arXiv:2303.02747v2 [quant-ph] 8 Jul 2024

开放费米子链中的耗散动力学

A. I. Karanikas[1] 和 G. E. Pavlou[2]

[1] 雅典国立卡波季斯特里亚大学，物理系，核与粒子物理组，大学城，伊利西亚*15771*，希腊雅典

[2] 应用与计算数学研究所（*IACM*），希腊研究与技术基金会（*FORTH*），*IACM/FORTH*，*GR-71110*，希腊伊拉克利翁

（收稿日期：2023年3月10日）

摘要。通过将费曼–弗农方法与非平衡 Keldysh–Schwinger 形式体系相结合，我们构造了约化生成泛函，由此可通过施加适当的泛函导数，直接导出开放费米子系统的所有时间依赖关联函数。作为一个具体示例，我们研究横场伊辛模型，推导系统稳态下的协方差矩阵，并考察其临界行为。

1. 引言

环境对开放量子系统不可避免的影响，对于理解其物理性质以及处理实际应用至关重要。当系统置于受控或不受控的环境中时，由此产生的退相干是存储和处理量子信息面临的主要问题之一。在这些系统中，出于技术和理论方面的原因，具有短程相互作用的费米子链和自旋链发挥着核心作用，因为即使在简单的一维情形下，它们的动力学也展现出相当有趣的复杂性。对于哈密顿量关于费米或玻色自由度呈二次型的孤立系统，人们已对其进行了广泛研究，因为这类系统可以精确求解，而其基态的结构为理解拓扑特性的量子相变等高度非平凡现象提供了基础[1, 2]。然而，将这类系统嵌入热浴中，会显著改变系统关联函数的行为；即使孤立系统完全可解，这种变化也难以计算。对于孤立系统，其基态结构以及该态与激发态之间的能隙，对系统性质起着核心作用 [3]。对于开放系统，基态对应的是所谓的稳态，即在无限长时间极限下约化密度矩阵趋于的状态 [4, 5]。研究稳态的量子性质以及系统趋近稳态的速率，出于理论和实践方面的原因都至关重要。人们已采用驱动方法来处理量子信息

处理问题 [6, 7, 8, 9]。通常在林德布拉德主方程框架下研究这一问题，其中稳态可定义为林德布拉德超算符零本征值对应的（右）本征态 [10, 11]。

在近期的论文中 [12, 13], ，我们提出了一种方案，将费曼–维农影响泛函技术与非平衡 Keldysh 形式主义相结合。该方法能够直接计算环境对开放玻色或费米量子系统关联函数的影响。在这种方法中，关注的重点不是约化密度矩阵，而是关联函数本身。这使得我们能够计算包含多个时间变量的函数 [13]。

在本研究中，我们运用这一技术探究一维二次费米子链的动力学；这类链在孤立时可以映射为自旋链模型。计算的重点是子系统协方差矩阵 [5], ，这一量刻画了约化密度矩阵的性质。对于二次情形，我们求得系统弛豫至的稳态，以及系统趋近该稳态的速率。

本文结构如下：第 2 节简要介绍我们形式体系的基本要素，其特点是引入约化生成泛函。该泛函写成关于路径的相干态路径积分，这些路径由 Keldysh-Schwinger 复时间变量参数化。我们用一组费米子谐振子模拟环境，并假设环境与系统之间存在线性相互作用，从而将环境的自由度积分掉。由此得到的量称为影响泛函，它完整地表达了环境对系统动力学的影响。借此，我们构造出约化生成泛函，通过泛函微分可以直接计算协方差矩阵以及任意约化关联函数。本节的结果相当普遍，不依赖于所研究系统的具体类型。

第 3 节中，我们将上述形式体系应用于这样一个系统：用马约拉纳变量表示时，其哈密顿量为二次型；并推导出生成泛函的一般形式，由此可以直接计算至关重要的协方差矩阵。我们还讨论了马尔可夫极限，下一节的解析计算正是基于这一极限。

第4节讨论一个费米子系统，该系统在孤立时具有量子相变的特征。在本文的形式体系下，我们考察它作为复合系统一部分时的性质。它所具有的格点平移对称性有助于对相应的哈密顿量进行对角化，从而为第3节所述计算提供了一个具体示例。我们推导出协方差矩阵，并考察其在稳态极限下的解析性质。本节的主要结果证实，孤立系统基态关联中的非解析性在开放系统的稳态中依然存在，这表明量子关联可能持续存在。

最后，我们在第5节给出本研究的结论。在附录A中，我们介绍正文中省略的一些技术细节。

2. 约化生成泛函

我们考虑一个由两部分组成的复合费米子系统：子系统S及其环境E。孤立的$S+E$系统的动力学由如下形式的哈密顿量控制：

$$\hat{H}=\hat{H}_S\otimes\hat{I}_E+\hat{I}_S\otimes\hat{H}_E+\hat{H}_I \tag{2.1}$$

上一个表达式中的哈密顿量算符由费米子产生算符和湮灭算符定义：

$$\hat{H}_S=\hat{H}\left(\hat{a}_S^{\dagger},\hat{a}_S\right),\quad \hat{H}_E=\hat{H}\left(\hat{a}_E^{\dagger},\hat{a}_E\right),\quad \hat{H}_I=\hat{H}\left(\hat{a}_S^{\dagger},\hat{a}_S;\hat{a}_E^{\dagger},\hat{a}_E\right) \tag{2.2}$$

我们采用的物理图像如下：在时刻$t_{in.}$之前，环境与系统彼此独立$\left(\hat{H}_I\left(t\le t_{in.}\right)=0\right)$，复合系统的密度算符可以表示为乘积形式$\hat{\rho}(t_{in.})=\hat{\rho}_E(t_{in.})\otimes\hat{\rho}_S(t_{in.})$。在时刻$t_{in.}$之前，环境处于温度$T=\beta^{-1}$下的平衡态，这意味着$\hat{\rho}_E=(Z_E(\beta))^{-1}\exp\left(-\beta\hat{H}_E\right)$。相互作用初始化后，复合系统的各部分发生纠缠，约化时间演化变为非幺正。

作为探测系统动力学的手段，人们通常考虑如下形式的关联函数：

$$G_{jk}(\rho;t_2,t_1)=Tr\left[\hat{\rho}(t_{in.})\hat{T}\left(\hat{a}_{S,j}^{\dagger}(t_2)\,\hat{a}_{S,k}(t_1)\right)\right]. \tag{2.3}$$

在最后一个表达式中，$\hat{a}_{S,\ j}(t)$是指系统的费米子海森堡算符，下标j是格点或空间指标，$\hat{\rho}(t_{in.})$是复合系统的初始密度算符，$\hat{T}$是时间排序算符，而迹运算则同时针对环境和系统的自由度。

毋庸置疑，计算式(2.3)以及任何约化关联函数都不是一项简单的任务。无论是解析方法还是数值方法，所有用于解决这一问题的努力都局限于林德布拉德主方程[10, 11]的框架内。在本研究中，我们将采用一种更一般的形式体系来研究系统动力学：通过引入一个泛函，并对其施加适当的导数，以生成我们所关注的约化函数。

为建立背景，我们首先指出，海森堡场算符的关联函数具有前向-后向时间结构（见式(2.3)）。只要系统处于平衡态且是孤立的，通过假设非相互作用真空的绝热演化，便可以很容易地将这一结构纳入考虑[14, 15]。然而，当系统处于非平衡态或是开放系统时，绝热假设便不再成立。在

这种情况下，只能通过非平衡 Keldysh-Schwinger 形式体系来分析其动力学。 [16, 17]。在当前情况下，我们考察一个与其周围环境接触的量子系统，换句话说，我们关注的是孤立复合系统中一个（可能很小的）部分。显然，这种情况与非平衡动力学有许多相似之处。考虑到这一点，我们在[12] 中提出了一种基于 Keldysh-Schwinger 关联函数约化版本的形式体系。该形式体系是在 Keldysh 时间轮廓上对 Feynman-Vernon 技术的扩展，其重点是计算关联函数，而不必确定约化密度矩阵本身。

该方案首先在（超完备）相干态基中解释公式（2.3）中的迹运算：对于系统为 $|\mathbf{z}_S\mathbf{i} \equiv \otimes_{j\in S}|z_j\rangle$，对于环境为 $|\boldsymbol{\zeta}_E\mathbf{i} \equiv \otimes_{\mu\in E}|\zeta_\mu\rangle$，随后构造系统关联函数的生成泛函。

除去关于定义相干态上的路径积分之特殊性的细节外，上述构造的关键在于：进入生成泛函的路径沿所谓的 Keldysh 时间轮廓 [16, 17] 进行参数化。

Keldysh 时间轮廓是在复平面上沿着一条闭合轮廓定义的P，该轮廓环绕着从 $t_{in.+} \equiv t_{in.} + i0$ 到 $t_{in.-} \equiv t_{in.} - i0$的实 t 轴。轮廓由两条直线组成。第一条记为 L_+，连接点$t_{in.+}$ 与任意时刻 $T_+ = T + i0$。沿这条线，时间变量记为 t_+。第二条线连接 $t_- = T - i0$，沿此线时间记为 t_-，该线定义为 L_-。对于热初态，轮廓通过一条复时间线延伸；该线平行于虚轴，从 $t_{in.-}$ 延伸至 $t_{in.} - i\beta$，其中 β^{-1} 是相应热态的温度。这第三条线记为 L_β，而扩展后的轮廓记为 C。

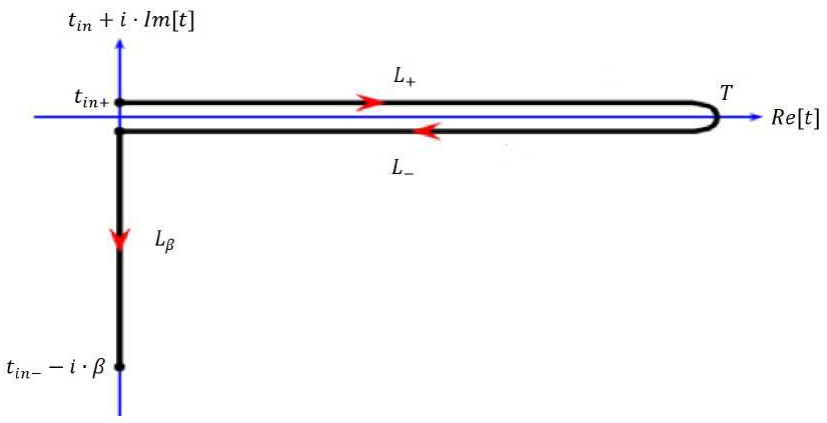

图 1：Keldysh 轮廓

沿着这一构型自然形成一种排序：沿 L_+ 的时刻被视为早于沿 L_-的时刻，而后者又被视为早于沿 L_β 的时刻（见图 1）。在接受参考文献[12, 13]中给出的技术细节的基础上，我们在此引用约化生成泛函的结果：

$$Z_S\left[\bar{\mathbf{J}},\mathbf{J}\right]=\int d^2\mathbf{z}_S d^2\mathbf{z}'_S\left\langle -\mathbf{z}_S\right|\hat{\rho}_S\left(t_{in.+}\right)\left|\mathbf{z}'_S\right\rangle \times\int\limits_{\mathbf{z}(t_{in.+})=\mathbf{z}_S}^{\bar{\mathbf{z}}(t_{in.-})=\bar{\mathbf{z}}'_S} D^2\mathbf{z}\left(t_P\right)e^{iS_S[\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}]-E(\bar{\mathbf{z}}_S,\mathbf{z}_S)+i\int\limits_P dt_P\left(\bar{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{J}\right)}I_E\left[\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}\right]. \tag{2.4}$$

此处需要对最后一个表达式作出说明，以便理解其含义：路径积分中的格拉斯曼场 $\mathbf{z}(t_P)\equiv\mathbf{z}_P\left(t\right)$ 是沿 Keldysh轮廓 P 定义的（假设系统处于零温）：

$$\mathbf{z}\left(t_P\right)=\left\{\begin{array}{l}\mathbf{z}\left(t_+\right)\equiv\mathbf{z}_+\ \text{ along }\ L_+\\ \mathbf{z}\left(t_-\right)\equiv\mathbf{z}_-\ \text{ along }\ L_-\end{array}\right. . \tag{2.5}$$

这些变量被视为相互独立，并分别进行积分。作用量 S 指系统，其形式如下：

$$S_S=\int\limits_P dt_P\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{z}\right)-H_S\left(\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}\right)\right]. \tag{2.6}$$

在式 (2.4) 中，作用量还包含表面项

$$E\left(\bar{\mathbf{z}}'_S,\mathbf{z}_S\right)=\frac{1}{2}\left[\left|\bar{\mathbf{z}}'_S\right|^2+\left|\mathbf{z}_S\right|^2\right]-\frac{1}{2}\left[\bar{\mathbf{z}}'_S\cdot\mathbf{z}\left(t_{in.-}\right)+\bar{\mathbf{z}}\left(t_{in.+}\right)\cdot\mathbf{z}_S\right]. \tag{2.7}$$

生成泛函通过因子 $\mathrm{h}-\mathbf{z}_S|\hat{}\rho_S(t_{in.+})\ \left|\mathbf{z}'_S\right\rangle$依赖于系统的初态。当系统初始处于基态时，$\hat{}\rho_S\left(t_{in.+}\right)=|GS\mathrm{ih}GS|$，该因子与表面项一同被积分掉，生成泛函便化为更简单的形式：

$$Z_S^{(0)}\left[\bar{\mathbf{J}},\mathbf{J}\right]=\int D^2\mathbf{z}\left(t_P\right)e^{iS_S[\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}]+i\int\limits_P dt_P\left(\bar{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{J}\right)}I_E\left[\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}\right]. \tag{2.8}$$

在式 (2.4) 中加入了源，以便通过泛函微分得到系统的关联函数。例如，关联函数 (2.3) 可以利用以下公式导出：

$$G_{jk}\left(\rho;t_2,t_1\right)=\left.\frac{\delta^2\ln Z_S^{(0)}}{\delta J_j\left(t_{1+}\right)\delta\bar{J}_k\left(t_{2+}\right)}\right|_{J=0}. \tag{2.9}$$

方程（2.4）中出现的泛函 I_E，是在迹掉环境自由度后得到的。正是它使我们将 Z_S 视为约化的。它

体现了环境对系统动力学的影响，其意义与计算约化密度矩阵时的费曼–弗农影响泛函相同。它定义为

$$I_E\left[\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}\right]=\frac{1}{Z_E\left(\beta\right)}\int\limits_{AP}D\boldsymbol{\zeta}\left(t_C\right)e^{i\int\limits_C dt_C\left(\bar{\boldsymbol{\xi}}\cdot\dot{\boldsymbol{\zeta}}-H_E\left(\bar{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\zeta}\right)\right)-i\int\limits_C dt_C H_I\left(\bar{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\zeta};\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}\right)}. \tag{2.10}$$

这里，路径沿完整的 Keldysh轮廓 $C=P\cup L_\beta$参数化，并约定热分支 L_β上不存在相互作用。反周期边界条件由费米子迹运算诱导。正如预期的那样，计算影响泛函并非易事。在本工作中，我们采用一个简化假设：环境可由一组与系统线性相互作用的（费米子）谐振子模拟：

$$\hat{H}_E=\sum_\mu E_\mu\left(\hat{a}^\dagger_{E,\mu}\hat{a}_{E,\mu}-\frac{1}{2}\right),\quad \hat{H}_I=\sum_{j\in S,\mu\in E}\left(\lambda_{j\mu}\hat{a}^\dagger_{E,\mu}\hat{a}_{S,j}+\bar{\lambda}_{j\mu}\hat{a}^\dagger_{S,j}\hat{a}_{E,\mu}\right). \tag{2.11}$$

这种相互作用导致费米子数不守恒，并产生我们所关注的耗散效应。在这种情况下，可以精确计算影响泛函 [13]:

$$I_E=C_E^{-1}\exp\left[-\int\limits_P dt_P\int\limits_{P'}dt'_{P'}\bar{\mathbf{z}}\left(t_P\right)\boldsymbol{\Delta}\left(t_P-t'_{P'}\right)\mathbf{z}\left(t'_{P'}\right)\right]. \tag{2.12}$$

时间积分中指标的不同，表明最后一个表达式中的时间参数可以沿 Keldysh轮廓的不同分支变化。式 (2.12) 中出现的常数 $C_E^{-1}=\hat{\mathbf{I}}_{\mu\in E}\,2\cosh\left(\beta E_\mu/2\right)$，对于计算关联函数并无意义。关键量是矩阵元 $\left(\boldsymbol{\Delta}\right)_{jk}=\Delta_{jk}$，其形式为 [13]:

$$\begin{aligned}\Delta_{jk}\left(t_P-t'_{P'}\right)&=\sum_{\mu\in E}\bar{\lambda}_{j\mu}\lambda_{k\mu}\left[\Theta\left(t_P-t'_{P'}\right)-\frac{1}{1+e^{\beta E_\mu}}\right]e^{-i\left(t_P-t'_{P'}\right)E_\mu}=\\&=\int\limits_0^\infty dE D_{jk}\left(E\right)\left[\Theta\left(t_P-t'_{P'}\right)-\frac{1}{1+e^{\beta E}}\right]e^{-i\left(t_P-t'_{P'}\right)E}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

这里我们定义：

$$D_{jk}(E)=\sum_{\mu\in E}\bar{\lambda}_{j\mu}\lambda_{k\mu}\delta\left(E-E_{\mu}\right). \tag{2.14}$$

系统-环境相互作用最一般的形式通常写作 $\hat{\mathrm{I}}\otimes\hat{\mathrm{E}}_{\alpha}$，其中 $\hat{\mathrm{S}}_{\alpha}$ 和 $\hat{\mathrm{E}}_{\alpha}$ 分别是作用于系统 α 和环境的算符。在当前情况下，这意味着环境的每个格点都与线性组合 $\hat{a}_{S}^{eff}{}_{,\mu}=\hat{\mathrm{I}}\sum_{j\in S}\lambda_{j\mu}\hat{a}_{S,j}$ 相互作用，这一事实会在嵌入系统中诱导出额外的相互作用。等价地，在不失一般性的情况下，可以通过如下写法将其纳入考虑：

$$\bar{\lambda}_{j\mu}\lambda_{k\mu}=g_{jk}\left|\gamma_{\mu}\right|^{2},g_{jk}=\bar{g}_{kj} \tag{2.15}$$

显然，系数 g_{jk} 表征了由环境诱导的系统格点 j，k 之间相互作用的强度。两个极端取值 $g_{jk}=g\delta_{jk}$ 和 $g_{jk}=g\ \forall j,\ k$ 分别对应这样的情形：前者中，系统的每个格点都独立地与环境相互作用；后者中，系统的所有格点彼此以相同强度相互作用，而不受它们之间距离的影响。

因此，环境的影响如式 (2.12) 所示，它对生成泛函的贡献通常在空间和时间两个时空指标上都是非局域的。将式 (2.12) 代入式 (2.8)，我们得到本研究计算所需使用的表达式：

$$Z_{S}^{(0)}\left[\bar{\mathbf{J}},\mathbf{J}\right]=C_{E}^{-1}\int D^{2}\mathbf{z}\left(t_{P}\right)e^{iS_{S}[\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}]+iS_{INF.}[\bar{\mathbf{z}},\mathbf{z}]+i\int_{P}dt_{P}\left(\bar{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{J}\right)} \tag{2.16}$$

with

$$S_{INF.}=i\int_{P}dt_{P}\int_{P'}dt'_{P'}\bar{\mathbf{z}}\left(t_{P}\right)\mathbf{\Delta}\left(t_{P}-t'_{P'}\right)\mathbf{z}\left(t'_{P'}\right). \tag{2.17}$$

原则上，至少当系统的哈密顿量为二次型时，可以精确计算式 (2.16) 中的生成泛函。在这种情况下，协方差矩阵也可以精确计算。我们将在下一章讨论这个问题。此处值得注意的是，通过（约化）生成泛函，可以计算如下形式的关联函数：$\left\langle \hat{O}_{1,\ s}\left(t_{1}\right)\hat{O}_{2,\ s}\left(t_{2}\right).....\hat{O}_{n,\ s}\left(t_{n}\right)\right\rangle_{\rho}$。这与基于 Lindblad方程 的计算形成对照，后者考虑的是仅包含一个时间变量 [18] 的关联函数。

3. 二次哈密顿量

本章关注其动力学基于二次费米子哈密顿量的系统。将它们改写为实马约拉纳场的形式会很方便，

这不仅因为马约拉纳场是定义费米子路径积分的基础 [13] ，还因为这是对相关哈密顿量进行对角化的标准形式 [1, 2]。无论如何，在本文中，物理自由度是费米子，而马约拉纳变量则构成了一种通过正则变换实现的便捷变量变换。基于这一分析，我们写出：

$$H_S = \frac{i}{4}\sum_{j,k=1}^{N}\sum_{u,v=0,1}\gamma_{j,u}A_{ju,kv}\gamma_{k,v} = \frac{i}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2N}\gamma_\alpha A_{\alpha\beta}\gamma_\beta \equiv \frac{i}{4}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}. \tag{3.1}$$

最后一个表达式中出现的马约拉纳变量按以下规则定义：

$$\gamma_{2j-1} = \bar{z}_{S,j} + z_{S,j} \equiv \gamma_{j,0}, \quad \gamma_{2j} = i\left(\bar{z}_{S,j} - z_{S,j}\right) \equiv \gamma_{j,1}. \tag{3.2}$$

在式 (3.1) 中，我们采用了文献 [5] $\alpha = (j, u)$ 中的紧凑记号，其中 $j = 1, \ldots\ldots, N$ 以及 $u = 0, 1$。因此，在本节中，向量和矩阵定义在一个 $2N$ 维空间中：

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2N-1}, \gamma_{2N}) = \left(\gamma_{1,0}, \gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{N,0}, \gamma_{N,1}\right). \tag{3.3}$$

$2N \times 2N$ 反对称矩阵 $\mathbf{A} \doteq A_{\alpha\beta} = A_{jk,\,uv} = -A_{kj,\,vu} = -A_{\beta\alpha}$ 描述系统中各格点之间的相互作用。在二次情形下，通过极小化作用量，可以精确计算生成泛函 (2.16)：

$$S = S_S + S_{INF.} + S_J. \tag{3.4}$$

由于哈密顿量具有式 (3.1) 的形式，用马约拉纳变量表示 S 较为方便：

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{i}{4}\int_P dt_P \boldsymbol{\gamma}(t_P)\left(\mathbf{I}\partial_{t_P} - \mathbf{A}\right)\boldsymbol{\gamma}(t_P) + \frac{i}{4}\int_P dt_P \int_{P'} dt'_{P'}\boldsymbol{\gamma}(t_P)\,\mathbf{D}\left(t_P, t'_{P'}\right)\boldsymbol{\gamma}\left(t'_{P'}\right) \\ & + \frac{1}{2}\int_P dt_P \mathbf{f}(t_P)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t_P). \end{aligned} \tag{3.5}$$

在最后一个表达式中，我们引入了源：

$$f_{j,0} = \bar{J}_j - J_j, \quad f_{j,1} = i\left(\bar{J}_j + J_j\right) \tag{3.6}$$

并且我们定义了

$$\mathbf{D} \doteq D_{\alpha\beta} = D_{ju,kv} = \Delta_{jk}\left(1 - \sigma^y\right)_{uv}. \tag{3.7}$$

通过对式（3.5）求极小值，我们得到以下“经典”方程：

$$\left(\mathbf{I}\partial_{t_P}-\mathbf{A}\right)\boldsymbol{\gamma}^{cl\cdot}\left(t_P\right)+\int_{P'}dt'_{P'}\tilde{D}\left(t_P,t'_{P'}\right)\boldsymbol{\gamma}^{cl\cdot}\left(t'_{P'}\right)=-i\mathbf{f}\left(t_P\right) \tag{3.8}$$

其中

$$\tilde{D}_{\alpha\beta}\left(t_P,t'_{P'}\right)=\frac{1}{2}\left(D_{\alpha\beta}\left(t_P,t'_{P'}\right)-D_{\beta\alpha}\left(t'_{P'},t_P\right)\right)=-\tilde{D}_{\beta\alpha}\left(t_P,t'_{P'}\right). \tag{3.9}$$

将格林函数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ 引入为格林方程的因果解

$$\int_{P''}dt''_{P''}\left[\left(\mathbf{I}\partial_{t_P}-\mathbf{A}\right)\delta\left(t_P-t''_{P''}\right)+\tilde{\mathbf{D}}\left(t_P,t''_{P''}\right)\right]\boldsymbol{\Gamma}\left(t''_{P''},t'_{P'}\right)=-\mathbf{I}i\delta\left(t_P-t'_{P'}\right). \tag{3.10}$$

生成泛函 (2.16) 具有如下形式：

$$Z_S^{(0)}\left[\mathbf{f}\right]=C_E^{-1}\exp\left[\frac{i}{4}\int_{P'}dt'_{P'}\int_{P}dt_P\mathbf{f}\left(t_P\right)\boldsymbol{\Gamma}\left(t_P,t'_{P'}\right)\mathbf{f}\left(t'_{P'}\right)\right]. \tag{3.11}$$

显然，只要得到方程 (3.10) 的解和生成泛函 (3.11)，就可以通过对源进行酉变换，计算系统的所有关联函数。

在本研究中，我们关注实反对称协方差矩阵，其定义为 [5]:

$$C_{jk,uv}\left(t\right)=\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\left(t\right)\frac{i}{2}\left[\hat{\gamma}_{j,u},\hat{\gamma}_{k,v}\right]\right\}=\mathrm{Tr_S}\left\{\hat{\rho}_S^R\left(t\right)\frac{i}{2}\left[\hat{\gamma}_{j,u},\hat{\gamma}_{k,v}\right]\right\}. \tag{3.12}$$

该表达式的关键要素是约化密度矩阵

$$\hat{\rho}_S^R\left(t\right)=Tr_E\left\{e^{-i(t-t_{in.})\hat{H}}\hat{\rho}\left(t_{in.}\right)e^{i(t-t_{in.})\hat{H}}\right\} \tag{3.13}$$

在当前情况下，它是一个高斯态，因此其所有性质都编码在协方差矩阵 (3.12) 中。

了解协方差矩阵后，便可以研究一些在物理上具有重要意义的问题。其中最具挑战性的问题之一，是关联函数因退相干而减弱的速率。与此密切相关的是约化密度矩阵趋近于所谓的稳态，$\hat{\rho}_S^R\left(t\right)\overrightarrow{t\to\infty}\hat{\rho}_{S,}^R0$，以及协方差矩阵随后趋近于相应的稳态协方差：$C_{jk,uv}(t)\underset{t\to\infty}{\to}C(0)_{jk,uv}$。在热力学极限 $N\to\infty$ 下，了解这些函数的

解析结构具有重要意义，因为它可以揭示可能存在的量子相变。

协方差矩阵可通过对生成泛函 (3.11) 依次求泛函导数，直接计算如下：

$$C_{jk,uv}\left(t\right)=-4i\left.\frac{\delta^{2}\ln Z_{S}^{(0)}}{\delta f_{ju}\left(t_{+}\right)\delta f_{kv}\left(t_{+}\right)}\right|_{J=0}. \tag{3.14}$$

在当前方法中，获得最终结果的关键函数是格林方程 (3.10) 的解。然而，该方程的一般形式在空间和时间指标上都是非局域的，这使得解析求解极为困难。即便如此，我们仍可将其实对称矩阵 $A_{\alpha\beta}$ 始终可以通过正交变换对角化这一性质，写成更便于计算的形式：

$$\mathbf{Q}^{\perp}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\oplus_{j=1}^{N}\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_{j}\\ -\varepsilon_{j} & 0\end{pmatrix},\ \ \varepsilon_{j}\geq 0,\ \ \mathbf{Q}\in O\left(2N\right). \tag{3.15}$$

因此，通过使用酉变换

$$\mathbf{V}=\mathbf{Q}\oplus^{N}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

我们可以写成

$$\mathbf{V}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{V}=\oplus^{N}\begin{pmatrix}i\varepsilon_{j} & 0\\ 0 & -i\varepsilon_{j}\end{pmatrix}\equiv i\mathbf{E}. \tag{3.17}$$

通过写出

$$\begin{aligned}&\sum_{j,u}\gamma_{j,u}V_{jk,uv}=\psi_{k,v}\rightarrow\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{V}=\boldsymbol{\psi},\ \ \mathbf{K}=\mathbf{V}^{\dagger}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{V},\\ &\mathbf{j}=\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}\rightarrow j_{k,v}=\sum_{j,u}f_{j,u}V_{jk,uv}\end{aligned} \tag{3.18}$$

作用量 (3.5) 可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}S=&\frac{i}{4}\int_{P}dt_{P}\boldsymbol{\psi}\left(t_{P}\right)\left(\mathbf{I}\partial_{t_{P}}-i\mathbf{E}\right)\boldsymbol{\psi}\left(t_{P}\right)\\ &+\frac{i}{4}\int_{P}dt_{P}\int_{P'}dt'_{P'}\boldsymbol{\psi}\left(t_{P}\right)\mathbf{K}\left(t_{P},t'_{P'}\right)\boldsymbol{\psi}\left(t'_{P'}\right)\\ &-\frac{1}{4}\int_{P}dt_{P}\bar{\mathbf{j}}\left(t_{P}\right)\cdot\boldsymbol{\psi}\left(t_{P}\right)-\frac{1}{4}\int_{P}dt_{P}\bar{\boldsymbol{\psi}}\left(t_{P}\right)\cdot\mathbf{j}\left(t_{P}\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

在这种情况下，经典运动方程呈现为：

$$\left(\mathbf{I}\partial_{t_P} - i\mathbf{E}\right)\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{cl.}}\left(t_P\right) + \int\limits_{P'} dt'_{P'}\mathbf{K}\left(t_P, t'_{P'}\right)\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{cl.}}\left(t'_{P'}\right) = -i\mathbf{j}\left(t_P\right). \tag{3.20}$$

因此，通过定义函数 $\mathbf{L} = \mathbf{V}^{\dagger}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{V}$，格林方程 (3.10) 可改写为：

$$\left(\mathbf{I}\partial_{t_P} - i\mathbf{E}\right)\mathbf{L}\left(t_P, t'_{P'}\right) + \int\limits_{P''} dt''_{P''}\mathbf{K}\left(t_P, t''_{P''}\right)\mathbf{L}\left(t''_{P''}, t'_{P'}\right) = -\mathbf{I}i\delta\left(t_P - t'_{P'}\right) \tag{3.21}$$

最后一个表达式是一组方程，由于核$\mathbf{K}$（即耗散核）的存在而相互耦合。本文采用一种近似方法，可得格林方程组 (3.21) 的精确解。这种近似与 Lindbland 方法所依据的近似相同，即所谓的马尔可夫近似 [18]。它基于这样的假设：环境充当无记忆浴，因此影响泛函可视为时间局域的。这种近似的有效性取决于两个特征时间尺度 [19] 的存在。第一个尺度 τ_E 指环境关联的衰减，第二个尺度 τ_S 则表征系统动力学受到屏蔽的频率$\varepsilon_S \sim \tau_S^{-1}$。如果后一个尺度远大于前一个尺度，函数 (3.13) 的行为就非常接近狄拉克函数：

$$\Delta_{jk}\left(t_P - t'_{p'}\right) \to g_{jk}\Delta_{PP'}\left(\varepsilon_S\right)\delta\left(t - t'\right) \tag{3.22}$$

矩阵元 $\Delta_{PP'}$ 定义为 [13]:

$$\Delta_{++} = -i\delta E + \Gamma\left(\frac{1}{2} - b\right),\ \Delta_{--} = i\delta E + \Gamma\left(\frac{1}{2} - b\right),\ \Delta_{+-} = -\Gamma b,\ \Delta_{-+} = \Gamma\left(1 - b\right) \tag{3.23}$$

其中：

$$\Gamma = 2\pi D\left(\varepsilon_S\right),\ \ \delta E = \mathrm{Pr.}\int\limits_0^{\infty} dE\frac{D\left(E\right)}{E - \varepsilon_S},\ \ b = \frac{1}{1 + e^{\beta\varepsilon_S}} \tag{3.24}$$

马尔可夫极限使耗散核在时间变量上呈对角形式。即便如此，表达式 (3.21) 仍是一组 $4 \times (2N)^2$ 耦合方程，要得到其解相当复杂。然而，当哈密顿量具有平移不变性时，方程 (3.21) 可以精确求解。这正是下一节要处理的任务。

4. Kitaev 链

在本节中，我们考察一个简单但颇有趣的一维空间费米子模型，即 $1D$ 超导链 [1, 20, 21]:

$$\hat{H}_S = \sum_{j=1}^{N} \left[-w \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j \right) + \Delta \left(\hat{a}_j \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j^\dagger \right) - \mu \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.1)$$

尽管该模型在孤立情况下简单且完全可解，但由于其潜在的量子相变，它相当丰富。经过 Jordan-Wigner 变换后

$$\hat{a}_j = \prod_{k=1}^{j-1} \left(-\sigma_k^z \right) \sigma_j^-, \quad \hat{a}_j^\dagger = \prod_{k=1}^{j-1} \left(-\sigma_k^z \right) \sigma_j^+, \quad \sigma_j^\pm = \frac{1}{2} \left(\sigma_j^x \pm i \sigma_j^y \right) \quad (4.2)$$

费米子系统被映射为各向异性 XY 自旋系统:

$$\hat{H}_S = \sum_j \left(\frac{\Delta - w}{2} \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x + \frac{\Delta + w}{2} \hat{\sigma}_j^y \hat{\sigma}_{j+1}^y - \frac{\mu}{2} \hat{\sigma}_j^z \right). \quad (4.3)$$

为简便起见，我们选取 $w = -\Delta = 1$并写作 $\mu = 2h$。在这种情况下，自旋系统 (4.3) 简化为横场伊辛模型:

$$\hat{H}_S = -\sum_j \left(\hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x + h \hat{\sigma}_j^z \right) \quad (4.4)$$

而其费米子形式为:

$$\hat{H}_S = -\sum_{j=1}^{N} \left[\left(\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j \right) \left(\hat{a}_{j+1}^\dagger + \hat{a}_{j+1} \right) + 2h \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (4.5)$$

在存在环境的情况下，这些系统的动力学会变得相当复杂，主要通过 Lindbland 主方程框架进行研究。从这一观点来看，模型 (4.1) 及其所有可积变体，为展示第 2 节和第 3 节中引入的解析形式体系提供了理想平台。不过，此处需要说明一点：当我们感兴趣的系统是孤立系统时，哈密顿量 (4.1) 和 (4.3) 在数学上等价，这意味着相关关联函数的计算既可以基于前者，也可以基于后者。当系统是更大复合系统的一部分时，相互作用决定了物理自由度。在所研究的情形中，环境是一个费米子浴，这意味着用于描述该系统的物理自由度是费米子自由度，而相关的量子哈密顿量为 (4.3)。

积分 (2.7) 中表示费米子系统 (4.5) 的经典哈密顿量可写为如下形式（见式 (3.2)）：

$$\begin{aligned} H_S &= \sum_j \left[\left(z_j z_{j+1} - \bar{z}_j \bar{z}_{j+1} \right) + \left(z_j \bar{z}_{j+1} - \bar{z}_j z_{j+1} \right) - 2h \bar{z}_j z_j \right] = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{jk,uv} \gamma_{j,u} A_{jk,uv} \gamma_{k,v} \end{aligned} \tag{4.6}$$

正如第 3 节引言中所指出的，使用正则变换 (3.2) 将系统的哈密顿量写成马约拉纳变量的形式会比较方便。

哈密顿量的马约拉纳表达式中出现的矩阵 A 定义如下：

$$\begin{aligned} &A_{j,j+1;0,0} = -A_{j+1,j;0,0} = 2, A_{j,j+1;0,1} = -A_{j+1,j;1,0} = -2, \\ &A_{j,j;0,1} = -A_{j,j;1,0} = 2h. \end{aligned} \tag{4.7}$$

求解经典方程 (3.10) 的第一步是对系统的哈密顿量进行对角化。对于孤立系统，这一步通过实施离散傅里叶变换 [16, 17, 21] 来完成：

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\varphi_m j} c_m. \tag{4.8}$$

相位 $\varphi_m = \frac{2\pi}{N}(m + \kappa)$ 的确切形式取决于系统中的费米子数。当该数为偶数时，$\kappa = 1/2$；而为奇数时，$\kappa = 0$。前一种情况对应反周期边界条件 $z_{j+N} = -z_j$，后一种情况则对应周期边界条件 $z_{j+N} = z_j$ [21]。存在耗散时，费米子数不守恒，这意味着严格来说不应使用变换 (4.8)。然而，在我们关注的热力学极限 $N \to \infty$ 下，式 (4.6) 中的求和范围扩展到 $\mathbb{Z}$，离散变换 (4.8) 可以用其连续形式替代：

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i\varphi j} c_\varphi, \quad c_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi j} z_j. \tag{4.9}$$

只有当系统-环境相互作用不破坏孤立系统所具有的平移不变性时，这些变换才会有帮助。为了保持这一对称性，我们将假设 $g_{jk} = g_{j-k} = g_{k-j}$。

马约拉纳变量的傅里叶变换如下：

$$\gamma_{j,u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i\varphi j} \gamma_{\varphi,u}, \quad \gamma_{\varphi,0} = \bar{c}_{-\varphi} + c_\varphi, \quad \gamma_{\varphi,1} = i \left(\bar{c}_{-\varphi} - c_\varphi \right). \tag{4.10}$$

将表达式 (4.10) 代入公式 (4.6)，哈密顿量可用共轭场改写为以下形式：

$$H_S = \int_0^{\pi} d\varphi \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{\varphi} \mathbf{A}_{\varphi} \boldsymbol{\gamma}_{\varphi}. \tag{4.11}$$

为得到最后一个表达式，我们利用哈密顿量的平移不变性写出 $A_{jk,\,uv} = A_{j-k,\,uv}$，定义向量 $\boldsymbol{\gamma}_{\varphi} = (\gamma_{\varphi,\,0},\ \gamma_{\varphi,\,1})$以及矩阵：

$$\left(\mathbf{A}_{\varphi}\right)_{uv} \equiv A_{\varphi,uv} = \sum_j e^{-i\varphi j} A_{j,uv} = -A_{-\varphi,vu}, A_{j,uv} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{i\varphi j} A_{\varphi,uv}. \tag{4.12}$$

不难得到：

$$\mathbf{A}_{\varphi} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & h + e^{-i\varphi} \\ -\left(h + e^{i\varphi}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

利用酉变换

$$\mathbf{V}_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} e^{-i\theta_{\varphi}\sigma^x} \tag{4.14}$$

with

$$\cos 2\theta_{\varphi} = \frac{h + \cos\varphi}{\varepsilon_{\varphi}}, \quad \sin 2\theta_{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\varepsilon_{\varphi}}, \quad \varepsilon_{\varphi} = \sqrt{(h + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} \tag{4.15}$$

矩阵（4.13）可以化为对角形式：

$$\mathbf{A}_{\varphi} = -\frac{1}{2} \mathbf{V}_{\varphi} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\varphi} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{\varphi} \end{pmatrix} \mathbf{V}_{\varphi}^{\dagger}. \tag{4.16}$$

通过定义

$$\boldsymbol{\psi}_{\varphi} = \mathbf{V}^{\dagger}{}_{\varphi} \boldsymbol{\gamma}_{\varphi}, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}}_{\varphi} = \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{\varphi} \mathbf{V}_{\varphi} \tag{4.17}$$

哈密顿量 (4.11) 简化如下：

$$H_S = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\varphi \varepsilon_{\varphi} \bar{\boldsymbol{\psi}}_{\varphi} \sigma^z \boldsymbol{\psi}_{\varphi}. \tag{4.18}$$

引入函数

$$\tilde{g}_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j e^{i\varphi j} g_j = \tilde{g}_{-\varphi} \tag{4.19}$$

环境的影响写作

$$S_{INF.}=\frac{i}{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_P dt_P\int_{P'}dt'_{P'}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\varphi}\left(t_P\right)\mathbf{K}_{\varphi}\left(t_P,t'_{P'}\right)\boldsymbol{\psi}_{\varphi}\left(t'_{P'}\right) \tag{4.20}$$

其中

$$\mathbf{K}_{\varphi}=\tilde{g}_{\varphi}\mathbf{V}_{\varphi}^{\dagger}\begin{pmatrix}\Delta^{(-)} & i\Delta^{(+)}\\ -i\Delta^{(+)} & \Delta^{(-)}\end{pmatrix}\mathbf{V}_{\varphi},\quad \Delta^{(\pm)}=\Delta\left(t_P,t'_{P'}\right)\pm\Delta\left(t'_{P'},t_P\right). \tag{4.21}$$

因此，用场 (4.12) 表示的作用量 (3.4) 具有如下形式：

$$\begin{aligned}S=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_P dt_P\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\varphi}\left(i\partial_{t_P}+\varepsilon_{\varphi}\sigma^z\right)\boldsymbol{\psi}_{\varphi}\\&+\frac{i}{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_P dt_P\int_{P'}dt'_{P'}\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\varphi}\left(t_P\right)\mathbf{K}_{\varphi}\left(t_P,t'_{P'}\right)\boldsymbol{\psi}_{\varphi}\left(t'_{P'}\right)\\&+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_P dt_P\left(\bar{\mathbf{j}}_{\varphi}\boldsymbol{\psi}_{\varphi}+\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\varphi}\mathbf{j}_{\varphi}\right).\end{aligned} \tag{4.22}$$

对于源项，我们采用以下记号（见方程 (3.6)）：

$$\bar{\mathbf{j}}_{\varphi}=\mathbf{f}_{\varphi}\mathbf{V}_{\varphi},\quad \mathbf{f}_{\varphi}=\left(f_{\varphi,0},f_{\varphi,1}\right),\quad f_{\varphi,u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_j e^{i\varphi j}f_{j,u} \tag{4.23}$$

通过对方程 (4.21) 求极小值，我们得到经典方程：

$$\left(i\partial_{t_P}+\varepsilon_{\varphi}\sigma^z\right)\boldsymbol{\psi}_{\varphi}^{cl.}\left(t_P\right)+i\int_{P'}dt'_{P'}\mathbf{K}_{\varphi}\left(t_P,t'_{P'}\right)\boldsymbol{\psi}_{\varphi}^{cl.}\left(t'_{P'}\right)=-\mathbf{j}_{\varphi}\left(t_P\right). \tag{4.24}$$

相应的格林方程为：

$$\left(i\partial_{t_P}+\varepsilon_{\varphi}\sigma^z\right)\mathbf{L}_{\varphi}\left(t_P,t'_{P'}\right)+i\int_{P''}dt''_{P''}\mathbf{K}_{\varphi}\left(t_P,t''_{P''}\right)\mathbf{L}_{\varphi}\left(t''_{P''},t'_{P'}\right)=\mathbf{I}\delta\left(t_P-t'_{P'}\right). \tag{4.25}$$

得到最后一个方程的解，并利用式（4.17），生成泛函可写为

$$Z_S^{(0)}\left[\mathbf{j}\right]=C_E^{-1}\exp\left[-\frac{i}{2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_{P'}dt'_{P'}\int_{P}dt_P\bar{\mathbf{j}}_\varphi\left(t_P\right)\mathbf{L}_\varphi\left(t_P,t'_{P'}\right)\mathbf{j}\left(t'_{P'}\right)\right]. \quad (4.26)$$

考虑到式（4.17），生成泛函可以改写为式（3.11）的形式，其中

$$\Gamma_{jk,uv}\left(t_P,t'_{P'}\right)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}d\varphi e^{i\varphi(j-k)}\left[\mathbf{V}_\varphi\mathbf{L}_\varphi\left(t_P,t'_{P'}\right)\mathbf{V}_\varphi^{\dagger}\right]_{uv}. \quad (4.27)$$

带有因果边界条件的格林方程 (4.25) 可以精确求解。在附录 A 中，我们给出了计算的详细过程。这里仅需给出 $t_+=t'_+=t$ 的结果：

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_\varphi=&-i\left[\frac{1}{2}-\sin^2\theta_\varphi\left(1-e^{-|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t-t_{in.})}\right)\right]\sigma^z\\&-\frac{i}{2}\frac{\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\varepsilon_\varphi^2+\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\sin^2\left(2\theta_\varphi\right)\left(1-e^{-|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t-t_{in.})}\right)\begin{pmatrix}\cos^2\theta_\varphi & 0\\ 0 & \sin^2\theta_\varphi\end{pmatrix}\end{aligned} \quad (4.28)$$

应用公式 (3.14) 可以直接得到协方差矩阵：

$$\begin{aligned}C_{jk,uv}\left(t\right)=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\begin{pmatrix}0 & \cos\left(\varphi\left(j-k\right)-2\theta_\varphi\right)\\ -\cos\left(\varphi\left(j-k\right)+2\theta_\varphi\right) & 0\end{pmatrix}\\&\times\left[\frac{1}{2}-\sin^2\theta_\varphi\left(1-e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t-t_{in.})}\right)\right]\\&+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\frac{\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\varepsilon_\varphi^2+\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\sin^2\left(2\theta_\varphi\right)\left(1-e^{-|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t-t_{in.})}\right)\\&\times\begin{pmatrix}\sin\varphi\left(j-k\right) & \cos\left(\varphi\left(j-k\right)-2\theta_\varphi\right)\cos\left(2\theta_\varphi\right)\\ -\cos\left(\varphi\left(j-k\right)+2\theta_\varphi\right)\cos\left(2\theta_\varphi\right) & \sin\varphi\left(j-k\right)\end{pmatrix}\end{aligned} \quad (4.29)$$

在极限 $t\to\infty$ 下，我们得到稳态协方差：

$$C^{(0)}_{jk,uv} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi cos\left(2\theta_\varphi\right)\begin{pmatrix} 0 & \cos\left(\varphi\left(j-k\right)-2\theta_\varphi\right) \\ -\cos\left(\varphi\left(j-k\right)+2\theta_\varphi\right) & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \frac{\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\varepsilon_\varphi^2+\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\sin^2\left(2\theta_\varphi\right) \times\begin{pmatrix} \sin\varphi\left(j-k\right) & \cos\left(\varphi\left(j-k\right)-2\theta_\varphi\right)\cos\left(2\theta_\varphi\right) \\ -\cos\left(\varphi\left(j-k\right)+2\theta_\varphi\right)\cos\left(2\theta_\varphi\right) & \sin\varphi\left(j-k\right) \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

式 (4.28)–(4.30) 右端第二项的存在，是因为式 (4.21) 中的耗散核具有非零的非对角元。值得注意的是，函数 (4.29) 和 (4.30) 在点 $|h| = 1$ 处均为非解析函数。首先，我们假设 $(g\Gamma/2) \ll 1$，从而忽略耗散核的非对角贡献。此假设简化了结果，但不会改变其定性特征。在这种情况下，稳态协方差为：

$$C^{(0)}_{jk,uv} \simeq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \cos\left(2\theta_\varphi\right)\begin{pmatrix} 0 & \cos\left(\varphi\left(j-k\right)-2\theta_\varphi\right) \\ -\cos\left(\varphi\left(j-k\right)+2\theta_\varphi\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

如果不存在环境（$\Gamma = 0$），相应的结果将具有以下形式（参见式 4.29）：

$$C^{(0)}_{jk,uv} \simeq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \begin{pmatrix} 0 & \cos\left(\varphi\left(j-k\right)-2\theta_\varphi\right) \\ -\cos\left(\varphi\left(j-k\right)+2\theta_\varphi\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

该函数表示孤立系统基态下的协方差，且具有非解析性。涉及的积分与第二类完全椭圆积分有关，后者在 $|h| = 1$ 处有一条支割线。这种非解析行为反映了封闭系统中潜在的量子相变。当系统开放时，情况会发生变化，但非解析性依然存在。考虑 $j = k$ 的式 (4.31) 即可立即确认这一点：

$$C^{(0)}_{jj,uv} \simeq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \cos^2\left(2\theta_\varphi\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \frac{(h+\cos\varphi)^2}{h^2+2h\cos\varphi+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

简单计算可得：

$$C^{(0)}_{jj,uv}(h) \simeq \left[\frac{1}{2}\theta(1-|h|)+\left(1-\frac{1}{2h^2}\right)\theta(|h|-1)\right]\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.34}$$

and

$$\frac{d}{d|h|}C^{(0)}_{jj,uv}(h) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{cases}0, & |h|<1\\ 1/|h|^3, & |h|>1\end{cases} \tag{4.35}$$

因此，在存在耗散的情况下，稳态的协方差矩阵在点 $|h|=1$ 处存在有限的不连续性。这个非解析点与表征相应孤立系统及其等价模型——横场伊辛模型——的著名量子相变临界点相重合。

这一结果表明，尽管形式有所不同，尽管受到环境的影响，开放系统的稳态中仍然存在非解析性。

对于 $j-k=L\to+\infty$，通过直接计算可得：

$$C^{(0)}_{jk,uv}(h) \underset{L\to+\infty}{\simeq} \frac{1-h^2}{2h^2}\begin{pmatrix}0 & h^L\theta(1-|h|)\\ \frac{1}{h^L}\theta(|h|-1) & 0\end{pmatrix} \tag{4.36}$$

and

$$C^{(0)}_{jk,uv}(h) \underset{L\to-\infty}{\simeq} \frac{h^2-1}{2h^2}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{h^{|L|}}\theta(|h|-1)\\ h^{|L|}\theta(1-|h|) & 0\end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

结合这些表达式可以推断，对于 $|L|\to\infty$ 和 $||h|-1|\to 0$，稳态的协方差表现为 [4, 22]:

$$C^{(0)}_{jk,uv}(h) \underset{L\to\infty;|h|\to 1}{\sim} ||h|-1|\exp(-|L|\,||h|-1|). \tag{4.38}$$

最后一个表达式表明，函数 $\frac{d}{d|h|}C^{(0)}_{jk,uv}(h)$ 在极限 $|h|\to 1$ 下具有长程关联，其长度的形式为 $\xi\sim{}^{1}_{||h|-1|}\to\infty$。

只要我们关注的是单个时间变量的函数（本节讨论的稳态便是如此），就也可以通过林德布拉德方程 [5] 推导出我们得到的结果。近年来，人们开发出了强大的方法 [23, 24]，用于求解玻色子和费米子系统的准自由及二次林德布拉德方程。本文的研究聚焦于具有二次哈密顿量的系统的耗散动力学，所得结果与文献 [24] 中关于准自由林德布拉德方程的结果一致。在一篇后续论文中，我们将考察二次系统的退相干动力学；这一问题属于二次林德布拉德方程 [23] 的研究范畴。

我们的分析是在马尔可夫近似框架下进行的，如式 (3.22) 所示。这是求得式 (3.21) 的解析解以及本节所述结果的必要条件

。非马尔可夫动力学虽非本研究的主题，但出于理论和实验方面的原因，都极具研究价值。大多数情况下，人们会在林德布拉德型主方程框架下研究这一问题，其中跳跃算符和衰减率随时间变化 [25]。在约化生成泛函框架下，研究者已通过数值方法分析了玻色子系统中的这一问题 [26]。正如其结构所预示的，函数 (2.13) 的行为强烈依赖于环境的谱函数。因此，人们预期这种依赖会体现在稳态的解析性性质上 [27]。非马尔可夫性的特征是信息从系统传递至环境，再传回系统；由于非解析点与能隙为零有关，我们不预期该点本身会发生变化 [5, 28]，而此处的动力学几乎是马尔可夫式的 [29, 30]。不过，临界指数可能会发生变化 [27]。我们的结果适用于渐近极限 $t \to \infty$，此时函数 (2.13) 的主要贡献来自区域 $t \sim t'$。因此，当耦合足够弱时 g，我们预期结果的主导阶行为基本保持不变。

5. 结论

我们建立了一套框架，用于构造开放费米子系统在任意数目时间变量下的含时关联函数。该框架以相干态路径积分为基础，将 Feynman-Vernon 技术与凯尔迪什-施温格形式结合起来。通过积分掉环境自由度，我们定义了生成泛函，并可通过施加适当的泛函导数导出系统的任意关联函数。我们详细阐述了这一构造在用马约拉纳变量表示时为二次型的系统中的应用。在本文的最后一节，我们将所提出的形式体系应用于一个孤立时可完全求解的模型，即横场伊辛模型。我们计算了稳态下协方差矩阵的精确形式。我们确认，该矩阵在对应的孤立模型发生量子相变的同一点呈现非解析性，并考察了这种非解析性的具体表现形式。

附录A

在本附录中，我们求解正文中的格林方程（4.25）：

$$\left(i\partial_{t_P} + \varepsilon_\varphi \sigma^z\right) \mathbf{L}_\varphi\left(t_P, t'_{P'}\right) + i \int_{P''} dt''_{P''} \mathbf{K}_\varphi\left(t_P, t''_{P''}\right) \mathbf{L}_\varphi\left(t''_{P''}, t'_{P'}\right) = \mathbf{I}\delta\left(t_P - t'_{P'}\right). \tag{A.1}$$

我们所关注的解必须满足以下边界条件：

$$\mathbf{L}\left(t_P = t_{in.+}, t'_{P'}\right) = \mathbf{L}\left(t_P, t'_{P'} = t_{in.-}\right) = 0, \quad \mathbf{L}\left(t_P, t'_{P'}\right) \underset{|t-t'|\to+\infty}{\to} 0. \tag{A.2}$$

第一个要求体现了传播的因果性。第二个要求与式（A.1）第三项所包含的退相干有关，该项将环境的影响引入传播过程。

上一个方程中出现的耗散核形式如下：

$$\mathbf{K}_\varphi = \tilde{g}_\varphi \begin{pmatrix} \Delta\left(t_P, t'_{P'}\right)\cos^2\theta_\varphi - \Delta\left(t'_{P'}, t_P\right)\sin^2\theta_\varphi & -\frac{i}{2}\left(\Delta\left(t_P, t'_{P'}\right) + \Delta\left(t'_{P'}, t_P\right)\right)\sin\left(2\theta_\varphi\right) \\ \frac{i}{2}\left(\Delta\left(t_P, t'_{P'}\right) + \Delta\left(t'_{P'}, t_P\right)\right)\sin\left(2\theta_\varphi\right) & \Delta\left(t_P, t'_{P'}\right)\sin^2\theta_\varphi - \Delta\left(t'_{P'}, t_P\right)\cos^2\theta_\varphi \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

格林方程的解是一个由格林函数构成的矩阵：

$$\mathbf{L}_\varphi = \begin{pmatrix} L_{\varphi,00} & L_{\varphi,01} \\ L_{\varphi,10} & L_{\varphi,11} \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

耗散核将方程组 (A.1) 分成两组耦合方程：

$$\begin{aligned} &\partial_{t_P} L_{\varphi,00}\left(t_P, t'_P\right) - i\varepsilon_\varphi L_{\varphi,00}\left(t_P, t'_P\right) + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,00}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,00}\left(t''_P, t'_P\right) \\ &\qquad + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,01}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,10}\left(t''_P, t'_P\right) = -i\delta\left(t_p - t'_P\right) \\ &\partial_{t_P} L_{\varphi,10}\left(t_P, t'_P\right) + i\varepsilon_\varphi L_{\varphi,10}\left(t_P, t'_P\right) + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,10}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,00}\left(t''_P, t'_P\right) \\ &\qquad + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,11}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,10}\left(t''_P, t'_P\right) = 0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

and

$$\begin{aligned} &\partial_{t_P} L_{\varphi,11}\left(t_P, t'_P\right) + i\varepsilon_\varphi L_{\varphi,11}\left(t_P, t'_P\right) + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,10}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,01}\left(t''_P, t'_P\right) \\ &\qquad + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,11}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,11}\left(t''_P, t'_P\right) = -i\delta\left(t_p - t'_P\right) \\ &\partial_{t_P} L_{\varphi,01}\left(t_P, t'_P\right) - i\varepsilon_\varphi L_{\varphi,01}\left(t_P, t'_P\right) + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,00}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,01}\left(t''_P, t'_P\right) \\ &\qquad + \int_{P''} dt''_P K_{\varphi,01}\left(t_P, t''_P\right) L_{\varphi,11}\left(t''_P, t'_P\right) = 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

恢复 Keldysh变量的显式形式后，(A.5) 和 (A.6) 中的每一组都会进一步分成两组各含四个方程的耦合方程。由于这 16 组方程的计算结构相同，这里只需给出那些能得到$\mathbf{L}_{\varphi}\left(t_{+},\ t_{+}^{\prime}\right)$结果的方程组。

接下来，为了简便起见，我们在表达式 (3.24) 中令 $b=0$ 和 $\delta E=0$，并采用以下简写：

$$A_{\varphi}=\tilde{g}_{\varphi}\frac{\Gamma}{2}\cos\left(2\theta_{\varphi}\right),\quad B_{\varphi}=\tilde{g}_{\varphi}\frac{\Gamma}{2}\sin\left(2\theta_{\varphi}\right). \tag{A.7}$$

之后，第一组四元方程由方程 (A.5) 得出，如下所示：

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_{t}-i\varepsilon_{\varphi}+A_{\varphi}\right)L_{\varphi,00}\left(t_{+},t_{+}\right)+\Gamma\tilde{g}_{\varphi}\sin^{2}\theta_{\varphi}L_{\varphi,00}\left(t_{-},t_{+}\right)\\
&\quad-iB_{\varphi}\left(L_{\varphi,10}\left(t_{+},t_{+}\right)-L_{\varphi,10}\left(t_{-},t_{+}\right)\right)=-i\delta\left(t-t^{\prime}\right),\\
&\Gamma\tilde{g}_{\varphi}\cos^{2}\theta_{\varphi}L_{\varphi,00}\left(t_{+},t_{+}\right)+\left(\partial_{t}-i\varepsilon_{\varphi}-A_{\varphi}\right)L_{\varphi,00}\left(t_{-},t_{+}\right)\\
&\quad-iB_{\varphi}\left(L_{\varphi,10}\left(t_{+},t_{+}\right)-L_{\varphi,10}\left(t_{-},t_{+}\right)\right)=0,\\
&iB_{\varphi}\left(L_{\varphi,00}\left(t_{+},t_{+}\right)-L_{\varphi,00}\left(t_{-},t_{+}\right)\right)+\left(\partial_{t}+i\varepsilon_{\varphi}-A_{\varphi}\right)L_{\varphi,10}\left(t_{+},t_{+}\right)\\
&\quad+\Gamma\tilde{g}_{\varphi}\cos^{2}\theta_{\varphi}L_{\varphi,10}\left(t_{-},t_{+}\right)=0,\\
&iB_{\varphi}\left(L_{\varphi,00}\left(t_{+},t_{+}\right)-L_{\varphi,00}\left(t_{-},t_{+}\right)\right)+\Gamma\tilde{g}_{\varphi}\sin^{2}\theta_{\varphi}L_{\varphi,10}\left(t_{+},t_{+}\right)\\
&\quad+\left(\partial_{t}+i\varepsilon_{\varphi}+A_{\varphi}\right)L_{\varphi,10}\left(t_{-},t_{+}\right)=0.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

方程组 (A.8) 可以精确求解。不施加任何边界限制，经过简单推导即可得到：

$$\begin{aligned}
L_{\varphi,00}\left(t_{+},t_{+}^{\prime}\right)=&-i\cos^{2}\theta_{\varphi}e^{i\varepsilon_{\varphi}\left(t-t^{\prime}\right)-\frac{1}{2}\left|\tilde{g}_{\varphi}\right|\Gamma\left(t-t^{\prime}\right)}\theta\left(t-t^{\prime}\right)\\
&+i\sin^{2}\theta_{\varphi}e^{i\varepsilon_{\varphi}\left(t-t^{\prime}\right)-\frac{1}{2}\left|\tilde{g}_{\varphi}\right|\Gamma\left(t^{\prime}-t\right)}\theta\left(t^{\prime}-t\right)\\
&-\frac{i}{2}\frac{\left(\tilde{g}_{\varphi}\frac{\Gamma}{2}\right)^{2}}{\varepsilon_{\varphi}^{2}+\left(\tilde{g}_{\varphi}\frac{\Gamma}{2}\right)^{2}}\sin^{2}\left(2\theta_{\varphi}\right)\cos^{2}\theta_{\varphi}e^{-\frac{1}{2}\left|\tilde{g}_{\varphi}\right|\Gamma\left|t-t^{\prime}\right|}\\
&\times\left(\cos\left(\varepsilon_{\varphi}\left|t-t^{\prime}\right|\right)+\tilde{g}_{\varphi}\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\left(\varepsilon_{\varphi}\left|t-t^{\prime}\right|\right)}{\varepsilon_{\varphi}}\right)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

and

$$L_{\varphi,10}\left(t_{+},t_{+}^{\prime}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\left|\tilde{g}_{\varphi}\right|\Gamma\left(t-t^{\prime}\right)}\tilde{g}_{\varphi}\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\varepsilon_{\varphi}\left(t-t^{\prime}\right)}{\varepsilon_{\varphi}}\theta\left(t-t^{\prime}\right). \tag{A.10}$$

我们感兴趣的第二组与式 (A.6) 有关，其形式为：

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_t + i\varepsilon_\varphi - A_\varphi\right) L_{\varphi,11}\left(t_+, t'_+\right) + \Gamma\tilde{g}_\varphi \cos^2\theta_\varphi L_{\varphi,11}\left(t_-, t'_+\right) \\
&\quad + iB_\varphi\left(L_{\varphi,01}\left(t_+, t'_+\right) - L_{\varphi,01}\left(t_-, t'_+\right)\right) = -i\delta\left(t - t'\right), \\
&\Gamma\tilde{g}_\varphi \sin^2\theta_\varphi L_{\varphi,11}\left(t_+, t'_+\right) + \left(\partial_t + i\varepsilon_\varphi + A_\varphi\right) L_{\varphi,11}\left(t_-, t'_+\right) \\
&\quad + iB_\varphi\left(L_{\varphi,01}\left(t_+, t'_+\right) - L_{\varphi,01}\left(t_-, t'_+\right)\right) = 0, \\
&-iB_\varphi\left(L_{\varphi,11}\left(t_+, t'_+\right) - L_{\varphi,11}\left(t_-, t'_+\right)\right) + \left(\partial_t - i\varepsilon_\varphi + A_\varphi\right) L_{\varphi,10}\left(t_+, t'_+\right) \\
&\quad + \Gamma\tilde{g}_\varphi \sin^2\theta_\varphi L_{\varphi,01}\left(t_-, t'_+\right) = 0, \\
&-iB_\varphi\left(L_{\varphi,11}\left(t_+, t'_+\right) - L_{\varphi,11}\left(t_-, t'_+\right)\right) + \Gamma\tilde{g}_\varphi \cos^2\theta_\varphi L_{\varphi,01}\left(t_+, t'_+\right) \\
&\quad + \left(\partial_t - i\varepsilon_\varphi - A_\varphi\right) L_{\varphi,01}\left(t_-, t_+\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

通过观察式 (A.11) 中的系数可由式 (A.10) 中的系数经替换 $\theta_\varphi \to \theta_\varphi \pm \pi/2$ 得到，我们可以从系统 (A.8) 的解推导出该系统的解。由此可轻易得到：

$$
\begin{aligned}
L_{\varphi,11}\left(t_+, t'_+\right) = &-i\sin^2\theta_\varphi e^{i\varepsilon_\varphi\left(t-t'\right) - \frac{1}{2}\left|\tilde{g}_\varphi\right|\Gamma\left(t-t'\right)}\theta\left(t - t'\right) \\
&+ i\cos^2\theta_\varphi e^{i\varepsilon_\varphi\left(t-t'\right) - \frac{1}{2}\left|\tilde{g}_\varphi\right|\Gamma\left(t'-t\right)}\theta\left(t' - t\right) \\
&- \frac{i}{2}\frac{\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\varepsilon_\varphi^2 + \left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\sin^2\left(2\theta_\varphi\right)\sin^2\theta_\varphi e^{-\frac{1}{2}\left|\tilde{g}_\varphi\right|\Gamma\left|t-t'\right|} \\
&\times\left(\cos\left(\varepsilon_\varphi\left|t - t'\right|\right) + \tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\left(\varepsilon_\varphi\left|t - t'\right|\right)}{\varepsilon_\varphi}\right)
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

and

$$
L_{\varphi,01}\left(t_+, t'_+\right) = L_{\varphi,10}\left(t_+, t'_+\right). \tag{A.13}
$$

正如正文所讨论的（见式 (4.23) 和 (4.24)），格林矩阵 **L**传播双分量费米子场：

$$
\psi^{cl.}_{\varphi,u}\left(t_P\right) = \sum_\nu \int_{P'} dt'_{P'} L_{\varphi,u\nu}\left(t_P, t'_{P'}\right) j_{\varphi,\nu}\left(t'_{P'}\right). \tag{A.14}
$$

其中一个分量向前传播，另一个分量则向后传播。基于这一观察，我们通过施加以下边界条件，构造出适用于当前问题的格林函数：

$$
\begin{aligned}
&L_{\varphi,00}\left(t_+ = t_{in.+}, t'_+\right) = 0,\ L_{\varphi,01}\left(t_+ = t_{in.+}, t'_+\right) = 0 \\
&L_{\varphi,10}\left(t_+, t'_+ = t_{in.+}\right) = 0,\ L_{\varphi,11}\left(t_+, t'_+ = t_{in.+}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

为了得到这些函数，我们可以在已求得的格林函数中加入相应齐次方程的通解

$$L_{\varphi,uv} \to L_{\varphi,uv} + \sum_{j=1}^{4} a_{\varphi,uv}^{(j)} e^{ip_j t}, \quad p_j = \pm\varepsilon_\varphi \pm i\frac{1}{2}\left|\tilde{g}_\varphi\right|\Gamma \tag{A.16}$$

并确定系数，使其与 $L_{\varphi,\ uv} \underset{|t-t'|\to+\infty}{\to} 0$ 一同满足 (A.15)。由此我们得到：

$$\begin{aligned} L_{\varphi,00}\left(t_+,t'_+\right) &= -ie^{i\varepsilon_\varphi(t-t')-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma|t-t'|}\theta\left(t-t'\right) \\ &\quad + iF_{\varphi,00}\left(t-t'\right)\left[e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma|t-t'|} - e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t+t'-2t_{in.})}\right] \end{aligned} \tag{A.17}$$

and

$$\begin{aligned} L_{\varphi,11}\left(t_+,t'_+\right) &= ie^{i\varepsilon_\varphi(t-t')-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma|t-t'|}\theta\left(t'-t\right) \\ &\quad - iF_{\varphi,11}\left(t-t'\right)\left[e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma|t-t'|} - e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t+t'-2t_{in.})}\right]. \end{aligned} \tag{A.18}$$

这些表达式中的缩写含义如下：

$$\begin{aligned} F_{\varphi,00} &= \sin^2\theta_\varphi e^{i\varepsilon_\varphi(t-t')} \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\varepsilon_\varphi^2+\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\sin^2\left(2\theta_\varphi\right)\cos^2\theta_\varphi\left(\cos\left(\varepsilon_\varphi\left|t-t'\right|\right)+\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\left(\varepsilon_\varphi\left|t-t'\right|\right)}{\varepsilon_\varphi}\right) \end{aligned} \tag{A.19}$$

and

$$\begin{aligned} F_{\varphi,11} &= \sin^2\theta_\varphi e^{i\varepsilon_\varphi(t-t')} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\varepsilon_\varphi^2+\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\sin^2\left(2\theta_\varphi\right)\sin^2\theta_\varphi\left(\cos\left(\varepsilon_\varphi\left|t-t'\right|\right)+\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\left(\varepsilon_\varphi\left|t-t'\right|\right)}{\varepsilon_\varphi}\right). \end{aligned} \tag{A.20}$$

同样地，我们得到

$$L_{\varphi,01}\left(t_+,t'_+\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t-t')}\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\varepsilon_\varphi\left(t-t'\right)}{\varepsilon_\varphi}\theta\left(t-t'\right) \tag{A.21}$$

and

$$\begin{aligned} L_{\varphi,10}\left(t_+,t'_+\right) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma|t-t'|}\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\varepsilon_\varphi\left|t-t'\right|}{\varepsilon_\varphi}\theta\left(t'-t\right) \\ &\quad - e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma|t-t'|}\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\frac{\sin\varepsilon_\varphi\left|t-t'\right|}{\varepsilon_\varphi}\left[e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma|t-t'|} - e^{-\frac{1}{2}|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t+t'-2t_{in.})}\right]. \end{aligned} \tag{A.22}$$

结合这些结果，我们发现，对于 $t_+ = t'_+ = t$：

$$\mathbf{L}_\varphi = -i\left[\frac{1}{2} - \sin^2\theta_\varphi\left(1 - e^{-|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t-t_{in.})}\right)\right]\sigma^z - \frac{i}{2}\frac{\left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\varepsilon_\varphi^2 + \left(\tilde{g}_\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\sin^2\left(2\theta_\varphi\right)\left(1 - e^{-|\tilde{g}_\varphi|\Gamma(t-t_{in.})}\right)\begin{pmatrix}\cos^2\theta_\varphi & 0\\ 0 & \sin^2\theta_\varphi\end{pmatrix} \tag{A.23}$$

参考文献

[1] T. J. Osborne、M. A. Nielsen，简单量子相变中的纠缠，Physical Review A **66**(3) 032110 (2002)[2] G. Vidal、J. I. Latorre、E. Rico、A. Kitaev，量子临界现象中的纠缠，Physical Review Letters **90**(22) 227902 (2003)[3] S. Sachdev，《量子相变，第 *2* 版》，剑桥大学出版社，剑桥，2011 年。[4] M. H¨oning、M. Moos、M. Fleischhauer，费米子晶格模型中稳态相变的临界指数，Physical Review A**86** (1) 013606 (2012)[5] B. Horst mann、J. I. Cirac、G. Giedke，费米子系统中的噪声驱动动力学与相变，Physical Review A **87**(1) 012108 (2013)[6] B. Kraus、H. P. B¨uchler、S. Diehl、A. Kantian、A. Micheli、P. Zoller，通过量子马尔可夫过程制备纠缠态，Physical Review A **78** (4) 042307 (2008)[7] F. Verstraete、M. M. Wolf、J. I. Cirac，耗散驱动的量子计算与量子态工程，Nature Physics **5**(9) 633–636 (2009)[8] F. Pastawski、L. Clemente、J. I. Cirac，基于工程化耗散的量子存储器，Physical Review A **83**(1) 012304 (2011)[9] C. A. Muschik、E. S. Polzik、J. I. Cirac，两个宏观原子系综的耗散驱动纠缠，Physical Review A **83**(5) 052312 (2011)[10] T. Prosen，第三量子化：求解二次型开放费米子系统主方程的一般方法，New Journal of Physics **10** (4)043026 (2008)[11] T. Prosen、B. ˇZunkoviˇc，二次型费米子系统马尔可夫主方程的精确解：热浴、开放 *XY* 自旋链与非平衡相变，New Journal of Physics **12** (2) (2010) 025016。[12] I. Lyris、P. Lykourgias、A. I. Karanikas，开放玻色子与费米子系统中的约化动力学，Open Systems & Information Dynamics **28** (03) (2021)。[13] I. Lyris、P. Lykourgias、A. Karanikas，费米子路径积分与一维*XY* 系统中的关联动力学，Annals of Physics**421** 168286 (2020)[14] M. Peskin、D. Schroeder，《量子场论导论》，CRC Press，美国，1995 年。[15] A. Kamenev，《Keldysh 形式主义导论》（2009）。[16] L. Keldysh，Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47** 1515–1527 (1964)[17] L. Keldysh，Sov. Phys. JETP **20**2018 (1965)[18] H.-P. Breuer、F. Petruccione，《开放量子系统理论》，牛津大学出版社，美国，2007 年。

[19] J. Preskill, 《量子信息与计算》, CreateSpace Independent Publishing Platform, 加利福尼亚, 2015。[20]A. Kitaev, C. Laumann, 拓扑相与量子计算（2009年4月）, arXiv:0904.2771。[21] T.-C. Wei, S. Vishveshwara, P. M. Goldbart, 横场*XY* 自旋链中的全局几何纠缠：有限与无限系统, 《量子信息与计算》**11** （3&4）326–354（2011）[22] J. Eisert, T. Prosen, 噪声驱动的量子临界性（2010年12月）, arXiv:1012.5013。[23] Y. Zhang, T. Barthel, 《统计力学杂志》113101（2022）[24] Y. Zhang, T. Barthel, 《物理评论快报》**129**, 12401, （2022）[25] H.P. Breuer, E.M. Laine, J. Piilo, 《现代物理评论》**88** （2）021002（2015）[26] G. Kordas, G.E. Pavlou, A.I. Karanikas, 《物理评论A辑》**98** 013637（2018）[27] D. Nagy, P. Domocos, 《物理评论快报》**115**, 043601（2015）[28] X. Chen, Z.-C. Gu, X.-G. Wen, 《物理评论B辑》**83**, 035107, （2011）[29] P. Haikka, J. Goold, S. McEndoo, F. Plastina, 以及 S. Maniscalco, 《物理评论A辑》**85**, 060101(R)（2012）[30] Y. B. Wei, J. Zou, Z.-M. Wang, B. Shao, 《科学报告》**6**, 19308（2016）