arXiv:2303.02757v1 [math.CO] 5 Mar 2023

并集顶点可区分边着色

Teeradej Kittipassorn* Preechaya Sanyatit†

2023年3月7日

摘要

图 G 的 *union vertex-distinguishing chromatic index* $\chi'_{\cup}(G)$是满足以下条件的最小自然数 k：可以为 G 的边分配 $[k]$ 的非空子集，使得分配给与每个顶点关联的边的子集之并集彼此不同。我们证明，对于一个具有 n 个顶点且不含阶数至多为二的连通分支的图 G，有 $\chi'_{\cup}(G) \in \{\lceil \log_2(n+1) \rceil, \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1\}$。这回答了 Bousquet、Dailly、Duchˆene、Kheddouci 和 Parreau 提出的问题，也独立回答了 Chartrand、Hallas 和 Zhang 提出的问题。

1 引言

如果每个顶点关联的边的颜色集各不相同，则称该图的边染色是顶点可区分的。这一概念的先驱包括 Harary 和 Plantholt [16], Aigner、Triesch 和 Tuza [2], 以及 Burris 和 Schelp [11]。任意边染色 [1, 10] 以及正常边着色 [4, 6, 7]的情形都已得到广泛研究。对于任意边染色 [15, 18] 和正常边着色 [5, 17, 24]，人们也研究了较弱的概念，即只要求相邻顶点可区分。人们还研究了许多变体，其中颜色集被颜色多重集 [9, 12, 20], 、和 [14, 19, 21], 、差 [23] 或积 [22]取代。

在本文中，我们关注这样一种推广：颜色是$[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ 的非空子集，并通过与每个顶点关联的边的颜色并集来区分各顶点。给定一个有 n 个顶点的图 G 和一个自然数 k，若边染色 $c: E(G) \to \mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$ 所对应的并顶点染色 $c_{\cup}: V(G) \to \mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$定义如下，则称其为并顶点可区分边染色：

$$c_{\cup}(v) = \bigcup_{uv \in E(G)} c(uv),$$

*朱拉隆功大学理学院数学与计算机科学系，泰国曼谷 10330； teeradej.k@chula.ac.th。

†泰国佛统府 73000，艺术大学理学院数学系；sanyatit_p@silpakorn.edu； *Corresponding author*。

是单射，即对于任意不同的顶点 u 和 v， $c_\cup(u) \neq c_\cup(v$成立。图 G 的并集顶点可区分色指数 $\chi'_\cup(G)$是满足 G 存在并顶点可区分边染色的最小自然数 k 。这一概念由 Bousquet、Dailly、Duchˆene、Kheddouci 和 Parreau [8], 提出，Chartrand、Hallas 和 Zhang [13] 则独立地以“强皇家染色”之名提出了这一概念。

我们只考虑不含阶数至多为二的连通分支的图，否则并顶点可区分边染色将不存在。注意，$\chi'_\cup(G) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$，因为在 $c_\cup$ 中： $V(G) \to \mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$，颜色数必须至少与顶点数相同，即 $2^k - 1 \geq n$。另一方面，Bousquet、Dailly、Duchˆene、Kheddouci 和 Parreau [8] 证明了，

$$\chi'_\cup(G) \in \{\lceil \log_2(n+1) \rceil, \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1, \lceil \log_2(n+1) \rceil + 2\}.$$

路径、完全二叉树、圈（除 C_3, C_7 外）和超立方体满足 $\chi'_\cup(G) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$，而完全图（除 K_{2^k} 对所有 k 外）以及最小度较大的图满足$\chi'_\cup(G) = \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1$ （见 [3, 8, 13]）。然而，尚未发现满足 G with $\chi'_\cup(G) = \lceil \log_2(n+1) \rceil + 2$ 的图。Bousquet、Dailly、Duchˆene、Kheddouci 和 Parreau [8] 提出了它们是否存在的问题，而 Chartrand、Hallas 和 Zhang [13] 猜想它们并不存在。我们证明了这一猜想。

定理1. $\chi'_\cup(G) \in \{\lceil \log_2(n+1) \rceil, \lceil \log_2(n+1) \rceil + 1\}$，对于任意一个有 n 个顶点且不含阶数不超过二的连通分支的图 G。

要证明定理1，只需证明以下结果。此归约由 Bousquet、Dailly、Duchˆene、Kheddouci 和 Parreau [8] 完成。1-星是指由一个至少有三个顶点的星出发，对每条边至多细分一次所得到的图。

定理 2. $\chi'_\cup(F) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$，对于任意一个有 n 个顶点的 1-星森林 F。

本文余下部分安排如下。下一节中，我们将证明定理 2，并由此推导出定理1。最后，我们将以一些评述和开放问题作结。

2 主要结果的证明

首先，我们说明如何由定理 2 推导出定理1。

定理1的证明。设 G 是一个有 n 个顶点的图，且不含阶数不超过二的连通分支。我们断言， G 有一个由1-星组成的生成森林 F。事实上，考虑 G 的一个极小生成森林，其中不含阶数不超过二的树，因此，删除任意一条边都会产生一棵阶数不超过二的树。我们将证明森林中的任意一棵树 T 都是1-星。若 T中有一个度至少为三的顶点 v ，则 T 是1-星，因为对于 v的每个邻居 u ， u的连通分支

在 $T-uv$ 中的阶数不超过二。因此，我们可以假设 T 中的所有顶点的度都不超过二，即 T 是一条路径。于是 $|V(T)| \leq 5$，否则删除中间边不会产生一棵阶数不超过二的树。因此，T 是 1-星。

设 $k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$。由定理 2，存在一个边染色 $c: E(F) \to \mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$，其并顶点染色 $c_\cup$ 为单射。我们将 c 扩展为 $c': E(G) \to \mathcal{P}([k+1]) \setminus \{\varnothing\}$，方法如下：

$$c'(e) = \begin{cases} c(e) & \text{for } e \in E(F), \\ \{k+1\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，由于对所有 $v \in V(G)$ 都有 $c'_\cup(v) \cap [k] = c_\cup(v)$，其并顶点染色 $c'_\cup$ 也为单射。因此，$\chi'_\cup(G) \leq k+1$。 □

为证明定理 2，关键思想是将 $\mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$ 划分为具有适当性质且大小任意的集合族。我们希望每个集合族都是各个 1-星的顶点在并顶点染色下的像。我们选择大小为 m的集合族所具有的性质，使得对于任意一个阶为 m的 1-星，都存在一种边染色，其并顶点染色将该 1-星的顶点映到该集合族上。

若一族互不相同的集合 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 满足以下条件，则称其为一个 m-星：

对 $m \geq 4$, $A_1 = A_2 \cup A_4$，$\bullet$，并且对每个 $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$，$A_{2i+1} \subset A_{2i} \subset A_1$，

对 $m = 3$, $A_1 = A_2 \cup A_3$，$\bullet$，

对 $m = 2$, $A_2 \subset A_1$，$\bullet$，

对 $m = 1$，$\bullet$，无条件限制。

我们也允许 m 取 1 或 2，因为我们将通过归纳法证明这种划分的存在。若一个集合族可以划分为一个 m_1-星、一个 m_2-星、.....以及一个 m_r-星，则称其为 $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$-森林。

定理 3. 若 $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = 2^k - 1$ 则 $\mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$ 是一个 $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$-森林。

现在，我们说明如何从定理 3 推出定理 2。

定理 2 的证明。设 F是一个阶数为 $m_1, m_2, \ldots, m_r \geq 3$ 的 1-星森林，且 $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$，并设 $k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$。由于 $m_1 + m_2 + \cdots + m_r \leq 2^k - 1$，根据定理 3，集合族 $\mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$ 可以划分为一个 m_1-星、一个 m_2-星、.....、一个 m_r-星和一个 $(2^k - 1 - n)$-星。为了证明 $\chi'_\cup(F) \leq k$，只需找到 F的一个边染色，使其并顶点染色映射将阶数为 m_i 的 1-星映射到每个 i对应的 m_i-星。

尚需证明：给定一个 m-星 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$，其具有 $m \geq 3$，可以将任意一个阶为 m 的 1-星的边赋予 $[k]$ 的非空子集，使得这些子集的并集

分别为 A_1、A_2、……、A_m，其中每个并集由赋给与相应顶点关联的边的子集构成。考虑一个阶为 m 的 1-星，它由一个顶点为 v、v_1、v_2、……、v_{m-l-1} 的星细分而得，其中 v 是中心；将边 vv_1、vv_2、……、vv_l 分别用顶点 u_1、u_2、……、u_l 细分。为使各顶点处的并集为 A_1、A_2、……、A_m

$$v, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_l, v_l, v_{l+1}, v_{l+2}, \ldots, v_{m-l-1}$$

分别将子集 A_2、A_3、…、A_m 赋予这些边

$$vu_1, u_1v_1, vu_2, u_2v_2, \ldots, vu_l, u_lv_l, vv_{l+1}, vv_{l+2}, \ldots, vv_{m-l-1}$$

分别地。事实上，并顶点染色 $c_\cup$ 满足

$$\begin{aligned} c_\cup(v) &= A_2 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{2l} \cup A_{2l+2} \cup A_{2l+3} \cup \cdots \cup A_m = A_1, \\ c_\cup(u_i) &= A_{2i} \cup A_{2i+1} = A_{2i} \quad \text{for } 1 \le i \le l, \\ c_\cup(v_i) &= \begin{cases} A_{2i+1} & \text{for } 1 \le i \le l, \\ A_{i+l+1} & \text{for } l+1 \le i \le m-l-1. \end{cases} \end{aligned}$$

由 m-星的性质可知。 □

为证明定理 3，我们将从已有的星构造新的星。例如，我们证明：若通过向每个集合添加一个新元素而将一个 m-星加倍，则对于任意奇数个 i，新的集合族可划分为一个 i-星和一个 $(2m-i)$-星。对于集合族$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([k-1]) \setminus \{\varnothing\}$，我们记 $\mathcal{A}' = \{A \cup \{k\} : A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$。

引理 4。若 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([k-1]) \setminus \{\varnothing\}$ 是一个 m-星，则

对于每个奇数个 $1 \le i \le m$，(i) $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ 是一个 $(i, 2m-i)$-森林，

(ii) $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \cup \{\{k\}\}$ 是一个 $(2m+1)$-星，

而 (iii) $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ 是一个 $2m$-星。

证明。(i) 首先假设 $m \ge 6$ 是偶数。令 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 满足：对每个 $1 \le j \le \frac{m}{2}$，$A_1 = A_2 \cup A_4$且 $A_{2j+1} \subset A_{2j} \subset A_1$。若 $i \ne 3$，则前 i 个集合构成一个 i-星，而 $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ 中的其余 $2m-i$ 个集合可以按如下方式排列，构成一个 $(2m-i)$-星：

$$A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', \ldots, A_{m-2}', A_{m-1}', A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{m-2}, A_{m-1}, A_m', A_m$$

其中 $A_i' = A_i \cup \{k\}$。

对于 $i = 3$，集合 A_2'、A_3'、A_2 构成一个 3-星，并且

$$A_1', A_1, A_3, A_4', A_5', A_6', A_7', \ldots, A_{m-2}', A_{m-1}', A_4, A_5, \ldots, A_{m-2}, A_{m-1}, A_m', A_m$$

构成一个 $(2m-3)$-星。

现在假设 $m \geq 5$ 是奇数。取上述对 $|\mathcal{A}| = m+1$ 的划分，并从第二个星中删除最后两个集合 A'_{m+1}、A_{m+1}。

对于剩余的情况 $m \leq 4$，我们按如下方式划分 $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$：

- 对于 $m=4$ 和 $i=1$、A_1 以及 A'_1、A'_2、A'_3、A'_4、A_4、A_2、A_3,
- 对于 $m=4$ 和 $i=3$、A'_2、A'_3、A_2 以及 A'_1、A_1、A_3、A'_4、A_4,
- 对于 $m=3$ 和 $i=1$、A_1 以及 A'_1、A'_2、A_2、A'_3、A_3,
- 对于 $m=3$ 和 $i=3$、A_1、A_2、A_3 以及 A'_1、A'_2、A'_3,
- 对于 $m=2$ 和 $i=1$、A_2 和 A'_1、A'_2、A_1,
- 对于 $m=1$ 和 $i=1$、A_1 和 A'_1。

(ii) 设 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 是 $m \geq 2$的一个 m-星。那么，可以将 $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \cup \{\{k\}\}$ 中的集合按如下顺序排列，构成一个 $(2m+1)$-星：

$$A'_1, A_1, A_m, A'_2, A_2, A'_3, A_3, \ldots, A'_{m-1}, A_{m-1}, A'_m, \{k\}.$$

对于 $m=1$，集合 A'_1、A_1、$\{k\}$ 构成一个 3-星。

(iii) 采用 (ii) 中的排列，并删去最后一个集合 $\{k\}$。 □

现在我们可以证明定理 3 了。

定理 3 的证明。我们对 k 进行归纳。对于 $k=1$，结论显然成立。假设 $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = 2^k - 1$。由于奇数 m_i 的个数为奇数，不失一般性，我们可以假设 $m_1, m_2, \ldots, m_{2s+1}$ 为奇数，而 $m_{2s+2}, m_{2s+3}, \ldots, m_r$ 为偶数。重写

$$\begin{aligned} 2^{k-1} - 1 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \cdots + m_r - 1) \\ &= \frac{m_1+m_2}{2} + \frac{m_3+m_4}{2} + \cdots + \frac{m_{2s+1}-1}{2} + \frac{m_{2s+2}}{2} + \frac{m_{2s+3}}{2} + \cdots + \frac{m_r}{2} \\ &= m'_1 + m'_2 + \cdots + m'_{s+1} + m'_{s+2} + m'_{s+3} + \cdots + m'_{r-s} \end{aligned}$$

其中，第二行中的各项定义为第三行中的 m'_i。根据归纳假设，$\mathcal{P}([k-1]) \setminus \{\varnothing\}$ 是一个 $(m'_1, m'_2, \ldots, m'_{r-s})$-森林，即存在一个划分$\mathcal{P}([k-1]) \setminus \{\varnothing\} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_{r-s}$，使得对每个 i，$\mathcal{A}_i$ 都是一个 m'_i-星。根据引理 4，我们有

(i) $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}'_i$ 对于每个 $1 \leq i \leq s$ 都是一个（m_{2i-1}，m_{2i}）-森林，

(ii) $\mathcal{A}_{s+1} \cup \mathcal{A}'_{s+1} \cup \{\{k\}\}$ 是一个 m_{2s+1}-星，且 (iii) $\mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}'_i$ 对于每个 $s+2 \le i \le r-s$ 都是一个 m_{i+s}-星。

Sin由于上述集合构成了 $\mathcal{P}([k]) \setminus \{\varnothing\}$ 的一个划分，因此它是一个 $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$-森林。 □

3 总结

如果允许我们也使用空集为边着色，会怎样呢？事实证明，我们的论证可以调整为：对于任意一个图 G，只要它有 n 个顶点且不含阶数至多为二的连通分支，都可以对其进行最优着色，即 $\chi'_{\cup}(G) = \lceil \log_2 n \rceil$。事实上，在定理1的证明中，我们使用 $\varnothing$ 而不是 $\{k+1\}$ 为 1-星生成森林之外的边着色，并将定理 3 修改为：如果 $m_1+m_2+\cdots+m_r = 2^k$，那么 $\mathcal{P}([k])$ 是一个 $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$-森林。

现在我们知道，$\chi'_{\cup}(G) \in \{\lceil \log_2 (n+1) \rceil, \lceil \log_2 (n+1) \rceil + 1\}$。刻画哪些图可以进行最优着色将会很有趣。即使对于树，这也是一个开放问题（见 [8, 13]）。我们认为森林可以进行最优着色。

猜想5。 $\chi'_{\cup}(F) = \lceil \log_2 (n+1) \rceil$ 对于任意具有 n 个顶点的森林 F。

未来的另一个研究方向可以是探讨一些自然的变体，包括边染色必须是正常的情形，以及仅需区分相邻顶点的情形。

参考文献

[1] M. Aigner and E. Triesch, 非正规赋值与两个 Ringel 风格的问题，载于《组合学与图论专题》（奥伯沃尔法赫，1990），Physica，海德堡，1990，第29–36页。[2] M. Aigner, E. Triesch, and Z. Tuza, 非正规赋值与图的顶点可区分边染色，载于《组合学'90》（加埃塔，1990），《离散数学年刊》第52卷，北荷兰，阿姆斯特丹，1992，第1–9页。
[3] A. Ali, G. Chartrand, J. Hallas, and P. Zhang, 图的皇家染色中的极值问题，《组合数学与组合计算杂志》，116（2021），第201–218页。[4] P. N. Balister, B. Bollobás, and R. H. Schelp, 带有 $\Delta(G) = 2$的图的顶点可区别染色，《离散数学》，252（2002），第17–29页。[5] P. N. Balister, E. Győri, J. Lehel, and R. H. Schelp, 相邻顶点可区别边染色，《SIAM离散数学杂志》，21（2007），第237–250页。

[6] P. N. Balister, O. M. Riordan, and R. H. Schelp, 图的顶点可区分边染色, 《图论杂志》, 42（2003）, 第95–109页。[7] C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, and M. Woźniak, 关于图的顶点可区分正常边染色, 《组合理论杂志B辑》, 75（1999）, 第288–301页。[8] N. Bousquet, A. Dailly, E. Duchêne, H. Kheddouci, and A. Parreau, 并顶点可区分边染色的一个 Vizing 型定理, 《离散应用数学》, 232（2017）, 第88–98页。[9] A. C. Burris, 关于非正规染色数为2的图, 载于《第二十五届东南国际组合学、图论与计算会议论文集》（佛罗里达州博卡拉顿, 1994）, 第100卷, 1994, 第129–140页。[10] A. C. Burris, 树的非正规染色数, 《离散数学》, 141（1995）, 第279–283页。[11] A. C. Burris and R. H. Schelp, 顶点可区分正常边染色, 《图论杂志》, 26（1997）, 第73–82页。[12] G. Chartrand, H. Escuadro, F. Okamoto, and P. Zhang, 图的可检测染色, 《实用数学》, 69 （2006）, 第 13–32 页。[13] G. Chartrand, J. Hallas, and P. Zhang, 图的皇家染色, 《组合艺术》, 即将出版。[14] G. Chartrand, M. S. Jacobson, J. Lehel, O. R. Oellermann, S. Ruiz, andF. Saba, 非正规网络, 第64卷, 1988, 第197–210页。图论250周年纪念会议（韦恩堡, 印第安纳州, 1986）。[15] E. Győri, M. Horňák, C. Palmer, and M. Woźniak, 图的一般邻点可区分指标, 《离散数学》, 308（2008）, 第827–831页。[16] F. Harary and M. Plantholt, 点可区分色指数, 载于《图与应用》（科罗拉多州博尔德, 1982）, Wiley-Intersci. Publ., Wiley, 纽约, 1985, 第147–162页。[17] H. Hatami, Δ+300是相邻顶点可区分边色数的一个上界, 《组合理论杂志B辑》, 95（2005）, 第246–256页。[18] M. Horňák and R. Soták, 通过色数定义的一般邻点可区分指标, 《离散数学》, 310（2010）, 第1733–1736页。[19] M. Karoński, T. Ł uczak, and A. Thomason, 边权重与顶点颜色, 《组合理论杂志B辑》, 91（2004）, 第151–157页。

[20] M. Radcliffe and P. Zhang，图的非规则着色，AKCE图与组合国际期刊，3（2006），第175–191页。[21] B. Seamone，1-2-3猜想及相关问题：综述，arXiv预印本 arXiv:1211.5122，（2012）。[22] J. Skowronek-Kazió w，图的乘法顶点着色权标记，Inform.Pro- cess. Lett.，112（2012），第191–194页。[23] M. A. Tahraoui E. Duchêne and H. Kheddouci，图的间隔顶点可区分边着色，《离散数学》，312（2012），第3011–3025页。[24] Z. Zhang L. Liu and J. Wang，图的邻接强边着色，应用数学快报，15（2002），第623–626页。