arXiv:2303.02740v3 [math.PR] 1 Feb 2024

带半透界面的多元扩散的均匀化

OlgaAryasova*, Ilya Pavlyukevich*,†，以及 Andrey Pilipenko‡

2024年2月5日

摘要

我们研究了一个含局部时间项的随机微分方程组的均匀化问题，该方程组描述了存在具有斜向穿透特性的半透超平面界面时的多元扩散。我们证明该方程组存在唯一弱解，并确定界面间距趋于零时的弱极限。在极限情形下，奇异局部时间项消失，并产生额外的规则界面诱导漂移。

关键词： 局部时、均匀化、弱解的存在性与唯一性、半透界面、斜反射、弱收敛、鞅问题。

2010年数学主题分类： 60H10,60F05, 60H17,60J55

1 设定与主要结果

数学均匀化问题通常研究空间特征快速变化的系统的有效参数。其最初动机源于对具有周期结构的复合材料的分析。如果结构的周期与物体的宏观尺寸相比非常小，则可以将该材料视为一种新的均匀物质。一个典型例子是对材料热导率的分析。用数学术语来说，需要在某个区域 $-\nabla(A(x/\varepsilon)\nabla u^\varepsilon(x)) = f$ 中求解边值问题 $G \subseteq \mathbb{R}^n$，并在 ∂G上施加特定的边界条件。矩阵（热导率张量） $A(\cdot)$ 假定关于 $\mathbb{R}^n$具有周期性，参数 $\varepsilon > 0$ 很小。解 u^ε 给出了区域 G中的温度分布。均匀化的目标是确定有效热导率 A，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时有 $u^\varepsilon \to u$，其中 u 是均匀化方程 $A\Delta u = f$的解。关于这一主题已有大量文献，例如 Bensoussan 等人 [1], 、Jikov 等人 [16], 以及 Berdichevsky 等人 [2], ； Chechkin 等人 [5] 的研究则涵盖了分析方法和随机方法。

本文研究一种不同类型的随机均匀化问题：存在间距狭窄的半透性超平面界面时的扩散均匀化。简单来说，我们的模型可能会让人联想到一种热传导动力学：热量在由介质与极薄、渗透性各异的板片交错组成的箔材 复合材料中传导。在材料科学中，这类模型被称为增强材料，例如由铝箔增强的玻璃棉，Yüksel 等人 [43] 曾对此进行研究。

此类系统也出现在化学、生物学和物理学中，参见例如 Tanner [40], Dudko 等人 [6], Moutal 和 Grebenkov [26], Grebenkov [9], Ślęzak 和 Burov [37]。

*)通讯作者

*乌克兰国家科学院地球物理研究所，Palladin 大道32号，03680 基辅-142，乌克兰和 耶拿弗里德里希·席勒大学数学研究所，恩斯特-阿贝广场2号，07743 耶拿，德国和 伊戈尔·西科尔斯基基辅理工学院，别列斯泰斯基大道37号，03056，基辅，乌克兰； oaryasova@gmail.com

†耶拿弗里德里希·席勒大学数学研究所，恩斯特-阿贝广场2号，07743 耶拿，德国；ilya.pavlyukevich@uni-jena.de

‡乌克兰国家科学院数学研究所，捷列先科夫斯卡街3号，01601，基辅，乌克兰和伊戈尔·西科尔斯基基辅理工学院，别列斯泰斯基大道37号，03056，基辅，乌克兰； pilipenko.ay@gmail.com

为严格表述该模型，我们引入一个小参数 $\varepsilon > 0$，并假设状态空间$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 0$ 被可数多个超平面界面（膜）划分为若干层

$$\{a_k^\varepsilon\} \times \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

使得族 $\{a_k^\varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}$ 没有聚点。

我们寻找一个 $n+1$ 维连续强马尔可夫过程 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon) = (X^\varepsilon,\ Y^{\varepsilon,\,1},\ \ldots,\ Y^{\varepsilon,\,n})$,$X^\varepsilon \in \mathbb{R}$, $Y^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$，其行为如下。

在各膜 $\{\{a_k^\varepsilon\} \times \mathbb{R}^n\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 之间，过程 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 是一个通常的扩散过程，其漂移向量为$(b^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$，扩散矩阵为 $(\sigma_l^i)_{0\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant m}$, $m \geqslant 1$。过程 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 在时刻 τ到达膜 $\{a_k^\varepsilon\} \times \mathbb{R}^n$ 上的点$(a_k^\varepsilon,\ y)$ 后，会重新开始，并沿方向 $\pm(1,\ \theta(a_k^\varepsilon,\ y))$“离开”该膜，其穿透概率称为 $\frac{1}{2}(1 \pm \varepsilon\beta(a_k^\varepsilon,\ y))$。

We look 对于这样的过程 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 作为随机微分方程（SDE）的解

$$\begin{aligned}
X_t^\varepsilon &= x + \sum_{l=1}^m \int_0^t \sigma_l^0(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_s^l + \int_0^t b^0(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon \int_0^t \beta(a_k^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}L_s^{a_k^\varepsilon}(X^\varepsilon), \\
Y_t^{\varepsilon,i} &= y^i + \sum_{l=1}^m \int_0^t \sigma_l^i(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_s^l + \int_0^t b^i(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon \int_0^t \beta(a_k^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\theta^i(a_k^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}L_s^{a_k^\varepsilon}(X^\varepsilon), \\
&\quad i = 1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $W = (W^1,\ \ldots\ldots,\ W^m)$ 是标准的 m 维布朗运动，$L^a(X^\varepsilon)$ 是 X^ε 在 $a \in \mathbb{R}$ 处的对称局部时（精确定义见本节末尾）。

$n = 0$ 的情形对应于一维扩散 X^ε，其点界面 $\{a_k^\varepsilon\}$ 位于实数轴上。

本文旨在确立该系统弱解的存在性与唯一性，并研究当 $\varepsilon \to 0$ 时该系统的均匀化 极限。 (1.2)

关于系统 (1.2) 中的系数以及膜的位置，我们作出以下假设。用 C_b^k、 $k \geqslant 1$ 表示具有 k 次连续导数的有界函数空间，且其导数有界。

假设 A：

$\mathbf{A}_{\mathrm{coeff}}$:

$$\beta, b^i, \theta^i, \sigma_l^i \in C_b^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad i = 0, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, m. \tag{1.3}$$

$\mathbf{A}_a$：这些点 $\{a_k^\varepsilon\}$ 满足

$$a_k^\varepsilon = \int_0^{\varepsilon k} d(x)\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

其中 $d \in C_b^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 使得 $\inf_{x\in\mathbb{R}} d(x) > 0$。

$\mathbf{A}_\Sigma$：矩阵 $\Sigma = (\Sigma^{ij})_{0\leqslant i,\ j\leqslant n}$ 其元素为

$$\Sigma^{ij}(x, y) = \sum_{l=1}^m \sigma_l^i(x, y)\sigma_l^j(x, y) \tag{1.5}$$

是一致正定的。

本文的主要结果表述如下定理。

定理 1.1. 设假设 **A** 成立。那么存在足够小的 $\varepsilon_0 \in (0, 1]$，使得对所有$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$，系统 (1.2) 都有唯一的弱解 $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$，且该解是一个强马尔可夫过程。

注 1.2. 参数 $\varepsilon > 0$ 较小这一条件至关重要。首先，由于数值 $\frac{1}{2}(1 \pm\varepsilon\beta(x, y))$ 表示穿过膜的穿透概率，因此必须要求$\varepsilon\|\beta\|_\infty \leqslant 1$；否则，即使在最简单的一维偏斜布朗运动情形下，解 $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$ 也不存在，参见 Harrison 和 Shepp [14]。为了证明解在每个膜 a_k^ε邻域内的唯一性，还需要对 ε 的大小作出另一项限制，参见第 2 节。众所周知，解的强马尔可夫性质需要唯一性。

定理 1.3. 设假设 **A** 成立，且 $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$ 是 (1.2)的唯一弱解。当 $\varepsilon \to 0$ 时，弱收敛

$$(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) \Rightarrow (X, Y) \tag{1.6}$$

在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n+1})$ 中成立，其中 (X, Y) 是该随机微分方程的一个（唯一）弱解

$$\begin{aligned} X_t &= x + \sum_{l=1}^{m} \int_0^t \sigma_l^0(X_s, Y_s)\,\mathrm{d}W_s^l + \int_0^t \Big(b^0(X_s, Y_s) + \beta(X_s, Y_s) \frac{\Sigma^{00}(X_s, Y_s)}{d(X_s)} \Big)\,\mathrm{d}s, \\ Y_t^i &= y^i + \sum_{l=1}^{m} \int_0^t \sigma_l^i(X_s, Y_s)\,\mathrm{d}W_s^l + \int_0^t \Big(b^i(X_s, Y_s) + \beta(X_s, Y_s)\theta^i(X_s, Y_s) \frac{\Sigma^{00}(X_s, Y_s)}{d(X_s)} \Big)\,\mathrm{d}s. \qquad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

如我们所见，极限过程是一个扩散过程，其扩散矩阵与过程 $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$ 的扩散矩阵 $\{\sigma_l^i\}$ 相同。半透膜，即式 **(1.2)** 中的局部时间项，会转化为常规的附加漂移；正如以下例子所示，这种漂移能够显著改变扩散的行为。

Ex例 1.4. 设 $n = 1$。我们考虑一个二维随机微分方程

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x + W_t^1 - \int_0^t Y_s^0\,\mathrm{d}s, \\ Y_t^0 &= y + W_t^2 + \int_0^t X_s^0\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{1.8}$$

该方程描述了恒定磁场中受外部随机电场 (W^1, W^2) 作用的带电粒子的速度，例如，参见 Chechkin 等人 [4]。粒子的随机轨迹趋向于沿正方向绕 0 旋转，见图 1（左）。

我们在模型中加入空间膜（直线），使其等距分布在 x-点 $a_k^\varepsilon = k\varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$ 处，从而满足 $d(x) \equiv 1$。假设在原点周围的某个大圆盘内，膜的渗透性特征 β 和 θ 由下式给出

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \frac{2y^3}{\gamma + y^2}, \\ \theta(x, y) &= -\frac{x^3 y}{(\gamma^2 + x^2)(\gamma + y^2)}, \quad \gamma = 10^{-2}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

在该球体外部，我们以使其满足假设 **A** 的方式定义它们。然后在极限 $\varepsilon \to 0$ 下，带有局部时 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 的扩散收敛到一个扩散 $(X,\ Y)$，其求解具有额外界面诱导漂移的随机微分方程：

$$\begin{aligned} X_t &= x + W_t^1 - \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{2Y_s^3}{\gamma + Y^2}\,\mathrm{d}s, \\ Y_t &= y + W_t^2 + \int_0^t X_s\,\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{2X_s^3 Y_s^4}{(\gamma^2 + X_s^2)(\gamma + Y_s^2)^2}\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.10}$$

在原点附近的一个大球内，新的漂移近似等于 $(Y,\ -X)$，即均匀化粒子的旋转方向现在为负，见图 1（右）。

本文的新颖之处，除随机均匀化定理 1.3 外，还在于证明了多元 情形下的存在性与唯一性定理 1.1。

在一维情形下，关于含局部时的随机微分方程的存在性与唯一性的首个结果由 [14] 得出。他们证明，偏斜布朗运动是随机微分方程 $X_t = x + W_t + (2\beta - 1)L_t^0(X)$ 对于 $|\beta| \leqslant 1$ 的唯一强解。在证明中，他们利用速度测度，将原方程经过正则变换，转化为一个等价方程；该方程具有局部常系数，且不含局部时。后来，Le Gall [20] 将这一方法推广，并将其应用于未知过程具有局部时的一般一维随机微分方程。所得随机微分方程的系数可能不连续，但不涉及局部时。一般理论见 Engelbert 和 Schmidt [7]，另见 Lejay [21]。

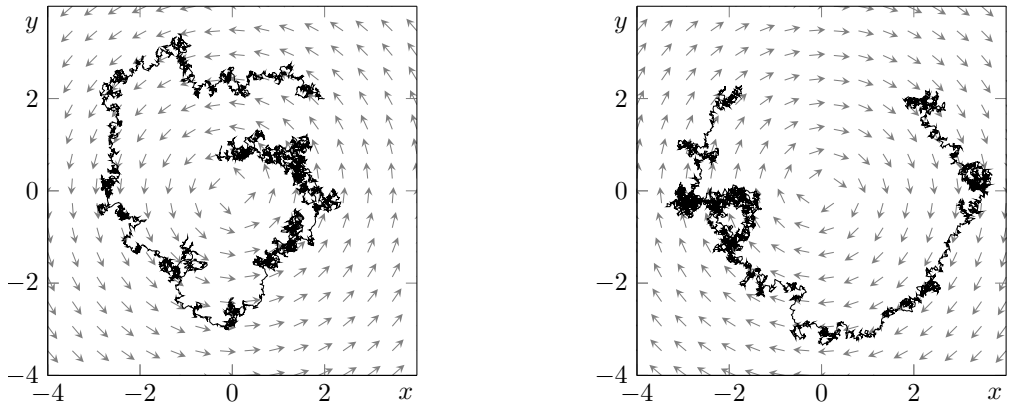


图1：无膜时“底层”扩散过程 $(X^0,\ Y^0)$（左）与极限均匀化扩散过程 $(X,\ Y)$（右）的样本路径。具有穿透概率 $\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\beta(x,\ y)$ 和穿透方向 $(1,\ \theta(x,\ y))$ 的膜产生了附加漂移，使扩散过程的旋转方向发生反转。两个样本均从点 $(2,\ 2)$出发。

在高维情形下，带反射的扩散过程（即具有 $\varepsilon\beta(x$局部时 $y)=1$）得到了较为充分的研究。其存在性问题通常用鞅问题（例如，见 Stroock and Varadhan [38]）或 Skorokhod问题（例如，见 Tanaka [39], 和 Lions and Sznitman [22]）来表述。Zaitseva [44] 研究了多维布朗运动在超平面处具有斜偏性的随机微分方程，并假设偏斜系数和反射方向为常数。在这一条件下，切向坐标不依赖于法向坐标。因此，可以通过标准论证得到解的强存在唯一性。遗憾的是，这种方法不适用于斜反射情形，因为各坐标必然相互依赖。

具有非恒定系数的斜偏扩散的一般情形要复杂得多，其存在性与唯一性问题仍未解决。Portenko [33, 34] 将具有半透膜的扩散过程的存在性与唯一性问题表述为一个抛物型拼接边界问题。借助势理论方法，人们证明了此类问题的解定义了一个算子半群，该半群对应于一个扩散特征以广义函数意义存在的过程。Portenko and Kopytko [32] 对超平面上的半透膜斜反射扩散也得到了相同结果。然而，这些研究并不能直接推出所构造的过程是具有局部时间项的随机微分方程的（唯一）解。

我们还提及 Ouknine 等人 [28] 和 Ramirez [35]的研究，他们考察了在一维和二维中具有无穷多个界面的扩散过程。

关于均匀化问题，除了本文开篇引用的研究外，以下作者还通过解析方法和随机方法研究了（正则）扩散过程的均匀化：Pardoux[29], Pavliotis and Stuart [30], Hairer and Pardoux [13], Makhno [23]。

关于具有界面的扩散过程的均匀化，相关结果相当有限。Weinryb [41]在假设相应鞅问题的解存在且唯一的条件下，研究了直线或圆上带有可渗透膜的平面扩散过程的周期均匀化。Hairer and Manson [11, 12, 10] 研究了具有一个界面的扩散过程的周期均匀化。Makhno [24, 25] 和 Krykun [18]得到了具有界面的一维扩散过程的极限定理。

证明思路。 证明的主要思路是将解 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 分解为若干片段，这些片段分别位于相邻膜连续两次到达之间的随机时间区间内。借助多元坐标变换 $(U^\varepsilon,\ V^\varepsilon)=(F^\varepsilon(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon),\ G(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon))$，可将系统 (1.2) 变换为在每个膜的邻域内不含局部时的不连续系数随机微分方程等价系统，从而得到系统 (1.2) 的存在性与唯一性结果（定理 1.1）。唯一性可由 Gao 的结果推出，而全局解则通过将这些解拼接起来得到（见第 2 节）。

为证明收敛定理 1.3，我们注意到，具有局部时的扩散的基本动力学

由嵌入马尔可夫链捕捉，该链由膜的命中时刻处的取值组成 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$。

为了得到极限扩散的无穷小算子 $\mathcal{L}$ 的公式，我们研究嵌入式马尔可夫链的伪特征算子

$$\mathcal{L}^\varepsilon f(x,y) := \frac{\mathbf{E}_{x,y} f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}) - f(x,y)}{\mathbf{E}_{x,y}\tau^\varepsilon}, \quad x \in \{a^\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

其中，τ^ε 是首次命中相邻膜的时刻。

为简便起见，设 $n = 1$。对函数 $f \in C^3_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 应用泰勒公式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{x,y} f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}) - f(x,y) &= f_x(x,y)\mathbf{E}_{x,y}(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - x) + f_y(x,y)\mathbf{E}_{x,y}(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - y)\\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(x,y)\mathbf{E}_{x,y}(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - x)^2 + f_{xy}(x,y)\mathbf{E}_{x,y}(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - x)(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - y)\\ &+ \frac{1}{2} f_{yy}(x,y)\mathbf{E}_{x,y}(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - y)^2 + \mathcal{O}\Big(\mathbf{E}_{x,y}|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - y|^3 + \mathbf{E}_{x,y}|Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - y|^3\Big)\end{aligned} \tag{1.12}$$

我们将能够计算从当前条带 $\mathbf{E}\tau^\varepsilon$退出的平均退出时间的精细渐近行为，其阶为 ε^2，以及矩 $\mathbf{E}_{x,y}(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - x)$、$\mathbf{E}_{x,y}(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - y)$等，并具有精度 $\mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta})$,$\delta \in (0,1)$（见引理 3.5 和第 3.4 节）。这些估计将通过如下方式推导：用在初始点 (x,y)处“冻结”系数的扩散过程，近似不含局部时的变换后的扩散过程。

决定极限扩散 (X,Y)的极限二阶生成元 $\mathcal{L}$（见方程 (1.7)）是序列 $\{\mathcal{L}^\varepsilon\}$ 在 $\varepsilon \to 0$时的逐点极限。

定理 1.3 的收敛证明包括：a) 建立族 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 的弱相对紧性这一标准步骤（第 4.1 节）；以及 b) 验证任意极限过程 $(X,\ Y)$满足该（适定的）鞅问题

$$\mathbf{E}\Big[f(X_t,Y_t) - f(X_s,Y_s) - \int_s^t \mathcal{L} f(X_u,Y_u)\,\mathrm{d}u \Big| \mathscr{F}_s\Big] = 0, \quad f \in C^3_b(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}). \tag{1.13}$$

记号。本文中，$|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的欧几里得距离，$n \geqslant 1$ 也表示矩阵 A的弗罗贝尼乌斯范数，即 $|A| = (\sum_{i,\ j} a_{ij}^2)^{1/2}$；$\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ 表示实值、向量值或矩阵值函数 f的上确界范数；$x^+ = \max\{x, 0\}$。向量值函数 f的雅可比矩阵记为Df。特别地，对于光滑的 f，有 $|f(x) - f(y)| \leqslant \|Df\|_\infty |x - y|$。

有时，常数 $C > 0$ 表示一个不依赖于 ε的通用常数；在同一串不等式中，其取值可能有所变化。

若 $|f(\varepsilon)| \leqslant C|g(\varepsilon)|$ 对充分小的 $\varepsilon > 0$ 成立，我们记作 $f(\varepsilon) \lesssim g(\varepsilon)$。对于任意 $k \geqslant 1$，若 $f(\varepsilon) \lesssim \varepsilon^k$ 成立，我们也记作 $f(\varepsilon) \lesssim \varepsilon^\infty$。

我们还回顾一下，连续实值半鞅 X 在 $a \in \mathbb{R}$ 处的对称局部时 $L^a(X)$ 是满足下式的唯一非减过程：

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\,\mathrm{d}X_s + L^a_t(X), \tag{1.14}$$

其中

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0,\\ 0, & x = 0,\\ -1, & x < 0,\end{cases} \tag{1.15}$$

例如参见 Revuz 和 Yor 的《第六章》 [36]。局部时 $L^a(X)$ 满足

$$L^a_t(X) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t \mathbb{I}(|X_s - a| \leqslant \delta)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s. \tag{1.16}$$

致谢： O.A. 和 I.P. 感谢德国研究协会（资助编号 PA 2123/7-1）和大众汽车基金会（资助编号 9B946）提供的经费支持。O.A. 和 A.P. 获得了亚历山大·冯·洪堡基金会的部分资助，该资助属于波茨坦大学与乌克兰国家科学院数学研究所之间的研究组联结合作项目奇异扩散：解析与随机方法。作者感谢匿名审稿人提供的有益评审意见。

2 存在性与唯一性。定理 1.1 的证明

首先，我们考虑膜附近的系统 (1.2)。不失一般性，固定 $k=0$ 使得 $a_0^\varepsilon \equiv 0$。由于膜外的 $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$ 是具有正则系数的扩散过程，我们假设初始值为 $x=0$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$。稍微滥用一下记号，我们将 $\beta(y) := \beta(0,y)$, $\theta(y) := \theta(0,y)$ 记作，并寻求以下含一个膜的随机微分方程的解 $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$：

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon &= \sum_{l=1}^m \int_0^t \sigma_l^0(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_s^l + \int_0^t b^0(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \varepsilon \int_0^t \beta(Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}L_s^0(X^\varepsilon), \\ Y_t^{\varepsilon,i} &= y^i + \sum_{l=1}^m \int_0^t \sigma_l^i(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_s^l + \int_0^t b^i(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s + \varepsilon \int_0^t \beta(Y_s^\varepsilon)\theta^i(Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}L_s^0(X^\varepsilon), \quad i=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们构造将 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 变换为不含局部时间项的扩散的变换。令 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $\varepsilon\|\beta\|_\infty \leqslant 1/2,$，并令

$$B^\varepsilon(y) := \frac{1-\varepsilon\beta(y)}{1+\varepsilon\beta(y)}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

我们有

$$|B^\varepsilon(y) - 1| \leqslant 4\varepsilon\|\beta\|_\infty, \tag{2.3}$$

$$\|\nabla B^\varepsilon\|_\infty \leqslant 8\varepsilon\|\nabla\beta\|_\infty. \tag{2.4}$$

定义函数

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(x,y) &= x\mathbb{I}_{(-\infty,0)}(x) + xB^\varepsilon(y)\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) = x + x^+(B^\varepsilon(y)-1); \\ G(x,y) &:= y - x\theta(y). \end{aligned} \tag{2.5}$$

显然，变换 $(x,\ y) \mapsto (F^\varepsilon(x,\ y),\ G(x,\ y))$ 不必是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的一一双射。然而，对于任意固定的 $A>0$ 以及充分小的 $\varepsilon>0$，该映射在“薄”条带 $[-A\varepsilon,\ A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$ 中是单射。

证明将应用 Hadamard 全局反函数定理，见 Krantz 和 Parks [17]中的定理 6.2.4。

定理 2.1（Hadamard）。设 $N \geqslant 1$, $H\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 为一个 C^2 映射。假设 $H(0)=0$，且 H 的雅可比行列式在每一点都不为零。最后，假设

$$\|(DH)^{-1}(\cdot)\|_\infty < \infty. \tag{2.6}$$

那么 H 是一个 C^2 微分同胚。

引理 2.2。对于任意固定的 $A>0$ 和足够小的 $\varepsilon>0$，变换 $(F^\varepsilon, G)|_{[-A\varepsilon,\ A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n}$ 可以延拓为一个 *Lipschitz* 连续同胚 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$，且它在每个半空间 $\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ 上都是一个 C^2-微分同胚。此外，对于足够小的 $\varepsilon>0$

$$[-A'\varepsilon, A'\varepsilon]\times\mathbb{R}^n \subseteq (F^\varepsilon, G)([-A\varepsilon, A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n) \subseteq [-A''\varepsilon, A''\varepsilon]\times\mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

对于某个 $0 < A' \leqslant A''$。

证明。我们将如下把在 (2.5) 中定义的映射 $(F^\varepsilon,\ G)$ 从 $(0,\ A\varepsilon)\times\mathbb{R}^d$ 延拓到 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$。令$g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 满足：对于 $|x| \leqslant A\varepsilon,\ g_\varepsilon(x) = x$；对于 $|x| \geqslant 2A\varepsilon,\ g_\varepsilon(x) = 0$；并且

$$\|g_\varepsilon\|_\infty \leqslant 2A\varepsilon, \quad \|g_\varepsilon'\| \leqslant 2A. \tag{2.8}$$

~ ~对于每个 $\varepsilon>0$，考虑函数 $H^\varepsilon := (F^\varepsilon,\ G^\varepsilon)$ 其中

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^\varepsilon(x,y) &= x + g_\varepsilon(x)(B^\varepsilon(y)-1), \\ \widetilde{G}^\varepsilon(x,y) &= y - g_\varepsilon(x)\theta(y). \end{aligned} \tag{2.9}$$

那么 H^ε 是一个 C^2 函数，它在 $(0,\ A\varepsilon)\times\mathbb{R}^n$ 上与 $(F^\varepsilon,\ G)$ 重合，并且在 $(\mathbb{R}\backslash(-2A\varepsilon,\ 2A\varepsilon))\times$上是恒等映射$\mathbb{R}^d$。此外，我们有

$$\begin{aligned} H^\varepsilon([0,\infty)\times\mathbb{R}^n) &\subseteq [0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ H^\varepsilon((-\infty,0)\times\mathbb{R}^n) &\subseteq (-\infty,0)\times\mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.10}$$

若 ε 足够小。注意，$\sup_{x,\ y}|DH^\varepsilon(x,\ y)|<\infty$。因此，若证明 $\inf_{x,\ y}\det DH^\varepsilon(x,\ y)>0$，则由 Hadamard定理可知 H 是 $(0,\ \infty)\times\mathbb{R}^n$ 上的 C^2-微分同胚。然而，这由 (2.3)、(2.4)、(2.8) 以及以下观察即可推出：

$$DH^\varepsilon(x,y)=\begin{pmatrix} 1+g_\varepsilon'(x)(B^\varepsilon(y)-1) & g_\varepsilon(x)DB^\varepsilon(y)\\ -g_\varepsilon'(x)\theta(y) & \mathrm{Id}-g_\varepsilon(x)D\theta(y)\end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

包含关系

$$H^\varepsilon([0,A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n)\subseteq[0,A''\varepsilon]\times\mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

当 A'' 足够大时显然成立。

我们来验证包含关系

$$[0,A'\varepsilon]\times\mathbb{R}^n\subseteq H^\varepsilon([0,A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n) \tag{2.13}$$

当 $A'>0$ 较小时。

~注意，若 $x>A\varepsilon$，则 $F^\varepsilon(x,\ y)>A\varepsilon(1-2\varepsilon\|\beta\|_\infty)$。因此

$$[0,A\varepsilon(1-2\varepsilon\|\beta\|_\infty)]\times\mathbb{R}^n\cap H^\varepsilon([A\varepsilon,\infty)\times\mathbb{R}^n)=\varnothing. \tag{2.14}$$

由于 $H^\varepsilon([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)=[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$，因此当 $\varepsilon\|\beta\|_\infty<1/4.$ 时，我们有 (2.13)，其中 $A'=A/2$

将 (F^ε,G) 延拓到左半空间的构造方法类似。 □

我们记

$$\begin{aligned} U^\varepsilon &:= F^\varepsilon(X^\varepsilon,Y^\varepsilon),\\ V^\varepsilon &:= G(X^\varepsilon,Y^\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.15}$$

设 $(\Phi^\varepsilon,\Psi^\varepsilon):=(F^\varepsilon,G)^{-1}$ 是某个条带 $[-A\varepsilon,A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$ 中的逆映射，即 .,

$$\begin{aligned} X^\varepsilon &= \Phi^\varepsilon(U^\varepsilon,V^\varepsilon),\\ Y^\varepsilon &= \Psi^\varepsilon(U^\varepsilon,V^\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.16}$$

我们令 $\tau^\varepsilon:=\inf\{t\geqslant 0\colon\ X_t^\varepsilon\notin(-A\varepsilon,A\varepsilon)\}$，并令 $\tilde\tau^\varepsilon:=\inf\{t\geqslant 0\colon\ (U_t^\varepsilon,V_t^\varepsilon)\notin(F^\varepsilon,G)((-A\varepsilon,A\varepsilon)\times\mathbb{R}^n)\}$。

命题 2.3. 过程 $(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)_{t\leqslant\tau^\varepsilon}$ 是(2.1) 的（弱）解，当且仅当 $(U^\varepsilon,V^\varepsilon)_{t\leqslant\tilde\tau^\varepsilon}$ 是.....的（弱）解

$$\begin{aligned} U_t^\varepsilon &= \int_0^t\Big[b^0(\cdot,\cdot)+\phi^{\varepsilon,0}(\cdot,\cdot)\Big]\circ\Big(\Phi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon),\Psi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\sum_{l=1}^m\int_0^t\Big[\sigma_l^0(\cdot,\cdot)+\phi_l^{\varepsilon,0}(\cdot,\cdot)\Big]\circ\Big(\Phi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon),\Psi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}W_s^l,\\ V_t^{\varepsilon,i} &= y^i+\int_0^t\Big[b^i(\cdot,\cdot)-\theta^i(\cdot)b^0(\cdot,\cdot))-\sum_{j=1}^n\theta^i_{y^j}(\cdot)\Sigma^{i0}(\cdot,\cdot)+\psi^i(\cdot,\cdot)\Big]\circ\Big(\Phi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon),\Psi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\sum_{l=1}^m\int_0^t\Big[\sigma_l^i(\cdot,\cdot)-\theta^i(\cdot)\sigma_l^0(\cdot,\cdot)-\psi_l^i(\cdot,\cdot)\Big]\circ\Big(\Phi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon),\Psi^\varepsilon(U_s^\varepsilon,V_s^\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}W_s^l, \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中

$$\begin{aligned}
\phi^{\varepsilon,0}(x,y) &= (B^\varepsilon(y)-1)b^0(x,y)\mathbb{I}(x>0) + \sum_{i=1}^n B^\varepsilon_{y^i}(y)\Big(x^+ b^i(x,y) + \Sigma^{0i}(x,y)\mathbb{I}(x>0)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n x^+ B^\varepsilon_{y^iy^j}(y)\Sigma^{ij}(x,y), \\
\phi^{\varepsilon,0}_l(x,y) &= (B^\varepsilon(y)-1)\mathbb{I}(x>0)\sigma^0_l(x,y) + x^+\sum_{i=1}^n B^\varepsilon_{y^i}(y)\sigma^i_l(x,y), \\
\psi^i(x,y) &= -\sum_{j=1}^n x\theta^i_{y^j}(y)b^j(x,y) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n x\theta^i_{y^jy^k}(y)\Sigma^{jk}(x,y), \\
\psi^i_l(x,y) &= -\sum_{j=1}^n x\theta^i_{y^j}(y)\sigma^j_l(x,y), \quad i=1,\dots,n,\ l=1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

证明。 回忆田中公式

$$(X^\varepsilon_t)^+ = \int_0^t \Big(\mathbb{I}(X^\varepsilon_s>0) + \frac{1}{2}\mathbb{I}(X^\varepsilon_s=0)\Big)\,\mathrm{d}X^\varepsilon_s + \frac{1}{2}L^0_t(X^\varepsilon). \tag{2.19}$$

因此，对 $B^\varepsilon(Y^\varepsilon)-1$ 应用伊藤公式并使用乘积伊藤公式可得

$$\begin{aligned}
U^\varepsilon_t &= \int_0^t \Big(b^0+\phi^{\varepsilon,0}\Big)(X^\varepsilon_s,Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}s + \sum_{l=1}^m\int_0^t \Big(\sigma^0_l+\phi^{\varepsilon,0}_l\Big)(X^\varepsilon_s,Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}W^l_s, \\
V^{\varepsilon,i}_t &= y^i + \int_0^t \Big(b^i - \theta^i b^0 - \sum_{j=1}^n \theta^i_{y^j}\Sigma^{0j} + \psi^i\Big)(X^\varepsilon_s,Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{l=1}^m\int_0^t \Big(\sigma^i_l - \theta^i\sigma^0_l + \psi^i_l\Big)(X^\varepsilon_s,Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}W^l_s,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

表示式 (2.17) 立即成立。注意，系统 (2.17) 的所有系数在半空间 $\mathbb{R}_\pm\times\mathbb{R}^n$ 上光滑，在超平面 $U=0$ 上不连续。为将系统 (2.17) 转化为 (2.1)，我们应用 Peskir [31] 证明的带局部时的伊藤公式。

□

注 2.4. 当 ε 足够小时，函数 $\phi^{\varepsilon,0}$, $\phi^{\varepsilon,0}_l$, ψ^i, ψ^i_l 满足

$$\begin{aligned}
&|\phi^{\varepsilon,0}|, |\phi^{\varepsilon,0}_l| \leqslant C\varepsilon(1+|x|), \\
&|\psi^i|, |\psi^i_l| \leqslant C|x|.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

特别地，在条带 $[-A\varepsilon, A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$, $A>0$ 中，对于某个 $C>0$，它们以 $C\varepsilon$ 为界。

定理 *1.1* 的证明。我们考虑某个条带 $[-A''\varepsilon, A''\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$ 中的系统 (2.17)，将 (2.17) 中的所有系数延拓为在半空间 $\{u<0\}$ 和 $\{u>0\}$ 上有界且光滑、但在 $\{u=0\}$ 上可能不连续的函数。注意，$(U^\varepsilon, V^\varepsilon)$ 的扩散矩阵有界，在$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$上一致椭圆，在半空间 $\{u<0\}$ 和 $\{u>0\}$ 上连续，但在超平面$\{0\}\times\mathbb{R}^n$上可能不连续。因此，根据 Krylov [19]，系统 (2.17) 存在弱解。在一维情形下，即 $n=0$，唯一性可由 Nakao [27] 以及 Yamada 和 Watanabe [42] 的定理得到。在二维情形下，即 $n=1$，唯一性同样由 Krylov [19] 得到。对于 $n\geqslant 2$，唯一性由 Gao [8] 中的定理 1.1 得到。因此，在离开该条带之前，此解唯一确定，且与系数在整个空间上的延拓无关。由于所有系数均有界，过程 V^ε 以概率 1 不会在有限时间内爆炸。因此，过程 $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$ 也唯一确定，直至离开膜周围某个条带的时刻。将各条带中的解拼接起来，即可得到全局解。由唯一性可知，此解是强马尔可夫过程。

最后，我们必须验证解不会在有限时间内爆炸。这一点将在后面的引理 4.2 中证明。□

3 一张膜周围的动力学

我们考虑过程 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 在条带 $(a^\varepsilon_{k-1},\ a^\varepsilon_{k+1})$, $k\in\mathbb{Z}$ 内的动力学。为明确起见，本节假设 $k=0$, $a^\varepsilon_0=0$，并记 $a^\varepsilon_\pm=\pm a^\varepsilon_{\pm1}>0$, $d:=d(0)$, $d':=d'(0)$。此外，我们在所有函数中省略自变量 $x=0$，即写作 $\beta(y):=\beta(0,\ y)$, $b^i(y):=b^i(0,\ y)$ 等。

本节旨在获得出现在（1.12）中的期望的精确矩估计。这将使我们能够证明，在某种意义下，（1.11）中定义的算子 $\mathcal{L}^\varepsilon$ 逼近极限扩散的生成元。

由于假设 $\mathbf{A}_a$，以下展开式成立：

$$\begin{aligned} a^\varepsilon_+ &= d\varepsilon+\frac{1}{2}d'\varepsilon^2+r^+(\varepsilon),\\ a^\varepsilon_- &= d\varepsilon-\frac{1}{2}d'\varepsilon^2+r^-(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，$|r^\pm(\varepsilon)|\lesssim\varepsilon^3$（在所有膜上一致），且 $\varepsilon>0$ 足够小。特别地,

$$a^\varepsilon_++a^\varepsilon_-=2d\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^3), \tag{3.2}$$

令

$$\breve{A}=\frac{1}{2}\inf_x d(x)\quad\text{and}\quad\widehat{A}=2\sup_x d(x) \tag{3.3}$$

我们可以得出，当 $\varepsilon>0$ 较小时

$$[-\breve{A}\varepsilon,\breve{A}\varepsilon]\times\mathbb{R}^n\subseteq[a^\varepsilon_-,a^\varepsilon_+]\times\mathbb{R}^n\subseteq[-\widehat{A}\varepsilon,\widehat{A}\varepsilon]\times\mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

3.1 坐标变换 $(\Phi^\varepsilon,\Psi^\varepsilon)$的性质

设 $(\Phi^\varepsilon,\Psi^\varepsilon)$ 是 (2.5) 中定义的 (F^ε,G) 的逆映射。

引理 3.1. 设 $A>0$ 固定。当 $\varepsilon>0$ 足够小时，在条带 $[-A\varepsilon,A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$ 中以下一阶展开成立：

$$\Phi^\varepsilon(u,v)=\begin{cases}u,\quad (u,v)\in[-A\varepsilon,0]\times\mathbb{R}^n,\\ u\Big(1+2\varepsilon\beta(v)\Big)+h^\varepsilon_1(u,v),\quad (u,v)\in(0,A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n,\end{cases} \tag{3.5}$$

$$\Psi^\varepsilon(u,v)=v+\theta(v)u+h^\varepsilon_2(u,v),\quad (u,v)\in[-A\varepsilon,A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

其中

$$|h^\varepsilon_1(u,v)|\lesssim\varepsilon^3, \tag{3.7}$$

$$|h^\varepsilon_2(u,v)|\lesssim\varepsilon^2 \tag{3.8}$$

在条带 $(u,v)\in[-A\varepsilon,A\varepsilon]\times\mathbb{R}^n$ 中一致成立。

证明。 1. 设 $u\in[-A\varepsilon,0]$。则

$$\begin{aligned} u&=x,\\ v&=y-\theta(y)x. \end{aligned} \tag{3.9}$$

因此，$\Psi^\varepsilon=\Psi$ 是方程 $\Psi-\theta(\Psi)u-v=0$的（唯一）解。这表明 s

$$|\Psi-v|\leqslant\|\theta\|_\infty|u| \tag{3.10}$$

and

$$\Psi-v-\theta(v)u=\Big(\theta(\Psi)-\theta(v)\Big)u. \tag{3.11}$$

So

$$|\Psi-v-\theta(v)u|\leqslant\|D\theta\|_\infty|\Psi-v||u|\leqslant\|D\theta\|_\infty\|\theta\|_\infty u^2\lesssim\varepsilon^2. \tag{3.12}$$

2. 类似地，令 $u>0$。则 $u=xB^\varepsilon(y)$ 和 Ψ^ε 满足

$$\Psi^\varepsilon-\frac{\theta(\Psi^\varepsilon)}{B^\varepsilon(\Psi^\varepsilon)}u-v=0. \tag{3.13}$$

因此

$$|\Psi^\varepsilon-v|\leqslant\Big\|\frac{\theta}{B^\varepsilon}\Big\|_\infty|u| \tag{3.14}$$

and

$$\Big|\Psi^\varepsilon-v-\frac{\theta(v)}{B^\varepsilon(v)}u\Big|\leqslant\Big|\frac{\theta(\Psi^\varepsilon)}{B^\varepsilon(\Psi^\varepsilon)}-\frac{\theta(v)}{B^\varepsilon(v)}\Big|\cdot|u|\leqslant\Big\|D\Big(\frac{\theta}{B^\varepsilon}\Big)\Big\|_\infty\cdot\Big\|\frac{\theta}{B^\varepsilon}\Big\|_\infty\cdot u^2. \tag{3.15}$$

考虑到 (2.2)、(2.3) 和 (2.4)，我们得到，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，$\|\theta/B^\varepsilon\|_\infty\leqslant 2\|\theta\|_\infty$ 且 $\|D(\theta/B^\varepsilon)\|_\infty\leqslant 2\|D\theta\|_\infty+\|\theta\|_\infty$。由于 $|1/B^\varepsilon(v)-1|\leqslant 4\varepsilon\|\beta\|_\infty$，我们有

$$\Big|\Psi^\varepsilon-v-\theta(v)u\Big|\leqslant\Big|\Psi^\varepsilon-v-\frac{\theta(v)}{B^\varepsilon(v)}u\Big|+\Big|\Big(\frac{1}{B^\varepsilon(v)}-1\Big)\theta(v)u\Big|\leqslant C(u^2+|u|\varepsilon)\lesssim\varepsilon^2. \tag{3.16}$$

利用前面的估计，我们得到

$$\begin{aligned}\Big|\Phi^\varepsilon-u(1+2\varepsilon\beta(v))\Big|&=|u|\Big|\frac{1}{B^\varepsilon(\Psi^\varepsilon)}-1-2\varepsilon\beta(\Psi^\varepsilon)\Big|+2\varepsilon|u||\beta(\Psi^\varepsilon)-\beta(v)|\\&\leqslant 3|u|\varepsilon^2\|\beta\|_\infty+2\varepsilon|u|\|\nabla\beta\|_\infty|\theta(v)u+h_2^\varepsilon(u,v)|\lesssim\varepsilon^3.\end{aligned} \tag{3.17}$$

□

3.2 条带出射时间的粗略估计

Let

$$\tau^\varepsilon=\inf\{t\geqslant 0\colon X_t^\varepsilon\notin(-a_-^\varepsilon,a_+^\varepsilon)\}. \tag{3.18}$$

为了研究离开条带的情形，我们使用变换 (2.20)，其中 U^ε，V^ε 是不含局部时间项的伊藤过程。

我们将 (2.20) 中得到的过程 $(U_t^\varepsilon,\ V_t^\varepsilon)_{t\leqslant\tau^\varepsilon}$ 延拓至 $t\geqslant 0$，定义为

$$\begin{aligned}U_t^\varepsilon&=\int_0^t\Big(b^0+\phi^{\varepsilon,0}\Big)(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon},Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\,\mathrm{d}s+\sum_{l=1}^m\int_0^t\Big(\sigma_l^0+\phi_l^{\varepsilon,0}\Big)(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon},Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\,\mathrm{d}W_s^l\\V_t^{\varepsilon,i}&=y^i+\int_0^t\Big(b^i-\theta^ib^0-\sum_{j=1}^n\theta^i_{y^j}\Sigma^{0j}+\psi^i\Big)(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon},Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\,\mathrm{d}s\\&\quad+\sum_{l=1}^m\int_0^t\Big(\sigma_l^i-\theta^i\sigma_l^0+\psi_l^i\Big)(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon},Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\,\mathrm{d}W_s^l.\end{aligned} \tag{3.19}$$

借助（3.5），我们有

$$\begin{aligned}&X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}=-a_-^\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}=-a_-^\varepsilon,\\&X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}=a_+^\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad a_+^\varepsilon=\Phi^\varepsilon(U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon},V^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})=U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}(1+2\varepsilon\beta(V^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}))+h_1^\varepsilon(U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon},V^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}).\end{aligned} \tag{3.20}$$

$\check{}$ $\hat{}$回顾（3.3）、（3.4）中的常数 A和 A，并定义停时

$$\begin{aligned}\check\tau^\varepsilon&=\inf\Big\{t\geqslant 0\colon U_t^\varepsilon\notin(-\check A\varepsilon,\check A\varepsilon)\Big\},\\\hat\tau^\varepsilon&=\inf\Big\{t\geqslant 0\colon U_t^\varepsilon\notin(-\hat A\varepsilon,\hat A\varepsilon)\Big\}\end{aligned} \tag{3.21}$$

使得

$$\check\tau^\varepsilon\leqslant\tau^\varepsilon\leqslant\hat\tau^\varepsilon. \tag{3.22}$$

引理 3.2. 存在 γ、 $A \in (0、\ \infty)$，使得对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \mathbf{E}_{0,y} \mathrm{e}^{\gamma\varepsilon^{-2}\tau^\varepsilon} \leqslant A. \tag{3.23}$$

因此，

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \mathbf{E}_{0,y} (\tau^\varepsilon)^k \lesssim \varepsilon^{2k}, \quad k \geqslant 1. \tag{3.24}$$

此外，

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n} \mathbf{E}_{0,y} \tau^\varepsilon \gtrsim \varepsilon^2. \tag{3.25}$$

证明。 1. 我们使用 (3.22)，并证明对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$，都有 $\mathbf{E}_{0,y}\mathrm{e}^{\gamma\hat{\tau}^\varepsilon/\varepsilon^2} \leqslant A$。考虑李雅普诺夫函数

$$h^\varepsilon(t,x) = \mathrm{e}^{\frac{\gamma t}{\varepsilon^2}}(\alpha\varepsilon^2 - x^2). \tag{3.26}$$

对于 $\alpha > \widehat{A}^2$, $h^\varepsilon(t,x) \geqslant 0$ 在 $x \in [-\widehat{A}\varepsilon, \widehat{A}\varepsilon]$ 上。

我们有

$$\begin{aligned} \partial_t h^\varepsilon(t,x) &= \frac{\gamma}{\varepsilon^2}\mathrm{e}^{\frac{\gamma t}{\varepsilon^2}}(\alpha\varepsilon^2 - x^2), \\ \partial_x h^\varepsilon(t,x) &= -2\mathrm{e}^{\frac{\gamma t}{\varepsilon^2}} x, \\ \partial_{xx} h^\varepsilon(t,x) &= -2\mathrm{e}^{\frac{\gamma t}{\varepsilon^2}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

对每个 $N \geqslant 1$，伊藤公式给出：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0,y} h(\hat{\tau}^\varepsilon \wedge N, U^\varepsilon_{\hat{\tau}^\varepsilon\wedge N}) = \alpha\varepsilon^2 &+ \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\hat{\tau}^\varepsilon\wedge N} \frac{\gamma}{\varepsilon^2}\mathrm{e}^{\frac{\gamma s}{\varepsilon^2}}(\alpha\varepsilon^2 - |U^\varepsilon_s|^2)\,\mathrm{d}s \\ &- \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\hat{\tau}^\varepsilon\wedge N} 2\mathrm{e}^{\frac{\gamma s}{\varepsilon^2}} U^\varepsilon_s \Big(b^0(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}) + \phi^{\varepsilon,0}(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\Big)\,\mathrm{d}s \\ &- \sum_{l=1}^m \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\hat{\tau}^\varepsilon\wedge N} \mathrm{e}^{\frac{\gamma s}{\varepsilon^2}} \Big(\sigma^0_l(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}) + \phi^{\varepsilon,0}_l(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\Big)^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.28}$$

根据假设 $\mathbf{A}_\Sigma$ 和注 2.4，存在 $\delta_1, \delta_2 \in (0,\infty)$ 使得

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^m (\sigma^0_l(x,y) + \phi^{\varepsilon,0}_l(x,y))^2 \geqslant \delta_1, \\ &|b^0(x,y) + \phi^{\varepsilon,0}(x,y)| \leqslant \delta_2 \quad \text{ on } (x,y) \in [-\widehat{A}\varepsilon, \widehat{A}\varepsilon] \times \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3.29}$$

由于 $|U^\varepsilon_s| \leqslant A\varepsilon$ 在 $s \leqslant \hat{\tau}^\varepsilon$ 上，因此我们有

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\alpha\varepsilon^2 - |U^\varepsilon_s|^2) - 2U^\varepsilon_s(b^0(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}) + \phi^{\varepsilon,0}(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})) - \sum_{l=1}^m \Big(\sigma^0_l(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}) + \phi^{\varepsilon,0}_l(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\Big)^2 \\ &\qquad \leqslant \gamma\alpha + \widehat{A}\varepsilon\delta_2 - \delta_1 \leqslant -\frac{\delta_1}{2} \end{aligned} \tag{3.30}$$

对某个较小的 $\gamma > 0$ 以及所有较小的 $\varepsilon > 0$ 均成立。

因此

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \alpha\varepsilon^2 - \frac{\delta_1}{2}\mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\hat{\tau}^\varepsilon\wedge N} \mathrm{e}^{\frac{\gamma s}{\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}s \leqslant \alpha\varepsilon^2 - \frac{\delta_1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\mathbf{E}_{0,y}\mathrm{e}^{\frac{\gamma(\hat{\tau}^\varepsilon\wedge N)}{\varepsilon^2}} + \frac{\delta_1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\gamma}, \\ &\mathbf{E}_{0,y}\mathrm{e}^{\frac{\gamma(\hat{\tau}^\varepsilon\wedge N)}{\varepsilon^2}} \leqslant \frac{2\alpha\gamma}{\delta_1} + 1 =: A, \quad N \geqslant 1, \end{aligned} \tag{3.31}$$

由单调收敛定理， $\hat{\tau}^\varepsilon$ 的结论成立。利用 $x^k \leqslant \mathrm{e}^x k!$ ，我们得到

$$\mathbf{E}_{0,y}(\hat{\tau}^\varepsilon)^k \leqslant A\frac{k!}{\gamma^k}\varepsilon^{2k} \lesssim \varepsilon^{2k}. \tag{3.32}$$

2. 对 $|U^\varepsilon|^2$ 应用伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}\breve{A}\varepsilon^2 \leqslant \mathbf{E}_{0,y}|U^\varepsilon_{\breve{\tau}^\varepsilon}|^2 &= 2\mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\breve{\tau}^\varepsilon} U^\varepsilon_s\Big(b^0(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}) + \phi^{\varepsilon,0}(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\Big)\,\mathrm{d}s \\ &+ \sum_{l=1}^m \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\breve{\tau}^\varepsilon}\Big(\sigma^0_l(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}) + \phi^{\varepsilon,0}_l(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\Big)^2\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant 2\breve{A}\varepsilon\delta_2\mathbf{E}_{0,y}\breve{\tau}^\varepsilon + 3\sum_{l=1}^m \|\sigma^0_l\|^2_\infty\cdot\mathbf{E}_{0,y}\breve{\tau}^\varepsilon\end{aligned} \tag{3.33}$$

并且$\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon$ 的下界随之得到。 □

引理 3.3. 对于每个足够小的 $k\geqslant 1$ 和 $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|V^\varepsilon_t - y|^{2k} &\lesssim \varepsilon^{2k}, \\ \mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|Y^\varepsilon_t - y|^{2k} &\lesssim \varepsilon^{2k}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

特别地，对于任意 $\delta\in(0、\ 1)$ 以及任意 $n\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|V^\varepsilon_t - y|\geqslant\varepsilon^{1-\delta}\Big) &\lesssim \varepsilon^\infty, \\ \mathbf{P}\Big(\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|Y^\varepsilon_t - y|\geqslant\varepsilon^{1-\delta}\Big) &\lesssim \varepsilon^\infty.\end{aligned} \tag{3.35}$$

证明。 回忆

$$\begin{aligned}V^{\varepsilon,i}_t = y^i &+ \int_0^t\Big(b^i - \theta^i b^0 - \sum_{j=1}^n \theta^i_{y^j}\Sigma^{0j} + \psi^i\Big)(X^\varepsilon_s, Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \sum_{l=1}^m\int_0^t\Big(\sigma^i_l - \theta^i\sigma^0_l + \psi^i_l\Big)(X^\varepsilon_s, Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}W^l_s.\end{aligned} \tag{3.36}$$

With 借助 Doob 不等式和 (2.20)，对于每个 $i=1,\dots,n$ 以及 $k\geqslant$，我们估计 1:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\widehat{\tau}^\varepsilon}(V^{\varepsilon,i}_t - y^i)^{2k} \\ &\quad\leqslant (m+1)^{2k-1}\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\widehat{\tau}^\varepsilon}\Big|\int_0^t\Big(b^i - \theta^i b^0 - \sum_{j=1}^n\theta^i_{y^j}\Sigma^{0j} + \psi^i\Big)(X^\varepsilon_s, Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}s\Big|^{2k} \\ &\quad+ (m+1)^{2k-1}\sum_{l=1}^m\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\widehat{\tau}^\varepsilon}\Big|\int_0^t\Big(\sigma^i_l - \theta^i\sigma^0_l + \psi^i_l\Big)(X^\varepsilon_s, Y^\varepsilon_s)\,\mathrm{d}W^l_s\Big|^{2k} \\ &\quad\leqslant C_1\mathbf{E}\Big[(\widehat{\tau}^\varepsilon)^{2k-1}\int_0^{\widehat{\tau}^\varepsilon}\Big((b^i - \theta^i b^0 - \sum_{j=1}^n\theta^i_{y^j}\Sigma^{0j} + \psi^i)(X^\varepsilon_s, Y^\varepsilon_s)\Big)^{2k}\,\mathrm{d}s\Big] \\ &\quad+ C_2\sum_{l=1}^m\mathbf{E}\Big[\int_0^{\widehat{\tau}^\varepsilon}\Big((\sigma^i_l - \theta^i\sigma^0_l + \psi^i_l)(X^\varepsilon_s, Y^\varepsilon_s)\Big)^2\,\mathrm{d}s\Big]^k \\ &\quad\leqslant C_3\mathbf{E}_{0,y}\Big[(\widehat{\tau}^\varepsilon)^k + (\widehat{\tau}^\varepsilon)^{2k}\Big] \leqslant C_4\varepsilon^{2k}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

由马尔可夫不等式，对于任意 $k\geqslant 1$ 和 $\delta\in(0,1)$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{0,y}\Big(\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|V^\varepsilon_t - y|\geqslant\varepsilon^{1-\delta}\Big) &= \mathbf{P}_{0,y}\Big(\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|V^\varepsilon_t - y|^{2k}\geqslant\varepsilon^{2k-2k\delta}\Big) \\ &\leqslant \varepsilon^{-2k+2k\delta}\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|V^\varepsilon(t) - y|^{2k} \leqslant C_5\varepsilon^{2k\delta}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

选取足够大的 k ，可以使右端项的阶任意小。其
估 i计 for Y^ε f ollow from L 3 1 引理..... □

3.3 X^ε的精确估计

回顾式 (3.19)，并将过程 U^ε 分解为以下和

$$U_t^\varepsilon = R_t + A_t^\varepsilon + M_t^\varepsilon, \tag{3.39}$$

with

$$R_t = b^0(y)t + \sum_{l=1}^m \sigma_l^0(y)W_t^l, \tag{3.40}$$

$$A_t^\varepsilon = \int_0^t \Big(\partial_x b^0(s)X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon} + \sum_{i=1}^n \partial_{y^i} b^0(s)\cdot(Y^{\varepsilon,i}_{s\wedge\tau^\varepsilon} - y^i) + \phi^{\varepsilon,0}(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\Big)\,\mathrm{d}s, \tag{3.41}$$

$$M_t^\varepsilon = \sum_{l=1}^m \int_0^t \Big(\partial_x \sigma_l^0(s)X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon} + \sum_{i=1}^n \partial_{y^i}\sigma_l^0(s)(Y^{\varepsilon,i}_{s\wedge\tau^\varepsilon} - y^i) + \phi_l^{\varepsilon,0}(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon})\Big)\,\mathrm{d}W_s^l, \tag{3.42}$$

其中各项 $\partial_x b^0(s)$、 $\partial_{y^i} b^0(s)$ 等由假设 **A** 有界。在表示式 (3.39) 中，过程 R 是带漂移的布朗运动，而 A^ε 和 M^ε 在 $t\in[0,\ \tau^\varepsilon]$ 上是“小量”，如下一个引理所示。

引理 3.4。当 $\varepsilon>0$ 足够小时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|A^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}| &\lesssim \varepsilon^3,\\ \mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|M^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}| &\lesssim \varepsilon^2.\end{aligned} \tag{3.43}$$

证明。为得到这些估计，我们使用注 2.4、引理 3.2 和引理 3.3，以及柯西–施瓦茨不等式：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|A^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}| &\leqslant \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(|\partial_x b^0(s)X^\varepsilon_s| + \sum_{i=1}^n|\partial_{y^i}b^0(s)\cdot(Y^{\varepsilon,i}_s - y^i)| + |\phi^{\varepsilon,0}(X^\varepsilon_s, Y^\varepsilon_s)|\Big)\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon\Big(\varepsilon + \sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|Y^\varepsilon_t - y|\Big)\\ &\leqslant C\varepsilon\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \Big(\mathbf{E}_{0,y}|\tau^\varepsilon|^2\cdot\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|Y^\varepsilon_t - y|^2\Big)^{1/2}\lesssim\varepsilon^3.\end{aligned} \tag{3.44}$$

为了估计鞅 M^ε，我们应用 Doob 不等式：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|M^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^2 &\leqslant \sum_{l=1}^m\mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\partial_x\sigma_l^0(s)X^\varepsilon_s + \sum_{i=1}^n\partial_{y^i}\sigma_l^0(s)\cdot(Y^{\varepsilon,i}_s - y^i) + \phi_l^{\varepsilon,0}(X^\varepsilon_{s\wedge\tau^\varepsilon}, Y^\varepsilon_s)\Big)^2\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant C\varepsilon^2\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \Big(\mathbf{E}_{0,y}|\tau^\varepsilon|^2\cdot\mathbf{E}_{0,y}\sup_{t\leqslant\tau^\varepsilon}|Y^\varepsilon_t - y|^4\Big)^{1/2}\lesssim\varepsilon^4.\end{aligned} \tag{3.45}$$

□

我们将证明，X^ε 从 $(-a^\varepsilon_-,\ a^\varepsilon_+)$ 的退出概率与带漂移的布朗运动 R 从修正区间 $(-a^\varepsilon_-,\ a^\varepsilon_+(1-2\varepsilon\beta(y)))$ 的退出概率一致，精度达到$\mathcal{O}(\varepsilon^{2-\delta})$ 阶，并以$\mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta})$阶的精度计算 $X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}$ 的矩。请注意，在转变为过程 U^ε 时消失的局部时间项，现在会对退出区间的不对称性产生贡献。

引理 3.5。对于任意 $\delta\in(0,\ 1)$，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，有

$$p^\varepsilon_\pm := p^\varepsilon_\pm(y) = \mathbf{P}_{0,y}\Big(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} = \pm a^\varepsilon_\pm\Big) = \frac12 \pm \frac12\Big(\frac{b^0(y)d}{\Sigma^{00}(y)} + \beta(y) - \frac{d'}{2d}\Big)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{2-\delta}), \tag{3.46}$$

$$\mathbf{E}_{0,y}X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} = \Big(\beta(y)d + \frac{b^0(y)d^2}{\Sigma^{00}(y)}\Big)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}), \tag{3.47}$$

$$\mathbf{E}_{0,y}\,(X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}})^2 = d^2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}), \tag{3.48}$$

$$\mathbf{E}_{0,y}\tau^{\varepsilon} = \frac{d^2}{\Sigma^{00}(y)}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{3.49}$$

证明。 1. 一方面，我们有

$$\mathbf{E}_{0,y}U^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} = -a^{\varepsilon}_{-}p^{\varepsilon}_{-} + a^{\varepsilon}_{+}\mathbf{E}_{0,y}[B^{\varepsilon}(Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}})\mathbb{I}(X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} = a^{\varepsilon}_{+})]. \tag{3.50}$$

映射 $(\varepsilon, Y) \mapsto B^{\varepsilon}(Y)$ 的泰勒公式给出

$$B^{\varepsilon}(Y) = 1 - 2\varepsilon\beta(y) + r(\varepsilon, Y - y), \tag{3.51}$$

其中余项估计为

$$|r(\varepsilon, Y - y)| \leqslant C(\varepsilon^2 + \varepsilon|Y - y| + \varepsilon|Y - y|^2) \tag{3.52}$$

对某个 $C > 0$ 成立。因此我们得到

$$\mathbf{E}_{0,y}\Big[B^{\varepsilon}(Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}})\mathbb{I}(X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} = a^{\varepsilon}_{+})\Big] = p^{\varepsilon}_{+}(1 - 2\varepsilon\beta(y)) + \mathbf{E}_{0,y}\Big[r(\varepsilon, Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y)\mathbb{I}(X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} = a^{\varepsilon}_{+})\Big] \tag{3.53}$$

而对于 $\delta \in (0,1)$ ，利用引理 3.3，我们估计

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbf{E}_{0,y}\Big[r(\varepsilon, Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y)\mathbb{I}(X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} = a^{\varepsilon}_{+})\Big]\Big| &\leqslant \mathbf{E}_{0,y}|r(\varepsilon, Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y)| = \mathbf{E}_{0,y}\Big[|r(\varepsilon, Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y)|\mathbb{I}(|Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y| < \varepsilon^{1-\delta})\Big] \\
&\quad + \mathbf{E}_{0,y}\Big[|r(\varepsilon, Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y)|\mathbb{I}(|Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y| \geqslant \varepsilon^{1-\delta})\Big] \\
&\lesssim C\varepsilon(\varepsilon^2 + \varepsilon^{2-\delta} + \varepsilon^{3-2\delta}) \\
&\quad + \varepsilon\mathbf{E}_{0,y}\Big[|Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y|\mathbb{I}(|Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y| \geqslant \varepsilon^{1-\delta})\Big] + \varepsilon\mathbf{E}_{0,y}\Big[|Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y|^2\mathbb{I}(|Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} - y| \geqslant \varepsilon^{1-\delta})\Big] \\
&\lesssim \varepsilon^{3-\delta} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\infty}) \lesssim \varepsilon^{3-\delta}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

因此，利用 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{0,y}U^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} &= -a^{\varepsilon}_{-}p^{\varepsilon}_{-} + a^{\varepsilon}_{+}p^{\varepsilon}_{+}\Big(1 - 2\varepsilon\beta(y)\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}) \\
&= -(1 - p^{\varepsilon}_{+})\Big(d\varepsilon - \frac{d'\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big) + p^{\varepsilon}_{+}\Big(d\varepsilon + \frac{d'\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big)\Big(1 - 2\varepsilon\beta(y)\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}) \\
&= 2p_{+}d\varepsilon - d\varepsilon + \frac{d'\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

2. 另一方面，考虑到 (3.39) 和 (3.41)，我们估计

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{0,y}U^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} &= \mathbf{E}_{0,y}R_{\tau^{\varepsilon}} + \mathbf{E}_{0,y}A^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}} \\
&= \mathbf{E}_{0,y}R_{\rho^{\varepsilon}} + \Big(\mathbf{E}_{0,y}R_{\tau^{\varepsilon}} - \mathbf{E}_{0,y}R_{\rho^{\varepsilon}}\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{3.56}$$

其中

$$\rho^{\varepsilon} := \inf\Big\{t \geqslant 0\colon R_t \notin (-a^{\varepsilon}_{-}, a^{\varepsilon}_{+}(1 - 2\varepsilon\beta(y)))\Big\}. \tag{3.57}$$

为了计算 ate $\mathbf{E}_{0,\ y}R_{\rho^{\varepsilon}}$，使用 Borodin 和 Salminen [第 309 页上的显式公式 3.0.4 (a) 3]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{0,y}(R_{\rho^{\varepsilon}} = a^{\varepsilon}_{-}) &= \mathrm{e}^{-\frac{b^0(y)a^{\varepsilon}_{-}}{\Sigma^{00}(y)}}\frac{\sinh\Big(a^{\varepsilon}_{+}(1 - 2\varepsilon\beta(y))\frac{|b^0(y)|}{\Sigma^{00}(y)}\Big)}{\sinh\Big((a^{\varepsilon}_{+}(1 - 2\varepsilon\beta(y)) + a^{\varepsilon}_{-})\frac{|b^0(y)|}{\Sigma^{00}(y)}\Big)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{b^0(y)d}{\Sigma^{00}(y)} - \beta(y) + \frac{d'}{2d}\Big)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

该公式给出了渐近行为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}R_{\rho^\varepsilon} &= -a_-^\varepsilon \mathbf{P}_{0,y}(R_{\rho^\varepsilon}=a_-^\varepsilon)+a_+^\varepsilon(1-2\varepsilon\beta(y))\mathbf{P}_{0,y}(R_{\rho^\varepsilon}=a_+^\varepsilon(1-2\varepsilon\beta(y)))\\ &= \frac{b^0(y)d^2}{\Sigma^{00}(y)}\varepsilon^2+\mathcal{O}(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{3.59}$$

平均值 $\mathbf{E}_{0,y}\rho^\varepsilon$ 借助 Borodin 和 Salminen[3] 第 309 页上的公式 3.0.1 得到:

$$\mathbf{E}_{0,y}\rho^\varepsilon = \frac{d^2}{\Sigma^{00}(y)}\varepsilon^2+\mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{3.60}$$

注意

$$|\mathbf{E}_{0,y}R_{\tau^\varepsilon}-\mathbf{E}_{0,y}R_{\rho^\varepsilon}|\leqslant\|b\|_\infty\mathbf{E}_{0,y}|\tau^\varepsilon-\rho^\varepsilon|. \tag{3.61}$$

因此，根据引理 3.6（见下文），我们得到估计

$$|\mathbf{E}_{0,y}R_{\tau^\varepsilon}-\mathbf{E}_{0,y}R_{\rho^\varepsilon}|\lesssim\varepsilon^3. \tag{3.62}$$

结合 (3.56) 和 (3.59)，得到 (3.46)，从而立即得到 (3.47) 和 (3.48)。(3.49) 的渐近行为由 (3.60) 和引理 3.6 得出。□

引理 3.6. 当 $\varepsilon>0$ 足够小时，我们有

$$\mathbf{E}_{0,y}|\tau^\varepsilon-\rho^\varepsilon|\lesssim\varepsilon^3. \tag{3.63}$$

证明. 1. 设 $\widetilde{a}_+^\varepsilon=a_+^\varepsilon(1-2\varepsilon\beta(y))$ 且

$$h(u)=(\widetilde{a}_+^\varepsilon-u)(u+a_-^\varepsilon), \tag{3.64}$$

因此 $h'(u)=-2u+\widetilde{a}_+^\varepsilon-a_-^\varepsilon$, $h''(u)=-2$。在事件 $\{\rho^\varepsilon\leqslant\tau^\varepsilon\}$ 上应用伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}\Big[h(U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)\Big|\mathscr{F}_{\rho^\varepsilon}\Big] &= h(U_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)+\mathbf{E}_{0,y}\Big[\int_{\rho^\varepsilon}^{\tau^\varepsilon}(-2U_s^\varepsilon+a_+^\varepsilon-a_-^\varepsilon)(b^0(X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)+\phi^{\varepsilon,0}(X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon))\,\mathrm{d}s\Big|\mathscr{F}_{\rho^\varepsilon}\Big]\\ &\quad-\sum_{l=1}^m\mathbf{E}_{0,y}\Big[\int_{\rho^\varepsilon}^{\tau^\varepsilon}\Big(\sigma_l^0(X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)+\phi_l^{\varepsilon,0}(X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)\Big)^2\,\mathrm{d}s\Big|\mathscr{F}_{\rho^\varepsilon}\Big]\\ &\leqslant h(U_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)+C_1\varepsilon\mathbf{E}_{0,y}\Big[\tau^\varepsilon-\rho^\varepsilon\Big|\mathscr{F}_{\rho^\varepsilon}\Big]-\delta_1\mathbf{E}_{0,y}\Big[\tau^\varepsilon-\rho^\varepsilon\Big|\mathscr{F}_{\rho^\varepsilon}\Big]\end{aligned} \tag{3.65}$$

其中我们用到了 $\sum_{l=1}^m\sigma_l^0(x,\ y)^2\geqslant\delta_1>0$, $|b^0(x,\ y)+\phi^{\varepsilon,\ 0}(x,\ y)|\leqslant\delta_2$ 和 $|U_t^\varepsilon|\leqslant C\varepsilon$，其中 $C>0$ 为某个固定值，且 $\varepsilon>0$ 充分小。我们得到

$$\frac{\delta_1}{2}\mathbf{E}\Big[\tau^\varepsilon-\rho^\varepsilon\Big|\mathscr{F}_{\rho^\varepsilon}\Big]\leqslant h(U_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)-\mathbf{E}\Big[h(U_{\tau^\varepsilon})\Big|\mathscr{F}_{\rho^\varepsilon}\Big]. \tag{3.66}$$

我们还有

$$\begin{aligned}h(U_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon) &= \Big(\widetilde{a}_+^\varepsilon-R_{\rho^\varepsilon}-(A_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon+M_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)\Big)\Big(R_{\rho^\varepsilon}+a_-^\varepsilon+(A_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon+M_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)\Big)\\ &\leqslant(\widetilde{a}_+^\varepsilon-R_{\rho^\varepsilon})(R_{\rho^\varepsilon}+a_-^\varepsilon)+(A_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon+M_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)(\widetilde{a}_+^\varepsilon-2R_{\rho^\varepsilon}-a_-^\varepsilon)\\ &= (A_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon+M_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)(\widetilde{a}_+^\varepsilon-2R_{\rho^\varepsilon}-a_-^\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.67}$$

后一个公式中的第二个因子是 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 阶，并且由引理 3.4 可得

$$\mathbf{E}_{0,y}|h(U_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon)|\lesssim\varepsilon^3. \tag{3.68}$$

此外,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}|h_\varepsilon(U_{\tau^\varepsilon})| &= \mathbf{E}_{0,y}\Big|(\widetilde{a}_+^\varepsilon-U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)(U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon+a_-^\varepsilon)\Big|\\ &= \mathbf{E}_{0,y}\Big|(\widetilde{a}_+^\varepsilon-U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)(U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon+a_-^\varepsilon)\Big|\mathbb{I}(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon=a_+^\varepsilon)\\ &\leqslant C\varepsilon\mathbf{E}_{0,y}\Big|\widetilde{a}_+^\varepsilon-U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon\Big|\mathbb{I}(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon=a_+^\varepsilon)\\ &\leqslant C\varepsilon^2\mathbf{E}_{0,y}\Big|1-2\varepsilon\beta(y)-B^\varepsilon(Y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)\Big|\mathbb{I}(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon=a_+^\varepsilon)\\ &\leqslant C\varepsilon^2\mathbf{E}_{0,y}|r(\varepsilon,Y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon-y)|\mathbb{I}(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon=a_+^\varepsilon)\\ &\lesssim\varepsilon^{4-\delta}.\end{aligned} \tag{3.69}$$

2. 在事件 $\{\tau^\varepsilon \leqslant \rho^\varepsilon\}$ 上，我们同样有：

$$R_{\tau^\varepsilon} = U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - M^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - A^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}, \tag{3.70}$$

and

$$0 = \mathbf{E}\Big[h(R_{\rho^\varepsilon})\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon}\Big] = h(R_{\tau^\varepsilon}) + b(y)\mathbf{E}\Big[\int_{\tau^\varepsilon}^{\rho^\varepsilon}(-2R^\varepsilon_s + a^\varepsilon_+ - a^\varepsilon_-)\,\mathrm{d}s\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon}\Big] - \Sigma^{00}(y)\mathbf{E}\Big[\int_{\tau^\varepsilon}^{\rho^\varepsilon}\mathrm{d}s\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon}\Big] \tag{3.71}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma^{00}(y)}{2}\mathbf{E}\Big[\rho^\varepsilon - \tau^\varepsilon\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon}\Big] &\leqslant h(R_{\tau^\varepsilon}) + (A^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} + M^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}))(U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} + a^\varepsilon_- - (A^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} + M^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})) \\ &\leqslant h(U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}) + (A^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} + M^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})(2U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} + a^\varepsilon_- - \tilde{a}^\varepsilon_+)\end{aligned} \tag{3.72}$$

关于 $h(U^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})$、 $A^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}$ 和 $M^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}$ 的估计与前一步相同。

结合步骤 1 和 2 中的估计，可得 (3.63)。 □

3.4 包含 Y^ε 的精确估计

本节概述期望值 $\mathbf{E}_{0,y}(Y^i_{,\tau^\varepsilon} - y_i)(Y^{j,\tau^\varepsilon} - y_j)$、$\mathbf{E}_{0,y}(Y^i_{,\tau^\varepsilon} - y_i)X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}$ 和 $\mathbf{E}_{0,y}(Y^i_{,\tau^\varepsilon} - y^i)$ 的推导。

1. 对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$，我们有：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}(Y^{i,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_i)(Y^{j,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_j) &= \mathbf{E}_{0,y}(V^{i,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_i + \theta^i(Y^\varepsilon_\tau)X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})(V^{j,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_j + \theta^j(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}) \\ &= \mathbf{E}_{0,y}(V^{i,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_i)(V^{j,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_j) \\ &\quad + \mathbf{E}_{0,y}(V^{i,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_i)\theta^j(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} \\ &\quad + \mathbf{E}_{0,y}\theta^i(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}(V^{j,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_j) \\ &\quad + \mathbf{E}_{0,y}\theta^i(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})\theta^j(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^2.\end{aligned} \tag{3.73}$$

应用伊藤公式、引理 3.2 和引理 3.3。我们只写出关键项；$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$估计可由注 2.4 的界得到）：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}(V^{i,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y^i)(V^{j,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y^j) &= \sum_{l=1}^m \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\sigma^i_l(X_s,Y_s) - \theta^i(Y_s)\sigma^0_l(X_s,Y_s)\Big)\Big(\sigma^j_l(X_s,Y_s) - \theta^j(Y_s)\sigma^0_l(X_s,Y_s)\Big)\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \sum_{l=1}^m \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\sigma^i_l(0,y) - \theta^i(y)\sigma^0_l(0,y)\Big)\Big(\sigma^j_l(0,y) - \theta^j(y)\sigma^0_l(0,y)\Big)\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \Big(\Sigma^{ij}(y) - \theta^i(y)\Sigma^{0j}(y) - \theta^j(y)\Sigma^{0i}(y) + \theta^i(y)\theta^j(y)\Sigma^{00}(y)\Big)\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{3.74}$$

对 θ^i, θ^j 应用泰勒公式，并利用 (3.48) 和 (3.49)，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}\theta^i(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})\theta^j(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^2 &= \theta^i(y)\theta^j(y)\mathbf{E}_{0,y}|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^2 + \mathcal{O}(\mathbf{E}_{0,y}|Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - y|^2|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^2) \\ &= \theta^i(y)\theta^j(y)d^2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ &= \theta^i(y)\theta^j(y)\Sigma^{00}(y)\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta});\end{aligned} \tag{3.75}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}(V^{\varepsilon,i}_{\tau^\varepsilon} - y_i)\theta^j(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} &= \mathbf{E}_{0,y}(Y^{\varepsilon,i}_{\tau^\varepsilon} - y_i - \theta^i(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})\theta^j(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon})X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} \\ &= \theta^j(y)\mathbf{E}_{0,y}(Y^{i,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_i)X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} - \theta^i(y)\theta^j(y)\mathbf{E}_{0,y}|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \theta^j(y)\Sigma^{0i}(y)\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon - \theta^i(y)\theta^j(y)\Sigma^{00}(y)\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{3.76}$$

因此

$$\mathbf{E}_{0,y}(Y^{i,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_i)(Y^{j,\varepsilon}_{\tau^\varepsilon} - y_j) = \Sigma^{ij}(y)\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta}). \tag{3.77}$$

2. 令 $1 \leqslant i \leqslant n$。回顾引理 3.1，即 $\Phi(u,\ v) = u + h_1^\varepsilon(u,\ v)$, $h_1^\varepsilon(u,\ v) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 在 $(u,\ v) \in (-a_-^\varepsilon,\ a_+^\varepsilon) \times \mathbb{R}^n$上一致成立。于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{0,y}(Y_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon} - y_i)X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon &= \mathbf{E}_{0,y}(\Psi^\varepsilon(U_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon}, V_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon}) - y_i)\Phi^\varepsilon(U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon, V_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon) \\
&= \mathbf{E}_{0,y}(V_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon} - y^i + \theta^i(V_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon + h_2^\varepsilon)(U_{\tau^\varepsilon} + h_1^\varepsilon) \\
&= \mathbf{E}_{0,y}(V_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon} - y^i)U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon + \mathbf{E}_{0,y}\theta^i(V_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)|U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= \mathbf{E}_{0,y}\Big[\sum_{l=1}^m \int_0^{\tau^\varepsilon} \Big[\sigma_l^i(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) - \theta^i(Y_s^\varepsilon)\sigma_l^0(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\Big]\,\mathrm{d}W_s^l \cdot \sum_{l=1}^m \int_0^{\tau^\varepsilon} \sigma_l^0(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_s^l\Big] \quad (3.78) \\
&\quad + \theta^i(y)\sum_{l=1}^m \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon} \sigma_l^0(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= \Sigma^{0i}(y)\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

3. 利用 (3.6)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{0,y}(Y_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon} - y^i) = \mathbf{E}_{0,y}(\Psi_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon}(U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon, V_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon) - y^i) \\
&\quad = \mathbf{E}_{0,y}(V_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon} - y^i + \theta^i(V_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon + h_2^\varepsilon) \\
&\quad = \mathbf{E}_{0,y}\Big[V_{\tau^\varepsilon}^{i,\varepsilon} - y^i - \theta^i(y)a_-^\varepsilon\mathbb{I}(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon = -a_-^\varepsilon) + \theta^i(y)a_+^\varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta(y))\mathbb{I}(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon = a_+^\varepsilon) + \sum_{j=1}^n \theta_{y^j}^i(y)(V_{\tau^\varepsilon}^{\varepsilon,i} - y)U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon\Big] \\
&\quad + \mathcal{O}\Big(\mathbf{E}_{0,y}\Big[|Y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon - y|^2 U_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon + h_2^\varepsilon\Big]\Big) \\
&\quad = \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon} \Big(b^i(y) - \theta^i(y)b^0(y) - \sum_{j=1}^n \theta_{y^j}^i(y)\Sigma^{0j}(y)\Big)\,\mathrm{d}s + \theta^i(y)\Big(\beta(y)d + \frac{b^0(y)d^2}{\Sigma^{00}(x,y)}\Big)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&\quad = \Big(b^i(y) + \frac{\theta^i(y)\beta(y)\Sigma^{00}(y)}{d}\Big)\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned} \quad (3.79)$$

4 定理 1.3 的证明

设 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$ 是 (1.2) 的弱解，$(X,\ Y)$ 是极限随机微分方程 (1.7) 的弱解。回想一下，所有这些过程都是强马尔可夫过程。

弱收敛 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon) \Rightarrow (X,\ Y)$ 在 $C([0,\ \infty),\ \mathbb{R}^n)$ 中的证明，通常包括证明族 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 的弱相对紧性，以及证明有限维分布的收敛。

用 $S^\varepsilon(a_j^\varepsilon) = (a_{j-1}^\varepsilon,\ a_{j+1}^\varepsilon)$ 表示第 j 个膜周围的条带。令

$$\begin{aligned}
\tau_0^\varepsilon &= \inf\Big\{t \geqslant 0\colon X_t^\varepsilon \in \{a_j^\varepsilon\}_{j\in\mathbb{Z}}\Big\}, \\
\tau_{k+1}^\varepsilon &= \inf\{t > \tau_k^\varepsilon\colon X_t^\varepsilon \notin S^\varepsilon(X_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon)\}, \quad k \geqslant 0,
\end{aligned} \quad (4.1)$$

它们是到达相邻膜的击中时刻。令 $\nu^\varepsilon = (\nu_t^\varepsilon)$ 为对 $\{a_k^\varepsilon\}$ 的访问计数过程，即,

$$\nu_t^\varepsilon = k \quad \Leftrightarrow \quad \tau_0^\varepsilon < \cdots < \tau_k^\varepsilon \leqslant t,\ \tau_{k+1}^\varepsilon > t. \quad (4.2)$$

引理 4.1. 对于任意 $T > 0$，存在 $K > 0$，使得对于每个 $\lambda \in (0,\ T]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\{a_j^\varepsilon\}, y\in\mathbb{R}^n} \mathbf{P}_{x,y}(\nu_\lambda^\varepsilon > K\lambda/\varepsilon^2) = 0. \quad (4.3)$$

证明。回想一下，根据引理 3.2，存在 $C_1,\ C_2 > 0$ 使得 $\mathbf{E}_{x,\ y}\tau_1^\varepsilon \geqslant C_1\varepsilon^2$ 且 $\mathbf{E}_{x,\ y}|\tau_1^\varepsilon|^2 \leqslant C_2\varepsilon^4$ 对所有 $x \in \{a_k^\varepsilon\}$、$y \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$ 均一致成立。

显然， $\{\nu_\lambda^\varepsilon \geqslant K\lambda/\varepsilon^2\} = \{\tau^\varepsilon_{[K\lambda/\varepsilon^2]} \leqslant \lambda\}$。随机序列

$$\Delta_k^\varepsilon := \tau_k^\varepsilon - \tau_{k-1}^\varepsilon - \mathbf{E}\Big[\tau_k^\varepsilon - \tau_{k-1}^\varepsilon \Big| \mathscr{F}^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon}\Big] \tag{4.4}$$

是一个鞅差，并且

$$\mathbf{E}_{x,y}|\Delta_k^\varepsilon|^2 \leqslant 4\mathbf{E}_{x,y}|\tau_k^\varepsilon - \tau_{k-1}^\varepsilon|^2 \leqslant 4C_2\varepsilon^4. \tag{4.5}$$

根据强马尔可夫性质，对于任意 $\lambda \in [0,\ T]$ 我们有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{x,y}(\nu_\lambda^\varepsilon \geqslant K\lambda/\varepsilon^2) &= \mathbf{P}_{x,y}\Big(\tau^\varepsilon_{[K\lambda/\varepsilon^2]} \leqslant \lambda\Big) \\
&= \mathbf{P}_{x,y}\Big(\sum_{k=1}^{[K\lambda/\varepsilon^2]} \Delta_k^\varepsilon \leqslant \lambda - \sum_{k=1}^{[K\lambda/\varepsilon^2]} \mathbf{E}[\tau_k^\varepsilon - \tau_{k-1}^\varepsilon | \mathscr{F}^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon}]\Big) \\
&\leqslant \mathbf{P}_{x,y}\Big(\sum_{k=1}^{[K\lambda/\varepsilon^2]} \Delta_k^\varepsilon \leqslant \lambda - C_1[K\lambda/\varepsilon^2]\varepsilon^2\Big) \\
&= \mathbf{P}_{x,y}\Big(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{[K\lambda/\varepsilon^2]} \Delta_k^\varepsilon \leqslant \frac{\lambda}{K} - C_1\frac{[K\lambda/\varepsilon^2]\varepsilon^2}{K}\Big) \\
&\leqslant \mathbf{P}_{x,y}\Big(\Big|\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{[K\lambda/\varepsilon^2]} \Delta_k^\varepsilon\Big| \geqslant \frac{C_1\lambda}{2}\Big)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

对于 $K \geqslant 2/C_1$。根据马尔可夫不等式

$$\mathbf{P}_{x,y}\Big(\Big|\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{[K\lambda/\varepsilon^2]} \Delta_k^\varepsilon\Big| > \frac{C_1\lambda}{2}\Big) \leqslant \frac{4}{C_1^2K^2\lambda^2}\mathbf{E}_{x,y}\Big|\sum_{k=1}^{[K\lambda/\varepsilon^2]} \Delta_k^\varepsilon\Big|^2 \leqslant \frac{4C_2\varepsilon^2}{C_1^2K\lambda} \tag{4.7}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，该量趋于零。 □

4.1 弱相对紧性

族 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$ 在 $C(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}^{n+1})$ 中的弱相对紧性，将由其在斯科罗霍德空间 $D(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}^{n+1})$ 中的弱相对紧性推出；后者由紧包含条件和 Aldous判据保证（例如，参见 Jacod and Shiryaev 第六章中的条件 3.21i 和 4.4，以及定理 4.5[15]），再结合 $(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$路径的连续性即可。

引理 4.2（ 紧性包含）。 对于任意 $T > 0$ 和 $\delta > 0$，存在 $R = R_{\delta,\ T} > 0$ 使得

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}_{x,y}\Big(|X_t^\varepsilon| \leqslant R, |Y_t^\varepsilon| \leqslant R,\, t \in [0,T]\Big) \geqslant 1 - \delta \tag{4.8}$$

对属于紧集的 $x \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$ 一致成立。

证明。 1. 回忆一下， $\tau_0^\varepsilon = \inf\{t \geqslant 0\colon\ X_t \in \{a_k^\varepsilon\}\}$是首次命中膜的时刻。由于过程$(X^\varepsilon,\ Y^\varepsilon)$是在区间 $[0,\ \tau_0^\varepsilon]$上的正则扩散，容易看出

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{E}\tau_0^\varepsilon \lesssim \varepsilon^2, \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{E}|X^\varepsilon_{\tau_0^\varepsilon} - x| \lesssim \varepsilon, \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{E}|Y^\varepsilon_{\tau_0^\varepsilon} - y| \lesssim \varepsilon. \tag{4.9}$$

因此，为了证明 (4.8)，只需考虑起始点 $(x,\ y) \in \{a_k^\varepsilon\} \times \mathbb{R}^n$。 2 。令 $\delta \in (0,\ 1)$。根据引理 4.1，存在 $K > 0$ 和 $\varepsilon_0(\delta) > 0$，使得对于所有 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ $^{(\delta)}$

$$\sup_{x\in\{a_k^\varepsilon\}, y\in\mathbb{R}^n} \mathbf{P}_{x,y}(\varepsilon^2\nu_T^\varepsilon \geqslant KT) \leqslant \frac{\delta}{6}. \tag{4.10}$$

3. 滥用记号，现用 $(\Delta_k^\varepsilon)_{k\geqslant 1}$ 表示鞅差

$$\Delta_k^\varepsilon := X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon} - X^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon} - \mathbf{E}_{X^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon}} (X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon} - X^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon}), \quad k \geqslant 1. \tag{4.11}$$

由于强马尔可夫性质和 (3.47)，我们有

$$\left|\mathbf{E}_{X^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon}, Y^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon}} (X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon} - X^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon})\right| \leqslant C_1\varepsilon^2 \text{ a.s.}, \tag{4.12}$$

因此，由于 (3.48)，我们得到

$$\mathbf{E}_{x,y}|\Delta_k^\varepsilon|^2 \leqslant C_2\varepsilon^2 \tag{4.13}$$

对于某些常数 $C_1, C_2 > 0$。由 Doob 不等式，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时且 $R > 0$ 足够大时，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{x,y}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^\varepsilon| > R, \nu_T^\varepsilon \leqslant KT/\varepsilon^2\Big) &\leqslant \mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant KT\varepsilon^{-2}}\Big|\sum_{j=1}^k (X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon} - X^\varepsilon_{\tau_{k-1}^\varepsilon})\Big| > R - 2\|d\|_\infty\varepsilon - |x|\Big) \\
&\leqslant \mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant KT\varepsilon^{-2}}\Big|\sum_{j=1}^k \Delta_k^\varepsilon\Big| > R - 2\|d\|_\infty\varepsilon - C_1KT - |x|\Big) \\
&\leqslant \frac{C_2KT}{(R - 2\|d\|_\infty\varepsilon - C_1KT - |x|)^2} \leqslant \frac{\delta}{6}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4. 为估计 Y^ε，我们回顾一下，在每个条带 $S^\varepsilon(a^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon}) = S^\varepsilon(X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon})$ 中，也就是说，在每个时间区间 $[\tau_k^\varepsilon, \tau_{k+1}^\varepsilon]$ 上，我们可以进行如下变换

$$V_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon - \theta(Y_t^\varepsilon)(X_t^\varepsilon - X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon}). \tag{4.15}$$

过程

$$t \mapsto \theta(Y_t^\varepsilon)(X_t^\varepsilon - X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon}), \quad [\tau_k^\varepsilon, \tau_{k+1}^\varepsilon],\ k \geqslant 0, \tag{4.16}$$

一致有界于 $\|d\|_\infty\|\theta\|_\infty\varepsilon$。

注意，$V^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon} = Y^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon}$，并且在 $t \in [\tau_k^\varepsilon,\ \tau_{k+1}^\varepsilon]$过程 V^ε可表示为

$$\begin{aligned}
V_t^{\varepsilon,i} = Y^{\varepsilon,i}_{\tau_k^\varepsilon} &+ \int_{\tau_k^\varepsilon}^t \Big(b^i - \theta^i b^0 - \sum_{j=1}^n \theta^i_{y^j}\Sigma^{0j} + \psi^i(\cdot,\cdot; X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon})\Big)(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{l=1}^m \int_{\tau_k^\varepsilon}^t \Big(\sigma_l^i - \theta^i\sigma_l^0 + \psi_l^i(\cdot,\cdot; X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon})\Big)(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_s^l
\end{aligned} \tag{4.17}$$

with

$$\begin{aligned}
\psi^i(x,y;a) &= -\sum_{j=1}^n \theta^i_{y^j}(y)(x-a)b^j(x,y) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \theta^i_{y^jy^k}(y)(x-a)\Sigma^{jk}(x,y), \\
\psi_l^i(x,y;a) &= -\sum_{j=1}^n \theta^i_{y^j}(y)(x-a)\sigma_l^j(x,y), \quad i = 1,\dots,n,\ l = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

因此，结合 (4.15) 和 (4.17)，我们在 $[\tau_k^\varepsilon,\ \tau_{k+1}^\varepsilon]$

$$Y_t^\varepsilon = y + \sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau_j^\varepsilon})(X^\varepsilon_{\tau_j^\varepsilon} - X^\varepsilon_{\tau_{j-1}^\varepsilon}) + I_t^\varepsilon + \theta(Y_t^\varepsilon)(X_t^\varepsilon - X^\varepsilon_{\tau_k^\varepsilon}) \tag{4.19}$$

其中，过程 I^ε 是一种扩散

$$I_t^\varepsilon = \int_0^t \Gamma(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon, \omega)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \Lambda(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon, \omega)\,\mathrm{d}W(s) \tag{4.20}$$

其中 u 一致有界的向量值函数和矩阵值函数 Γ 以及 Λ，它们显然满足 s

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \mathbf{P}_{x,y}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|I_t^\varepsilon + y| > R\Big) \leqslant \frac{\delta}{6}, \quad R \to \infty. \tag{4.21}$$

5. 为了证明 Y^ε 满足紧包含条件，只需估计总和 $\sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j})(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})$。首先，以下初等估计成立：

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j})(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})\Big| \\
&\quad\leqslant \Big|\sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})\Big| + \Big|\sum_{j=1}^k (\theta(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j})-\theta(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}))(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})\Big| \\
&\quad\leqslant \Big|\sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})\Big((X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})-\mathbf{E}\Big[X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big]\Big)\Big| \\
&\quad+\Big|\sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau_{j-1}})\mathbf{E}\Big[X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big]\Big| + 2\sum_{j=1}^k (X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})^2 + 2\|D\theta\|^2_\infty \sum_{j=1}^k |Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}|^2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

由于对所有 $j\geqslant 1$ 都有 $(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})^2\leqslant C\varepsilon^2$，因此对于第三个求和项，我们有

$$\mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant KT/\varepsilon^2}\sum_{j=1}^k (X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}})^2>R\Big)\leqslant \mathbf{P}_{x,y}(KTC>R)=0 \tag{4.23}$$

当 R 足够大时。对于第四个求和项，我们利用$\mathbf{E}_{x,y}|Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}|^2\leqslant C\varepsilon^2$ 这一事实（见 (3.77)），并应用马尔可夫不等式，得到

$$\mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant KT/\varepsilon^2}\sum_{j=1}^k |Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}|^2>R\Big)\leqslant \frac{KTC}{R}\leqslant\frac{\delta}{6},\quad R\to\infty. \tag{4.24}$$

由 (3.47) 可得

$$\Big|\sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau_{j-1}})\mathbf{E}\Big[X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big]\Big| = \Big|\sum_{j=1}^k m(X^\varepsilon_{\tau_{j-1}},Y^\varepsilon_{\tau_{j-1}})\varepsilon^2+\mathcal{O}(\varepsilon^{3-\delta})\Big|\leqslant Ck\varepsilon^2 \tag{4.25}$$

其中

$$m(x,y)=\theta(y)d(x)\Big(\beta(x,y)+\frac{b^0(x,y)d(x)}{\Sigma^{00}(x,y)}\Big) \tag{4.26}$$

是有界函数，而$\mathcal{O}$ 项几乎处处一致有界。因此我们得到

$$\mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant KT/\varepsilon^2}\Big|\sum_{j=1}^k \theta(Y^\varepsilon_{\tau_{j-1}})\mathbf{E}\Big[X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_j}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon_{j-1}}\Big]\Big|>R\Big)\leqslant \mathbf{P}(KTC>R)=0,\quad R\to\infty. \tag{4.27}$$

同样，略微滥用记号，序列

$$\Delta^\varepsilon_k=\theta(Y^\varepsilon_{\tau_{k-1}})\Big((X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_k}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{k-1}})-\mathbf{E}\Big[X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_k}-X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{k-1}}\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon_{k-1}}\Big]\Big) \tag{4.28}$$

是一个鞅差，因此根据 Doob 不等式，我们得到

$$\mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant KT/\varepsilon^2}\Big|\sum_{j=1}^k \Delta^\varepsilon_k\Big|>R\Big)\leqslant\frac{C}{R^2}\sum_{k\leqslant KT/\varepsilon^2}\mathbf{E}_{x,y}|\Delta^\varepsilon_k|^2\leqslant\frac{C_1KT}{R^2}\leqslant\frac{\delta}{6},\quad R\to\infty. \tag{4.29}$$

□

引理4.3（Aldous判据）。 对于任意 $\eta>0$

$$\lim_{\lambda\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{\sigma\leqslant\tau\leqslant\sigma+\lambda}\mathbf{P}_{x,y}\Big(|X^\varepsilon_\tau-X^\varepsilon_\sigma|+|Y^\varepsilon_\tau-Y^\varepsilon_\sigma|>\eta\Big)=0, \tag{4.30}$$

其中 σ 和 τ 是 $\mathbb{F}^\varepsilon$-停时，并且该极限对于 $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$一致成立。

证明。 令 $\eta>0$。利用强马尔可夫性质，我们得到

$$\begin{aligned}\sup_{\sigma\leqslant\tau\leqslant\sigma+\lambda}\mathbf{P}_{x,y}\Big(|X_\tau^\varepsilon-X_\sigma^\varepsilon|+|Y_\tau^\varepsilon-Y_\sigma^\varepsilon|>\eta\Big)&=\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant\lambda}\sup_{x,y}\mathbf{P}_{x,y}\Big(|X_\sigma^\varepsilon-x|+|Y_\sigma^\varepsilon-y|>\eta\Big)\\&\leqslant\sup_{x,y}\mathbf{P}_{x,y}\Big(\sup_{t\in[0,\lambda]}|X_t^\varepsilon-x|>\eta/2,\nu_\lambda^\varepsilon\leqslant K\lambda/\varepsilon^2\Big)\\&+\sup_{x,y}\mathbf{P}_{x,y}\Big(\sup_{t\in[0,\lambda]}|Y_t^\varepsilon-y|>\eta/2,\nu_\lambda^\varepsilon\leqslant K\lambda/\varepsilon^2\Big)\\&+\sup_{x,y}\mathbf{P}_{x,y}\Big(\nu_\lambda^\varepsilon>K\lambda/\varepsilon^2\Big).\end{aligned}\tag{4.31}$$

我们沿用上文引理 4.2 的论证。首先注意到，由 (4.9) 可知，只需考虑初点$x\in\{a_k^\varepsilon\}$, $y\in\mathbb{R}^n$。接着，我们基本上重复引理 4.2 中的计算，只需将固定的 η 替换为大的 R，并将小的 λ 替换为固定的 T。例如，令 $\{\Delta_k^\varepsilon\}$ 由 (4.11) 定义时，估计 (4.14) 的形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{x,y}\Big(\sup_{t\in[0,\lambda]}|X_t^\varepsilon-x|>\frac{\eta}{2},\nu_\lambda^\varepsilon\leqslant K\lambda/\varepsilon^2\Big)&\leqslant\mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant K\lambda\varepsilon^{-2}}\Big|\sum_{j=1}^k(X_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon-X_{\tau_{k-1}^\varepsilon}^\varepsilon)\Big|>\frac{\eta}{2}-2\|d\|_\infty\varepsilon\Big)\\&\leqslant\mathbf{P}_{x,y}\Big(\max_{k\leqslant K\lambda\varepsilon^{-2}}\Big|\sum_{j=1}^k\Delta_k^\varepsilon\Big|>\frac{\eta}{2}-2\|d\|_\infty\varepsilon-C_1K\lambda\Big)\\&\leqslant\frac{C_2K\lambda}{(\eta/2-2\|d\|_\infty\varepsilon-C_1K\lambda)^2}\to0,\quad\varepsilon\to0,\lambda\to0.\end{aligned}\tag{4.32}$$

过程 Y^ε 的估计可用类似的方法得到。 □

4.2 有限维分布的收敛

我们通过鞅问题方法证明有限维分布的收敛。设 $(X,\ Y)$为生成元 $\mathcal{L}$ 的扩散， $X_0=x\in\mathbb{R}$, $Y_0=y\in\mathbb{R}^n$。

设 $f\in C_b^3(\mathbb{R}^{n+1},\ \mathbb{R})$，并令过程 $(X,\ Y)$由方程 (1.7) 定义。我们需要证明，对于任意 $l\geqslant1$, h_1, $\dots h_l\in C_b(\mathbb{R}^{n+1},\ \mathbb{R})$以及任意 $0\leqslant s_1<\cdots<s_l<s<t$

$$\mathbf{E}_{x,y}\Big[\Big(f(X_t^\varepsilon,Y_t^\varepsilon)-f(X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)-\int_s^t Af(X_u^\varepsilon,Y_u^\varepsilon)\,\mathrm{d}u\Big)\prod_{j=1}^l h_j(X_{s_j}^\varepsilon,Y_{s_j}^\varepsilon)\Big]\to0,\quad\varepsilon\to0.\tag{4.33}$$

这一收敛性基本上可由下面的引理推出。

引理 4.4。 设 $\eta>0$ 和 $f\in C_b^3(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$。那么当 $\varepsilon>0$ 足够小时

$$\mathbf{E}_{x,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\mathcal{L}f(X_u^\varepsilon,Y_u^\varepsilon)-\eta\Big)\,\mathrm{d}u\leqslant\mathbf{E}_{x,y}f(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon,Y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)-f(x,y)\leqslant\mathbf{E}_{x,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\mathcal{L}f(X_u^\varepsilon,Y_u^\varepsilon)+\eta\Big)\,\mathrm{d}u\tag{4.34}$$

对 $x\in\{a_k^\varepsilon\}$ 和 $y\in\mathbb{R}^n$ 一致成立。

证明。 为明确起见，令 $x=0$ 和 $y\in\mathbb{R}^n$。由泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}f(X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon,Y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)-f(0,y)&=f_x(0,y)\mathbf{E}_{0,y}X_\tau^\varepsilon+\sum_{i=1}^n f_{y^i}(0,y)\mathbf{E}_{0,y}(Y_{\tau^\varepsilon}^{\varepsilon,i}-y^i)\\&+\frac12f_{xx}(0,y)\mathbf{E}_{0,y}|X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon|^2+\frac12\sum_{i=1}^n f_{xy^i}(0,y)\mathbf{E}_{0,y}X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon(Y_{\tau^\varepsilon}^{\varepsilon,i}-y^i)\\&+\frac12\sum_{i,j=1}^n f_{y^iy^j}(0,y)\mathbf{E}_{0,y}(Y_{\tau^\varepsilon}^{\varepsilon,i}-y^i)(Y_{\tau^\varepsilon}^{\varepsilon,j}-y^j)+Q^\varepsilon\end{aligned}\tag{4.35}$$

其中

$$\begin{aligned}|Q^\varepsilon| &\lesssim \mathbf{E}_{0,y}|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^3 + \mathbf{E}_{0,y}|Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}-y|^3 + \mathbf{E}_{0,y}|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}|^2|Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}-y| + \mathbf{E}_{0,y}|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}||Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}-y|^2\\ &\lesssim \varepsilon^3 \leqslant \frac{\eta}{3}\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon.\end{aligned} \tag{4.36}$$

结合第 3.3 节和第 3.4 节的渐近行为以及引理 3.3 中的估计，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,y}f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon},Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon}) - f(0,y) &= \Big(\mathcal{L}f(0,y)+\mathcal{O}(\varepsilon^{1-\delta})\Big)\cdot\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon\\ &\leqslant \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\mathcal{L}f(0,y)+\frac{\eta}{3}\Big)\,\mathrm{d}u\\ &= \mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)+\mathcal{L}f(0,y)-\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)+\frac{\eta}{3}\Big)\,\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{4.37}$$

由于 $(x,\ y)\mapsto\mathcal{L}f(x,\ y)$ 是利普希茨连续的，因此我们有

$$\sup_{u\leqslant\tau^\varepsilon}|\mathcal{L}f(0,y)-\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)| \leqslant C\Big(\varepsilon+\sup_{u\leqslant\tau^\varepsilon}|Y^\varepsilon_u-y|\Big) \tag{4.38}$$

因此，根据引理 3.2 和引理 3.3

$$\begin{aligned}\Big|\mathbf{E}_{0,y}\int_0^{\tau^\varepsilon}\Big(\mathcal{L}f(0,y)-\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)\Big)\,\mathrm{d}u\Big| &\lesssim \varepsilon\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon + \Big(\mathbf{E}_{0,y}|\tau^\varepsilon|^2\cdot\mathbf{E}_{0,y}\sup_{u\leqslant\tau^\varepsilon}|Y^\varepsilon_u-y|^2\Big)^{1/2}\\ &\lesssim \varepsilon^3\leqslant\frac{\eta}{3}\mathbf{E}_{0,y}\tau^\varepsilon.\end{aligned} \tag{4.39}$$

下界的估计可类似地得到。 □

现在我们证明 (4.33)。对于 $s\geqslant 0$，令 $\tau^\varepsilon(s)$ 为 s之后首次到达某个膜的时刻，即

$$\tau^\varepsilon(s)=\tau^\varepsilon_{\nu^\varepsilon_s}=\min\{\tau^\varepsilon_k\colon\tau^\varepsilon_k\geqslant s\}. \tag{4.40}$$

我们估计条件期望:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big[f(X^\varepsilon_t,Y^\varepsilon_t)-f(X^\varepsilon_s,Y^\varepsilon_s)-\int_s^t\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)\,\mathrm{d}u\Big|\mathscr{F}^\varepsilon_s\Big]\\ &\quad=\sum_{k\geqslant1}\mathbf{E}\Big[\mathbb{I}_{\{s<\tau^\varepsilon_k\leqslant t\}}\Big(f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{k+1}},Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{k+1}})-f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_k},Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_k})-\int_{\tau^\varepsilon_k}^{\tau^\varepsilon_{k+1}}\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)\,\mathrm{d}u\Big)\Big|\mathscr{F}^\varepsilon_s\Big]\\ &\quad+\mathbf{E}\Big[f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon(s)},Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon(s)})-f(X^\varepsilon_s,Y^\varepsilon_s)-\int_s^{\tau^\varepsilon(s)}\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)\,\mathrm{d}u\Big|\mathscr{F}^\varepsilon_s\Big]\\ &\quad-\mathbf{E}\Big[f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon(t)},Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon(t)})-f(X^\varepsilon_t,Y^\varepsilon_t)-\int_t^{\tau^\varepsilon(t)}\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)\,\mathrm{d}u\Big|\mathscr{F}^\varepsilon_s\Big]\\ &\quad\leqslant\sum_{k\geqslant1}\mathbf{E}\Big[\mathbb{I}_{\{s<\tau^\varepsilon_k\leqslant t\}}\mathbf{E}\Big(f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{k+1}},Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{k+1}})-f(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_k},Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_k})-\int_{\tau^\varepsilon_k}^{\tau^\varepsilon_{k+1}}\mathcal{L}f(X^\varepsilon_u,Y^\varepsilon_u)\,\mathrm{d}u\Big|\mathscr{F}_{\tau^\varepsilon_k}\Big)\Big|\mathscr{F}^\varepsilon_s\Big]\\ &\quad+C\sup_{x,y}\mathbf{E}_{x,y}\Big[|X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon(0)}-x|+|Y^\varepsilon_{\tau^\varepsilon(0)}-y|+\tau^\varepsilon(0)\Big]\\ &\quad\leqslant\delta\sum_{k\geqslant1}\mathbf{E}\Big[\mathbb{I}_{\{s<\tau^\varepsilon_k\leqslant t\}}(\tau^\varepsilon_{k+1}-\tau^\varepsilon_k)\Big|\mathscr{F}^\varepsilon_s\Big]+\mathcal{O}(\varepsilon)\\ &\quad\leqslant\delta\mathbf{E}\Big[\tau^\varepsilon(t)-\tau^\varepsilon(s)\Big|\mathscr{F}_s\Big]+\mathcal{O}(\varepsilon)\\ &\quad\leqslant\delta(t-s)+\delta\sup_{x,y}\mathbf{E}_{x,y}(\tau^\varepsilon(t)-t)+\delta\sup_{x,y}\mathbf{E}_{x,y}(\tau^\varepsilon(s)-s)+\mathcal{O}(\varepsilon)=\delta(t-s)+\mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4.41}$$

这里我们利用 (4.9) 得出以下估计

$$\sup_{x,y}\mathbf{E}_{x,y}(\tau^\varepsilon(t)-t)=\sup_{x,y}\mathbf{E}_{x,y}\tau^\varepsilon(0)\lesssim\varepsilon^2 \tag{4.42}$$

and

$$\sup_{x,y}\mathbf{E}_{x,y}\Big[|X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}(0)}-x|+|Y^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}(0)}-y|\Big]\lesssim\varepsilon. \tag{4.43}$$

同样也有一个相应的下界估计，因此将这个条件期望乘以函数h_1、.....、 h_l并取期望，即得到极限 (4.33)。

声明与披露

数据和材料的可用性。 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

利益冲突。 作者声明不存在任何利益冲突。

作者贡献。 所有作者对本文的贡献均相同。

参考文献

[1] A. Bensoussan、J.-L. Lions 和 G. Papanicolaou，周期结构的渐近分析，《数学及其应用研究》第5卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1978年。[2] V. Berdichevsky、V. Jikov 和 G. Papanicolaou（编），均匀化：谢尔盖·科兹洛夫纪念文集，《应用科学数学进展丛书》第50卷，世界科学出版社，新加坡，1999年。[3] A. N. Borodin 和 P. Salminen，布朗运动手册——事实与公式，第2版，《概率论及其应用》，比克豪泽，2002年。[4] A. V. Chechkin、V. Yu. Gonchar 和 M. Szydłowski，磁场中的弛豫与超扩散的分数阶动力学，《等离子体物理》**9** （2002），第1期，78–88。[5] G. A. Chechkin、A. L. Piatnitski 和 A. S. Shamaev，均匀化：方法与应用，《数学专著译丛》第234卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年。[6] O. K. Dudko、A. M. Berezhkovskii 和 G. H. Weiss，周期性排列的可渗透膜存在下的扩散，《化学物理学杂志》**121** （2004），第22期，11283–11288。[7] H.-J. Engelbert 和 W. Schmidt，强马尔可夫连续局部鞅与一维随机微分方程的解（第三部分），《数学新闻》**151** （1991），第1期，149–197。[8] P. Gao，分段连续系数微分算子的鞅问题，《随机过程研讨班》，1992年（波士顿），《概率论进展》第33卷，比克豪泽，1993年，第135–141页。[9] D. S. Grebenkov，用脉冲梯度自旋回波监测多层结构中的受限扩散，《磁共振杂志》**205** （2010），第2期，181–195。[10] M. Hairer 和 C. Manson，含界面周期均匀化，《分析及其应用进展》，世界科学出版社，2010年，第410–416页。[11] ，含界面周期均匀化：一维情形，《随机过程及其应用》**120** （2010），第8期，1589–1605。[12] ，含界面周期均匀化：多维情形，《概率年刊》**39** （2011），第2期，648–682。[13] M. Hairer 和 E. Pardoux，周期线性退化偏微分方程的均匀化，《泛函分析杂志》**255** （2008），第9期，2462–2487。

[14] J. M. Harrison 和 L. A. Shepp，关于偏斜布朗运动，《概率年刊》9（1981），第2期，309–313。[15] J. Jacod 和 A. N. Shiryaev，《随机过程极限定理》，第2版，《数学科学基础丛书》第288卷，Springer，柏林，2003年。[16] V. V. Jikov、S. M. Kozlov 和 O. A. Oleinik，《微分算子与积分泛函的齐次化》，Springer，柏林，1994年。[17] S. G. Krantz 和 H. R. Parks，《隐函数定理：历史、理论与应用》，2003年版重印，比克豪泽，波士顿，2013年。[18] I. H. Krykun，具有多个点处局部时、且这些点收缩为单点的偏斜布朗运动的收敛，《数学科学杂志》221（2017），第5期，671–678。[19] N. V. Krylov，关于伊藤随机积分方程，《概率论及其应用》14（1969），第2期，330–336。[20] J.-F. Le Gall，涉及未知过程局部时的一维随机微分方程，《随机分析与应用》，《数学讲义》第1095卷，Springer，柏林，1984年，第51–82页。[21] A. Lejay，关于偏斜布朗运动的构造，《概率调查》3（2006），413–466。[22] P.-L. Lions 和 A.-S. Sznitman，具有反射边界条件的随机微分方程，《纯粹与应用数学通讯》37（1984），第4期，511–537。[23] S. Y. Makhno，《随机方程：极限定理》（俄文），Naukova Dumka，基辅，2012年。[24] ,具有半透屏障的层状介质中的一维随机方程，《随机算子与随机方程》24（2016），第3期，165–171。[25] , 复合环境中的扩散过程，《概率论与数理统计》94（2017），137–149。[26] N. Moutal 和 D. Grebenkov，穿过半透屏障的扩散：谱性质、高效计算与应用，《科学计算杂志》81（2019），第3期，1630–1654。[27] S. Nakao，关于一维随机微分方程解的路径唯一性，《大阪数学杂志》9（1972），第3期，513–518。[28] Y. Ouknine、F. Russo 和 G. Trutnau，关于具有聚点的可数偏斜布朗运动，《电子概率杂志》20（2015），第82期，1–27。[29] E. Pardoux，具有周期系数的线性与半线性二阶抛物型偏微分方程的均匀化：一种概率方法，《泛函分析杂志》167（1999），第2期，498–520。[30] G. A. Pavliotis 和 A. M. Stuart，《多尺度方法：平均化与齐次化》，《应用数学丛书》第53卷，Springer，纽约，2008年。[31] G. Peskir，带有曲面上的局部时的变量变换公式，《概率研讨班》第XL卷，《数学讲义》第1899卷，Springer，2007年，第70–96页。[32] M. Portenko 和 B. Kopytko，关于构造一种多维扩散过程：其膜位于给定超平面上并沿斜方向起作用，《数学与计算机科学研究所科学研究》11（2012），第3期，137–147。[33] N. I. Portenko，广义扩散过程，载于《第三届日苏概率论研讨会论文集》（G. Maruyama 和 J. V. Prokhorov 编），《数学讲义》第550卷，Springer，柏林，1976年，第500–523页。

[34] ———, 广义扩散过程，《数学专著译丛》，第83卷，美国数学学会，普罗维登斯（罗得岛州），1990年。[35] J. M. Ramirez，《层状介质中的多重偏斜布朗运动与扩散》，《美国数学学会会刊》**139**（2011年），第10期，3739–3752。[36] D. Revuz 和 M. Yor，《连续鞅与布朗运动》，第三版第三次印刷（修订版），数学科学基础丛书，第293卷，Springer，柏林，2005年。[37] J. Slezak 和 S. Burov，《从分隔介质中的扩散到非高斯随机游走》，《科学报告》**11**（2021年），第1期，5101。[38] D. W. Stroock 和 S. R. S. Varadhan，《具有边界条件的扩散过程》，《纯粹与应用数学通讯》**24**（1971年），第2期，147–225。[39] H. Tanaka，《凸区域中具有反射边界条件的随机微分方程》，《广岛数学杂志》**9**（1979年），第1期，163–177。[40] J. E. Tanner，《被可渗透屏障分隔的系统中的瞬态扩散：应用于脉冲场梯度核磁共振测量》，《化学物理学杂志》**69**（1978年），第4期，1748–1754。[41]S. Weinryb，《与可渗透边界相关的过程的均匀化》，《亨利·庞加莱研究所年刊·概率与统计》**20**（1984年），第4期，373–407。[42] T.Yamadaand S. Watanabe，《关于随机微分方程解的唯一性》，《京都大学数学杂志》**11**（1971年），第1期，155–167。[43] N. Yüksel、A. Avci 和 M. Kiliç，《低温下铝箔增强绝缘材料的有效热导率》，《传热与传质》**48**（2012年），1569–1574。[44] L. Zaitseva，《具有广义系数的随机微分方程强解的马尔可夫性质》，《随机过程理论》**11(27)**（2005年），第3–4期，140–146。