arXiv:2303.02751v1 [physics.class-ph] 5 Mar 2023

不同水流中的游泳者策略

AmirAghamohammadi[a], [1] Cina Aghamohammadi[b], [2]Saman Moghimi-Araghi[c], [3]

[a] 基础物理系，物理学院，Alzahra University，德黑兰，伊朗，[b] 普林斯顿神经科学研究所，PrincetonUniversity，普林斯顿，NJ 08540，[c] 物理系，SharifUniversityofTechnology，邮政信箱 11155-9161，德黑兰，伊朗

摘要

在背景流中游泳以抵达某个目的地，寻找最优策略是一个有趣的问题，它会导出非平凡的结果和游泳路径。本文考察了针对各种类型表层水流的不同策略，包括平行水流，以及由弹簧源和汇产生的水流。游泳者可能会本能地朝目的地点游去。然而，在背景水流的影响下，这种做法未必能达到预期结果。我们将说明，在某些情况下，最佳策略是游向一个不同于实际目的地的特定地点。另一种策略是先求出最短时间路径，再沿着这条最短路径前进。我们也研究了这一替代策略。

关键词：泽尔梅洛导航问题、离岸流、追捕问题

1 引言

本文将讨论在背景流场中游泳的不同策略。在泳池中游泳与在开放水域中游泳有所不同，主要原因在于水流。如果湖中的水处于静止状态，游泳者会径直游向其目的地点。然而，当存在

[1]电子邮箱：mohamadi@alzahra.ac.ir[2] 电子邮箱：ca6941@princeton.edu[3]电子邮箱：samanimi@sharif.edu

水流时，游泳者可能会凭直觉朝目的地点游去。然而，当存在水流时，这并不是一个好主意。

测地线是曲面上距离最短的曲线。最常见的测地线示例，是欧几里得几何中的直线，或球面上的任意一段大圆弧。这也可以改写为：一个运动粒子以给定速度在曲面上运动，并求到达目的地所需的最短路径或最短时间。还可以通过加入背景流场来扩展这一问题。Zermelo 曾研究过这一扩展问题 [1]。他得到了一个偏微分方程，现称为 Zermelo方程 [2]。同样的方法也用于研究风中的声线几何 [3]。尽管 Zermelo方程没有通解，而且在绝大多数情况下几乎不可能找到精确解，但这个问题可以通过数值方法求解。

其他领域也存在这类问题。动物在空中和水中的运动可能受到其所处流场的影响，这也是一个类似的问题。例如，参见 [4]。控制理论被用于开发一种基准方法，以求得使方向调整所需时间最短（最优）的方案。

另一个有趣的类似问题乍看之下似乎毫不相关，那就是追捕问题。其中有两个物体：被追击者和追击者。被追击者沿着一条轨迹运动，而追击者则跟随其后。参见例如 [5–9]。这类问题通常旨在确定追击者的轨迹。追击者通常会本能地朝被追击者移动。 [10],中表明，斜面上的曲线运动 [10,11] 与追捕问题类似。设想一位游泳者在水流中朝着一个固定的目的地游去。游泳者在静水中的速度为 w，而表层水流以 $\boldsymbol{u}$的恒定速度流动。在随水流移动的参考系中，这个问题就转化为一个标准追逐问题：追击者追逐以恒定速度奔跑的被追击者。鉴于这些问题之间可能存在的类比，分析其中任何一个都可能帮助我们获得更深入的理解。

在非定常流场中导航的能力对广泛的机器人应用至关重要。 [12], 中使用深度强化学习，在非定常二维流场中寻找耗时较短的路径。研究发现，朝目标方向游等较简单的策略基本无法完成这项任务。

开放水域中存在水流，包括河流、海洋和海域中的水流。其中一些水流是离岸流，对游泳者构成极大威胁。离岸流会像一条流向大海的河流一样，径直远离海岸。若游泳者采用错误的策略（例如与水流对抗），就很难逃离离岸流。在 [13], 一种“能量成本”

策略用于逃离离岸流。本文研究游泳者前往目的地时可采用的不同策略。我们还考察了不同类型的水流，例如平行流、发散源和汇。在给定背景水流中，采用非平凡策略到达目标点这一问题，对本科生而言颇具趣味和挑战性。本文讨论的问题和示例或可用于力学本科课程。此外，我们认为这些计算能够提供补充正式训练的技能。

本文的结构如下。第2节讨论平行流中的导航。游泳者可以采用不同的策略：直接朝目的地游去，选定一个引导点并直接游向该点，或者最终沿最短时间路径游泳。沿最短时间路径游泳这一策略，等同于在无穷远处设置一面旗子或一个引导点。在第3节和第4节中，我们假设存在一个源或汇，形成径向流。第5节将探讨存在源或汇时上述策略的应用。最后，第6节讨论多个源和汇。

2 平行流

设想湖水并非静止，而是存在水流。这种情况可能出现在典型的河流中。表层以恒定且均匀的速度 $\boldsymbol{u}$ 流动。游泳者在静水中的速度 w 可能大于、小于或等于流速 u。从教学角度来看， $w = u$这种情况非常有趣。因此，尽管这是一个相当特殊的情形，我们仍将从它开始，并比其他情形更深入地分析。

2.1 $w = u$

游泳者有各种不同的策略，我们稍后会讨论，但游泳者的本能策略可能是游向点 O。以 x 轴沿流动方向，并将 O 设为原点。于是，游泳者的速度 $\boldsymbol{v}$是由另外两个向量相加得到的向量： $-u\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = -u\boldsymbol{e}_r$是游泳者相对于水的速度，方向指向点 O；另一个向量 $u\boldsymbol{i}$ 则是流速。这两个向量之间的角度为 ϕ，游泳者到点 O 的距离为 r。见图（1）。

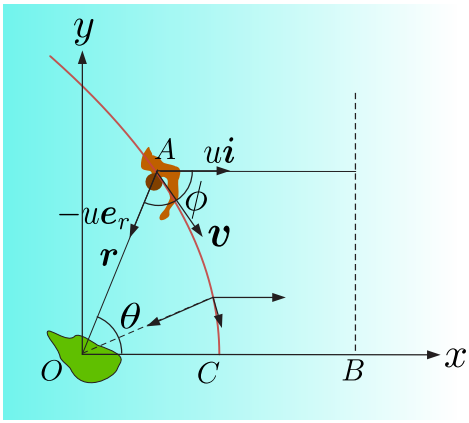

图1：如果游泳者朝着目的地游去，游泳者的路径是一条以目的地为焦点的抛物线。

可以看出，

$$\dot{r} = -u(1+\cos\phi) = -u(1-\cos\theta), \tag{1}$$

$$\dot{x} = u(1+\cos\phi) = u(1-\cos\theta). \tag{2}$$

因此，$\dot{x}+\dot{r}=0$ 或 $x+r=x_0+r_0=:L$ 是一个常数，这就是抛物线的一般方程。因此，游泳者的路径是一条从点 A出发的抛物线，沿游泳者的路径距 O 最近的点是 C。实际上，在这一策略中，游泳者永远不会经过点 O。让我们明确求出游泳者的路径。

$$r + r\cos\theta = L \quad \rightarrow \quad r = \frac{L}{1+\cos\theta}, \tag{3}$$

由此我们可以求得游泳者的径向速度

$$\dot{r} = \frac{L\,\dot{\theta}\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}, \tag{4}$$

与（1）相比，θ 可求得

$$\dot{\theta} = \frac{-u}{L}\sin\theta(1+\cos\theta). \tag{5}$$

现在来看看游泳者需要多长时间才能到达点 C。为了求出这个时间，我们使用 θ 的关系式，得到下面的积分

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_{\theta_0}^0 \frac{-L\mathrm{d}\theta}{u\sin\theta(1+\cos\theta)}. \tag{6}$$

这个积分可以解析求解，但实际上没有必要这样做。我们将从邻近点到达 C 所需的时间记为 T_ϵ

$$\begin{aligned} T_\epsilon &= \int_\epsilon^0 \frac{-L\mathrm{d}\theta}{u\sin\theta(1+\cos\theta)} \\ &\approx \int_\epsilon^0 \frac{-L\,\mathrm{d}\theta}{2u\theta} = \frac{-L}{2u}\ln\theta\Big|_\epsilon^0. \end{aligned} \tag{7}$$

T_ϵ 是无限的。考虑到 $T > T_\epsilon$，T 也为无限大。当游泳者接近 x轴时，其速度大小逐渐减小，因此游泳者永远无法到达点 C。

为了进行完整的讨论，我们来精确计算游泳者沿路径上任意两点之间的抛物线路段游过任意距离所需的时间。我们需要求得以下积分

$$\begin{aligned} T_{\theta_1,\theta_2} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-L\,\mathrm{d}\theta}{u\sin\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \frac{L}{2u}\left(\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\Big|_{\theta_2}^{\theta_1}. \end{aligned} \tag{8}$$

其中，θ_1 对应起点，θ_2 对应目的地。这里我们使用了 $\sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2$，以及 $1+\cos\theta = 2\cos^2\theta/2$，并作变量替换 $g := \tan\theta/2$。初始距离 L和速度 u可用于构造特征时间L，进而可用u将时间无量纲化为 $\tau(\theta_0)$: $= \frac{2uT_{\theta_0}}{L}\Big|_0$。图 (2) 描绘了无量纲时间 $\tau(\theta_0)$与 θ_0的关系。从图中可以看出，从点 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 和 $r_0 = L$到达 x 轴所需的时间是无限的。因此，游泳者朝目的地游去这一策略并不可取。稍后我们将讨论一些更好的策略，不过首先考虑在 $w \neq u$时采用同一策略。

2.2 $w \neq u$

现在假设游泳者的速度不等于 u。那么总速度为

$$\boldsymbol{v} = -w\boldsymbol{e}_r + u\boldsymbol{i}, \tag{9}$$

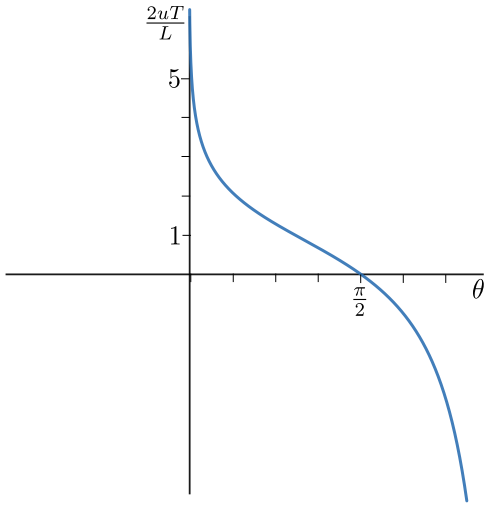

图 2：无量纲时间 $\tau(\theta_0) := \frac{2uT_{\theta_0}}{L}$，与 θ_0 的关系。

这将得到极坐标和笛卡尔坐标中的以下速度分量

$$\begin{cases} \dot{r} = -w + u\cos\theta \\ r\dot{\theta} = -u\sin\theta. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = u - w\cos\theta \\ \dot{y} = -w\sin\theta. \end{cases} \tag{10}$$

将极坐标中的速度分量相除，并定义无量纲量 $\alpha := \frac{w}{u}$，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{(1-\alpha\cos\theta)}{\alpha\sin\theta} \\ &= -\cot\theta + \frac{1}{\alpha\sin\theta}. \end{aligned} \tag{11}$$

该方程可以求解：

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) &= \frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_0/2)}\right| - \ln\left|\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\right|, \\ r &= r_0\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}\left(\frac{\tan\theta/2}{\tan\theta_0/2}\right)^{1/\alpha} \end{aligned} \tag{12}$$

在图（3）中，绘出了游泳者在不同 α 取值下，并根据初始条件 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 得到的路径。如果 $w < u$ $(\alpha \geq 1)$，游泳者

甚至无法到达 x 轴；在时间较长时，它只能逆着 $\boldsymbol{u}$ 的运动方向游动，渐近于 x 轴，并远离目的地。只有当 $w > u$ ($\alpha < 1$)时，游泳者才能到达目的地。

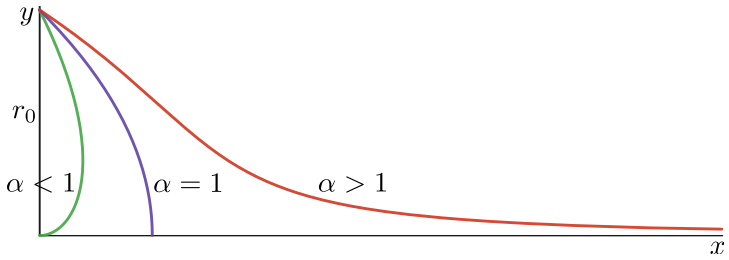

图 3：根据初始条件，$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 和 $r(0) = r_0$，在 α 的不同取值下游泳者的路径。

游泳时间可以精确计算。利用方程（10），可得

$$w\dot{r} + u\dot{x} = u^2 - w^2. \tag{13}$$

对上述方程进行积分，可得

$$\begin{aligned} wr + ux &= wr_0 + ux_0 + (u^2 - w^2)t, \\ r &= \frac{r_0(1 + \alpha\cos\theta_0) + (\alpha^2 - 1)wt}{(1 + \alpha\cos\theta)}. \end{aligned} \tag{14}$$

由（10）可见，$\dot{r} < 0$ 对于 $\alpha < 1$。因此，r 是时间的减函数，对于 $\alpha < 1$。当 r 趋近于零时，时间趋近于 T

$$T = \frac{r_0(1 + \alpha\cos\theta_0)}{w(1 - \alpha^2)}. \tag{15}$$

2.3 第二策略：引导点

在上一节中，我们指出，朝着目的地游去的简单策略只有在游泳者速度 w 大于 u时才有效。假设 w 等于 u ，并提出另一种可能使游泳者抵达目的地的策略。新策略如下：游泳者不再朝着实际目的地游，而是选择一个引导点并朝它游去。换句话说，我们在某个特定位置放置一面虚拟旗帜，游泳者始终尝试抵达旗帜。根据前几节推导出的结果，显然，起点 A和目的地 O 都位于一条抛物线上，而引导点就是这条抛物线的焦点。

有鉴于此，现在的问题完全不同了：经过 A 和 O这两点的抛物线有多少条？它们的焦点轨迹（即引导点的位置）在哪里？图（4）中绘出了一条抛物线及其焦点，焦点以旗子表示。坐标轴

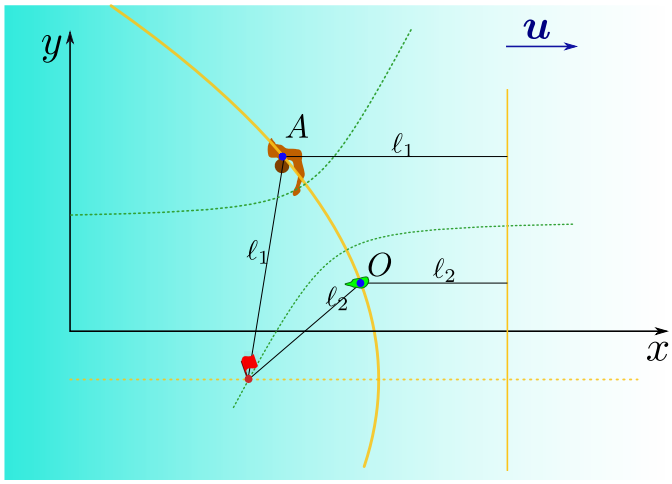

图 4：如果游泳者朝着引导点游去（图中以红旗表示），那么游泳者的路径将是一条抛物线，旗子位于其焦点处。我们应当设置旗子的位置轨迹是一条双曲线（以绿色虚线表示），其两个焦点是起点和目的地（A 和 O）。

这些抛物线的对称轴均平行于 x 轴，且所有准线均平行于 y 轴。有无数条抛物线经过点 A 和 O。设点 A (O) 到其中一条准线的距离为 ℓ_1 (ℓ_2)。这些点到相应焦点的距离（图 4中以旗子表示）也与之相等。如果 $x_O - x_A = a$，那么

$$\ell_1 - \ell_2 = a. \tag{16}$$

因此，这些抛物线的焦点轨迹是双曲线，其两个焦点分别为 A 和 O 。

总之，如果游泳者将这条双曲线上的任意一点作为引导点，并在那里设置一面旗子，他/她就能到达目的地。渐近地，游泳者可以选择双曲线上一个非常遥远的点。这仅仅意味着他的（她的）速度方向保持不变，而路径是一条直线。

2.4 第三种策略：时间最小化

第三种策略基于寻找一条使到达目的地所需时间最短的路径。为了找到所需的路径，我们可以使用变分法的技巧。首先假设 $w = u$。那么游泳者速度为 $v = 2u\cos\varphi$，其中

$$y' = \tan(\pi - \varphi), \tag{17}$$

是路径的斜率，记为 $y(x)$。见图（5）。游泳所需的时间 f

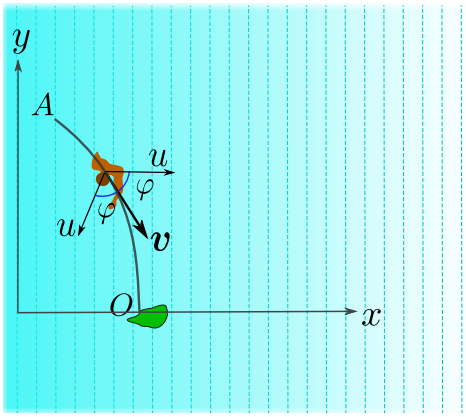

图 5：变分法可以求出一条路径，使到达目的地所需的时间最短。

游泳是

$$\begin{aligned} T &= \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int \frac{\mathrm{d}s}{2u\cos\varphi} \\ &= -\frac{1}{2u}\int \mathrm{d}x\,(1 + y'^2) =: \int \mathrm{d}x\, J(y'). \end{aligned} \tag{18}$$

这里我们使用了

$$\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) = \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2} \tag{19}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{20}$$

于是得到欧拉方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial J}{\partial y'}\right) - \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \tag{21}$$

结果是 y' 为常数。因此，使时间最短的曲线是两点之间的一条直线 A 和 O。对于 $w \neq u$，也可以作出类似的论证。与方程（18）相同， J 仅取决于y'，因此得到一条直线路径。注意，即使是最短时间路径策略，也等同于在无穷远处设置一面旗子或一个引导点。如果这类问题有解，那么解就是一条直线。然而，在某些情况下，游泳者可能无法到达目标点。见图（6）。游泳者总是可以从任意一点到达点 O

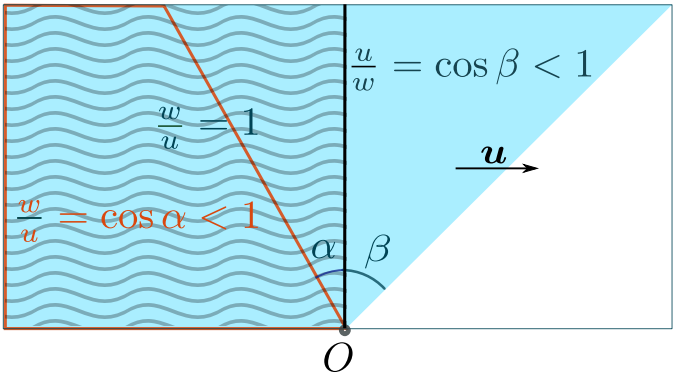

图 6：如果 $w > u$，游泳者从蓝色梯形区域内的任意位置都能到达点 O。如果两者的速度相等，即 $w = u$，那么波浪区域表示游泳者能够到达点 O 的所有初始位置。最后，如果 $w < u$，游泳者只有在最初位于橙色边框的梯形区域内时，才能到达 O。

位于蓝色梯形区域内，如图（6）所示，条件是 $w > u$。如果 $w = u$，那么从波浪区域内的任意位置都能到达 O。最后，如果 $w < u$，游泳者能够到达 O，但前提是其最初位于橙色边框的梯形区域内。

3 源

到目前为止，我们考虑的都是速度均匀的流动。我们想探讨游泳者可能遇到的其他类型的表层水流。另一种颇为有趣的速度场，至少从教学角度来看如此，就是“源流”。所谓源流，是指水的表面流速大小恒定，但水流从某个指定点——源点——沿径向向外流动。假设湖底有一股泉水，使湖面上的水

从湖中的源点向外流动 B ，径向速度为u。对于等深湖而言，径向速度大小均匀这一假设并不符合实际。水的不可压缩性与这一假设不相容。虽然可以通过设置一股泉水来形成这种速度场，但与此同时，湖底也不能是平坦的。从泉水涌出点起，湖的深度应随 r^{-1} 而减小，其中 r 是距泉水的距离。见图（7）。

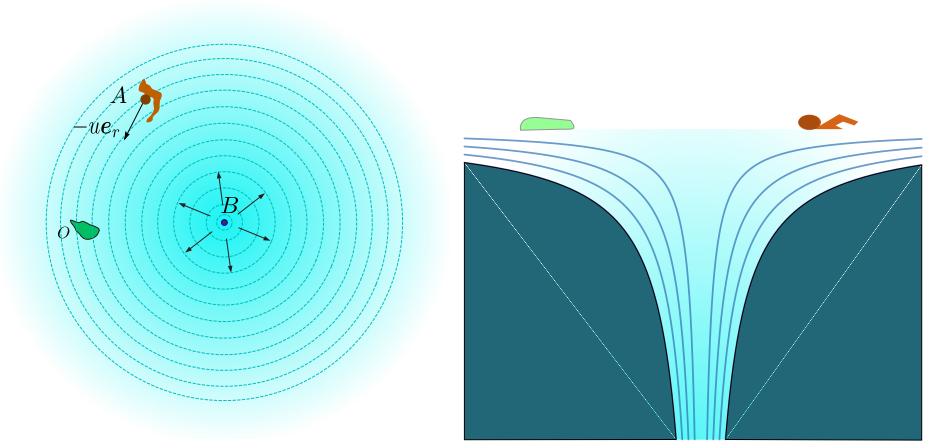

图 7：在存在位于 B 的源时，游向目的地 O。

假设游泳者的速度 w等于 u。游泳者的速度由两部分组成，$-u\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = -u\boldsymbol{e}_r$ 和 $u\dfrac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = u\boldsymbol{e}_{r'}$，其中$\boldsymbol{e}_r$（ $\boldsymbol{e}_{r'}$是相对于点O (B)的径向单位向量。见图（8）。游泳者沿 OA 和 BA 方向的速度分量为

$$\dot{r} = -u(1+\cos\phi), \tag{22}$$

$$\dot{r}' = u(1+\cos\phi), \tag{23}$$

从而得到 $\dot{r}+\dot{r}'=0$。游泳者沿着一条路径移动，在这条路径上， $r+r'$（即它到源和目的地（B 和 O）的距离之和）保持不变，例如 L。这是椭圆的一般方程。游泳者的路径是一个椭圆，以 O 和 B 为焦点。 r' 可写为

$$r' = \sqrt{r^2+\ell^2-2r\ell\cos\theta} = L-r, \tag{24}$$

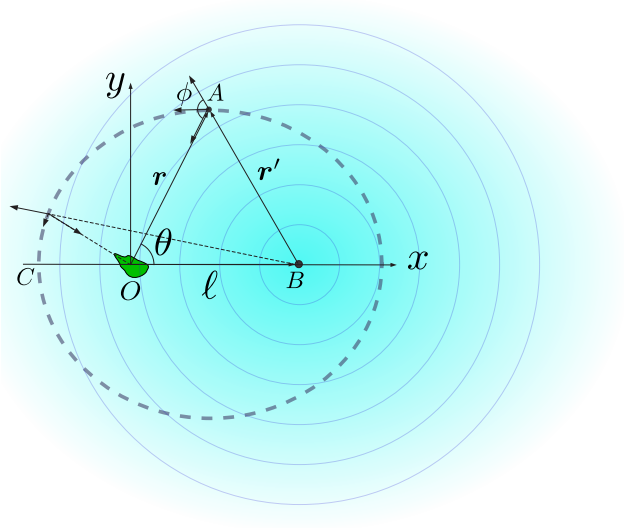

图 8：如果游泳者朝目的地游去，其路径是一个以源和目的地为焦点的椭圆（B 和 O）。

由此可得

$$r = \frac{L^2 - \ell^2}{2(L - \ell\cos\theta)} =: \frac{E}{1 - e\cos\theta}, \tag{25}$$

其中

$$E := \frac{L^2 - \ell^2}{2L}, \quad e := \frac{\ell}{L}. \tag{26}$$

游泳者速度的极坐标分量为

$$\dot{r} = -u(1 + \cos\phi), \tag{27}$$

$$r\dot{\theta} = u\sin\phi. \tag{28}$$

利用角度 ϕ 和 θ 之间的以下关系

$$\frac{\text{正弦 } \phi}{\ell} = \frac{\text{正弦 } \theta}{L - r} \tag{29}$$

我们来到

$$\dot{\theta} = \frac{u\ell\sin\theta}{r(L - r)}. \tag{30}$$

当 θ（或 ϕ）趋于 π 时，θ，而 $\dot{r}$ 趋近于零。这发生在点 C，即椭圆与轴 x的交点处，此时游泳者停下。尽管它

开始朝点 O的方向前进，但最终会偏离点 O，直到最后停在点 C，距点 $\frac{L-\ell}{2}$ 的距离处O。对（30）积分，可得抵达 C所需的时间。

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta\ r(\theta)(L - r(\theta))}{u\ell \sin\theta}. \tag{31}$$

采用小节（2.1中的类似论证，从 C 附近到达该点所需的游泳时间是无限的，因此，到达点 C 所需的总时间也同样是无限的。

然而，从这条路径上任意一点 θ_1到另一个点 θ_2所需的时间，可以精确求得

$$T_{\theta_1 \to \theta_2} = T(\theta_2) - T(\theta_1) \tag{32}$$

其中 $T(\theta_i)$ 通过以下关系定义

$$\begin{aligned} T(\theta_i) := -\frac{E}{2u\ell}\Bigg[&\frac{(e-1)\ell + E\ln(1-\cos\theta_i)}{(e-1)^2} + \frac{(e\ell + \ell - E)\ln(1-\cos\theta_i)}{(e+1)^2} \\ &+ \frac{2e}{(e^2-1)^2}\left(\frac{E(e^2-1)}{-1+e\cos\theta_i} + (\ell - e^2\ell - 2E)\ln(1-\cos\theta_i)\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{33}$$

这里， E 和 e 通过式（26）定义。

当 $w \neq u$ 时，也可以研究“源流”的情形。所得结果在定性上与此前的结果相同，因此我们不再详细讨论。相反，我们考虑另一种流：“汇流”。

4 汇

假设湖底有一个汇，使湖面上的水朝向点 B 流动，其径向速度为 u。假设 w 等于 u。这与前一种情况非常相似。汇周围湖泊的深度应与 r^{-1} 成正比，其中 r 是到汇的距离。游泳者的速度由两部分组成，分别是 $-u\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = -u\boldsymbol{e}_r$ 和 $-u\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = u\boldsymbol{e}_{r'}$，其中 $\boldsymbol{e}_r$（ $\boldsymbol{e}_{r'}$) 是相对于点 O (B) 的径向单位向量。见图（9）。速度 —

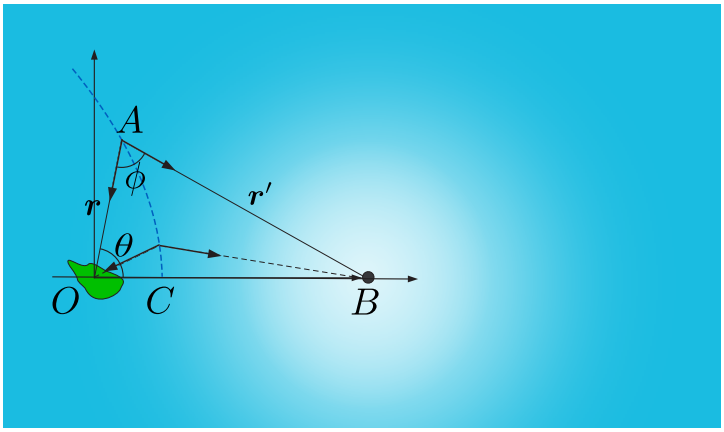

图9：如果游泳者朝目的地游去，那么他的路径是一条双曲线，汇和目的地（B 和 O）是其焦点。

游泳者沿 OA 和 BA 方向的分量为

$$\dot{r} = -u(1+\cos\phi), \tag{34}$$
$$\dot{r}' = -u(1+\cos\phi), \tag{35}$$

由此得到 $\dot{r} - \dot{r}' = 0$。因此，游泳者沿着一条路径移动，在这条路径上，他到两点 B 和 O 的距离之差为常数。这是双曲线的特征： $r - r'$ 为常数。游泳者的路径是一条双曲线， O 和 B 是其焦点。于是，路径可表示为

$$r = \frac{\ell^2 - L^2}{2(L + \ell\cos\theta)} =: \frac{E}{1 + e\cos\theta}, \tag{36}$$

其中

$$E := \frac{\ell^2 - L^2}{2L}, \quad e := \frac{\ell}{L}. \tag{37}$$

当游泳者接近 x 轴时，在点 C处，其速度趋近于零，并最终停下。

5 存在源（汇）时到达岛屿的策略

在前面的章节中，我们已经说明，当游泳者速度等于漂流速度时，朝岛屿游并不能到达岛上；相反，游泳者

会沿着椭圆或抛物线的一段游动，永远无法到达岛屿。尽管游泳者会被推离岛屿（或朝岛屿漂去），也就是被推向汇（或源），仍然可以设法抵达岛屿。因此，我们还需要采用一种新的策略。对于均匀流的情形，我们提出以下新策略：朝第三个点——引导点游去，其坐标需要确定。也就是说，我们在某处放置一面虚拟旗帜，并让游泳者朝这面旗子游去。我们来看看流中存在一个源的情形。根据前面章节中的类似推理，我们可以论证，游泳者的路径是椭圆的一段，其焦点分别为源点和虚拟旗帜。由于我们的目标是抵达岛屿，因此必须为旗子选择合适的坐标，使形成的椭圆经过岛屿。见图（10）。我们称之为

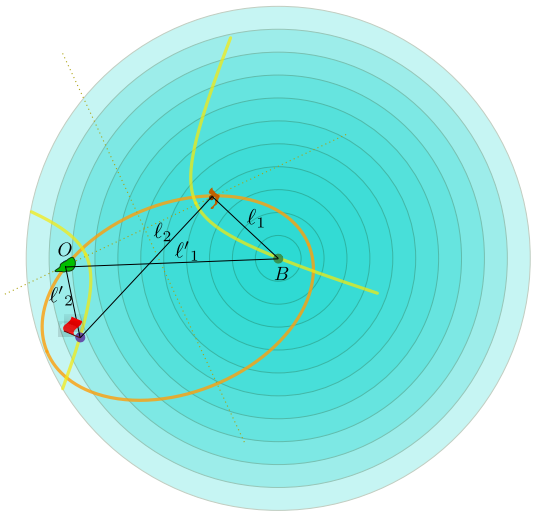

图10：存在源时，以旗子为引导点进行游泳。路径将是以源和旗子为焦点的椭圆。我们应设置旗子的位置轨迹是一条双曲线（以黄色线条表示），其焦点为两个点：起点和目的地。

游泳者的初始坐标到源和旗子的距离分别为 ℓ_1 和 ℓ_2，岛屿到同两点的距离分别为 ℓ'_1 和ℓ'_2。由于路径是椭圆的一部分，我们有 $\ell_1 + \ell_2 = \ell'_1 + \ell'_2$，这意味着 $\ell_2 - \ell'_2 = \ell'_1 - \ell_1$。该方程右侧是一个固定且已知的量，因此可以得出，我们必须将旗子放在一个点上，使该点到游泳者初始坐标和岛屿的距离之和等于这个固定值。这就形成了一条双曲线，其焦点就是这两个

点。请注意，在旗子位于无穷远处这一特殊情况下，游泳者的路径不是椭圆，而是双曲线。

对于汇的情况，用非常相似的步骤可以证明，旗子应放在椭圆上的任意一点，该椭圆的焦点分别是游泳者的初始坐标和岛屿。有趣的问题是，选择哪一点才能最快抵达岛屿。

5.1 最优路径

在这一步中，我们将研究最短时间路径。设泉水位于原点。图（11）中的橙色线表示耗时最短的路径。使用极坐标更为方便。将游泳者的速度记为 $v = 2u\cos(\varphi - \theta)$，将微分路径记为 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2}$，，则游泳时间为

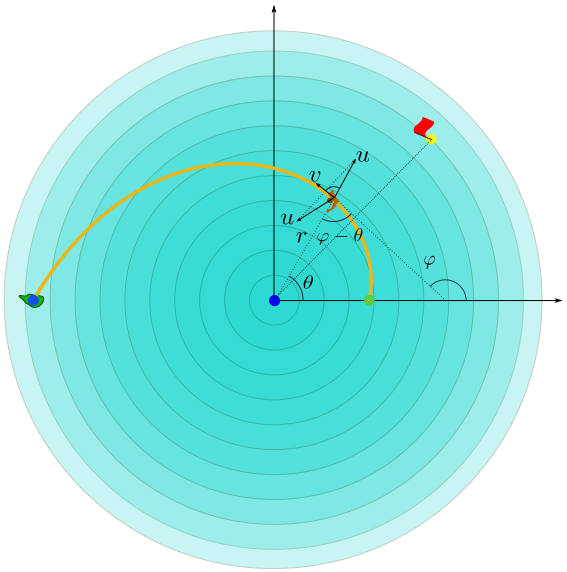

图11：在源的作用下游向目的地。橙色线表示最短时间路径。

$$
\begin{aligned}
T = \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int \frac{\mathrm{d}s}{2u\cos(\varphi-\theta)} \\
= & \frac{1}{2u}\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}s} = \frac{1}{2u}\int \frac{(r^2+r'^2)\,\mathrm{d}\theta}{r'} \\
=: & \frac{1}{2u}\int J(r,r')\,\mathrm{d}\theta. \qquad (38)
\end{aligned}
$$

这里的撇号表示对 θ 求微分。注意，

$$
\mathrm{d}r = \mathrm{d}s\,\cos(\varphi-\theta) \qquad (39)
$$

由于 $J(r,\ r') = \frac{r^2}{r'} + r'$ 并不显式依赖于 θ，我们得到

$$
J - r'\frac{\partial J}{\partial r'} = \text{constant}. \qquad (40)
$$

由此可得

$$
r' = Cr^2, \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{1}{A-C\theta}. \qquad (41)
$$

这里，A 和 C 是两个常数，可利用到达点和目的地的坐标求得。要理解这条路径，可以使用广为人知的镜像法。带有红色旗子的黄色点是源点相对于游泳者所在点处路径切线的镜像。游泳者应当远离旗子。当游泳者沿路径移动时，镜像也会随之移动。如果原点处的源被汇取代，那么原则上，最短时间路径不会改变。尽管需要将 $\boldsymbol{v}$ 改为 $-\boldsymbol{v}$，并替换起点和目的地。

6 更多源点和汇

到目前为止，我们考虑的都是游泳者处于单个源/汇作用下的问题。作为一个数学问题，可以将这种情况推广到湖中存在多个汇和源点的情形。请注意，即使是平行流的情况，也可以通过在无穷远处设置一个源/汇来得到。此外，游泳者自身的速度（当游泳者采取朝目的地游去的策略时）也可以解释为岛屿处的一个汇，而游泳者只需在每一点都顺着总流速前进。

因此，要超越我们先前研究的内容，汇与源点的总数至少为三个。我们必须记住，至少

系统中应至少有一个汇（这是由游泳者的速度决定的）。最简单的情况是源点/汇的总数恰好为三个。我们将它们称为源点/汇 A_1, A_2, 和 A_3。每个源点/汇都会以速度 v_i （其中 $i \in \{1, 2, 3\}$）产生一股远离/流向相应点的流。我们可以将这些速度视为正值或负值，以表示该点是源点还是汇。此外，我们有时也将这些速度称为汇/源点的强度。图（12）展示了三种典型情况。一般而言，在此类情况下，无法通过解析方法求得游泳者最终的路径。不过，可以将该系统作为一个动力系统问题来分析，并提出这样的问题："游泳者的命运将会如何？"

一般来说，游泳者不同的归宿可以归纳如下：

- 1) 它会随流漂向无穷远处。
- 2) 它会到达某个汇。
- 3)游泳者的轨迹最终会停在湖中的某处，那里既没有汇，也没有源。

绘制这类系统的相图有助于理解这些不同的情形。图12 展示了分别属于上述某一类别的系统相图。三个源点/汇的坐标被设定在一个等边三角形上，而它们的速度在子图（-0.3、-0.3）中分别取为（1、-3、1、1）和（1.5、-1、-1）。在情形（a）中，b）和（c）中，a源的正速度大于汇点速度之和的大小。因此，无论游泳者从哪里出发，他/她最终都会随流漂向无穷远处。相反，在情形（b）中，如果某个汇比其他汇/源的速度之和更强，游泳者的路径就会终止于该汇。更有趣的情形是，没有任何一个源或汇占据主导地位，其速度都不超过另外两个的速度之和。图（12c）示意了这类情形的一个例子。游泳者最终会到达一个既不是源点/汇、也不是无穷远处的点：此时会形成一个不动点。当然，一般而言，这个不动点不一定稳定。例如，在上述同一情形下，如果速度 v_1 小于 1，那么这个不动点就会变得不稳定，游泳者最终将到达点 b 或点 c，具体取决于初始条件。

可以求出无穷远处或某个汇的稳定性的必要条件。虽然我们考虑的是有三个汇/源点的情况，但同样的论证也适用于有更多汇/源点的情况。

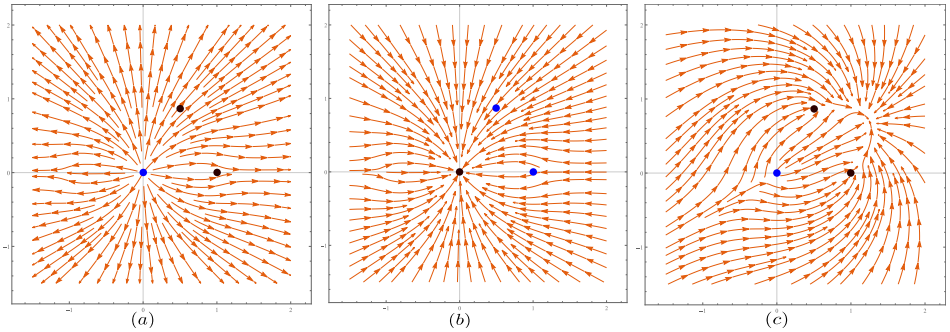

图12：三个源/汇组成的系统的相图。蓝色（黑色）圆点表示源（汇）。在情形（a）中，源的正速度大于汇点速度之和的大小。因此，无论游泳者从何处开始，最终都会随流流向无穷远处。在情形（b）中，一个汇比其他汇/源的速度之和更强，游泳者的路径最终会到达该汇。在情形（c）中，没有任何一个源或汇的强度超过另外两个的总和。

无穷远处的稳定性：在一阶近似中，可以认为所有汇/源点都位于原点。因此，无穷远处的流动是径向的，其速度为 $v_\infty = \sum_i v_i$。因此，取决于 v_∞ 是正还是负，无穷远处将是稳定的或不稳定的。

汇点的稳定性：显然，源不可能稳定。不过，如果汇足够强，它就可以成为稳定点。汇 j 附近的速度场可以写成如下形式：

$$v = v_j \boldsymbol{e}_r + \sum_{i \neq j} v_i \boldsymbol{e}_{ji} = v_j \boldsymbol{e}_r + v_{\text{other}} \boldsymbol{s}. \tag{42}$$

其中，$\boldsymbol{e}_{ji}$ 是沿着 $\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$方向的单位向量。具体而言，$v_{\text{other}}\boldsymbol{s}$ 表示其他点在点 j处产生的速度场；我们选择 $\boldsymbol{s}$，使得 $v_{\text{other}} > 0$。如果 $v_{\text{other}} < |v_j|$，汇 j 将是稳定的，因为径向向内速度占主导地位，超过了其他点产生的流动。不过，如果 $v_{\text{other}} > |v_j|$，该汇根本不是不动点。

第三种情况，即不动点不在无穷远处，也不在汇上，就没那么容易处理了。必须先找到不动点，再通过导数矩阵判断该点是否稳定，或者是否为鞍点。值得一提的是，一个系统中可以存在多个不同类型的不动点。例如，考虑这样一种情况：在点（-1，0）和（1，0）处有两个强度为 $v = 1$ 的源点，并且有一个汇，其

强度 $v' = -1$ 位于原点。无穷远处和原点都是稳定不动点，并且 y 轴上有两个鞍点不动点。见图（13）。

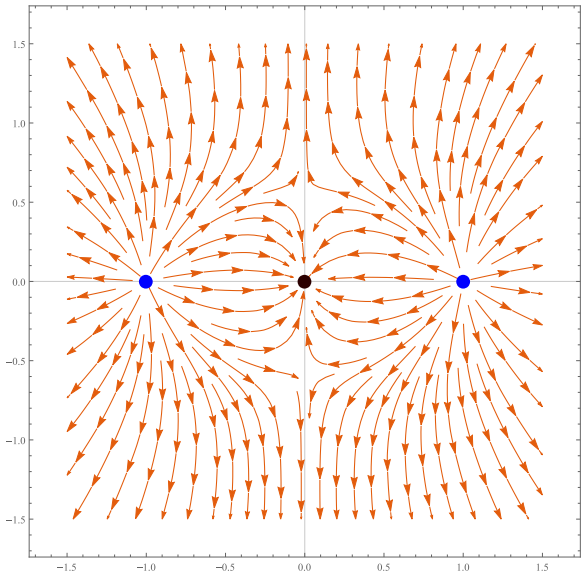

图 13：一个由两个强度为 $v = 1$ 的源点组成的系统，它们位于 $(-1,\ 0)$ 和 $(1,\ 0)$，以及一个位于原点、强度为 $v' = -1$ 的汇。该系统的无穷远处和原点均为稳定不动点。 y轴上还有两个鞍点不动点。

7 结语

我们考察了游泳者在不同背景表层水流中的路径。该问题在概念和数学上都展现出优雅之处。要充分理解该系统，必须运用一些几何工具和代数工具。此外，在给定背景水流中采取非平凡策略以到达目标点这一概念，对本科生而言颇具趣味性和挑战性。而且，运用动力系统工具分析该系统，有助于学生从一个完全不同的视角审视整个系统。

致谢：A. Aghamohammadi 的研究工作得到了 Alzahra University 研究委员会的支持。A. A. 谨此致谢

感谢 M. Khorrami 提供的宝贵意见。

参考文献

[1]E. Zermelo, 《ZAMM-应用数学与力学杂志/应用数学与力学学报》 **11**, 第2期（1931）114-124页。[2] A. E. Bryson 与 Y. Ho, 《应用最优控制：优化、估计与控制》（泰勒与弗朗西斯，2018）。[3] G. W. Gibbons 与 C.M Warnick, 《当代物理学》52.3（2011）：197-209。[4] J. D. McLaren、J. Shamoun-Baranes、A. M. Dokter、R. H. Klaassen 与 W. Bouten, 《英国皇家学会界面杂志》**11** 99（2014）第20140588页。[5] P. J. Nahin, 《追逐与逃逸：追逐与逃逸数学》（普林斯顿大学出版社, 2012）[6] A. Bernhart, 《数学论丛》**20**（1954）189-206；**23**（1957）49–65；**24** 第3期（1959）189-206。[7] T. J. Richardson, 《数学与人工智能年鉴》**31**第1期（2001）127-146。[8] J. A. Marshall、M. E. Broucke 与 B. A. Francis, 《IEEE自动控制汇刊》**49** （2004）1963-1974。[9] C. E. Mungan, 《欧洲物理学杂志》**26** （2005）985-990。[10] V. M. Shunyakov 与 L. V. Lavrik, 《美国物理学杂志》**78**（2010）1406-1411。[11] C. Aghamohammadi 与 A. Aghamohammadi；《欧洲物理学杂志》**32** （2011）1049-1057。[12] P. Gunnarson、I. Mandralis、G. Novati、P. Koumoutsakos 与 J. O. Dabiri, 《自然通讯》**12** （2021）1-7。[13] A. Withers 与 S. Maldonado, 《自然灾害》**108** 第2期（2021）1449-1467。