arXiv:2303.02742v2 [math.PR] 1 Oct 2023

蚯蚓轨迹的大小

KRZYSZTOF BURDZY、SHI FENG 和 DAISUKE SHIRAISHI

Abstract. 我们研究一条在二维整数格上移动的“蚯蚓”所形成的孔洞数量。蚯蚓由简单随机游走建模。在初始时刻，除蚯蚓所在的位置外，所有顶点都填满了土壤颗粒。每一步中，蚯蚓都会沿其运动方向推动土壤，并在身后留下一个孔洞（即没有土粒的空顶点）。如果蚯蚓前方（即其步进方向上）存在孔洞，则距离最近的孔洞会被一粒土壤颗粒填满。因此，在每一步中，孔洞数量增加 1 或保持不变。我们证明，经过 n 步后，孔洞数量至少为 $\mathcal{O}(n^{3/4})$。

1. Introduction

我们将研究一条在二维整数格上移动的“蚯蚓”所形成的孔洞数量。蚯蚓由简单随机游走建模。在初始时刻，除蚯蚓所在的位置外，$\mathbb{Z}^2$ 的所有顶点都填满了土壤颗粒。每一步中，蚯蚓都会沿其运动方向推动土壤，并在身后留下一个孔洞（即没有土粒的空顶点）。如果蚯蚓前方（即其步进方向上）存在孔洞，则距离最近的孔洞会被一粒土壤颗粒填满。严格定义见第 2 节。

在 [BHP13] 中研究了一种与我们非常相似的蚯蚓模型，不同之处在于其状态空间是一个二维离散环面。在那篇论文中，孔洞的数量保持不变，但其分布随时间变化，并趋于平稳状态。研究了空洞集合的“维数”——其定义基于空洞集合的局部标度性质。在 [BBF+22] 中也采用了类似的空洞集合“维数”定义，但状态空间是整个 $\mathbb{Z}^2$。在这两种情况下，都没有证明定理——仅报告了模拟结果。空洞集合的维数接近 $3/2$ ，但似乎严格大于 $3/2$。

本文将证明一个定理，以支持如下猜想：空洞集合的维数至少为 $3/2$，但我们对“维数”的解释有所不同。具体而言，我们将证明，经过 n 步后，孔洞的数量以高概率至少为 $\mathcal{O}\left(n^{3/4}\right)$。精确表述见定理 2.1。请注意，我们定理中的指数 $3/4$ 与“维数” $3/2$ 相符，因为经过 n^2 步后，随机游走将访问约 n^2 个顶点，这与边长为 $3/2$ 的正方形中的位置数量处于同一数量级，而

2020 数学学科分类。60K40，60J99。关键词和短语。蚯蚓、随机游走。KB 的研究部分得到了西蒙斯基金会资助项目 506732 和 928958 的支持。DS 获得了 JSPS 面向早期职业研究人员的科研资助，项目编号为 18K13425，以及 JSPS科研费项目编号 17H02849、18H01123、21H00989、22H01128 和 22K03336 的资助。

孔洞的数量至少为 $\mathcal{O}(n^{3/2})$。

尽管这个模型本身很简单，但要对其进行严格分析似乎非常困难。我们希望，我们的结果、模拟和开放问题能够启发其他研究者。

第 2 节将介绍该模型和我们的主要结果。随后，第 3 节将给出证明。最后，第 4 节将提出一些开放问题并展示模拟。

在提交论文发表后，我们从匿名审稿人处得知，我们的主要结果与 [BW03，引理 2] 非常接近。这是因为 [BW03] 中引入的“切点”本质上与下文第 3 节中定义的点 B_n^{right} 相同。鉴于这项已有研究，本文的贡献包括严格引入蚯蚓模型，以及提出猜想 4.1；在我们看来，该猜想颇具挑战性，但并非无法解决。我们的主要结果定理 2.1 的证明似乎比 [BW03，引理 2] 的证明简单得多。后者建立在 [BMS02] 中的复杂估计之上。我们的定理 2.1 略强于 [BW03，引理 2]，因为我们定理陈述中的 $\varepsilon > 0$ 可以任意小。

2. Model, notation and the main result

用定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的简单随机游走 X_n 表示蚯蚓，其起点为 $X_0 =$(0,0)。在每个时刻 n，每个格点都处于两种状态之一——要么是一个洞，要么填有一粒土粒。在时刻 $n = 0$，(0,0) 是一个洞，其他每个位置都填满了土粒。令 $\mathcal{H}_n$ 表示时刻 n 的空洞集合。那么 $\mathcal{H}_0 = \{$(0,0)$\}$。

过程 $(X_n, \mathcal{H}_n)$ 是马尔可夫过程，其动态如下。设 $X_n =$(x_n, y_n)，且蚯蚓下一步向右移动，即 $X_{n+1} =$($x_n + 1, y_n$)。我们需要检查 X_n 的右侧是否有洞。令

$$\mathcal{X}_n^{\text{right}} = \{(x, y_n) : x > x_n\}.$$

若 $\mathcal{X}_n^{\text{right}} \cap \mathcal{H}_n = \emptyset$，则称蚯蚓在位置 $X_{n+1} =$($x_n + 1, y_n$) 处挖出了一个洞，并令 $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n \cup \{X_{n+1}\}$。若 $\mathcal{X}_n^{\text{right}} \cap \mathcal{H}_n \neq \emptyset$ 且 X_{n+1} 不是一个洞，则令蚯蚓在 X_{n+1} 处挖出一个洞，将前方的土壤推开，并消除其右侧最近的一个洞。若 $\mathcal{X}_n^{\text{right}} \cap \mathcal{H}_n \neq \emptyset$ 且 X_{n+1} 是一个洞，则既不创建也不消除任何洞。更确切地说，令 (x_*, y_n) $\in \mathcal{X}_n^{\text{right}} \cap \mathcal{H}_n$ 为具有最小 x 坐标的元素。然后令

$$\mathcal{H}_{n+1} = (\mathcal{H}_n \backslash \{(x_*, y_n)\}) \cup \{X_{n+1}\}.$$

在这种情况下，我们还看 y 到蚯蚓将洞从 (x_* y_n) to X_{n+1}.

如果蚯蚓在时间 $n+1$ 朝任何其他方向前进，则针对该方向的机制相同——检查蚯蚓前方是否有孔洞，并相应地更新孔洞。这就完成了过程的定义（X_n， $\mathcal{H}_n$）。

令 $\mathcal{F}_i$ 为由 X_0、X_1、.....、X_i 生成的 σ-域。注意，对于每个 i， $\mathcal{H}_i$ 都是 $\mathcal{F}_i$-可测的。

事件 A 的指示随机变量将记为 $\mathbb{I}$(A)。

令 H_i 表示在时间 i，蚯蚓在 $i \geq 1$处新挖出一个洞（即孔洞数量增加 1）这一事件的指示变量。设 $H_0 = 1$。令 S_n 表示

时间 n的孔洞总数。那么，

$$S_n = |\mathcal{H}_n| = \sum_{i=0}^{n} H_i.$$

本文旨在为 S_n 提供一个下界。以下是我们的主要结果。

定理 2.1. 对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geq \delta n^{3/4}) \geq 1 - \varepsilon.$$

3. Proofs

我们首先利用随机游走的贝尔林型估计，推导出 S_n 的期望下界。接着，我们将给出 S_n方差的上界。然后，我们将运用“二阶矩方法”及相关的帕莱-齐格蒙德不等式，结合这些估计。最后，我们将证明 S_n 不会出现过大波动，从而低于其期望的量级。

引理 3.1. 存在 $c_1 > 0$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[n^{-3/4} S_n\right] \geq c_1.$$

证明。 我们首先给出两个对证明至关重要的观察。第一，当且仅当在时刻 n 蚯蚓运动方向上没有洞时，蚯蚓会在时刻 $n+1$，即 $H_{n+1} = 1$，创建一个新洞。第二，对于任意 $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$，如果蚯蚓在时刻 n 之前或该时刻尚未到访 $(x,\ y)$，那么 $(x,\ y)$ 在时刻 n 不是一个洞。因此

$$\{H_{n+1} = 1\} = \{\text{在时刻 } n\text{，行进方向上没有洞}\} \supseteq \{\text{蚯蚓在时刻 } n \text{ 之前或该时刻未到访行进方向上的任何点}\}. \tag{3.1}$$

我们将以更精确的方式定义最后一个事件，并估计其概率。

记 $A_{n+1}^{\text{right}} = \{X_{n+1} - X_n = (1,\ 0)\}$，即 A_{n+1}^{right} 表示 X 在第 $(n+1)$ 步向右移动这一事件。我们将使用类似的记号： A_{n+1}^{left}， A_{n+1}^{up}， A_{n+1}^{down}。对于 i ={右、左、上、下}，

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}(A_{n+1}^{i}) \mid \mathcal{F}_n] = 1/4. \tag{3.2}$$

对所有 $0 \leq k \leq n$ 和 $a \geq 1\}$，令 $B_n^{\text{right}} = \{X_k - X_n \neq (a,0)$，即 B_n^{right}表示随机游走在时间n之前未访问过 X_n 右侧任何点这一事件。我们将使用类似的记号：B_n^{left},B_n^{up},B_n^{down}。注意，对于$i = \{$右、左、上、下，$B_n^i \in \mathcal{F}_n\}$。(3.1)右侧的事件可以表示为以下四个事件的并集，

$$\bigcup_{i=\{\text{left,right,up,down}\}} A_{n+1}^{i} \cap B_n^{i}.$$

因此，在以 $\mathcal{F}_n$为条件后，应用 (3.1) 和 (3.2)，并利用简单随机游走的对称性，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H_{n+1}] &\geq \sum_{i=\{\text{left,right,up,down}\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}(A^i_{n+1})\mathbb{I}(B^i_n)] \\ &= \sum_{i=\{\text{left,right,up,down}\}} \mathbb{E}[\mathbb{I}(B^i_n)]/4 = \mathbb{E}[\mathbb{I}(B^{\text{right}}_n)].\end{aligned} \tag{3.3}$$

对于固定的 n，令 $Y_i = X_{n-i} - X_n$ for $i = 0, 1, \ldots\ldots, n$，并注意到 Y是一个从 $Y_0 = (0, 0)$ 出发的简单随机游走。对于所有 $0 \leq k \leq n$和 $a \geq 1\}$，我们记 $C^{\text{right}}_n = \{Y_k \neq (a, 0)$，即 C^{right}_n 是指 $Y_0, \ldots\ldots, Y_n$ 没有访问正 x 轴这一事件。注意， $B^{\text{right}}_n = C^{\text{right}}_n$。根据 [Law13，(2.35)] 存在一个常数 $c_* > 0$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/4}\,\mathbb{E}[\mathbb{I}(C^{\text{right}}_n)] > c_*. \tag{3.4}$$

由此、事件 B^{right}_n与 C^{right}_n相等，以及 (3.3) 可推出

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/4}\,\mathbb{E}[H_{n+1}] \geq \liminf_{n\to\infty} n^{1/4}\,\mathbb{E}[\mathbb{I}(B^{\text{right}}_n)] = \liminf_{n\to\infty} n^{1/4}\,\mathbb{E}[\mathbb{I}(C^{\text{right}}_n)] > c_*.$$

因此，利用积分近似，对于某个 $c_1 > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[n^{-3/4}S_n\right] = \liminf_{n\to\infty} n^{-3/4}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[H_i] \geq \lim_{n\to\infty} n^{-3/4}\int_1^n c_* x^{-1/4}\,dx = c_1.$$

□

为了估计 S_n的方差，我们需要估计 $\mathbb{E}[H_iH_j]$。下述引理中的不等式 (3.5) 将用于推导上界。不等式 (3.6) 稍后将会用到。

引理 3.2. 对于任意 $0 \leq i \leq j$,

$$\mathbb{E}[H_j \mid \mathcal{F}_i] \leq \mathbb{E}[H_{j-i}], \tag{3.5}$$

$$\mathbb{P}(S_j \leq x \mid \mathcal{F}_i) \leq \mathbb{P}(S_{j-i} \leq x). \tag{3.6}$$

证明。 固定 $j \geq 0$和 $0 \leq i \leq j$。我们通过令 $X'_k = X_k$对所有 $k \geq i$ 和 $\mathcal{H}'_i = \{X_i\} \subseteq \mathcal{H}_i$成立，来定义 $\{(X'_k, \mathcal{H}'_k)\ k \geq i\}$。 $\mathcal{H}'_k$的动力学，也就是产生新孔洞的机制，与原始模型相同。换言之， X在时间 i 之前产生的所有孔洞都已被抹去；除此之外， X' 遵循的轨迹与X相同。

令 H'_k 为如下事件的指示变量：对于 $k > i$， X' 在时间 k 产生一个新孔洞。令 $H'_i = 1$。注意，对于 $k \geq i$， $H'_k \in \mathcal{F}_k$。由于抹去了 X产生的初始孔洞、时间平移以及马尔可夫性质，我们得到

$$\mathbb{E}[H'_j \mid \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[H_{j-i}]. \tag{3.7}$$

稍加思考即可看出，若 $\mathcal{H}'_k \subseteq \mathcal{H}_k$则 $\mathcal{H}'_{k+1} \subseteq \mathcal{H}_{k+1}$，这是完全初等的，因为两条蚯蚓中新孔洞的产生都由相同的步骤支配。回忆 $\mathcal{H}'_i \subseteq \mathcal{H}_i$。由归纳法，对于所有 $k \geq i$， $\mathcal{H}'_k \subseteq \mathcal{H}_k$。就在第 j 步之前， X 和 X' 位于同一位置，并且它们将在第 j 步朝同一方向前进。由于 $\mathcal{H}'_{j-1} \subseteq \mathcal{H}_{j-1}$，如果 X 在

下一步的方向上没有孔洞，那么 X' 在下一步的方向上也没有孔洞。因此，若 $H_j = 1$则 $H'_j = 1$。故 $H_j \le H'_j$。关于 $\mathcal{F}_i$ 取条件期望，并利用 (3.7)，我们得到

$$\mathbb{E}[H_j \mid \mathcal{F}_i] \le \mathbb{E}[H'_j \mid \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[H_{j-i}].$$

这就证明了（3.5）。

为证明（3.6），我们记 $S'_n = \sum_{k=i}^{n} H'_k = |\mathcal{H}'_n|$。基于与（3.7）相同的理由，有如下公式成立，

$$\mathbb{P}(S'_j \le x \mid \mathcal{F}_i) = \mathbb{P}(S_{j-i} \le x).$$

由于 $\mathcal{H}'_j \subseteq \mathcal{H}_j$，我们有 $S'_j = |\mathcal{H}'_j| \le |\mathcal{H}_j| = S_j$。因此，对 $\mathcal{F}_i$取条件期望，我们得到

$$\mathbb{P}(S_j \le x \mid \mathcal{F}_i) \le \mathbb{P}(S'_j \le x \mid \mathcal{F}_i) = \mathbb{P}(S_{j-i} \le x).$$

□

根据（3.5），我们可以将 S_n 展开为若干个 H_i之和，从而对其方差进行界定。然后，我们将使用Paley–Zygmund不等式来推导 S_n的下界。

引理3.3。 对于所有 $n \ge 0$ 和 $0 < \theta < 1$,

$$\mathbb{P}(S_n > \theta\,\mathbb{E}[S_n]) \ge \frac{(1-\theta)^2}{2}.$$

证明。 根据（3.5），对于任意 $0 \le i \le j$,

$$\mathbb{E}[H_i H_j \mid \mathcal{F}_i] = H_i\,\mathbb{E}[H_j \mid \mathcal{F}_i] \le H_i\,\mathbb{E}[H_{j-i}].$$

对两边取期望，得到

$$\mathbb{E}[H_i H_j] \le \mathbb{E}[H_i]\,\mathbb{E}[H_{j-i}].$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} H_i\right)^2\right] &\le 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\mathbb{E}[H_i H_j] \le 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{i+n}\mathbb{E}[H_i H_j] \\ &\le 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mathbb{E}[H_i]\,\mathbb{E}[H_j] = 2(\mathbb{E}[S_n])^2.\end{aligned}$$

根据 Paley–Zygmund不等式（参见 [FG97，第 5.1 节，推论 5] 或 [Pet07，（13）]），对于任意 $0 < \theta < 1$,

$$\mathbb{P}(S_n > \theta\,\mathbb{E}[S_n]) \ge (1-\theta)^2\frac{\mathbb{E}[S_n]^2}{\mathbb{E}[S_n^2]} \ge \frac{(1-\theta)^2}{2}.$$

□

结合引理3.1和引理3.3可知，以正概率， S_n 至少与 $\mathbb{E}[S_n]$同阶，而 $\mathbb{E}[S_n]$至少与 $n^{3/4}$同阶。我们将改进这一结果，并利用（3.6）证明该概率可以任意接近 1。

引理 3.4. 对于每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ 和 n_0 ，使得对于 $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}(S_n \leq \delta\, \mathbb{E}[S_n]) \leq \varepsilon.$$

证明。我们先给出证明的启发式概述。我们将把区间$[0, n]$ 等分为 m 个等长的子区间，其端点为 $t_i = i(n/m)$、 $0 \leq i \leq m$，其中$m \geq 1$ 将在稍后确定。在证明的主要部分，我们将假设 n 可被 m 整除，从而 t_i为整数。我们将利用（3.6）证明， S_{t_i} 大于$\delta\, \mathbb{E}[S_n]$; 无论事件 $\{S_{t_j} \geq \delta\, \mathbb{E}[S_n]\}$ 是否在 $j < i$之前发生，该结论成立的概率都有一个统一的下界，其中 δ 取决于 m。这意味着，当 m 增大时，概率$\{S_{t_m} \geq \delta\, \mathbb{E}[S_n]\}$ 以指数速度趋于 1。

固定任意的 $\varepsilon > 0$。为开始严格证明，我们对（3.5）的两边取期望，并取 $i = 1$ 和 $j = k + 1$ ，从而对所有 $k \geq 0$得到 $\mathbb{E}[H_k] \geq \mathbb{E}[H_{k+1}]$ 。由此以及期望的线性性可知，对任意正整数 m都有 $\mathbb{E}[S_{n/m}] \geq \mathbb{E}[S_n]/m$ 。取 $\delta = 1/(2m)$，得到

$$\mathbb{P}(S_n \leq \delta\, \mathbb{E}[S_n]) \leq \mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}[S_{n/m}]/2).$$

因此，只需找到一个 m ，使得 $\mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}[S_{n/m}]/2) \leq \varepsilon$。

回顾一下，对于 $0 \leq i \leq m$，有 $t_i = i(n/m)$，并令

$$A_i = \{S_{t_i} \leq \mathbb{E}[S_{n/m}]/2\} \in \mathcal{F}_{t_i}$$

对于 $0 \leq i \leq m$。注意到 $A_m = \{S_n \leq \mathbb{E}[S_{n/m}]/2\}$ ，因此我们只需证明$\mathbb{P}(A_m) \leq \varepsilon$。

我们有 $S_0 = 1$。容易看出，对于所有 $n \geq 1$， $\mathbb{P}(S_n = 2) > 0$ 。引理 3.1 表明，对于任意固定的 m ，存在 n_1 ，使得对于 $n \geq n_1$， $\mathbb{E}[S_{n/m}]/2 \geq 2$。这意味着，如果 $n \geq n_1$，则对于所有 $0 \leq i \leq m$ ，$\mathbb{P}(A_i) > 0$ 。

No注意，对于所有 $1 \leq i \leq m$ ，都有 $A_i \subseteq A_{i-1}$ ，因为 S_{t_i} 是非递减的。因此，

$$\mathbb{P}(A_m) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i \mid A_{i-1}). \tag{3.8}$$

对于任意 $1 \leq i \leq m$，由于 $A_{i-1} \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$，(3.6) 意味着

$$\mathbb{P}(A_i \mid A_{i-1}) = \mathbb{P}(S_{t_i} \leq \mathbb{E}[S_{n/m}]/2 \mid A_{i-1}) \leq \mathbb{P}(S_{t_1} \leq \mathbb{E}[S_{n/m}]/2) = \mathbb{P}(A_1). \tag{3.9}$$

由引理 3.4 及 $\theta = 1/2$，可得 $\mathbb{P}(A_1) \leq 1 - 1/8 = 7/8$。由此以及 (3.8) 可推出 (3.9)

$$\mathbb{P}(A_m) \leq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_1) \leq (7/8)^m.$$

现在令 $m > \log(\varepsilon)/\log(7/8)$，并取 $\delta < 1/(2m)$，得到 $\mathbb{P}(A_m) \leq \varepsilon$。由此可得$\mathbb{P}(S_n \leq \delta\, \mathbb{E}[S_n]) \leq \varepsilon$ ，其中 $n \geq n_1(m)$ 可被 m 整除。

我们在前面的证明中指出， $\mathbb{E}[H_k] \geq \mathbb{E}[H_{k+1}]$ 对所有 $k \geq 0$ 都成立。这意味着，对于 $0 \leq k \leq n$， $(n/(n-k))\, \mathbb{E}[S_{n-k}] \geq \mathbb{E}[S_n]$ 。任取 $n \geq n_1(m) + m$ ，并令

$0 \le k \le m-1$ 使得 $n-k$ 能被 m 整除。令 $\delta' = \delta n_1(m)/(n_1(m)+m)$，使得对于所有 $n \ge n_1(m)+m$ 和 $0 \le k \le m-1$，$\delta'(n/(n-k)) \le \delta$。那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \le \delta' \mathbb{E}[S_n]) &\le \mathbb{P}(S_{n-k} \le \delta' \mathbb{E}[S_n]) \le \mathbb{P}(S_{n-k} \le \delta'(n/(n-k)) \mathbb{E}[S_{n-k}]) \\ &\le \mathbb{P}(S_{n-k} \le \delta \mathbb{E}[S_{n-k}]) \le \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了该引理，其中用 δ' 代替 δ。 □

定理 *2.1* 的证明。任取 $\varepsilon > 0$。由引理 3.4 可知，存在 $\delta_1 > 0$，使得 $\mathbb{P}(S_n \ge \delta_1 \mathbb{E}[S_n]) \ge 1-\varepsilon$ 对充分大的 n 成立。引理 3.1 意味着存在 $c_2 > 0$，使得 $\mathbb{E}[S_n] \ge c_2 n^{3/4}$ 对充分大的 n 成立。因此，对于 $\delta = c_2\delta_1$,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \ge \delta n^{3/4}) \ge \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \ge (\delta/c_2)\mathbb{E}[S_n]) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \ge \delta_1 \mathbb{E}[S_n]) \ge 1-\varepsilon.$$

□

注 3.5。我们的证明可以原封不动地应用于维度高于 2 的类似模型，但高维情形下，该模型和主要结果似乎不那么有趣。关键的估计是 (3.4)。在 3 维中，由 [Law13, (2.35)]存在一个常数 $c_* > 0$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} (\log n)^{1/2} \mathbb{E}[\mathbb{I}(C_n^{\text{right}})] > c_*.$$

简单随机游走在高于 2 的维度中是暂留的，因此对于 4 维及更高维度,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}(C_n^{\text{right}})] > c_*.$$

因此，定理 2.1 可以推广到更高维度 d，如下所示。对于每个$\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \ge \delta n(\log n)^{-1/2}) \ge 1-\varepsilon, \qquad d = 3, \\ &\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \ge \delta n) \ge 1-\varepsilon, \qquad d \ge 4.\end{aligned}$$

4. Open problems and conjectures

蚯蚓模型非常简单，但似乎很难分析。我们将介绍一些基于模拟的模拟结果、开放问题和猜想。

4.1. 空洞集合的维度。我们对蚯蚓所形成的空洞集合进行的模拟表明，$S_n \sim n^\alpha$ 且 $\alpha \approx 0.79$。这与 BHP13、BBF+22] 中的模拟结果一致。图 1 展示了在 $n = 10_4, 3\cdot 10^4, 10_5, 3\cdot 10^5, 10_6, 3\cdot 10^6, 10_7$ 时对 S_n 进行模拟的结果。对于每个 n，我们生成了 10 个独立同分布样本 S_n，并计算其均值 μ_n（$\mathbb{E}\, S_n$ 的估计值）。$(\log(\mu_n), \log(n))$ 的回归直线为 $y = 0.79x + 0.06$。图 1 展示了 $(\log(\mu_n), \log(n))$ 的取值图以及回归直线。

猜想 4.1. $\liminf_{n\to\infty} \log(\mathbb{E}[S_n])/\log(n) > 3/4$.

上述猜想是下面这个显然非常困难的问题的一个较弱版本。

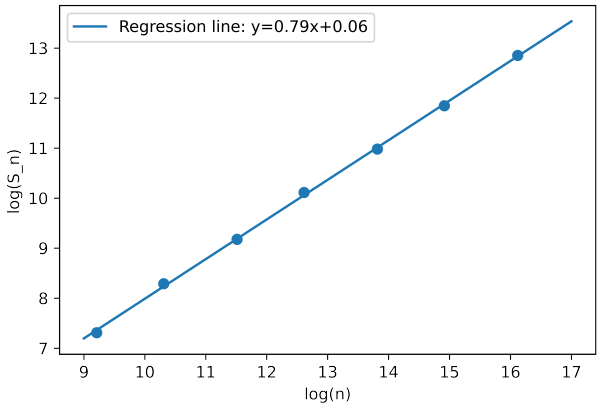

FIGURE 1. $(\log(\mu_n), \log(n))$ 的图以及回归直线 $y = 0.79x + 0.06$。

问题4.2。 证明该极限存在，并求出其值：$\lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{E}[S_n])/\log(n)$。

4.2. **孔洞位置**。 图 2 显示了经过 $n = 10^8$ 步模拟得到的孔洞位置，即集合 $\mathcal{H}_n$。

问题 m 4.3. (i) 求 $\mathcal{H}_n$ 的连通分支大小分布。
(ii) 求蚯蚓轨迹中 $\mathcal{H}_n$ 的“补集”（即 $\bigcup_{1\le k\le n}\{X_k\} \setminus \mathcal{H}_n$）的连通分支大小分布。

4.3. **中心极限定理**。 鉴于我们甚至还不了解 S_n 的均值，以下关于 S_n 的中心极限定理的评论具有很强的推测性。尽管如此，我们还是在图 3 中展示了模拟结果。

我们设定 $n = 10{,}000$，并生成了 2,000 个 S_n 的独立同分布样本。图 3 中的直方图表明，中心极限定理可能适用于 S_n。柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验（见 [MJ 51]）得出的统计量为 0.0214，对应的 p 值为 0.315，这支持中心极限定理猜想。

REFERENCES

[BBF+22] Clayton Barnes、Krzysztof Burdzy、Alex Forney、Zach Dingels、Xiyi Yan 和 Ran Zhao。布朗蚯蚓的豪斯多夫维数（WXML 2017 年冬季报告），2022 年。ArXiv 2207.11625。[BHP13] Krzysztof Burdzy、Robert Ho-lyst 和 -Lukasz Pruski。蚯蚓的分形轨迹。物理评论 *E*, 87(5)：052120，2013 年。[BMS02] Mireille Bousquet-M´elou 和 Gilles Schaeffer。裂平面上的游走。概率论相关领域，124(3)：305–344，2002 年。[BW03] Itai Benjamini 和 David B. Wilson。激励随机游走。电子概率通讯，8：86–92，2003 年。[FG97] Bert Fristedt 和 Lawrence Gray。概率论的现代方法。概率及其应用。Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1997 年。[Law13] Gregory F. Lawler。随机游走的交叉。现代 Birkh¨auser 经典丛书。Birkh¨auser/Springer，纽约，2013 年。1996 年版重印。

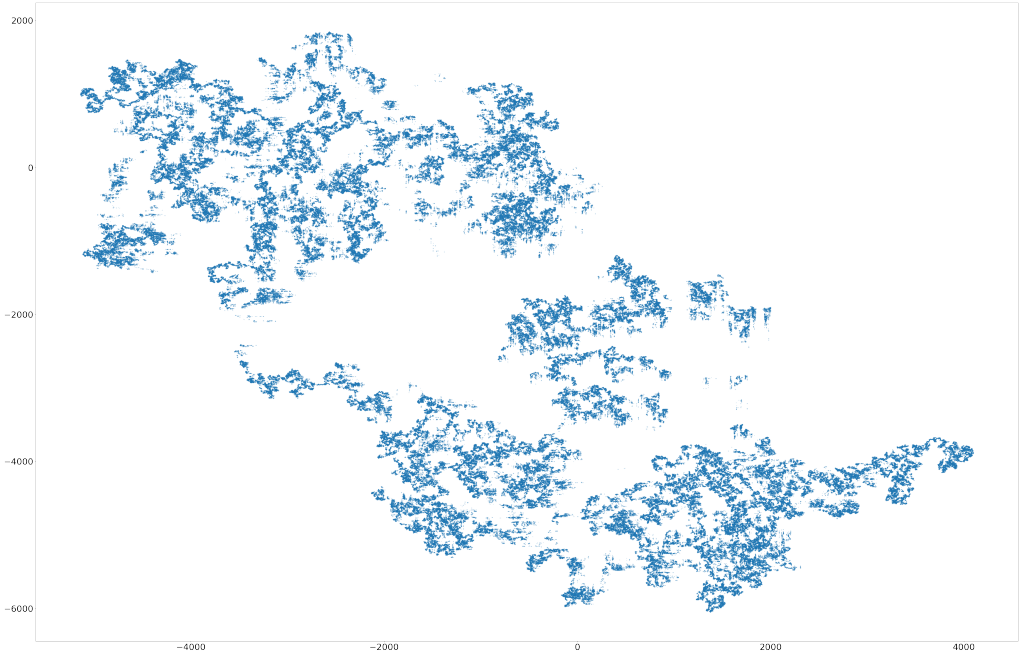

FIGURE 2. 经过 $n = 10^8$ 步后孔洞的位置 $\mathcal{H}_n$。

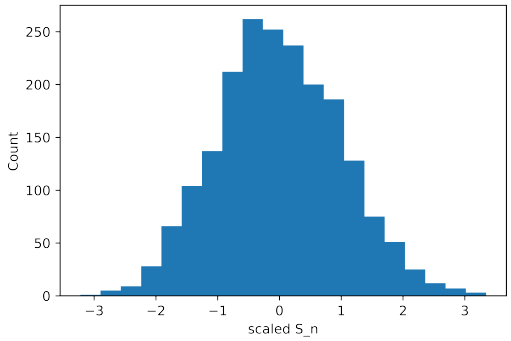

FIGURE 3. S_n 个独立同分布样本（共 2,000 个）的归一化直方图，样本数为 $n = 10,\ 000$。

[MJ51] Frank J Massey Jr. 拟合优度的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验。美国统计学会杂志，46(253)：68–78，1951 年。[Pet07] Valentin V. Petrov。关于尾概率的下界。统计规划与推断杂志，137(8)：2703–2705，2007 年。

电子邮箱地址: burdzy@uw.edu, fengshi@uw.edu

Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195电子邮箱地址: shiraishi@acs.i.kyoto-u.ac.jp

Department of Advanced Mathematical Sciences, Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto, 606-8501