arXiv:2303.02767v1 [math.NT] 5 Mar 2023

欧拉伽马函数的差分独立性

QIONGYAN WANG[1], XIAO YAO[2*]

Abstract. 本文建立了著名的 H¨older 定理的一个精确版本，该定理关于欧拉伽马函数 Γ的微分独立性，其差分类比亦然。更确切地说，若P是 $\mathbb{C}[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$ 中关于 $n+1$ 个变量的多项式，且满足

$$P(s, \Gamma(s+a_0), \ldots, \Gamma(s+a_{n-1})) \equiv 0$$

对于某些 $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$，且对任意 $0 \le i < j \le n-1$均有 $a_i - a_j \notin \mathbb{Z}$

$$P \equiv 0.$$

我们的结果补充了 H¨older 于 1886年证明的欧拉伽马函数代数微分独立性的经典结果，也补充了 Chiang 和 Feng 于 2006年证明的黎曼ζ函数代数差分独立性结果。

1. Introduction

H¨older [8] 的一个经典定理指出，欧拉伽马函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \ \Re s > 0$$

可解析延拓到整个复平面 $\mathbb{C}$，且不满足任何系数为 $\mathbb{C}$中多项式的非平凡代数微分方程。我们将其表述如下。

定理 A. 设 P是 $\mathbb{C}[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$中关于 $n+1$ 个变量的多项式。假设

$$P(s, \Gamma(s), \ldots, \Gamma^{(n-1)}(s)) \equiv 0,$$

则有

$$P \equiv 0.$$

据我们所知，欧拉伽马函数 Γ 似乎是文献中首个已知满足代数微分独立性

通讯作者：Xiao Yao。2010年数学主题分类：11M06，39A05。本研究部分受国家重点研发计划（2020YFA0713300）和中国国家自然科学基金委员会（No.11901311）资助。关键词：代数差分独立性；欧拉伽马函数；代数差分方程。

性质的例子。众所周知，黎曼ζ函数ζ 通过著名的黎曼函数方程与 Γ 相关联

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s). \tag{1}$$

受黎曼函数方程的启发，自然会考虑黎曼ζ函数的代数微分独立性。对黎曼ζ函数代数微分独立性的研究 ζ 可追溯至希尔伯特。在 [7], 中，他猜想 H¨older 的结果可以推广到黎曼 ζ 函数 ζ。后来，该猜想于 [15] 被 Ostrowski 证实。

Bank 和 Kaufman [2, 3] 对 H¨older 的结果作出了如下著名推广。

定理 B. 设 P 是关于 $K[X,Y_0,\dots,Y_{n-1}]$ 的一个多项式，其中 K 是所有满足以下条件的亚纯函数构成的域：其奈望林纳特征$T(r,f)=o(r)$，当 r 趋于无穷大时，对任意 K 中的 f 均成立。假设

$$P(s,\Gamma(s),\dots,\Gamma^{(n-1)}(s))\equiv 0,$$

那么我们有

$$P\equiv 0.$$

关于纽曼林纳特征 $T(r,f)$，详细介绍请参阅海曼的著作[6] 。由于 Γ 和 ζ 在黎曼函数方程 (1) 中自然出现，Markus 在 [14] 中提出了一个开放问题，研究 Γ 和 ζ的联合代数微分独立性。关于这一方向的最新进展，请参阅参考文献 [10, 11, 12, 13] 。

研究 ζ 或 Γ的代数差分独立性很有意思。Feng 和 Chiang 证明了以下结果。

定理 C. 设 P是 $\mathbb{C}[X,Y_0,\dots,Y_{n-1}]$中的一个关于 $n+1$ 个变量的多项式，且 s_0,... ,s_{n-1} 是 $\mathbb{C}$ 中的 n 个互异数。假设

$$P(s,\zeta(s+s_0),\dots,\zeta(s+s_{n-1}))\equiv 0,$$

那么我们有

$$P\equiv 0.$$

Chiang 和 Feng 的结果推广了 Ostrowski 在 [15] 中的一项结果，该结果需要假设 $s_0,\dots s_{n-1}$ 是 n 个互异实数。事实上，Chiang 和 Feng 证明，在满足定理 B 中相同假设的情况下，定理 C 也成立。详情请参阅 [4] 。这里我们还提及 Voronin 于 20 世纪 70 年代证明的两个卓越的普遍性结果，分别对应微分情形 [17] 和差分情形 [18]。关于这一方向近期进展的详细介绍，请参阅 [16] 。

据我们所知，欧拉伽马函数的代数差分独立性这一主题最早由 Hardouin 在 [5] in 中

在差分伽罗瓦理论的框架下进行研究。受欧拉伽马函数乘法定理的启发

$$\Gamma(ns) = n^{ns-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(s+\frac{j}{n}), \tag{2}$$

Hardouin 证明了以下结果。

定理 D（[5]）。设 a_0，...，a_{n-1} 为 n 复数，$\mathbb{C}$，b_0，...，b_{m-1}（≥2）为 m 整数，且 $\{a_j \ (mod\ 1)\}_{j=0}^{n-1}$ 和 $\{\sum_{l=0}^{b_j-1} \frac{l}{b_j} \ (mod\ 1)\}_{j=0}^{m-1}$ 是 $\mathbb{Z}$-线性独立的。假设

$$P(s, \Gamma(s+a_0), \ldots, \Gamma(s+a_{n-1}), \Gamma(b_0 s), \ldots, \Gamma(b_{m-1}s)) \equiv 0$$

对于某个多项式 P，则有

$$P \equiv 0.$$

Hardouin 的证明实质上依赖于 Kolchin 型定理。另请参阅 [1]，其中详细讨论了 Kolchin 型定理及其在代数独立性问题中的若干强大应用。

我们的出发点是 Γ 的另一个众所周知的差分方程，

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{3}$$

这或许是我们研究欧拉伽马函数 Γ的代数差分独立性时遇到的显而易见的障碍。不能指望直接得到关于 Γ的定理 B。然而，本文将证明，式 (3) 中展示的机制是获得 Γ的代数差分独立性的唯一障碍。下面陈述我们的主要结果。本文将采用受 [8, 15] 启发的初等方法来证明主要结果，从而避开复杂的差分伽罗瓦理论。这一方法本身或许也有独立的研究价值。

我们定义

$$\mathcal{H} := \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : a_i - a_j \notin \mathbb{Z} \text{ for any } 0 \le i < j \le n-1\}. \tag{4}$$

下面陈述我们的主要结果。

定理 1. 设 P是 $\mathbb{C}[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$中关于 $n+1$ 个变量的多项式。假设

$$P(s, \Gamma(s+a_0), \ldots, \Gamma(s+a_{n-1})) \equiv 0$$

对某个 $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathcal{H}$，则有

$$P \equiv 0.$$

我们指出，在满足与定理 D 中相同的条件 $(a_j)_{j=0}^{n-1}$ 以及 $m = 0$ 时，也可以利用定理 D 推出定理 1 的部分结论。不过，定理 D 无法完全推出定理 1，因为定理 1 中的条件是尖锐的。我们的结果补充了 H¨older [8] 于

1886年证明的欧拉伽马函数代数微分独立性的经典结果，以及 Chiang 和 Feng [4] 于 2006年证明的黎曼ζ函数代数差分独立性结果。

推论1. 设 P 是 $\mathbb{C}[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$ 中 $n+1$ 个变量的多项式。假设

$$P(s, \Gamma(s), \ldots, \Gamma(s + (n-1)\alpha)) \equiv 0$$

对于某个 $\alpha \notin \mathbb{Q}$，则有

$$P \equiv 0.$$

备注1. 定理 1 可视为 H ¨older 定理的差分版本。恒等式 (3) 表明，将讨论限制在 $\mathcal{H}$ 是必要的。

我们还可以将定理 1 推广到 $K[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$ 的情形，其中 K 是所有满足如下条件的亚纯函数构成的域：当 r 趋于无穷时，对任意 f 属于 K，Nevanlinna 特征 $T(r, f) = o(r)$。不过，本文不讨论这一问题。

由定理 1 和欧几里得算法，不难给出以下两个例子。

例 1. 设 $P = P(X, Y, Z)$ 是 $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ 中的三元多项式。假设

$$P(s, \Gamma(s + a_0), \Gamma(s + a_1)) \equiv 0,$$

then

$$P \equiv 0,$$

除非 $a_1 - a_0 \in \mathbb{Z}$。在后一种情况下，如果 $\Re a_0 < \Re a_1$, P 能被多项式 $R(X, Y, Z) = Z - (X + a_0) \ldots (X + a_1 - 1)Y$ 整除。

例 2. 设 $P(X, Y, Z, W) = YW - Z^2 - YZ$ 属于 $\mathbb{C}[X, Y, Z, W]$。我们有

$$P(s, \Gamma(s), \Gamma(s+1), \Gamma(s+2)) \equiv 0.$$

P 属于理想

$$< W - (X+1)Z, Z - XY >$$

由 $W - (X+1)Z$ 和 $Z - XY$ 在 $\mathbb{C}[X, Y, Z, W]$ 中生成。此外， P 可以表示为

$$P(X, Y, Z, W) = Y(W - (X+1)Z) + Z(XY - Z).$$

注 2. 事实上，受例 1 和例 2 的启发，我们可以再次应用定理 1 和欧几里得算法，对以下集合给出完整刻画

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{C}[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}] : P(s, \Gamma(s + a_0), \ldots, \Gamma(s + a_{n-1})) \equiv 0\}$$

而不对 a_0、.....、 a_{n-1} 作任何假设。不过，本文将不对此进行讨论。

2. Proof of Theorem 1

为了证明定理 1，我们需要在 $\mathbb{C}[Y_0,\dots,Y_{n-1}]$ 中任意两个单项式 $Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}}$ 和 $Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}}$ 之间引入一种字典序，这在我们的证明中起着重要作用。这一策略受到 Ostrowski 在 [15] 中证明 H¨older 经典证明的启发。它也与 [5, 1] 中所用的 Kolchin 型定理有几分相似。

我们首先为 n 符号 Y_0、.....、Y_{n-1} 引入一种次序，

$$Y_0 \prec Y_1 \prec \cdots \prec Y_{n-1}. \tag{5}$$

这可用于在任意两个单项式 $Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}}$ 和 $Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}}$ 之间引入字典序。为简化记号，我们仍将其记为 $\prec$。定义如下：

情形 1：$Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}} = Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}}$ 若 $i_k = j_k$ 对于 $k = 0$、.....、$n-1$；情形 2：$Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}} \prec Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}}$ 若 $i_0 < j_0$，或存在 $1 \le k \le n-1$ 使得

$$i_0 = j_0, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}, i_k < j_k;$$

情形 3：$Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}} \prec Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}}$ 的定义与情形 2 类似。

对于任意非零多项式 $P = P(X, Y_0, \dots, Y_{n-1})$，其中 $\mathbb{C}[X, Y_0, \dots, Y_{n-1}]$，我们将其写作

$$P = \sum_{i=(i_0,\dots,i_{n-1})} \Phi_i(X) Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}}, \tag{6}$$

其中 $\Phi_i(X) \in \mathbb{C}[X]$ 且 $\Phi_i(X) \neq 0$。P 的最高项定义为 $\mathcal{T}_P$ 中关于上述引入的字典序 $\prec$ 的最大元素，其中

$$\mathcal{T}_P := \{Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}} : \Phi_i(X)\ Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}} \text{ appeared in (6)}\}. \tag{7}$$

对于任意单项式 $L = Y_0^{i_0} Y_1^{i_1} \dots Y_{n-1}^{i_{n-1}}$，我们将其次数 deg(L) 定义为

$$\deg(L) := \sum_{k=0}^{n-1} i_k.$$

P 的高度定义为 P 的最高项的次数。

现在，我们将证明定理 1。

证明。设

$$\mathcal{S} := \{P \in \mathbb{C}[X, Y_0, \dots, Y_{n-1}] : P(s, \Gamma(s+a_0), \dots, \Gamma(s+a_{n-1})) \equiv 0\}. \tag{8}$$

我们将用反证法证明定理 1。假设 $\mathcal{S} \neq \{0\}$。根据我们的假设，存在一个非零多项式

$$Q = \sum_{i=(i_0,\dots,i_{n-1})} \Psi_i(X) Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}},$$

它在 $\mathcal{S}\backslash\{0\}$ 中的高度最低，且其最高项为 $\Psi_j(X)Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}}$，其中某个 $j=(j_0,\dots,j_{n-1})$。此外，我们还作如下假设。

假设 LD：出现在 Q 最高项中的非零多项式 $\Psi_j(X)$ 也是次数最低的。

Let

$$T(X,Y_0,\dots,Y_{n-1}):=Q(X+1,(X+a_0)Y_0,\dots,(X+a_{n-1})Y_{n-1}). \tag{9}$$

注意到

$$Q(s,\Gamma(s+a_0),\dots,\Gamma(s+a_{n-1}))\equiv 0,$$

我们有

$$T(s,\Gamma(s+a_0),\dots,\Gamma(s+a_{n-1}))\equiv 0$$

根据（3），T 的最高项为 $\hat{}\,\Psi_j(X)Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}}$，其中

$$\hat{\Psi}_j(X):=\Psi_j(X+1)(X+a_0)^{j_0}\dots(X+a_{n-1})^{j_{n-1}}.$$

由欧几里得算法可知，在 $\mathbb{C}[X]$ 中存在两个多项式 $R=R(X)$ 和 $U=U(X)$，使得

$$\hat{\Psi}_j=R\Psi_j+U,$$

其中，要么 $U=0$ 要么 $0<\deg U<\deg\Psi_j$。容易看出，$\deg R\geq 1$。我们断言 $U=0$。否则，我们知道多项式

$$H(X,Y_0,\dots,Y_{n-1}):=T(X,Y_0,\dots,Y_{n-1})-R(X)Q(X,Y_0,\dots,Y_{n-1})$$

属于 $\mathcal{S}$。由此可得，H 的最高项为

$$U(X)Y_0^{j_0}\dots Y_{n-1}^{j_{n-1}}$$

且 $0<\deg U<\deg\Psi_j$。因此，$H\neq 0$，这与 Q的选取以及假设 LD 矛盾。现在，我们有 $U=0$。

由于 $U=0$，我们看到，当 $H\neq 0$时，H 的最高项低于 Q 的最高项。这再次与我们对 Q的选取矛盾。因此，我们得到$H=0$。也就是说，

$$T(X,Y_0,\dots,Y_{n-1})=R(X)Q(X,Y_0,\dots,Y_{n-1}). \tag{10}$$

我们先假设存在 $\beta\notin\Lambda:=\{-a_k:\ 0\leq k\leq n-1\}$ 使得 $R(\beta)=0$。由 (9) 和 (10)，可得

$$Q(\beta+1,(\beta+a_0)Y_0,\dots,(\beta+a_{n-1})Y_{n-1})=0$$

属于 $\mathbb{C}[Y_0,\dots,Y_{n-1}]$。这意味着

$$Q(\beta+1,Y_0,\dots,Y_{n-1})=\sum_{i=(i_0,\dots,i_{n-1})}\Psi_i(\beta+1)Y_0^{i_0}\dots Y_{n-1}^{i_{n-1}}=0$$

在 $\mathbb{C}[Y_0,\dots,Y_{n-1}]$ 中。因此，我们有

$$\Psi_i(\beta+1)=0$$

对于所有的 i，这意味着每个 $\Psi_i(X)$ 都能被 $X-\beta-1$ 整除。这与我们的假设矛盾：Ψ_j 的次数最低。

因此， R 的每个根都位于 Λ 中。不失一般性，我们假设 $R(-a_0)=0$。于是，我们得到

$$Q(-a_0+1,0,(a_1-a_0)Y_1,\dots,(a_{n-1}-a_0)Y_{n-1})=0$$

由 (9) 和 (10) 得。回忆一下，对于任意 $j\neq 0$，都有 $a_j-a_0\notin\mathbb{Z}$，于是我们有

$$Q(-a_0+1,0,Y_1,\dots,Y_{n-1})=0. \tag{11}$$

在 (9) 和 (10) 中取 $X=-a_0+1$、 $Y_0=0$，得到

$$\begin{aligned}&Q(-a_0+2,0,(a_1-a_0+1)Y_1,\dots,(a_{n-1}-a_0+1)Y_{n-1})\\ =&R(-a_0+1)Q(-a_0+1,0,Y_1,\dots,Y_{n-1})=0\end{aligned}$$

由 (11) 得。再次注意到，对于任意 $j\neq 0$，都有 $a_j-a_0\notin\mathbb{Z}$，我们得到

$$Q(-a_0+2,0,Y_1,\dots,Y_{n-1})=0$$

在 $\mathbb{C}[Y_0,\dots,Y_{n-1}]$ 中。通过归纳法，我们可以证明，对于任意 $m\in\mathbb{N}$,

$$Q(-a_0+m,0,Y_1,\dots,Y_{n-1})=0$$

在 $\mathbb{C}[Y_0,\dots,Y_{n-1}]$ 中。由代数学基本定理可得

$$Q(X,0,Y_1,\dots,Y_{n-1})=0$$

在 $\mathbb{C}[X,Y_0,\dots,Y_{n-1}]$ 中。因此，我们证明了 Q 可以被单项式 Y_0 整除，这与 Q 在 $\mathcal{S}$ 中具有最低高度的假设相矛盾。

现在，我们完成定理 1 的证明。 □

References

[1] B. Adamczewski、J. P. Bell 和 E. Delaygue。 G函数的代数独立性及卢卡斯型同余式 `。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*，52(4)，515–559，2019年。[2] S. B. Bank 和 R. P. Kaufman。关于伽马函数 H¨older 定理的注记。 *Math. Ann.*，232(2):115–120，1978年。[3] S. B. Bank 和 R. P. Kaufman。关于微分方程和函数方程。*J. Reine Angew. Math.*，311(312):31–41，1979年。[4] Y. M. Chiang 和 S. J. Feng。黎曼ζ函数的差分独立性。*Acta Arith.*，125(4):317–329，2006年。[5] C. Hardouin。对角差分系统的超越性`。´。组合数学》144(3)，565–581，2008年。[6] W. K. Hayman。 *Meromorphic functions*。牛津数学专著。Clarendon Press，牛津，1964年。[7] D. Hilbert。数学问题。 *Bull. Amer. Math. Soc.*，8(10):437–479，1902年。[8] O. H¨older。 ¨关于 γ函数不满足任何代数微分方程的性质¨。 *Math. Ann.*，28(10):1–13，1886年。[9] I. Laine。 *Nevanlinna theory and complex differential equations* 15 *De*，第 *Gruyter Studies in Mathematics* 1993 卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，。[10] B. Q. Li 和 Z. Ye。黎曼 ζ 函数和欧拉伽马函数的微分独立性。 *Acta Arith.*，135(4):333–337，2008年。[11] B. Q. Li 和 Z. Ye。关于黎曼ζ函数和欧拉伽马函数的代数微分方程。 *Indiana Univ. Math. J.* 59 4 1405 1415, , (): –。 2010 [12] B. Q. Li 和 Z. Ye。带函数系数的代数微分方程，涉及 ζ 和 Γ。 *J. Differential Equations*，260(2):1456–1464，2016年。

[13] L. W. Liao 和 C. C. Yang。关于伽马函数和黎曼ζ函数的一些新性质。 *Math. Nachr.*, 257:59–66，2003年。[14] L. Markus。 Γ 和 ζ的微分独立性。 *J. Dynam. Differential Equations*，19 1 133( ): –154，2007年。[15] A. Ostrowski。 ¨ 关于狄利克雷级数和代数微分方程。*Math. Z.*，8(3-4):241–298，1920年。[16] J. Steuding。

Value-distribution of L-functions 1877 *Lecture Notes in Math-* ，第 *ematics* 2007 卷。施普林格，柏林，。[17] S. M. Voronin。黎曼 ζ 函数非零值的分布。 *Trudy Mat. Inst. Steklov.*，128:131–150，260，1972年。纪念院士 Ivan Matveevič Vinogradov 八十寿辰论文集。II。[18] S. M. Voronin。关于黎曼ζ函数“普适性”的一个定理。 *Izv.* ， ( ): –。 *Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 39 3 475 486, 703, 1975

[1] School of Mathematical sciences, Peking University, Beijing, 100871, P.R. China[2] School of Mathematical sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin, 300071, P.R. ChinaEmail:qiongyanwang@aliyun.com, yaoxiao@nankai.edu.cn