的路径二部图。(ii) G 是连通的，且等式 $G' = G$ 成立。

注 2.13。对于连通图，等式 $G' = G$ 成立当且仅当 $|V(G)| \geqslant 2$。

推论 2.14。 设 $G = G(A, B)$ 是一个部为 A 和 B的二部图。那么，以下陈述等价:

(i) G 是一个由 A 和 B构成的路径完备路径二部图。
(ii) G 是一个完全二部图。

证明。 (*i*) $\Rightarrow$(*ii*)。设 (*i*) 成立。为证明 (*ii*) 有效，只需注意到导出子图 $G[A]$ 和 $G[B]$ 的每个连通分支都是只有一个顶点的图，并应用定理 2.7。

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*)。设 (*ii*) 成立。则等式 $G' = G$ 成立。因此，根据推论 2.11， G 是路径二部的。现在由定理 2.7 可得 (*i*)。□

例 2.15. 设

$$\begin{aligned}
&x_1 = (1,0,0,0), \quad x_2 = (0,1,0,0), \quad x_3 = (0,0,1,0), \quad x_4 = (0,0,0,1),\\
&x_5 = (1,0,1,0), \quad x_6 = (1,1,0,0), \quad x_7 = (1,0,0,1), \quad x_8 = (0,0,0,0),\\
&x_9 = (0,1,1,0), \quad x_{10} = (0,1,0,1), \quad x_{11} = (0,0,1,1), \quad x_{12} = (0,1,1,1),\\
&x_{13} = (1,1,0,1), \quad x_{14} = (1,1,1,1), \quad x_{15} = (1,0,1,1), \quad x_{16} = (1,1,1,1).
\end{aligned}$$

定义图 $G = (V, E)$ 如下

$$\begin{aligned}
V(G) &:= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\} \text{ and}\\
E(G) &:= \{\{x_1, x_5\}, \{x_1, x_6\}, \{x_1, x_7\}, \{x_1, x_8\}, \{x_2, x_6\}, \{x_2, x_9\}, \{x_2, x_{10}\},\\
&\quad \{x_3, x_5\}, \{x_3, x_8\}, \{x_3, x_9\}, \{x_3, x_{11}\}, \{x_4, x_7\}, \{x_4, x_8\}, \{x_4, x_{10}\},\\
&\quad \{x_5, x_{14}\}, \{x_5, x_{15}\}, \{x_6, x_{13}\}, \{x_6, x_{14}\}, \{x_7, x_{15}\}, \{x_9, x_{12}\},\\
&\quad \{x_{10}, x_{12}\}, \{x_{11}, x_{12}\}, \{x_{13}, x_{16}\}, \{x_{14}, x_{16}\}, \{x_{15}, x_{16}\}\}.
\end{aligned}$$

那么，根据推论 2.12， G 是集合的路径二部图

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\} \text{ and } B = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\} \tag{2.33}$$

因为 G 是连通的，且 $A \cup B = V(G)$。

3. 路径邻近图

本节的第一个定理描述了半度量空间 (X, d) 中逼近对 (A, B) 的几何性质；对于这些点对，由 (1.7) 定义的图 G, $V(G) = X$ 和 $E(G)$ 都是路径二部图。下文中， A_0 和 B_0 分别是由 (1.3) 和 (1.4) 定义的 A 和 B 的子集。

定理 3.1。 设（X, d）是一个半度量空间，并设 A, B 是（X, d）的两个不交最佳逼近子集，使得

$$X = A \cup B. \tag{3.1}$$

考虑一个图 G，使得 $V(G) = X$，并且等价关系

$$(\{x, y\} \in E(G)) \Leftrightarrow (d(x, y) \leqslant \operatorname{dist}(A, B))$$

对所有不同的 x、 $y \in X$ 都成立。那么，当且仅当满足以下条件时， G 对 A 和 B 是路径二分的：

(i) 对于每个 $a \in A \setminus A_0$，都存在一个最佳邻近对$(a^*, b^*) \in A \times B$以及一条有限路径$(a_1, \ldots, a_n) \subseteq G[A]$，使得 $a_1 = a$, $a_n = a^*$.(ii) 对于每个 $b \in B \setminus B_0$，都存在一个最佳邻近对$(a^*, b^*) \in A \times B$以及一条有限路径$(b_1, \ldots, b_n) \subseteq G[B]$，使得 $b_1 = b$, $b_n = b^*$.

Proof. 设 G 为一个路径二部图。我们必须证明条件（i）–（ii）成立。

（i）。设 a 为 $A \setminus A_0$中的一个点。根据定义 1.16，存在一条 be-路径$P_{A,B} \subseteq G$，使得 $a \in V$（$P_{A,B}$）。再次利用该定义，我们可以找到 $a^* \in A$，使得 $a^* \in V$（$P_{A,B}$）。be-路径$P_{A,B}$ 是一个连通图，因此存在一条路径$P \subseteq P_{A,B}$，在$P_{A,B}$中连接 a和 a^*。要完成（i）的证明，只需证明 V（P）$\subseteq A$。反设存在一个点 $b^0 \in B$，使得 $b^0 \in V$（P）。由于 P是一条连接 a和 a^*的路径，因此存在路径 $P_1 \subseteq P$ 和 $P_2 \subseteq P$，使得

$$a, b^0 \in V(P_1), \quad b^0, a^* \in V(P_2), \quad P = P_1 \cup P_2 \quad \text{and} \quad V(P_1) \cap V(P_2) = \{b^0\}. \tag{3.2}$$

利用 (3.2)、 $V(P) \subseteq A \cup B$和 $a_1, a^* \in A$和 $b^0 \in B$，我们可以找到 $\{a^1, b^1\} \in E(P_1)$ 和 $\{a^2, b^2\} \in E(P_2)$，使得

$$a^1, a^2 \in A \quad \text{and} \quad b_1, b_2 \in B. \tag{3.3}$$

(3.2) 中的最后一个等式意味着 $\{a^1, b^1\}$ 和 $\{a^2, b^2\}$ 是 $P_{A,B}$的不同边，这与 (3.3) 一起，与 be-路径的定义矛盾。

(ii)。(ii) 的有效性可用类似方法证明。

现在假设 (i) 和 (ii) 成立。为证明 G 是由集合A 和 B 构成的路径二部图，我们考虑 G的任意一个连通分支 G_j，以及任意一点$p \in V(G_j)$。等式 (3.1) 意味着 $p \in A$ 或 $p \in B$。不失一般性，假设 $p \in A$。若 $p \in A_0$ 成立，则根据 (1.3)，存在 $q \in B$，使得 $d(p, q)$ =距A, B)。因此，根据 G的定义， $\{p, q\} \in E(G)$，进而由引理 1.10 得出 $q \in V(G_j)$。若 $p \in A \setminus A_0$，则根据条件 (i)，存在一条路径

$$P \subseteq G \tag{3.4}$$

将 p 与点 $p_0 \in A_0$连接。由于 G_j 是 G的一个连通分支，包含关系 (3.4) 根据引理 1.8 推出 $P \subseteq G_j$。因此，点 $p_0 \in A_0$ 也属于 $V(G_j)$。现在，按照上述方法，我们可以找到 $q \in B \cap V(G_j)$。因此，根据定理 2.10， G 是路径二分的。

□

推论3.2。设 G 是关于集合 A 和 B 的路径近似图，其中半度量 d 定义在集合 $X = A \cup B$上。则不等式

$$\operatorname{dist}(A, B) > 0 \tag{3.5}$$

成立，且存在点 $a_0 \in A$ 和 $b_0 \in B$ 使得

$$d(a_0, b_0) = \operatorname{dist}(A, B). \tag{3.6}$$

证明。由定义 1.17，对于集合 A 和 B 的每个路径近似最近图都是这些集合的路径二部图。因此，由定理 3.1，存在一个满足 (3.6) 的最佳邻近对 $(a_0,\ b_0) \in A \times B$。现由 (3.6) 和半度量的定义可得 (3.5)。□

定理 3.3。对于任意由集合 A 和 B 构成的路径二部图 G，存在一个度量 d onX：$= V(G)$，使得 G 关于度量 d 对 A 和 B 是路径近似的。

证明。设 G 是由集合 A 和 B 构成的路径二部图。我们必须找到一个度量 d: $X \times X \to [0, \infty[,\ X = A \cup B,$，使得 A 和 B 是 $(X,\ d)$ 的邻近子集，并且对于所有不同的 x、$y \in X$，式 (1.7) 成立。定义函数 d: $X \times X \to [0, \infty[$ 如下

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } \{x,y\} \in E(G) \\ 2 & \text{if } x \neq y \text{ and } \{x,y\} \notin E(G). \end{cases} \tag{3.7}$$

显然，d 是 X 上的一个度量。

根据定义 1.16，集合 A 和 B 非空。由于集合 $\{d(x,\ y)\colon\ x,\ y \in X\}$ 是有限的，X 的每个非空子集都是邻近集。因此，A 和 B 是 $(X,\ d)$ 中的邻近集。

我们声称

$$\operatorname{dist}(A,B) = 1. \tag{3.8}$$

事实上，由于 A 和 B 不相交且非空，(3.7) 和 (1.2) 给出不等式

$$\operatorname{dist}(A,B) \geqslant 1. \tag{3.9}$$

由于 G 是 A 和 B的路径二分图，因此存在一条 be-路径 $P_{A,\ B} \subseteq G$。因此，根据定义 1.16，存在 $\{a_0, b_0\} \in E(P_{A,\ B})$ 使得

$$A \cap \{a_0, b_0\} \neq \varnothing \neq B \cap \{a_0, b_0\}. \tag{3.10}$$

利用等式 $A \cap B = \varnothing$ 和 (3.10)，不失一般性地，我们可以假设

$$a_0 \in A \text{ and } b_0 \in B. \tag{3.11}$$

由 $\{a_0, b_0\} \in E(P_{A,\ B})$ 和 $P_{A,\ B} \subseteq G$ 可得

$$\{a_0, b_0\} \in E(G). \tag{3.12}$$

现在，(3.7) 和 (3.12) 蕴含 $d(a_0,\ b_0) = 1$，因此

$$\operatorname{dist}(A,B) \leqslant 1. \tag{3.13}$$

由 (3.11) 可得。现在，由 (3.9) 和 (3.13) 可得 (3.8)。为了完成证明，只需证明 (1.7) 对所有不同的 x、$y \in X$ 都成立。事实上，利用 (3.9)，我们得到等价关系

$$(\{x,y\} \in E(G)) \Leftrightarrow (d(x,y) = \operatorname{dist}(A,B))$$

对所有 x、 $y \in X$ 都成立。现在，等式 dist$(A, B) = 1$ 以及 (3.7) 蕴含了等价关系

$$(d(x, y) \leqslant \operatorname{dist}(A, B)) \Leftrightarrow (d(x, y) = \operatorname{dist}(A, B)),$$

对于任意一对不同的 x、 $y \in X$，。 □

例3.4。 设 X 为所有序列 $\widetilde{q} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ 的集合，其中每个 $\eta_i \in \{0, 1\}$，并令 A、 $B \subseteq X$ 以及图 G 如例 2.15 中所定义。用 $d(\widetilde{p}, \widetilde{q})$ 表示 $\widetilde{p}$ 与 $\widetilde{q} \in X$ 之间的汉明距离，

$$d(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = \sum_{i=1}^{4} |\mu_i - \eta_i|.$$

那么 (X, d) 是一个度量空间， A 和 B 是 (X, d) 的不交最佳逼近子集，等式 dist$(A, B) = 1$ 成立，图 G 的顶点 $\widetilde{p}$ 与 $\widetilde{q}$ 相邻当且仅当 $d(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = 1$，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{path}(G) = \{&(x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_1, x_7), (x_1, x_8), (x_1, x_{13}), (x_1, x_{14}), (x_1, x_{15}),\\ &(x_1, x_{16}), (x_2, x_6), (x_2, x_{13}), (x_2, x_{16}), (x_3, x_5), (x_3, x_8), (x_3, x_{14}),\\ &(x_3, x_{15}), (x_3, x_{16}), (x_4, x_7), (x_4, x_8), (x_4, x_{13}), (x_4, x_{15}), (x_4, x_{16}),\\ &(x_9, x_5), (x_9, x_6), (x_9, x_8), (x_9, x_{13}), (x_9, x_{14}), (x_9, x_{15}), (x_9, x_{16}),\\ &(x_{10}, x_6), (x_{10}, x_8), (x_{10}, x_{13}), (x_{10}, x_{14}), (x_{10}, x_{16}), (x_{11}, x_5), (x_{11}, x_8),\\ &(x_{11}, x_{14}), (x_{11}, x_{15}), (x_{11}, x_{16}), (x_{12}, x_5), (x_{12}, x_6), (x_{12}, x_7), (x_{12}, x_8),\\ &(x_{12}, x_{13}), (x_{12}, x_{14}), (x_{12}, x_{15}), (x_{12}, x_{16})\}.\end{aligned}$$

x_4， x_{15} 是 $\mathcal{B}_{path}(G)$ 的元素，具有以下 be-路径

$$(x_4, x_7, x_{15});\ (x_4, x_7, x_{13}, x_6, x_{14}, x_{16}, x_{15});\ (x_4, x_7, x_{13}, x_{16}, x_{15}) \text{ and}$$
$$(x_4, x_7, x_{13}, x_{16}, x_{14}, x_6, x_{13}, x_{16}, x_{15}).$$

对于汉明距离 d，图 G 相对于 A 和 B 是路径近似的。

例3.5。 设 G 是一个图，具有 $V(G) = A$，使得 $\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \in E(G)$ 当且仅当 $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$，其中 A 和 d 的定义与例3.4中相同。点 x_1 是 G 的一个孤立顶点（见图2）。因此，根据推论 2.12 和定理 3.3，二部图 G 不是路径近似的。

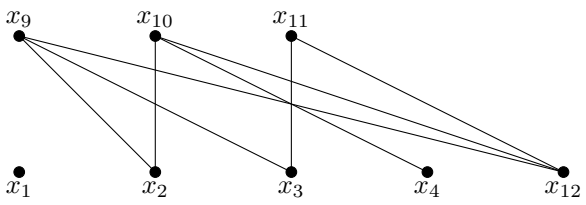


图2。点 x_1 是 G 的一个孤立顶点。

例3.6。 考虑度量空间 $(\mathbb{C}, d)$，其中 $\mathbb{C}$ 是全体复数 $z = x + iy$ 的集合。假设对于任意的 $z_1 = x_1 + iy_1$、 $z_2 = x_2 + iy_2$，都有

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}|[x_1] - [x_2]| + |[y_1] - [y_2]| + 1 & \text{if } z_1 \neq z_2 \\ 0 & \text{if } z_1 = z_2, \end{cases}$$

其中， $[x_i]([y_i])$ 是 x_i (y_i) 的整数部分。

记

$$A := \{n + ih \colon n \in \mathbb{N}^* \text{ and } h = 0\} \text{ and } B := \{m + ik \colon m \in \mathbb{N} \text{ and } k \in \mathbb{N}^*\},$$

其中， $\mathbb{N}^*$ 是所有非零自然数组成的集合。于是等式

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(A, B) &= \inf\{d(a, b) \colon (a, b) \in A \times B\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{2}|n - m| + |k| + 1 \colon (n, m, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\right\} = 2 \end{aligned}$$

成立。

由于集合的每个非空子集

$$\{d(z_1, z_2) \colon z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

具有最小元素，因此，度量空间 $(\mathbb{C}, d)$ 的每个非空 $S \subseteq \mathbb{C}$ 都是逼近的子集。于是，(A, B) 是 $(\mathbb{C}, d)$ 的一个逼近对。

定义一个图 G，使得 $V(G) = A \cup B$，并且对于 z_1， $z_2 \in A \cup B$，当且仅当 $\{z_1, z_2\} \in E(G)$ iff $0 < d(z_1, z_2) \leqslant 2$。容易证明：

- 对于所有 $n \in \mathbb{N}^*$， $d(n, n+1) = \frac{3}{2} <$ 距离(A, B)；
- 对于 $m \in \mathbb{N}^*$， $d(m, m + i) = 2 =$ 距离(A, B)；
- 对于所有 $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$， $d(m + ik, m + i(k+1)) = 2 =$ 距离(A, B)。

考虑 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $(m,\ k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$。假设 $n \leqslant m$。于是我们得到 be-路径P

$$\begin{aligned} V(P) &= \{n, n+1, \cdots, m-1, m, m+i, \cdots, m+i(k-1), m+ik\}, \\ E(P) &= \{\{n, n+1\}, \cdots, \{m-1, m\}, \{m, m+i\}, \cdots, \{m+i(k-1), m+ik\}\}. \end{aligned}$$

如果 $m < n$，那么我们得到如下 be-路径 P_1:

$$\begin{aligned} V(P_1) &= \{n, n+1, \cdots, m+1, m, m+i, \cdots, m+i(k-1), m+ik\}, \\ E(P_1) &= \{\{n, n+1\}, \cdots, \{m+1, m\}, \{m, m+i\}, \cdots, \{m+i(k-1), m+ik\}\}. \end{aligned}$$

因此， $\mathcal{B}_{path}(G) = \{(n,\ m+ik) :\ (n,\ m,\ k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\} = A \times B$，从而，图 G 对于 A 和 B 关于 d是路径完备且路径近似的。

下一个定理由推论 2.11 和定理 3.3 得出。

定理 3.7。 设 G 为一个图。则以下陈述等价:

(i) G 不含任何孤立顶点。(ii) G 是半度量空间的路径近似最近图。

(iii) G 是度量空间的路径近似最近图。

命题 3.8. 设具有固定部 A 和 B 的二部图 G 是半度量空间 (X, d) 的近似图，其中 $X = V(G) = A \cup B$。那么， G 是路径近似最近图，当且仅当等式成立

$$A_0 = A \quad and \quad B_0 = B \tag{3.14}$$

其中集合 A_0 和 B_0 分别由 (1.3) 和 (1.4) 定义。

证明。 根据定理 3.7，图 G 是路径近似的，当且仅当 $G' = G$ 成立。由于 G 是半度量空间 (X, d) 的近似集，定义 1.12 和定义 1.3 表明，等式 $G' = G$ 成立，当且仅当 (3.14) 有效。□

条件 $A_0 = A$ 和 $B_0 = B$ 保证存在一个半度量 ρ: $X \times X \to [0, \infty[$，使得 G 关于 ρ 是路径近似的。在下一个命题中，我们将描述空间 (X, d) 的几何性质，在这些性质下等式 $d = \rho$ 有可能成立。

命题 3.9。 设 $G = G(A, B)$ 是半度量空间 (X, d)的一个逼近图，且满足 $X = A \cup B$，并且 $G = G'$ 成立。则以下条件等价:

(i) G 关于半度量 d 对 A 和 B 是路径近似的。(ii) 不等式

$$d(x, y) > \operatorname{dist}(A, B) \tag{3.15}$$

在 $x \neq y$ 且 $x, y \in A$ 或 $x, y \in B$ 时成立。

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$。设 (i) 成立。由定义 1.14 可知,

$$\{x, y\} \notin E(G) \tag{3.16}$$

在 $x, y \in A$ 或 $x, y \in B$ 时成立。根据定义 1.17，对于不同点 $x,y \in X$，(3.16)成立当且仅当这些点满足(3.15)。条件(ii)由此得出。

$(ii) \Rightarrow (i)$ 的成立性可类似证明。 □

命题 3.9 有如下“超度量修正”。

定理 3.10. 对于每个图 G，以下条件等价:

(i) 对于 G 的每个顶点 v， G 中都存在唯一一个顶点 u，使得 u 和 v 相邻。(ii) 集合 $X = V(G)$ 上存在一个超度量 d，且 X 中存在不相交的邻近子集A、 B，使得 $X = A \cup B$; 并且 G 是二部图，其两部为 A 和 B，且相对于超度量 d 是路径近似的。

证明。 $(i) \Rightarrow (ii)$。令 G 满足条件 (i)。则 G 没有孤立顶点，因此,

$$V(G) = \bigcup_{\{x,y\} \in E(G)} \{x, y\} \tag{3.17}$$

成立。条件 (*i*) 还蕴含等式

$$\{x,y\}\cap\{u,v\}=\varnothing \tag{3.18}$$

只要 G 的 $\{x,y\}$ 和 $\{u,v\}$ 是不同的边。现在利用 (3.17)、(3.18) 以及选择公理，我们可以找到 V 的不相交子集 A 和 B（G），使得 V（G）$=A\cup B$ 且

$$\{u,v\}\cap A\neq\varnothing\neq\{u,v\}\cap B$$

对于每个 $\{u,v\}\in E$（G）均成立。记

$$X=A\cup B \tag{3.19}$$

并定义半度量 d：$X\times X\to[0,\infty[$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } x=y\\ 1 & \text{if } \{x,y\}\in E(G)\\ 2 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.20}$$

我们声称，d 是 X 上的超度量。根据定义，d 是超度量，当且仅当

$$d(x,y)\leqslant\max\{d(x,z),d(z,y)\} \tag{3.21}$$

对所有 x、y、$z\in X$ 均成立。容易看出，对于 X 上的任意半度量 d，若 $|\{x,y,z\}|\leqslant 2$，则 (3.21) 成立。设 X 的 x、y、z 为两两不同的点。如果 (3.21) 不成立，

$$d(x,y)>\max\{d(x,z),d(z,y)\},$$

于是，利用 (3.20)，我们得到 $d(x,y)=2$ 且

$$d(x,z)=d(z,y)=1. \tag{3.22}$$

由 (3.20) 和 (3.22) 可知，顶点 z 有两个不同的相邻顶点 x和 y，这与 (*i*) 矛盾。因此，d 是 X上的超度量。

根据构造，集合 A 和 B 不相交，此外，(3.19) 成立。由于集合 $\{d(x,y):x,y\in X\}$ 由 (3.20) 可知是有限的，因此这些集合也是 (X,d) 的邻近子集。由定义 1.11 可知，G 是一个二部图，其部为 A 和B。等式 (3.20) 以及集合 A 和 B 的定义还给出等式 dist$(A,B)=1$。现在，利用 (3.20) 和定义 1.17，我们可知 G 关于超度量 d是路径近似的。

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*)。设 G 满足条件 (*ii*)。则对于超度量空间 (X,d)，G 是路径近似的，并且因此根据定理 3.7，G 没有孤立顶点。假设存在 G 的一个顶点 v，使得

$$\{v,u\},\{v,w\}\in E(G) \tag{3.23}$$

对于某些不同的 $u,w\in V(G)$。根据条件 (*ii*)，G 是一个以 A和 B为部的二部图。因此，(3.23)意味着以下两者之一成立：

$$v\in A \text{ and } u,w\in B \tag{3.24}$$

or

$$u, w \in A \text{ and } v \in B. \tag{3.25}$$

假设 (3.24) 成立。利用强三角不等式和定义 1.14，我们得到

$$d(u, w) \leqslant \max\{d(u, v), d(v, w)\} = \operatorname{dist}(A, B).$$

因此，顶点 u 和 w 在 G 中相邻，

$$\{u, w\} \in E(G) \tag{3.26}$$

根据定义 1.17。现在只需注意到，由定义 1.14，(3.24) 蕴含 $\{u, w\} \notin E(G)$，这与 (3.26) 矛盾。因此，(3.24) 不成立。类似地，我们得到 (3.25) 也不成立。$(ii) \Rightarrow (i)$ 成立的证明完成。□

定理 3.10 特别蕴含以下结论。

推论3.11。 对于超度量空间 (X, d) 以及给定的 X 的不交最佳逼近子集 A 和 B，图 G 同时是近似图和路径近似图，当且仅当 G 的每个连通分支恰有 2 个顶点。

推论3.12。 设 G 是一个二部图，其部为 A 和 B。假设存在一个超度量 d: $X \times X \to [0, \infty[$，使得 G 关于 d 是路径近似的。那么以下条件等价:

(i) G是连通的。(ii) G是完全的。(iii) 由 G 导出的二部子图 $G[A, B]$ 是完全二分图。(iv) G是路径完备的。

资助

Oleksiy Dovgoshey 得到了芬兰科学与文学学会项目“几何函数论与图中域的内蕴度量”的部分资助。

参考文献

[1] V. Bilet、O. Dovgoshey 和 Y. Kononov。超度量与完全多部图。图论与应用，9(1):8，2022。[2] J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty。图论，数学研究生教材第244卷。Springer，柏林，2008。[3] K. Chaira、O. Dovgoshey 和 S. Lazaiz。超度量空间中的最佳近似对。*p*进数与超度量分析及应用，13(4):255–265，2021。[4] K. Chaira、O. Dovgoshey 和 S. Lazaiz。二部图与最佳近似对。数学科学杂志，264(4):369–388，2022。[5] O. Dovgoshey 和 R. Shanin。最佳邻近对的唯一性与半度量空间的刚性。不动点理论及应用杂志，25:34，2023。[6]T. D. Narang。超度量空间中的最佳逼近与最佳同时逼近。数学论证，29(2):445–450，1996。

[7] R. R. Phelps。凸集与最近点。美国数学会会刊，8(4):790–797，1957。[8] S. Reich。近似选择、最佳逼近、不动点与不变集。数学分析与应用杂志，62:104–113，1978。[9] V. M. Sehgal 和 S. P. Singh。关于最佳逼近的一个定理。数值泛函分析与优化，10:181–184，1989。[10] I. Singer。最佳逼近理论与泛函分析。载于应用数学*CBMS-NSF*地区会议丛书，工业与应用数学学会，第13卷，费城，1974。

KARIM CHAIRA
CRMEF，摩洛哥拉巴特-萨累-盖尼特拉阿拉勒·法西大道，
巴布·马迪纳特·阿尔·伊尔凡邮政信箱 6210，邮编 10000
电子邮箱：chaira_karim@yahoo.fr

Oleksiy Dovgoshey
乌克兰国家科学院应用数学与力学研究所函数论系，乌克兰斯洛维扬斯克，邮编 84100；以及图尔库大学数学与统计系，芬兰图尔库，邮编 Fin-20014电子邮箱：oleksiy.dovgoshey@gmail.com