arXiv:2303.02780v1 [math.AG] 5 Mar 2023

通过子结式求一元多项式重根的闭式公式

Jorge Caravantes[1],Gema M. Diaz–Toca[2],和 Laureano Gonzalez–Vega[3]

[1]阿尔卡拉大学，马德里（西班牙）[2]穆尔西亚大学，穆尔西亚（西班牙）[3]CUNEF大学，马德里（西班牙）

2023年3月7日

摘要

如果每条竖直直线上至多有一个临界点，那么实代数平面曲线的拓扑计算会大大简化；这就是一般位置条件。如果不满足该条件，只需进行有限次坐标变换，就能将初始曲线变换为处于一般位置的曲线。我们将展示许多情形：即使曲线不处于一般位置，计算所考虑曲线在临界点附近的拓扑也非常简单。为此，我们将引入一类新的公式，在许多情况下，这类公式通过子结式，将一元多项式的重根表示为所考虑多项式的有理函数，且至多涉及一个平方根。

我们将用这一新方法证明，即使曲线不处于一般位置，也能轻松计算三次曲线、四次曲线和五次曲线的拓扑，并刻画可采用此方法的高次曲线。我们还将运用这一技术确定两个二次曲面的交曲线，并研究如何刻画两个椭球相交时所得曲线的类型。

引言

隐式定义的实代数平面曲线的拓扑计算问题，一直受到计算机辅助几何设计和符号计算两个领域的特别关注，二者各自独立地开展了相关研究。对于计算机辅助几何设计领域而言，这是一个基础性子问题，在实际处理求交问题时经常会遇到。另一方面，对于符号计算领域而言，这一问题推动了子结式、符号实根计数、无穷小计算等方面的诸多进展。比较开创性论文与较新的研究成果，可以看到，处理这一问题的算法在理论和实践上的复杂度均已大幅降低（例如参见 [3] 和 [12]）。

如果每条竖直直线上的临界点不超过一个，即满足一般位置条件，那么实代数平面曲线拓扑的计算将大为简化。当不满足这一条件时，通过有限次坐标变换即可将初始曲线变为处于一般位置的曲线。我们将在此展示许多情形：即使所考察的曲线不处于一般位置，临界点附近的曲线拓扑仍然很容易计算。这将通过

引入一族新的公式来实现；这些公式在许多情况下通过子结式，将一元多项式的重根表示为所考察多项式的有理函数，并且至多涉及一个平方根。

本文分为五个部分。前两部分介绍计算实代数平面曲线拓扑时的一般位置条件和子结式，以及求解实根计数问题时用到的一些工具。第三部分介绍如何用系数描述一元多项式的实重根（通常是有理函数，最坏情况下会涉及一个平方根）。第四部分说明，当我们有易于处理的代数描述时，如何计算临界点周围的分支：在本文提出的方法适用的情况下，我们建议用这种方法替代“一般条件”。第五部分介绍一个应用。

1 计算 $P(x,\ y) = 0$ 的拓扑：为何要考虑一般位置?

曲线 $\mathcal{C}_P$由方程 $P(x,\ y) = 0$给出，其拓扑的刻画采用一种扫描策略，通常依据 P 的临界点相对于 y 的位置（即奇点或具有垂直切线的点），并研究这些点周围 $\mathcal{C}_f$ 的半分支，因为对于 $\mathcal{C}_P$ 上的任何其他点，其左侧只有一个半分支，右侧也只有一个半分支。

定义1。设 $P(x,\ y) \in \mathbb{R}[x, y]$,

$$\mathcal{C}_P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : P(\alpha, \beta) = 0\}$$

由 P和 $\alpha \in \mathbb{R}$定义的实代数平面曲线。

- 点$(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{C}^2$ 称为 $\mathcal{C}_P$ 的临界点，当且仅当

$$P(\alpha, \beta) = \frac{\partial P}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0.$$

- 如果一个临界点满足以下条件，则称其为奇异点：

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\alpha, \beta) = 0.$$

- 点$(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$是 $\mathcal{C}_P$的正则点，当 $P(\alpha,\ \beta) = 0$且它不是临界点时。

非奇异临界点称为分歧点。

计算由多项式 $P(x,\ y) \in \mathbb{R}[x, y]$ 隐式定义的实代数平面曲线 $\mathcal{C}$ 的拓扑，通常采用以下策略：

1. 计算 P 关于 y, $D(x)$ 的判别式及其所有实根 $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$：这些是临界点 $\mathcal{C}_P$ 的 x 坐标。

2. 对每个 α_i，计算 $P(\alpha_i,\ y)$ 的实根 $\beta_{i,\ 1} < \ldots < \beta_{i,\ s_i}$，并确定哪些 $\beta_{i,\ j}$ 是正则点，哪些 $\beta_{i,\ j}$ 是临界点。每个 $x = \alpha_i$ 称为一条临界线。

3. 对于每个 α_i 以及每个$\beta_{i,\ j}$，计算每个点（α_i，$\beta_{i,\ j}$）右侧和左侧的半分支数量。

前两个步骤提供了一个图的顶点，该图将表示所考虑曲线的拓扑。图1展示了在确定所有这些点后，如何利用这些信息确定切割曲线的拓扑（详情请参见 [1, 8]）。在对曲线进行数值追踪时，该图非常有帮助，因为当我们接近一个复杂点时，将确切知道应如何进行。

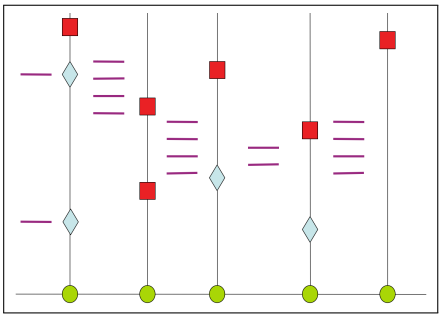

图1：临界点：红色。临界线上的正则点：蓝色。分支：紫色。临界点投影：绿色。

第一步是用任何可用的方法（例如计算行列式、子结式等）计算 P 关于 y 的判别式 $R(x)$，通常还要计算其无平方因子部分

$$D(x) = \frac{R(x)}{\gcd(R(x), R'(x))}.$$

这一步以计算 $D(x)$ 的实根结束。

第二步中，为避免计算每个 $P(\alpha_i, y)$ 的重根时产生的数值问题，线性坐标变换或许能简化这一步及后续计算。这样的坐标变换会使曲线处于一种理想的位置，称为“一般位置”（见 [5, 8]）。

定义2。 </style>设 $P \in \mathbb{R}[x, y]$ 是一个无平方因子多项式。由 P,$\mathcal{C}_P$ 定义的实代数平面曲线处于一般位置，当且仅当满足以下两个条件：

1. P 关于 y 的首项系数（它是 $\mathbb{R}[x]$ 的多项式）没有实根。
2. 对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，竖直直线 $x = \alpha$ 上的临界点数量为0 或1。

使曲线处于一般位置有两大优点（见 [5, 8]）：

1. 可以计算有理函数 $r_{\alpha_i}(x) \in \mathbb{R}(x)$，使得对于每个临界点 (α_i, β_i)，都有 $\beta_i = r_{\alpha_i}(\alpha_i)$。这也使得我们能够符号地构造无平方因子多项式$g_i(\alpha_i, y)$：对于每个 $P(\alpha_i, y)$（即通过用 $P(\alpha_i, y)$除以 $y - r_{\alpha_i}(\alpha)_i$的适当次幂），其符号地计算出的实根也需要求出。

2. 在每个临界点 (α_i, β_i) 附近，表示 $\mathcal{C}_P$ 的拓扑图的边都可以通过简单的组合推理得到。

如果曲线不处于一般位置，我们可以应用线性坐标变换，并用新的多项式重新开始这一过程。经过有限次此类变换后，即可保证曲线处于一般位置。请注意，这些坐标变换不会改变曲线的拓扑，并且可以在最后撤销。

第三步通过计算无平方因子多项式$P(\gamma_i,\ y)$（$i \in \{1,2,\ldots,r+1\}$）的实根个数来完成，其中$\gamma_1 = -\infty$、$\gamma_{r+1} = \infty$，且$2 \le i \le r$、γ_i是开区间（$\alpha_{i-1},\ \alpha_i$）中的任意实数。当$\mathcal{C}_P$处于一般位置时，这意味着在$x = \alpha_{i-1}$的右侧，除从竖直直线$x = \alpha_{i-1}$上曲线$\mathcal{C}_P$的每个正则点出发的一个半分支外，所有半分支都从（$\alpha_i,\ \beta_i$）出发（在$x = \alpha_i$的左侧也会发生同样的情况）。

2 通过子结式计算最大公因式和实根个数

对于系数中含有参数或代数数的两个一元多项式，子结式是一种代数工具，可用来以非常简便、紧凑的方式求出它们的最大公因式；对于系数中含有参数或代数数的一元多项式，也可用来求出其不同实根的个数。

定义 3. 设

$$P(T) = \sum_{i=0}^{p} a_i T^i \qquad and \qquad Q(T) = \sum_{i=0}^{q} b_i T^i$$

为两个多项式，其系数属于一个域，其中含有$p \ge q$和$j \in \{0,1,\ldots,q-1\}$。记 ng

$$\delta_k = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

对于每个整数k，我们按如下方式定义P和Q关于T的j阶子结式多项式（如 *[13]* 中所示）：

$$\mathbf{Sres}_j(P,Q) = (-1)^j \delta_{p-j-1} \begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & \cdots & a_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & \cdots & a_0 & \\ b_q & b_{q-1} & b_{q-2} & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & b_q & b_{q-1} & b_{q-2} & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \\ & & & & & 1 & -T & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & 1 & -T \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} q-j \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} p-j \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} j \end{matrix}$$

并且，我们将j–次子结式系数定义为P和Q关于T的$\mathbf{sres}_j(P,Q)$中T^j的系数，即$\mathbf{Sres}_j(P,Q)$中的T^j项系数。P和Q关于T的结式为：

$$\mathbf{Resultant}(P,Q) = \mathbf{Sres}_0(P,Q) = \mathbf{sres}_0(P,Q)\ .$$

定义和计算子结式的方法有很多：参见 [1, 13] 和 [9]，其中有简要介绍并列出了若干参考文献。为同时处理最大公因式和实根计数问题而只使用一个子结式序列，这促使我们在前面的定义中以一种“不同寻常”的方式引入符号$(-1)^j\delta_{p-j-1}$。这样，我们就无需在计算最大公因式时使用子结式，也无需在求解实根计数问题时使用带符号子结式或 Sturm–Habicht序列。

子结式使我们能够轻松确定系数依赖于一个或多个参数的两个单变量多项式的最大公因式的次数。由于P和Q的结式等于多项式$\mathbf{sres}_0(P,Q)$：

$$\mathbf{sres}_0(P,Q) = 0 \text{ if and only if there exists } T_0 \text{ such that } P(T_0) = 0 \text{ and } Q(T_0) = 0. \qquad (1)$$

更一般地，行列式 $\mathbf{sres}_i(P,Q)$ 是 P 和 Q 的子结式序列的形式首项系数，可利用以下等价关系来计算 P 和 Q 的最大公因式：

$$\mathbf{Sres}_i(P,Q)=\gcd(P,Q) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases}\mathbf{sres}_0(P,Q)=\ldots=\mathbf{sres}_{i-1}(P,Q)=0\\ \mathbf{sres}_i(P,Q)\neq 0\end{cases} \tag{2}$$

$$\mathbf{Sres}_i(P,Q)=\gcd(P,Q) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases}s_0(P,Q)=\ldots=s_{i-1}(P,Q)=0\\ s_i(P,Q)\neq 0\end{cases} \tag{3}$$

使用子结式解决实根计数问题的方法是在 [6] 中引入的，这得益于 W. Habicht 的开创性工作（见 [10]）。此处所述结果的证明可见于[1, 6, 7]。下一个定义将介绍与 P 相关的子结式序列，即 P 和 P' 的子结式序列；这是我们用来计算一元多项式不同实根个数的主要工具。

定义 4。
设 P 是 $\mathbb{R}[T]$ 中的一个多项式，且 $p=\deg(P)$。我们将 P 的子结式序列定义为$\mathbf{Sres}_p(P)=P$、$\mathbf{Sres}_{p-1}(P)=P'$，并对每个 $j\in\{0,\ldots,p-2\}$：

$$\mathbf{Sres}_j(P)=\mathbf{Sres}_j(P,P').$$

对于 $\{0,\ldots,p\}$ 中的每个 j， P 的主 j 阶子结式系数定义为：

$$\mathbf{sres}_j(P)=\mathrm{coef}_j(\mathbf{Sres}_j(P))$$

这里需要特别指出， P 的判别式模首项系数 a_p 等于多项式 $\mathbf{sres}_0(P)$，其中 a_p 是 P 的首项系数：

$$\mathbf{sres}_0(P)=a_p\mathrm{discriminant}(P).$$

对主子结式系数进行符号计数，可以得到所考察多项式的不同实根个数。下面的定义说明了后文将使用的符号计数函数（见 [6, 7]）。

定义 5。
令 $\mathbb{I}=\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ 为实数集 $\mathbb{R}$中的非零元素列表。

- $\mathbf{V}(\mathbb{I})$ 定义为列表 $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$中的符号变化数，
- $\mathbf{P}(\mathbb{I})$ 定义为列表 $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$中的符号保持数 .

定义 6。
设 a_0、a_1、.....、a_n 是 $\mathbb{R}$ 中的元素，满足 $a_0\neq 0$，且零点分布如下：

$$\mathbb{I}=\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}=$$

$$=\{a_0,\ldots,a_{i_1},\overbrace{0,\ldots,0}^{k_1},a_{i_1+k_1+1},\ldots,a_{i_2},\overbrace{0,\ldots,0}^{k_2},a_{i_2+k_2+1},,a_{i_3},0,\ldots,0,a_{i_{t-1}+k_{t-1}+1},\ldots,a_{i_t},\overbrace{0,\ldots,0}^{k_t}\}$$

其中，所有已写出的 a_i 均不为 0。定义 $i_0 + k_0 + 1 = 0$，并令：

$$\mathbf{C}(\mathbb{I}) = \sum_{s=1}^{t} \big(\mathbf{P}(\{a_{i_{s-1}+k_{s-1}+1}, \ldots, a_{i_s}\}) - \mathbf{V}(\{a_{i_{s-1}+k_{s-1}+1}, \ldots, a_{i_s}\})\big) + \sum_{s=1}^{t-1} \varepsilon_{i_s}$$

其中：

$$\varepsilon_{i_s} = \begin{cases} 0 & \text{if } k_s \text{ is odd} \\ (-1)^{\frac{k_s}{2}} \operatorname{sign}\left(\dfrac{a_{i_s+k_s+1}}{a_{i_s}}\right) & \text{if } k_s \text{ is even} \end{cases}$$

接下来介绍多项式 $P \in \mathbb{R}[x]$ 的实零点个数与 P 的子结式序列中的多项式之间的关系。其证明见 [6, 7]。

定理 7。
若 P 是 $\mathbb{R}[T]$ 中满足 $p = \deg(P)$ 的多项式，则：

$$\mathbf{C}(\{\mathbf{sres}_p(P), \ldots, \mathbf{sres}_0(P)\}) = \#\{\alpha \in \mathbb{R} \colon P(\alpha) = 0\}.$$

多项式 P 的不同实根个数可由最后 $p-1$ 个行列式 $\mathbf{sres}_i(P)$ 的符号精确确定（前两个分别为 $\mathrm{lcof}(P)$ 和 $p\ \mathrm{lcof}(P)$，其中 $\mathrm{lcof}(P)$ 表示 P 的首项系数）。若所有 $\mathbf{sres}_j(P)$ 均不为 0，则 P 的不同实根个数等于 P 的主子结式系数列表中的符号相同数与符号变化数之差。容易看出，在这种情况下，这等同于 $\{\mathbf{Sres}_j(P)(-\infty)\}_{j=0,\ 1,\ldots,p}$ 中的符号变化数与 $\{\mathbf{Sres}_j(P)(+\infty)\}_{j=0,\ 1,\ldots,p}$ 中的符号变化数之差（与使用 Sturm 序列时相同）。

通过行列式定义 P 的子结式序列中的多项式，可以以通用方式进行涉及实根的计算：如果 P 是一个以参数或代数数为系数的多项式，并且其次数在特化后不发生变化，那么无需对参数进行特化即可计算 P 的子结式序列，且特化后的结果始终有效（须满足关于 P次数的条件）。使用 Sturm 序列时则并非如此（欧几里得余式的计算会产生分母，而这些分母在特化后可能变为零）；使用负多项式余式序列时也并非如此（即使固定 P的次数，该序列也不总是具有相同数量的元素：有关更详细的解释，请参见 [6, 14] ）。

记号 8。
如果 P是 $\mathbb{R}[T]$ 中的一个多项式，满足 $p = \deg(P)$以及 $0 \le k \le p-2$，那么 P 的索引为 k 的子结式的系数将按以下方式表示：

$$\mathbf{Sres}_k(P) \stackrel{\text{def}}{=} s_k(P)T^k + s_{k,k-1}(P)T^{k-1} + \ldots + s_{k,1}(P)T + s_{k,0}(P)\ .$$

通过引入以下内容，将此定义扩展到索引 p 和 $p-1$：

$$\mathbf{Sres}_p(P) \stackrel{\text{def}}{=} P \qquad\qquad \mathbf{Sres}_{p-1}(P) \stackrel{\text{def}}{=} P'$$

当上下文能清楚表明 P所指为何时，我们将写作 s_k和 $s_{k,j}$，而不写作 $s_k(P)$ 和 $s_{k,j}(P)$。

本节所述结果主要应用于多项式 $P(\alpha,\ y)$，其中 α 是一个实代数数。

3 通过子结式求单变量多项式的多个实根

我们在此给出一些公式，用多项式系数来描述一元多项式的实重根。对于次数为 2、3、4 和 5 的多项式，这总是可行的；对于次数为 6 和 7 的多项式，在大多数情况下也可行。此外，我们还将刻画一般情况下何时能够做到这一点。最近， [11], 已根据一元多项式的系数刻画了其重数结构。

推导这些公式的主要目的是用它们描述隐式定义的实代数平面曲线上临界线各点的 y 坐标。

这里不考虑情况 2 和 3，因为它们非常容易分析。

3.1 $\deg(P) = 4$

若 $a_4 \neq 0$ ，则关于 $\mathbb{R}[x]$ 的多项式

$$P(T) = a_4T^4 + a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0$$

在存在重根时，只能按以下五种方式分解:

1. $P(T) = a_4(T-\beta)^4$，其中 $\beta \in \mathbb{R}$。2. $P(T) = a_4(T-\beta)^3(T-\gamma)$，其中 $\beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \neq \gamma$。3. $P(T) = a_4(T-\beta)^2(T-\gamma)^2$，其中 $\beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \neq \gamma$。4. $P(T) = a_4(T-\gamma)^2(T-\gamma)^2$，其中 $\gamma \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$。

5. $P(T) = a_4(T-\beta)^2(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)$ with $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (if $\gamma_1 \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ then $\gamma_2 = \overline{\gamma_1} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$).

多项式 $s_i = s_i(P)$和$s_{i,\ j} = s_{i,\ j}(P)$将按照以下方式刻画每种可能性（根据（3））：

1. 如果 $s_0 = s_1 = s_2 = 0$ ，则

$$\gcd\left(P, P'\right) = P' = \mathbf{Sres}_3(P), \quad P(T) = a_4(y-\beta)^4 \quad \text{and} \quad \beta = -\frac{s_{3,2}}{3s_3} = -\frac{a_3}{4a_4}.$$

2. 如果 $s_0 = s_1 = 0,\ \ s_2 \neq 0$ 和$s_{2,\ 1}^2 - 4s_2s_{2,\ 0} = 0$ ，则

$$\gcd\left(P, P'\right) = \mathbf{Sres}_2(P), \quad P(T) = a_4(T-\beta)^3(T-\gamma),$$

其中 $\beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$、 $\beta \neq \gamma$ 和

$$\beta = -\frac{s_{2,1}}{2s_2}, \quad T-\gamma = \frac{P(T)}{a_4(T-\beta)^3} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{a_0}{a_4\beta^3}$$

当 $\beta \neq 0$ 时。若 $\beta = 0$ ，则 $\gamma = a_3/a_4$ ，且 $a_3 \neq 0$。

3. 若 $s_0 = s_1 = 0$、 $s_2 \neq 0$ 和 $s_{2,\ 1}^2 - 4s_2s_{2,\ 0} > 0$ ，则

$$\gcd\left(P, P'\right) = \mathbf{Sres}_2(P), \quad P(T) = a_4(T-\beta_1)^2(T-\beta_2)^2$$

其中 $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}$ 且

$$\beta_1, \beta_2 = \frac{-s_{2,1} \pm \sqrt{s_{2,1}^2 - 4s_2s_{2,0}}}{2s_2}.$$

4. 若 $s_0 = s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$ 且 $s_{2,\ 1}^2 - 4s_2 s_{2,\ 0} < 0$ 则

$$\gcd\left(P, P'\right) = \mathbf{Sres}_2(P), \quad P(T) = a_4(T-\gamma)^2(T-\overline{\gamma})^2$$

其中 $\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$。

5. 若 $s_0 = 0$ 且 $s_1 \neq 0$，则

$$\gcd\left(P, P'\right) = \mathbf{Sres}_1(P), \quad P(T) = a_4(T-\beta)^2(T-\gamma_1)(T-\gamma_2),$$

其中 $\gamma_1 \neq \gamma_2$（若 $\gamma_1 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$，则 $\gamma_2 = \overline{\gamma} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$）且

$$\beta = -\frac{s_{1,0}}{s_1} \quad \text{and} \quad (T-\gamma_1)(T-\gamma_2) = \frac{P(T)}{a_4(T-\beta)^2}.$$

在所有情况下，我们都已将任意具有重根的四次多项式的实根（无论是单根还是重根）表示为 P、a_0、a_1、a_2、a_3 和 a_4 的系数的显式函数。这些函数要么是关于 a_i 的有理函数，要么是关于 a_i 的多项式的平方根；已知该多项式严格为正。

3.2 $\deg(P) = 5$

若 $a_5 \neq 0$，则关于 $\mathbb{R}[x]$ 的多项式

$$P(T) = a_5T^5 + a_4T^4 + a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0$$

当存在重根时，因子的形式仅有以下五种:

1. $P(T) = a_5(T-\beta)^5$，其中 $\beta \in \mathbb{R}$。2. $P(T) = a_5(T-\beta)^4(T-\gamma)$，其中 β, $\gamma \in \mathbb{R}$。3. $P(T) = a_5(T-\beta)^3(T-\gamma)^2$，其中 $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$。4. $P(T) = a_5(T-\beta)^3(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)$，其中 $\beta, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma_1 \neq \gamma_2$。5. $P(T) = a_5(T-\beta)^3(T-\gamma)(T-\gamma)$，其中有 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$。6. $P(T) = a_5(T-\beta)^2(T-\gamma_1)^2(T-\gamma_2)$，其中 $\gamma_1 \neq \gamma_2$ 和 $\beta, \gamma_i \in \mathbb{R}$。7. $P(T) = a_5(T-\beta)^2(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)(T-\gamma_3)$，其中 $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3$ 和 $\beta, \gamma_i \in \mathbb{R}$。8. $P(T) = a_5(T-\beta)^2(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)(T-\gamma_2)$，其中 $\beta, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$。9. $P(T) = a_5(T-\beta)(T-\gamma)^2(T-\gamma)^2$，其中 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$。

—

–

我们定义 $\tau_0(T) = P(T)$，并且对于 $k \geq 1$:

$$\tau_k(T) = \gcd(\tau_{k-1}, \tau'_{k-1}).$$

多项式 $s_i(P)$ 将按以下方式（根据（3））刻画 P 与 P'、$\tau_1(P)$ 的最大公因式的每一种可能性:

1. 如果 $s_0(P) = s_1(P) = s_2(P) = 0$ 且 $s_3(P) = 0$，那么 $\tau_1(T) = P' = \mathbf{Sres}_4(P)$,

$$P(T) = a_5(T-\beta)^5 \quad \text{and} \quad \beta = -\frac{s_{4,3}(P)}{4s_4(P)} = -\frac{a_4}{5a_5}.$$

2. 如果 $s_0(P) = s_1(P) = s_2(P) = 0$，并且 $s_3(P) \neq 0$，那么 $\tau_1(T) = \mathbf{Sres}_3(P)$。唯一可能的情况是:

(a) $P(T) = a_5(T-\beta)^4(T-\gamma)$，其中 $\beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \neq \gamma$。
(b) $P(T) = a_4(T-\beta)^3(T-\gamma)^2$，其中 $\beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \neq \gamma$。

3. 如果 $s_0(P) = s_1(P) = 0$，并且 $s_2(P) \neq 0$，那么 $\tau_1(T) = \mathbf{Sres}_2(P)$。唯一可能的情况是:

(a) $P(T) = a_5(T-\beta)^3(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)$，其中 β、γ_1、$\gamma_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \neq \gamma_1 \neq \gamma_2$。
(b) $P(T) = a_5(T-\beta)^3(T-\gamma)(T-\gamma)$，其中 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$。(c) $P(T) = a_5(T-\beta)^2(T-\gamma_1)^2(T-\gamma_2)$，其中 β、γ_1、$\gamma_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \neq \gamma_1 \neq \gamma_2$。(d) $P(T) = a_5(T-\beta)(T-\gamma)^2(T-\gamma)^2$，其中 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$。

4. 若 $s_0(P) = 0$, $s_1(P) \neq 0$ 则 $\tau_1(T) = \mathbf{Sres}_1(P)$。唯一可能的情况是:

(a) $P(T) = a_5(T-\beta)^2(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)(T-\gamma_3)$ with $\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \in \mathbb{R}$ and $\beta \neq \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3$.
(b) $P(T) = a_5(T-\beta)^2(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)(T-\overline{\gamma_2})$ with $\beta,\gamma_1 \in \mathbb{R}$ and $\gamma_2 \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$.

为区分情况 2(a) 和 2(b)，我们先注意到 $\tau_1(T) = \mathbf{Sres}_3(\tau_0)$。在情况 2(a) 中，我们有

$$\tau_1(T) = s_3(\tau_0)(T-\beta)^3$$

而在情况 2(b) 中，我们有

$$\tau_1(T) = s_3(\tau_0)(T-\beta)^2(T-\gamma).$$

子结式 $s_0(\tau_1)$ 和 $s_1(\tau_1)$ 可区分这两种情况:

- 若 $s_0(\tau_1) = s_1(\tau_1) = 0$ then $\tau_1(T) = s_3(\tau_0)(T-\beta)^3$ and $P(T) = a_5(T-\beta)^4(T-\gamma)$
- 若 $s_0(\tau_1) = 0$ 且 $s_1(\tau_1) \neq 0$，则 $\tau_1(T) = s_3(\tau_0)(T-\beta)^2(T-\gamma)$，且 $P(T) = a_5(T-\beta)^3(T-\gamma)^2$。

在情形 2(a) 中，我们有

$$\beta = -\frac{s_{3,2}(\tau_0)}{3s_3(\tau_0)} = -\frac{s_{3,2}(P)}{3s_3(P)}, \quad T-\gamma = \frac{\tau_0(T)}{a_5(T-\beta)^4} = \frac{P(T)}{a_5(T-\beta)^4} \quad \text{and} \quad \gamma = -\frac{a_0}{a_5\beta^4}.$$

而在情形 2(b) 中，我们有

$$\tau_2(T) = \mathbf{Sres}_1(\tau_1) = s_1(\tau_1)(T-\beta)$$

and

$$\beta = -\frac{s_{1,1}(\tau_1)}{s_1(\tau_1)}, \quad T-\gamma = \frac{\tau_1(T)}{s_3(\tau_0)(T-\beta)^2} \quad \text{and} \quad \gamma = -\frac{s_{3,0}(P)}{s_3(P)\beta^2}.$$

情形 3(a)、3(b)、3(c) 和 3(d) 根据 $\tau_2(T)$ 的次数以及 a_5、$s_3(P)$ 和 $s_2(P)$ 的符号按以下方式区分:

- 情况 3(a)：$\deg(\tau_2(T)) = 1$ and $\mathbf{C}(\{a_5, 5a_5, s_3(P)\ s_2(P)\ \mathbf{0}, 0\}) = 3$.
- 情况 3(b)：$\deg(\tau_2(T)) = 1$ 且 $\mathbf{C}(\{a_5, 5a_5, s_3(P)\ s_2(P)\ \mathbf{0}, 0\}) = 1$。
- 情况 3(c)：$\deg(\tau_2(T)) = 0$ 且 $\mathbf{C}(\{a_5, 5a_5, s_3(P)\ s_2(P)\ \mathbf{0}, 0\}) = 3$。
- 情况 3(d)：$\deg(\tau_2(T)) = 0$ 且 $\mathbf{C}(\{a_5, 5a_5, s_3(P)\ s_2(P)\ \mathbf{0}, 0\}) = 1$。

情况 3(a) 和 3(c) 要求 a_5、$s_3(P)$ 和 $s_2(P)$ 具有相同的符号。这四种情况下 $P(T)$ 的 β 及其他实根的公式如下：

- 情况 3(a)：

$$\beta = -\frac{s_{2,1}(\tau_0)}{2s_1(\tau_0)} = -\frac{s_{1,1}(\tau_1)}{s_1(\tau_1)} \quad \text{and} \quad (T-\gamma_1)(T-\gamma_2) = \frac{P(T)}{a_5(T-\beta)^3}.$$

- 情况 3(b)：

$$\beta = -\frac{s_{2,1}(\tau_0)}{2s_1(\tau_0)} = -\frac{s_{1,1}(\tau_1)}{s_1(\tau_1)} \quad \text{and} \quad (T-\gamma)(T-\overline{\gamma}) = \frac{P(T)}{a_5(T-\beta)^3}.$$

- 情况 3(c)：

$$(T-\beta)(T-\gamma_1) = \frac{\tau_1(T)}{s_2(P)}, \quad T-\gamma_2 = \frac{s_2(P)^2 P(T)}{a_5\tau_1(T)^2} \quad \text{and} \quad \gamma_2 = \frac{s_2(P)^2 a_0}{a_5 s_{3,0}(P)^2}.$$

- 情况 3(d)：

$$T-\beta = \frac{P(T)}{a_5(\mathbf{Sres}_2(P))^2} \quad \text{and} \quad \beta = -\frac{a_0}{a_5 s_{2,0}^2}.$$

在情况 4(a) 和情况 4(b) 中，我们有

$$\beta = -\frac{s_{1,1}(P)}{s_1(P)}$$

并通过分析 a_5、$s_3(P)$、$s_2(P)$ 和 $s_1(P)$ 的符号来判断它们是否分离：

- 情况 4(a)：$\mathbf{C}(\{a_5, 5a_5, s_3(P)\ s_2(P)\ s_1(P)\ 0\}) = 4$。
- 情况 4(b)：$\mathbf{C}(\{a_5, 5a_5, s_3(P)\ s_2(P)\ s_1(P)\ 0\}) = 2$。

在情况 4(a) 中，我们有

$$(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)(T-\gamma_3) = \frac{P(T)}{a_5(T-\beta)^2}$$

在情况 4(b) 中，我们有

$$(T-\gamma_1)(T-\gamma_2)(T-\overline{\gamma_2}) = \frac{P(T)}{a_5(T-\beta)^2}.$$

这两个多项式均无重根，并且我们知道它们分别恰有三个和一个不同的实根。

在所有情况下，我们都将任意具有重根的五次多项式的多重实根刻画为其系数的显式函数。这些函数要么是关于这些系数的有理函数，要么是涉及这些系数所构成的某个已知为严格正的多项式的平方根的有理函数。对于这些具有重根的多项式，其单实根也可以用同样的方式刻画；但情况 4(a) 和 4(b) 除外，在这两种情况下，这些实根（0 个或 3 个）来自一个没有重根的三次方程。

3.3 P 的次数 $= 6$ **或** P 的次数 $= 7$

当 P 的次数为 6 或 7 时，我们并非在所有情况下都能像之前那样，将多重实根描述为 P 的系数的有理函数，或描述为涉及这些系数所构成的某个已知为严格正的多项式的平方根的有理函数。对于次数 4 和 5 所采用的策略失效的唯一情况如下：

- $\deg(P) = 6$:
  - $P(T) = a_6(T-\gamma_1)^2(T-\gamma_2)^2(T-\gamma_3)^2$ with $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ and $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3$.
  - $P(T) = a_6(T-\gamma_1)^2(T-\gamma_2)^2(T-\overline{\gamma_2})^2$ with $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ and $\gamma_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
- $\deg(P) = 7$:
  - $P(T) = a_7(T-\gamma_1)^2(T-\gamma_2)^2(T-\gamma_3)^2(T-\gamma_3)$ with $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{R}$ and $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_4$.
  - $P(T) = a_7(T-\gamma_1)^2(T-\gamma_2)(T-\gamma_3)^2(T-\overline{\gamma_3})^2$ with $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ and $\gamma_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

在所有其余情形中，关于多重实根，我们可以像之前一样处理。在所有情形中，我们都可以计算出一个没有重根的多项式，其实根是所考虑多项式的单实根。

3.4 P 的次数 $= n$

所作的分析 针对 4、5、6 和 7 次的情形，可以如下一定理所述加以推广 .

定理 9. 设 $P(T)$ 是实数集上的一个多项式，其可按如下方式分解 :

$$P(T) = \prod_{i=1}^{r}(T-\beta_i)^{m_i} \prod_{i=r+1}^{r+s}((T-\gamma_i)(T-\overline{\gamma_i}))^{m_i} \prod_{k=1}^{t}(T-\delta_k) \prod_{k=t+1}^{t+q}(T-\phi_k)(T-\overline{\phi_k}) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell T^\ell$$

其中 $m_i > 1$ 和 β_i、$\delta_k \in \mathbb{R}$ 和 γ_i、$\phi_k \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ （它们彼此均不相同）。那么：

1. 如果 m_1、m_2、.....、m_{r+s}中没有重复项，那么每个 β_i 都可以明确地表示为关于 a_ℓ的有理函数。

2. 如果 m_1、m_2、.....、m_r 中的重复元素最多出现两次，且每个 m_i、 $1 \leq i \leq r$都不出现在 m_{r+1}、m_{r+2}、.....、m_{r+s} 中，那么每个 β_i 都可以明确地表示为关于 a_ℓ的有理函数；在某些情况下，该函数还涉及一个关于 a_ℓ的多项式的平方根，并且已知该多项式严格为正。

证明。不失一般性，假设 $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r$和 $m_{r+1} \geq m_{r+2} \geq \ldots \geq m_{r+s}$。我们按照 $\deg(P) = 5$ 的情形，通过定义 $\tau_0(T) = P(T)$以及对 $k \geq 1$，进行如下推导：

$$\tau_k(T) = \gcd(\tau_{k-1}, \tau'_{k-1}).$$

如果 $m_1, m_2, \ldots, m_{r+s}$ 和 $m_1 > m_{r+1}$ 中没有重复项，那么 $\deg(\tau_{m_1-1}(T)) = 1$，且 β_1 是 $\tau_{m_1-1}(T)$ 的唯一根。如果 $m_1 < m_{r+1}$，那么 $\deg(\tau_{m_1-1}(T)) = 2$，且 γ_1 和 γ_1 是 $\tau_{m_1-1}(T)$ 的根。由于 $\tau_1(T)$ 是 P 的子结式之一， $\tau_2(T)$ 是 $\tau_1(T)$ 的子结式之一，依此类推，我们可以得出结论：$\tau_{m_1-1}(T)$ 的系数是关于各个 a_ℓ 的多项式，并且 β_1 可以明确地表示为各个 a_ℓ 的有理函数。第一部分可通过从 $P(T)$ 中去掉 $(\tau_{m_1-1}(T))^{m_1}$ 并重复相同过程得出。

计算出 $\tau_k(T)$ 后，我们就知道 $\tau_j(T)$、 $0 \le j \le k-1$ 的子结式，因此一旦知道 $\tau_k(T)$ 的不同实根个数为 1 或 0，就可以缩短这一过程：在第一种情况下，我们继续进行，直到相应的 $\tau_k(T)$ 只有一个实根且没有虚根（当 $\tau_{k+1}(T)$ 没有实根时便会出现这种情况，而这一信息可由生成 $\tau_{k+1}(T)$ 的子结式直接提供）；在第二种情况下，由于我们只关注 $P(T)$ 的实根，因此从 $P(T)$ 中消去 $(\tau_k(T))^{k+1}$。

如果 m_1、m_2、.....、m_r 中的重复元素至多出现两次，并且每个 m_i、$1 \le i \le r$ 都未出现在 m_{r+1}、m_{r+2}、.....、m_{r+s} 中，那么我们按前一种情况处理。唯一的不同之处在于处理满足 $m = m_1 = m_2 > m_j$ 的 β_1 和 β_2 时：此时，计算出二次多项式 $\tau_{m-1}(T)$ 后便停止，其根为 β_1 和 β_2。当重数最大的根出现在“复数”一侧时，我们以相同方式继续，直到得到没有实根的 $\tau_k(T)$：此时同样从 $P(T)$ 中消去 $(\tau_k(T))^{k+1}$，因为我们只关心 $P(T)$ 的实根。

□

注释10。
前述定理的证明可以通过使用 $P(T)$ 的无平方因子分解以更直接的方式完成。这里给出的证明提供了一个算法，用于生成对 $P(T)$ 的多重实根的所需描述，以及一个不含重根的多项式，其实根正是 $P(T)$ 的单实根。

4 避免一般位置：临界点附近的分支计算

为了分析 $\mathcal{C}_P$ 的拓扑，当临界线上只有一个临界点时，很容易确定所考察的临界点左右两侧各有多少个半分支。当临界点不止一个时，情况会变得更加复杂；不过，对所考察的临界点若有显式且易于处理的描述，便可确定半分支所需的信息。

如果 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ 是 $\mathcal{C}_P$ 的一个奇点，那么

$$P(\alpha,\beta) = \frac{\partial P}{\partial y}(\alpha,\beta) = \frac{\partial P}{\partial x}(\alpha,\beta) = 0.$$

4.1 $\mathcal{C}_P$ 的分歧点

回忆一下，当 $P(\alpha, \beta) = P_y(\alpha, \beta) = 0$ 且 $P_x(\alpha, \beta) \neq 0.$ 时，$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ 是 $\mathcal{C}_P$ 的一个临界且非奇点。应用隐函数定理，这意味着在 (α, β) 附近，曲线 $\mathcal{C}_P$ 可以表示为一个函数 $x = \Phi(y)$，使得 $\alpha = \Phi(\beta)$。由于

$$\Phi'(\beta) = -\frac{P_y(\alpha,\beta)}{P_x(\alpha,\beta)} = 0$$

我们有三种可能性，因为 $y = \beta$ 可以是：

- Φ 的一个局部极小值：(α, β) 右侧有 2 个半分支，左侧有 0 个；或者
- Φ 的一个局部极大值：(α, β) 右侧有 0 个半分支，左侧有 2 个；或者
- Φ的一个拐点：(α, β)右侧有 1 个半分支，左侧有 1 个。

要刻画函数 $x = \Phi(y)$ 在 $y = \beta$ 处的行为，需要计算导数$P_{yy}(\alpha, \beta)$ $P_{yyy}(\alpha, \beta)$ $P_{yyyy}(\alpha, \beta)$.....，直到其中一个不为零，因为：如果 $\Phi^{(1)}(\beta) = \Phi^{(2)}\beta = \cdots = \Phi_{(k-1)}(\beta) = 0$, $\Phi_{(k)}(\beta) \neq 0$，然后（对 $P(\Phi(y)\ y) = 0$ 递归应用隐式微分），我们有 $\Phi_{(k)}(\beta)P_x(\alpha, \beta) = -P_{\underset{y\cdots y}{k}}(\alpha, \beta)$，并且可以应用高阶导数检验来判断该点是局部最大值、局部最小值还是拐点。

4.2 $\mathcal{C}_P$的奇点：$\deg_y(P) = 4$

由于曲线的次数较低，唯一可能出现的歧义是多项式 $P(\alpha, y)$ 中有两个二重根 $\beta_1 < \beta_2$。除此之外，临界线 $x = \alpha$ 处于局部一般位置。由于我们研究的是一条四次曲线，临界线两侧最多各有 4 个分支。既然我们已经发现 $P(\alpha, y)$ 有两个二重根，就知道系数 y^4 必须非零。为简便起见，我们设其为 1。此外，由于 P 定义在实数集上，临界线两侧的实分支数必须为偶数。

如果我们有四个分支需要与奇点连接到其中一侧，那么由于重数，每个奇点必须连接两个分支。如果某一侧没有实分支，那么我们无需处理这类分支。

最后，棘手的情况是我们只有两个分支需要连接。这两个分支必须通向同一个点，因为另一个临界点必定吸引两个共轭复分支。首先，我们考虑 $Q_i(s, t) = P(s+\alpha, t+\beta_i)$。然后，$(0, 0)$ 作为 Q_i 上的点时的行为，与 (α, β_i) 作为 P上的点时的行为相同。将 Q_i 的最低次齐次分量因式分解后，我们得到在 (α, β_i) 处与 $\mathcal{C}_P$ 相切的（至多两条）切线的斜率。于是：

- 如果其中一个点的所有斜率都是非实复数，那么它就是一个孤立点，因此另一个点会吸引这些分支。

- 如果其中一个点有两个不同的实斜率，那么它对应两段弧，因为它是一个实节点。

如果曲线上奇点处的切线只有一个斜率，我们将考虑由 $P_y(x, y) = 0$ 给出的三次曲线。多项式 $P_y(\alpha, y)$ 在 β_1、β_2 以及中间点 $\gamma \in (\beta_1, \beta_2)$ 处为零，因为它是 $P(\alpha, y)$ 的导数。这意味着 $\mathcal{C}_{P_y}$ 有三个实分支经过竖直直线 $x = \alpha$。由于次数较低，唯一可能的情况是图2所示的情形或其对称情形，而 $\mathcal{C}_P$ 和 $\mathcal{C}_{P_y}$ 的分支的相对位置决定了如何连接这些半分支。

4.3 $\mathcal{C}_P$ 的奇点：次$_y(P) = 5$

现在考虑 $\deg_y P = 5$。这里的非平凡情形有：

- $P(\alpha, y)$ 有两个二重根。
- $P(\alpha, y)$ 有一个三重根和一个二重根。

我们将分别讨论每种情形，但首先像之前一样，假设 P 在 y 上是首一的（且 $\deg_y(P) = 5$；否则，我们按照次数较低的情形处理）。接着用类似的方法推理，可知临界线之间的实分支数必须为 1、3 或 5。

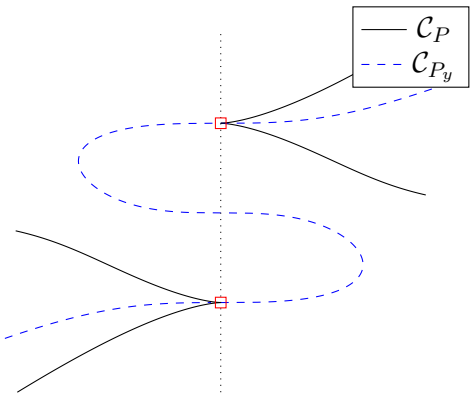

图2：左侧， $\mathcal{C}_P$ 的实分支趋向下方的临界点，因为$\mathcal{C}_{P_y}$ 的两个分支都位于它们上方。右侧则是互补情形。

4.3.1 $P(\alpha, y)$ 有两个二重根。

这种情形可以按照四次情形处理。我们有两个临界点，各自对应两个分支或没有分支；还有一个孤立点，对应一个分支。

如果有 5 个分支需要分配，每个临界点分得两个，非临界点分得一个。我们分配这些分支，以避免它们在临界线外发生交叉。

如果只有一个分支，就将其分配给非临界点。

如果有三个分支，一个分支通向非临界点，另外两个则通过检查奇点处的切线是否为实且彼此不同来确定，或者考虑曲线$\mathcal{C}_{P_y}$ 并按照四次情形进行推理：

- 如果 $\mathcal{C}_{P_y}$ 的分支中至少有两个位于 $\mathcal{C}_P$的三个分支中的至少两个之上，那么下方的临界点就分得两个分支。
- 否则，上述临界点有两个分支。

4.3.2 $P(\alpha, y)$ 有一个三重根和一个二重根。

这里，三重临界点有 1 个或 3 个分支，而二重临界点有 2 个或没有分支。

如果要分配五个分支，则三个分配给对应三重根的临界点，另外两个分配给对应二重根的临界点。

如 果只有一个分支，则对应三重根的临界点有 i t.

如果有三个分支，我们再次检查切线的斜率：

- 如果其中一个临界点有两个复非实斜率，另一个临界点就取走迄今尚未分配的分支。
- 如果其中一个临界点有（至少）两个实斜率，它就取走迄今尚未分配的分支。

如果我们没有足够的数据，那么我们再次考虑 $\mathcal{C}_{P_y}$。它有一条实分支经过二重点，一条实分支从临界点之间穿过，还有两条可能非实的分支经过三重点。

- 如果 $\mathcal{C}_{P_y}$ 只有两条实分支，那么二重点就对应尚未分配的分支。
- 如果 $\mathcal{C}_{P_y}$ 的四个实分支中有两个位于 $\mathcal{C}_P$ 的三个分支上方，那么下方的临界点会接收此前尚未分配的分支。
- 否则，上方的临界点会接收此前尚未分配的分支。

在临界线上呈现这种排列时， $\mathcal{C}_P$ 的三个分支不可能位于 $\mathcal{C}_{P_y}$ 的四个分支之间。

4.4 $\mathcal{C}_P$ 的奇点：一般情形

我们可以将临界点处切线斜率的结论推广到一般次数。众所周知，曲线在奇点处（α， β）的一条切线对应于经过该点的一条分支。因此，如果 $P(s+\alpha,\ t+\beta)$ 的最低次齐次分量 $h(s,\ t)$ 是平方自由的，且不是 s 的倍数，那么 $\mathbb{R}[s,t]$ 中 $h(s,\ t)$ 的每个一次因子都对应于经过该点的一条实分支，而每个二次因子都对应于两条共轭非实分支。由此便解决了没有垂直切线的一般奇点情形。

5 刻画两个椭球的交线

给定两个椭球 $\mathcal{A}$： $XAX^T = 0$ 和 $\mathcal{B}$： $XBX^T = 0$, $X = (x, y, z,1)$，它们的特征方程（或多项式）定义为

$$f(\lambda) = \det(\lambda A + B) = \det(A)\lambda^4 + \ldots + \det(B)$$

这是一个具有实系数的 λ 四次多项式。 [17] 首先引入了根据特征方程实根的符号来刻画两个椭球相对位置的方法。

定理 11。
设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个椭球，其特征方程为 $f(\lambda)$。则：

1. 特征方程 $f(\lambda)$ 始终至少有两个负根。
2. $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 分离，当且仅当 $f(\lambda)$ 有两个不同的正根。
3. $\mathcal{A}$一和 $\mathcal{B}$ 彼此外切，当且仅当 $f(\lambda)$ 有一个正重根 .

根据该定理，我们可以通过由这两个椭球构成的二次曲面铅笔的特征多项式的实根模式，判断两个椭球的基本相对位置，即分离、外切和重叠。然而，特征多项式的根模式不足以刻画两个椭球的排列。

文献[15] 提出了一种更深入的代数刻画方法，即利用所谓的指标序列，对三维实射影空间中两个二次曲面的交曲线形态进行分类。二次曲面铅笔的指标序列不仅包含特征多项式的根模式，还涉及与每个根相关联的若尔当标准形，以及相邻两个根之间的信息。定义二次曲面铅笔的指标函数是构造指标序列所必需的。

椭球束的指标函数行为由特征值曲线 $\mathcal{S}$ 描述，该曲线由方程 $S(\lambda,\ \mu) = \det(\lambda A + B - \mu\mathbb{I}_4) = 0$. S 定义，其关于 λ 和 μ 的次数均为四。由于

对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，$\lambda A + B$ 都是一个实对称矩阵，因此 $S(\lambda,\ \mu) = 0$ 总共有四个实根（按重数计）。对于每个值 λ_0，指标函数 $Id(\lambda_0)$ 等于 $S(\lambda_0,\ \mu) = 0$ 的正实根个数。

由于 $S(\lambda,\ \mu) = 0$ 是一条非常特殊的四次曲线（始终有四个实分支（计入重数）），因此其分析极其简单。若 $\lambda = \alpha$ 是一条临界线，则 $S(\alpha,\ \mu)$ 可按以下方式因式分解：

1. $S(\alpha,\ \mu) = \tau_4(y-\beta)^4$。2. $S(\alpha,\ \mu) = \tau_4(y-\beta)^3$ $(y-\gamma)$，其中 $\gamma \in \mathbb{R}$。3. $S(\alpha,\ \mu) = \tau_4(y-\beta)^2($ $y-\gamma)^2$，其中 $\gamma \in \mathbb{R}$。4. $S(\alpha,\ \mu) = \tau_4(y-\beta)^2($ $y-\gamma_1)(y-\gamma_2)$，其中 $\gamma_1 \neq \gamma_2$。

在 3.1 中，我们可以找到一些公式，用 α 表示 β、 γ、 γ_1 和 γ_2 的值，从而轻松确定 $Id(\alpha)$。对于不构成临界线的 λ，计算 $Id(\lambda)$ 可归结为对多项式 $S(\lambda,\ \mu)$（视为关于 μ 的多项式）应用笛卡尔符号法则（见 [1] 中的注释 2.38）。利用 4.2 中介绍的技巧，可以轻松确定四个分支与每条临界线的接触方式。

6 结论

本文提出了一组公式，将一元多项式方程的重根表示为所考虑多项式系数的有理函数。我们利用这些公式，尝试在计算隐式定义的实代数平面曲线的拓扑时避免使用“一般位置条件”。文中还介绍了一个具体应用，下一步将设计一种新算法，利用本文提出的公式和策略计算四次曲线和五次曲线排列的拓扑。

7 致谢。

作者部分工作得到西班牙国家研究署（科学与创新部）资助，项目编号 PID2020-113192GB-I00/AEI/ 10.13039/501100011033（数学可视化：基础、算法与应用）。J. Caravantes 是 ASYNACS研究组成员（编号 CT-CE2019/683）。

参考文献

[1] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy：实代数几何中的算法。《数学中的算法与计算》**10**，S pringer–Verlag（2003）。[2] G. M. Diaz–Toca, L. Gonzalez–Vega：依赖于参数的一元多项式无平方因子分解：参数有理函数积分中的应用。《符号计算杂志》**32**，191–209（2001）。[3] D. N. Diatta, F. Rouillier, M.-F. Roy：平面曲线拓扑的计算。ISSAC国际符号与代数计算研讨会论文集，130–137（2014）。

[4] I. Z. Emiris, E. P. Tsigaridas：小次数实代数数与多项式系统。《理论计算机科学》**409**，186–199（2008）。[5] L. Gonzalez–Vega, M. El Kahoui：实代数平面曲线拓扑计算的改进上界。《复杂性杂志》**12**，527–544（1996）。[6] L. Gonzalez–Vega, H. Lombardi, T. Recio, M.–F. Roy：*Sturm*序列与子结式的特化。（I）：《理论计算机科学与应用》**24**，561–588（1990）。（II）：《理论计算机科学与应用》**28**，1–24（1994）。[7] L. Gonzalez–Vega, H. Lombardi, T. Recio, M.–F. Roy：一元多项式的行列式与实根。《量词消去与柱状代数分解》（Caviness B. 和 Johnson J. 编），《符号计算教材与专著》，300–316，Springer–Verlag（1998）。[8] L. Gonzalez–Vega, I. Necula：隐式定义的代数平面曲线的高效拓扑确定。《计算机辅助几何设计》**19**，719–743（2002）。[9] L. Gonzalez–Vega, I. Rua：通过子结式求解有理曲线的隐式化、反演与重新参数化问题。《计算机辅助几何设计》**26**，941–961（2009）。[10]V. W. Habicht：*Sturm*根数算法的推广。《瑞士数学评论》**21**，99–116（1948）。[11]H. Hong, J. Yang：一元多项式重数结构的一个条件。arXiv：2001.02388（2020）。[12] A. Kobel, M. Sagraloff：平面代数曲线计算的复杂性。《复杂性杂志》206–236。[13] Y. B. Li：构造子结式的新方法。《应用数学与计算》**183**，471–476（2006）。[14] R. Loos：广义多项式余式序列。《计算机代数，计算增刊》**4**，115–138，Springer–Verlag（1982）。[15] C. Tu, W. Wang, B. Mourrain, J. Wang：利用符号序列对两个二次曲面的交曲线进行分类。《计算机辅助几何设计》**26**，317–335（2009）。[16] W. Wang, Y.–K. Choi, B. Chan, M.–S. Kim, J. Wang：利用分离平面对运动椭球进行高效碰撞检测。《几何建模·计算》**72**，235–246（2004）。[17] W. Wang, J. Wang, M.–S. Kim：两个椭球分离的一个代数条件。《计算机辅助几何设计》**18**，531–539（2001）。