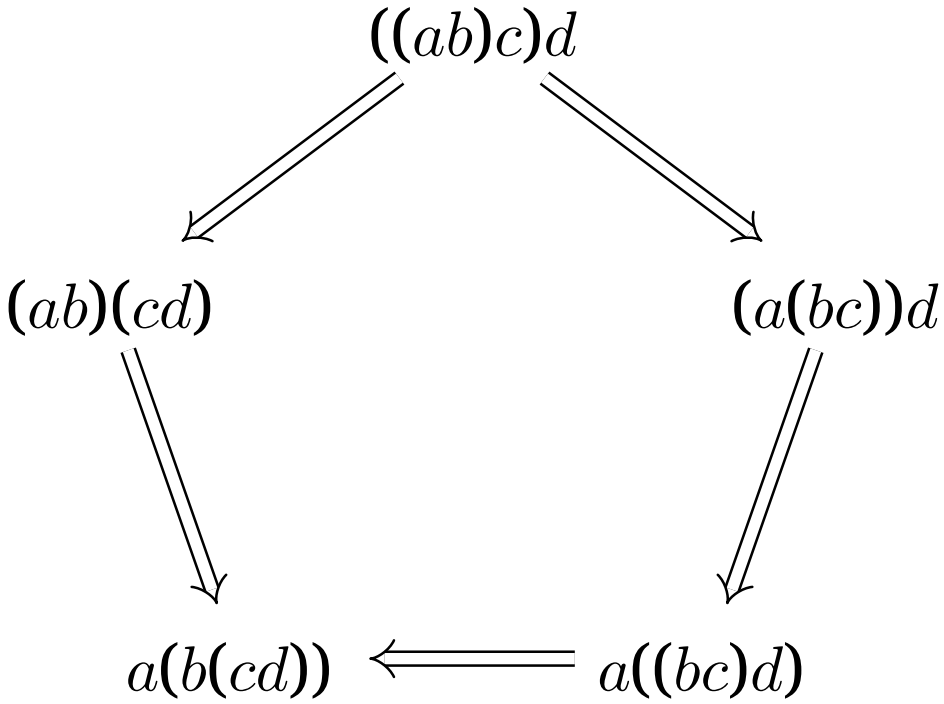
This Week's Finds：数理物理

第*101*至*150*周

*1997*年*4*月*9*日至*2000*年*6*月*18*日

作者：John Baez

排版：TimHosgood



这里收录的是《本周数学物理新发现》第 51 至 100 期。这个系列有时被称为世界上第一个博客，尽管它最初发布在一个名为 sci.physics.research 的“Usenet 新闻组”上——这种交流形式早于万维网。我开始撰写这个系列，是为了讨论数学和物理学论文；在第 101 至 150 期中，我继续这样做，重点关注量子引力、拓扑量子场论和n-范畴等相关主题。不过，我也谈到了从生物学到 Greg Egan 的小说，再到围棋等各种话题。此外，我还在这一系列短文中介绍了一些同伦论主题：

- **A.**预层范畴。
- **B.**单纯形范畴， Δ。
- **C.** 单纯集。
- **D.** 单纯对象。
- **E**。几何实现。
- **F**。奇异单纯集。
- **G**。链复形。
- **H**。 单纯阿贝尔群的链复形。
- **I**。奇异同调。
- **J**。范畴的神经。
- **K**。 范畴的分类空间。
- **L**。 Δ 作为幺半对象上的自由幺半范畴。
- **M.**伴随产生的单纯对象。
- **N.** 拓扑空间的环空间。
- **O.** 拓扑幺半群的群完备化。

Tim Hosgood 于2020年悉心排版了《*This Week's Finds* 》的全部300期。这些内容将分六批发布，每批50期。我对这里的各期内容做了编辑，使风格更加统一，并将一些关于预印本、技术报告等的参考文献改为更实用的 arXiv 链接。这也解释了为何有些期刊中引用的文献，在该期撰写时尚未发表，显得有些时代错置。

毫无疑问，其中有许多拼写错误和其他错误。如果您发现任何问题，请联系我，我会尽力修正。

目录

第101周 1997年4月9日 .....3 第126周 1998年11月17日 ..... 173 第102周 1997年4月21日.....7 第127周 1998年11月30日 ..... 180 第103周 1997年4月26日..... 18 第128周 1999年1月4日..... 190 第104周 1997年6月8日 ..... 20 第129周 1999年2月15日 ..... 197 第 105 周 1997 年 6 月 21 日 ..... 29 第 130 周 1999 年 2 月 27 日 ..... 203 第 106 周 1997 年 7 月 23 日 ..... 39 第 131 周 1999 年 3 月 7 日 ..... 210 第 107 周 1997 年 8 月19日 ..... 49 第132周 1999年4月2日 ..... 216 第108周 1997年9月22日 ..... 54 第133周 1999年4月23日..... 224 第109周 1997年9月27日 ..... 61 第134周 1999年6月8日 ..... 230 第 110 周 1997 年 10 月 4 日 ..... 67 第 135 周 1999 年 7 月 31 日 ..... 236 第111周 1997年10月24日 ..... 73 第136周 1999年8月21日 ..... 242 第112周 1997年11月3日 ..... 77 第137周 1999年9月4日..... 247 第113周 1997年11月26日 ..... 84 第138周 1999年9月12日 ..... 253 第114周 1998年1月12日 ..... 89 第139周 1999年9月19日 ..... 256 第115周 1998年2月1日 ..... 94 第140周 1999年10月16日 ..... 262 第116周 1998年2月7日 ..... 100 第 141 周 1999 年 10 月 26 日 ..... 267 第 117 周 1998 年 2 月 14 日 ..... 107 第142周 1999年12月5日 ..... 277 第118周 1998年3月14日 ..... 114 第143周 1999年12月29日 ..... 286 第119周 1998年4月13日..... 123 第120周，1998年5月6日..... 131 第121周 1998年5月15日 ..... 136 第122周 1998年6月24日 ..... 145 第123周 1998年9月19日 ..... 150 第124周 1998年10月23日 ..... 158 第125周 1998年11月3日 ..... 165 第144周 2000年1月21日 ..... 291 第145周 2000年2月9日 ..... 299 第146周 2000年3月11日 ..... 307 第147周 2000年5月20日 ..... 312 第148周，2000年6月5日 ..... 324 第149周 2000年6月12日 333 第150周 2000年6月18日 341

第101周

1997年4月9日

达尔文进化通过自然选择，为复杂有序结构的出现提供了一种极其强大的解释方式。然而，它并不是自然产生复杂结构的唯一 重要过程。也许我们研究生物学时，也应该寻找其他能使秩序自发出现的方式。

毕竟，非生物世界中也有大量复杂结构。下雪时，我们会看到许多美丽的雪花，它们都有相似却又各不相同的六边形结构。难道我们要得出结论，认为雪花通过自然选择进化 成了六边形吗？并非如此。

不过，等等！也许从某种意义上说，在某些天气条件下，六边形雪花“更适应环境”。这种形状或许比其他形状更有利于水分子附着。我们可以把不同的雪花看作在“争夺”水分子，而生长最快的就是“赢家”。事实上，一场暴风雪中雪花的具体形状，很大程度上取决于温度、湿度等等……所以谁是“赢家”取决于环境，这正如达尔文进化一样！

生物学家会回答：好吧，但这仍然不是“达尔文进化”。严格来说，要称为达尔文进化，就必须存在一个“世系”。达尔文进化只适用于能够繁殖并将某些特征传给后代的实体。其基本观点是，在许多代的过程中，有助于繁殖的特征会逐渐积累，而阻碍繁殖的特征则会被淘汰。雪花不会生儿育女。一场一锤定音的资源竞争，随后第二天便融化殆尽，这不是达尔文进化所讨论的内容。

好吧，好吧，它确实不是达尔文进化。但它仍然很有意思。它向我们展示，达尔文进化只是秩序得以产生的一种方式。所以我们不应该孤立地研究达尔文进化，而应该研究系统自发生成复杂模式的所有方式，并看看它们之间有何联系。如果这样做，也许我们会发现物理学、化学和生物学之间存在许多有趣的关系。此外，我们或许也能更好地理解生命最初是如何产生的……那种从化学到生物学的奇妙跃迁。

如果我没有如此沉迷于量子引力，我会很乐意研究这些东西。它显然很酷，而且显然比量子引力实用 得多。复杂性的起源如今是个非常热门的话题。但可惜，我只是个老派的人，热爱简单性。每当我看到一本新期刊问世，标题是《复杂系统》或《复杂性杂志》或《圣菲研究所复杂性科学研究》，我都会惆怅地叹一口气，梦想着创办一本名为《简单性》的期刊。

其实，乐趣就在于复杂性与简单性之间的相互作用：复杂的现象如何由简单规律产生，有时又如何遵循自身新的简单规律。我喜欢探索事物简单的一面，但这并不妨碍我欣赏复杂性领域的新研究。有段时间，我对 Manfred Eigen 关于“超循环”的研究着迷不已——超循环是指能够催化彼此形成的化学物质系统。（你可能还记得 Eigen 是“特征值”的发现者……如果真是这样，我只能替你遗憾了。）想必生命最初是以某种超循环的形式出现的，因此，对超循环之间竞争的数学研究

或许能让我们更清楚地了解，为什么遗传密码只有一种。这类研究中有不少漂亮的数学成果，见：

1）Manfred Eigen，《超循环》：自然自组织原理，施普林格，柏林，1979年。

在这一背景下，还会提到另一个名字：伊利亚·普里戈金，主要是因为他在非平衡热力学以及耗散系统中模式自发形成方面的研究。以下只是他众多著作中的几部：

2）G. Nicolis 和 I. Prigogine，《非平衡系统中的自组织：从耗散结构到经由涨落而产生的有序》，威利，纽约，1977年。

伊利亚·普里戈金，《从存在到演化：物理科学中的时间与复杂性》，W. H. Freeman，旧金山，1980年。

伊利亚·普里戈金，《不可逆过程热力学导论》，Interscience Publishers，纽约，1967年。

近些年来，斯图尔特·考夫曼的研究在这一领域占据了主导地位。正是他推动了对各种自发生成秩序的方法进行统一研究，尤其是在生物系统的背景下。他写过两本书。尤其是后一本，包含了许多数学问题，正等待 优秀的数学家和物理学家去解决。

3) 斯图尔特·A·考夫曼，《宇宙中的家园：探索自组织定律与复杂性》，牛津大学出版社，牛津，1995年。

斯图尔特·A·考夫曼，《秩序的起源：进化中的自组织与选择》，牛津大学出版社，牛津，1993年。

如果非达尔文式的自发模式形成在生物学中可能很重要，那么达尔文进化在非生物学背景下也可能很重要吗？嗯，正如我在“第31周”和“第33周”中提到的，物理学家 Lee Smolin 提出了一种有趣的假说，认为自然定律可能是通过自然选择演化到如今的状态。这个想法是，黑洞会孕育出新的“婴儿宇宙”，其定律与祖先相似，但不一定完全相同。这种观点极具推测性，但有一个弥补其不足的优点：它提出了许多可以检验的预测——它预言，所有自然常数的取值都经过调谐，以使黑洞生成达到最大。Smolin 刚刚出版了一本关于这一主题的书，恰好也是了解他在量子引力方面研究的好读物：

4）Lee Smolin，《宇宙的生命》，Crown出版社，1997年。

有趣的是，Stuart Kauffman 和 Lee Smolin 携手撰写了一篇关于量子引力中时间问题的论文：

5) Stuart Kauffman 和 Lee Smolin，《量子宇宙学中时间问题的一种可能解决方案》，可在 gr-qc/9703026 获取。

现在，你还可以在约翰·布罗克曼名为“Edge”的网站上阅读这篇论文。该网站收录了各种有趣的访谈和讨论。例如，如果你现在去看看，就会发现一篇对我最喜欢的在世音乐家 Brian Eno 的精彩访谈。更重要的是，那里目前正在讨论考夫曼和 Smolin 的论文。作为 USENET新闻组及其他电子闲聊形式的长期爱好者，我非常高兴看到布罗克曼搭建了一个现代版法国沙龙。

6）边：http://www.edge.org

好吧。那……还有什么比复杂性理论更时髦、更流行、更接近前沿呢？你猜对了：同伦论！目前只有最潮的人才知道它，但只要他们琢磨出如何制作炫酷的色彩图形来展示亚当斯谱序列，它很快就会风靡一时。

上周我参加了在西北大学举办的高阶范畴论与物理学研讨会，此前还参加了在那里举办的一场同伦论会议。其实，这两个主题密切相关：同伦论是一种高度代数化的方法，用来研究各种维数的空间的拓扑学；而我们对“高维代数”的许多理解也源自同伦论。因此，这样的组合很不错。

唉，很多同伦论内容我都没能理解，不过我听懂的部分很有意思。可能听起来有点奇怪，但我从同伦论会议上学到的最重要的事情，是有人解释了为什么数字24在弦理论中如此重要！在玻色弦理论中，时空必须是26维的，但减去弦本身曲面的2个维度后，就得到24；事实证明，正是数字24的特殊性质带来了一切奇妙之处。

我在“第95周”开始深入探究这些奥秘。不过，当时我主要是在介绍一些非常高深、自己也几乎不懂的东西，感觉就像一堆复杂巧合的集合。现在我很高兴地告诉大家，我开始理解这整个24之谜的真正本质了。原来，数字24的重要性深深融入了数学的基本结构之中。说得神秘一点，原来每个整数都有一些微妙的“隐藏对称性”。这些对称性本身也有对称性，而这些**对称性**又有自己的对称性，而这样的对称性恰好有24个。

嗯，真神秘。让我换个方式来说。你可能不容易看出这其实是在表达同一件事，不过这种说法有个优点：更具体。假设整数 n 足够大——至少是4。把一个（$n+3$）维球面绕在一个 n维球面上，本质上有24种不同的方式。更准确地说，给定两个从（$n+3$）维球面到 n维球面的连续函数，如果一个可以连续变形为另一个，我们就说它们属于同一个“同伦类”。那么，当 n 至少是4时，原来这样的同伦类恰好有24个。

现在，普通人都被我搞糊涂了，而同伦论学者也在偷笑，觉得我把一件人人皆知的事说得如此郑重，接下来我大概该回头解释一下我到底想说什么，以及它为什么和弦理论有关。不过我已经有些疲惫了，你的注意力大概也开始涣散，所以这些留到下次再说。我会谈谈同伦论、稳定同伦论、球面

谱，以及为什么 Andre Joyal 说我们应该把球谱称作“整数”（这样就解释了我上面那句神秘的话）。

> 深邃、深邃的无穷！寂静。远离日常生活的种种压力，做一场梦；站在船头，驶过平静的海面，朝着一个总在退去的视界前行；凝视掠过的波浪，聆听它们单调而轻柔的低语；就这样沉入梦境，直至失去意识……
>
> — *Maurits Escher*

第102周

1997年4月21日

在“第101周”中，我曾声称自己已经弄清了 24 这个数字在弦理论中如此重要的真正原因。现在我不太确定了——我以为能拼在一起的几块谜题似乎并不契合。也许我把目前了解的情况讲出来后，一些专家会把缺失的拼图交给我，或者告诉我手头这些拼图该放在哪里。

这些谜题的大部分素材都来自我参加的一场同伦论会议上的演讲：

1) Ulrike Tillmann，《黎曼曲面的模空间——一种同伦论方法》，在西北大学代数拓扑会议上的演讲，1997年3月27日

不过，在这次会议期间与 Andre Joyal 的几次交谈，确实让我开始关注这里可能发生的事情。

先来回顾一些关于球面的同伦群的知识。将一个 m 维球面绕着一个 k 维球面缠绕，通常有许多在拓扑意义上不同的方式。例如，如果 $m = k = 1$，我们讨论的就是将一个圆绕着另一个圆缠绕的方式。这些方式可以用一个称为“绕数”的整数来分类。我们可以把圆看作复平面上的单位圆，从而具体理解这一点。随便选一个整数，记作 n。那么函数

$$f(z) = z^n$$

将单位圆（满足 $|z| = 1$ 的复数）映射到自身。如果 n 是正数，这个函数就会沿逆时针方向将单位圆绕自身缠绕 n 次。如果 n 是负数，圆就会沿相反方向缠绕。如果 n 是零，$f(z) = 1$，因此我们得到一个常值函数——完全没有“缠绕”！

事实证明，圆到自身的任何连续函数都可以连续变形为这些函数 $f(z) = z^n$ 中恰好一个。同伦论研究的正是这类连续变形。用同伦论的术语来说，如果我们能将某个空间到另一个空间的两个函数中的第一个连续变形为第二个，就称它们“同伦”。换句话说，这两个函数属于同一个“同伦类”。说到术语，真正的拓扑学家从不说“连续函数”，而是说“映射”。因此，使用这个术语：只要知道一个从圆到自身的映射的绕数，我们就知道它的同伦类。

那么，如果我们转向高维，会发生什么？从 m 维球面到 k 维球面的映射的同伦类有哪些？球面是相当简单的空间，所以乍一看，人们可能会猜想，对于所有 m 和 k，这个问题都有一个简单的答案。

遗憾的是，事情远没有那么简单。事实上，对于所有的 m 和 k，没人知道答案！人们确实知道无数个特定 m 和 k值对应的答案。但其中没有简单的规律：相反，隐藏着极其复杂而优美的交织纹理，由微妙的规律构成，而我们至今仍未能彻底理解……或许永远也不能。

为了对此有些直观感受，我们先引入一些标准记号：人们用 $\pi_m(X)$表示从一个 m维球面到空间X的映射的同伦类集合。当 $m > 0$时，这个集合实际上是一个群，称为 X 的“第m同伦群”。这些群在代数拓扑中具有重要意义。

那么，我们讨论的是 $\pi_m(S^k)$：所有将一个 m 球面缠绕在一个 k 球面上的方式所对应的同伦类的集合。我之前已经隐约提到过这一点

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

其中 $\mathbb{Z}$ 表示整数，因为绕数是整数。维数再增加一维时，也会出现同样的情况：

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

换句话说：你可以将一个 2-球面（普通球面）绕自身缠绕任意整数 n 次。怎么做到呢？假设我们使用球坐标，用角度 φ （相对于北极）以及角度 θ （表示相对于格林尼治向东偏离多远）来描述球面上的一个点。那么这个映射

$$f(\varphi, \theta) = (\varphi, n\theta)$$

就能达到目的。从 S^2 到其自身的任何映射，都与其中恰好一个映射同伦。

同样的基本思路也适用于任意更高维的情形：

$$\pi_k(S^k) = \mathbb{Z} \quad \text{for any} \quad k \geqslant 1$$

换句话说，总存在一个整数 n，它起着从 k-球面到其自身的映射的“绕数”的作用——不过只有粗鄙的物理学家才称它为“绕数”；数学家称它为“度”。

到目前为止，一切顺利。那么，把一个球面映射到另一个维数更高的球面会怎样？这很简单：

$$\pi_m(S^k) = \{0\} \quad \text{whenever} \quad m < k$$

$\{0\}$ 只是表示仅含一个元素的集合的一种标准写法，我们称这个元素为“零”。所以我们的意思是，把一个球面映射到更高维球面的方法只有一个同伦类。总有足够的“空间”，可以将一个映射不断变形，直到它看起来与另一个映射相同。

那么，把一个球面映射到另一个维数更低的球面会怎样？麻烦就从这里开始了！——当然，若你对复杂性的态度不同，这也可能是乐趣所在。举例来说，从一个 2-球面到一个圆的映射只有一个同伦类：

$$\pi_2(S^1) = \{0\}$$

2-球面不可能以有趣的方式“卡”在圆的“洞”上。这看起来似乎显而易见。但事情并不像看上去那么显而易见，因为如果我们把维数提高一维，就会得到：

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$$

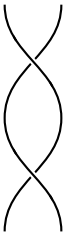
海因茨·霍普夫在20世纪30年代首次发现这一点时，人们大为震惊；在此之前，大家根本不知道同伦群竟如此诡秘！

有一种很漂亮的方法，可以计算一个称为“霍普夫不变量”的整数，它记录了从三维球面到2-球面的映射的同伦类。计算它有很多不错的方法，不过遗憾的是，我只能简要介绍其中一种！假设映射 $f\colon S^3 \to S^2$ 是光滑的（否则我们总可以把它光滑化）。那么， S^2 中的大多数点 p 都具有这样的性质：满足 $f(x) = p$ 的 S^3 中的点 x 构成一个“链环”：也就是 S^3 中的一组纽结。如果我们在 S^2 中取两个具有这一性质的不同点，就会得到两个链环。由这两个链环可以计算一个称为“链环数”的整数：例如，我们只需画出这两个链环，并计算其中一个从另一个上方或下方穿过的次数（每次交叉都按相应的正负号计数）。结果表明，这个数不取决于我们如何选取这两个点！此外，它只取决于 f的同伦类。这个数称为 f的霍普夫不变量。

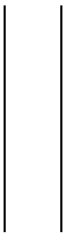
维数增加一维后，结果发现

$$\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2$$

这里 $\mathbb{Z}/2$ 是一个有两个元素的群，通常记作 0 和 1，加法按模 2 进行。从 S^4 到 S^3的映射为何只有两个同伦类？嗯，你可以像我们之前所做的那样，为这些映射计算类似霍普夫不变量的东西，但问题在于，四维中的链环很容易解链。你可以把类似于



的东西解链，并使其看起来像



因此，四维中的链环数只能定义为 模 2。于是，“霍普夫不变量”也只能定义为 模 2。

同样的情况也会发生在高维中，因此实际上我们有：

$$\pi_{k+1}(S^k) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{for any} \quad k \geqslant 3.$$

这说明了一个重要的普遍事实：当维度足够高时，事物就有更多周旋的空间；随着我们不断提高维数，同伦群会逐渐简化，并在一段时间后趋于稳定。这就是“稳定同伦论”背后的思想。

再来看一些例子。我们有

- $\pi_3(S^1) = \{0\}$
- $\pi_4(S^2) = \mathbb{Z}/2$
- $\pi_5(S^3) = \mathbb{Z}/2$
- $\pi_6(S^4) = \mathbb{Z}/2$

等等：

$$\pi_{k+2}(S^k) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{for any} \quad k \geqslant 2$$

遗憾的是，我不明白这为什么成立。怎样才能用有趣的方式把一个 4 维球面绕在一个 2-球面上？不知道。

（感谢 Dan Christensen，答案见本文末尾。）

我们继续勇往直前：

- $\pi_4(S^1) = \{0\}$
- $\pi_5(S^2) = \mathbb{Z}/2$
- $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12$
- $\pi_7(S^4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12$
- $\pi_8(S^5) = \mathbb{Z}/24$
- $\pi_9(S^6) = \mathbb{Z}/24$

等等：

$$\pi_{k+3}(S^k) = \mathbb{Z}/24 \quad \text{for any} \quad k \geqslant 5.$$

神奇数字24就在这里登场！上面的内容说明，如果 k 足够大，那么从一个（$k+3$）-球面到一个 k-球面恰好有24个不同的映射同伦类！

现在我该解释这与弦理论有什么关系了。不过首先，我还要多谈谈球面的同伦群。关于它们，有一些值得了解的简单规律。首先，

$$\pi_m(S^1) = \{0\} \quad \text{for any} \quad m \geqslant 2.$$

其次，随着我们提高维数，同伦群趋于稳定的时机有一个优美的公式：

$$\pi_{k+n}(S^k) \text{ is independent of } k \text{ as long as } k \geqslant n+2.$$

正如我们在 $n = 2$ 中看到的，同伦群可能更早稳定下来，但绝不会更晚，而且它们往往恰好在 $k = n + 2$ 时稳定下来。原因很简单。我们看到，$\pi_{k+1}(S^k)$ 在 $k = 3$ 时稳定下来，因为在四维或更高维空间中，链环很容易解开。类似地，$\pi_{k+n}(S^k)$ 最迟也会在 $k = n+2$ 时稳定下来，因为在 $2n + 2$ 维或更高维空间中，打结的 n 维曲面很容易解开！

如需进一步了解球面的稳定同伦群，请参阅：

2) Douglas C. Ravenel，《复配边与球面的稳定同伦群》，Academic Press，纽约，1986年。

Douglas C. Ravenel，稳定同伦论中的幂零性与周期性，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1992年。

Ravenel 也在这次会议上作了报告，他是球面的稳定同伦群方面真正的专家。遗憾的是，他的报告对我来说太高深了。上面第二本书对业余爱好者稍微友好一些，不过第一本书中有许多很好的球面的稳定同伦群表格。

球面的同伦群与高维纽结理论之间的关系十分奇妙。James Dolan 和我通过思考它，正在对 n-范畴学到很多东西。我在西北大学的会议上与他交谈时，发现 Andre Joyal 也曾对此进行过非常深入的思考。Joyal 因其将范畴论、组合学和拓扑学联系起来的工作而闻名，而他思考球面的同伦群的方式也反映了这些兴趣。他说了一句非常引人入胜的话；他说："实际上，我们应该把球谱称为'真正的整数'。"我想解释一下这句话.....但这里内容开始有些技术性了，而且我担心等我讲到弦理论的内容时，会变得更加技术性。

什么是"球谱"？简单来说，它大致就是球面的列表 S^0、 S^1、 S^2，.....，但"谱"这个词指的是所有这些空间彼此关联的方式，它们都是同一个宏大事物的各个方面。

可以用一种很好的方式来理解它。先从整数开始。通常我们把它们仅仅看作一个集合，或者更确切地说，看作一个群，因为我们可以对它们进行加法。但如果我们避免把同构误认为相等，就可以把它们看作一个范畴。

我已经在 "第99周"中关于牧羊人的寓言里开始解释这一点了。牧羊人从有限集范畴出发，并将其"去范畴化"，得到自然数集：为每个有限集关联一个自然数，即其元素的数量。对集合取不交并对应于加法，空集对应于零，依此类推。

好。那么，整数是对什么进行去范畴化得到的?

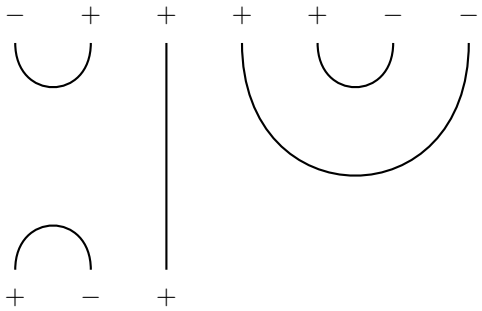
嗯，我们可以想象一个既有"正元素"又有"负元素"的有限集。这种集合的"元素个数"就是正元素的数量减去负元素的数量。如果我们说的是绵羊，这听起来有点古怪；但如果说的是正电子和电子，它们可以彼此湮灭，那或许就没那么奇怪了。（在"第92周"中，我会解释这里暗示的内容：反粒子与伴随之间的关系。）

拓扑学家更喜欢说"正向和负向定向点"。我们可以像这样画出一组正向和负向定向点：

$$-\quad +\quad +\quad +\quad +\quad -\quad -$$

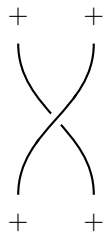
我们可以把它们并排放置来进行相加。但正向和负向定向点如何相互抵消呢？要记住，我们想要构造的是一个范畴！如果由正向和负向定向点组成的有限列表是我们的对象，那么态射是什么呢?

比如这样的缠结：

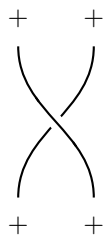


这样我们就能成对地消去或创造正点和负点。瞧！这就是范畴化整数！正如整数在加法下构成一个幺半群，这些对象构成一个幺半范畴（这些概念见“第89周”）。这里的幺半结构是不交并，我们可以用加号表示。同样，我们可以将空集写作 0。

上图看起来像是我在二维空间中画一条一维缠结。要理解范畴化整数的“交换性”，我们应该研究高维空间中的一维缠结。如果把它们放在三维空间中，就有空间来交换它们的位置：

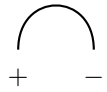


这就得到了交换性，正如我在“第100周”中解释的那样。严格来说，我们得到的是一个“辫”幺半范畴。不过，交换事物的位置有两种不同的方式；例如，除了上面那种方式，还有

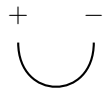


为了解决这个问题（如果你认为这是个问题），我们可以在四维空间中研究一维缠结，在那里可以将第一种切换方式变形为第二种。我们得到一个“对称”幺半范畴。在更高维度中进行研究不会改变任何事情：一切都已经稳定下来。

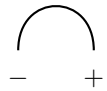
如果我们施加额外条件，要求这些态射



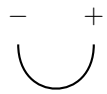
and



是逆元，正如



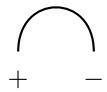
and



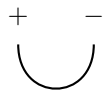
那么所有态射都变得可逆，因此我们拥有的不仅是一个幺半范畴，还是一个幺半群胚——群胚是一种所有态射都可逆的范畴（参见"第74周"）。事实上，不仅态射可逆，所有对象也都可逆！我的意思是，对每个对象 x，都存在一个对象 $-x$，使得 $x + -x$ 和 $-x + x$ 同构于 0。例如，如果 x 是正向定向点，$-x$ 是负向定向点，反之亦然。因此，我们拥有的不仅是一个幺半群胚，还是一个"群化群胚"。（我采用了 James Dolan 这个别致的术语。）

非常好。我们似乎避免了去范畴化之罪，不再把整数仅仅视为一个集合（或群，或交换群）。我们把它们视为一个范畴（或群化群胚，或辫式群式群胚，或对称群式群胚）。

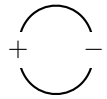
另一方面，说……有点奇怪



and



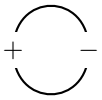
是逆元。这相当于说，态射：



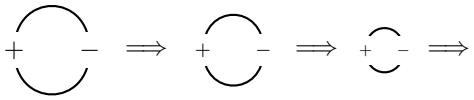
等于从 0 到 0 的恒等态射，它对应于空图 ：

嗯。它们看起来确实不相等。我们肯定哪里做错了。

我们哪里做错了？我们犯了去范畴化之罪：把同构当成方程！我们不该把整数仅仅看作一个范畴，而应该把它看作一个2-范畴！关于这个概念的精确定义，请参见 “第80周”；现在只需知道，2-范畴中有称为2-态射的东西，它们连接态射。如果我们把整数看作一个2-范畴，就可以说存在一个2-态射，从



到恒等态射。这个2-态射有一个很好的几何描述，可以用一个二维曲面来表示：当上图收缩为空图时，在三维空间中描绘出的曲面。它很难画，不过让我试试看：



好吧，假设我们这样做：把整数看作一个2-范畴。我们又面临一个问题：要不要让所有2-态射都可逆？如果这么做，我们得到一个“2-群胚”，或者更确切地说，一个“群型2-群胚”。但这么做同样等于犯下去范畴化之罪。为了避免这个错误，我们应该把整数看作一个3-范畴。等等等等！

你可能已经注意到，为了避免去范畴化这一罪过，我们的尝试正自动展开出越来越高维的拓扑学世界。这正是 n-范畴如此精妙之处。我还没有告诉你这一切究竟是如何运作的，但让我总结一下这里实际发生的事情。通常，我们把整数视为由一个生成元生成的自由群，或者由一个生成元生成的自由交换群。但群和交换群只是冰山一角！下面这幅图与“第74周”中的类似：

k-重群化 n-群胚

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$k=0$	sets	群胚	2-群胚
$k=1$	群	群式群胚	群化 2-群胚
$k=2$	交换 群	辫式群化 群胚	辫群化 2-群胚
$k=3$	“ ”	对称的 群化群胚	弱对合的 群化 2-群胚
$k=4$	“ ”	“ ”	强对合的 对合的 群化 2-群胚
$k=5$	“ ”	“ ”	“ ”

这些东西都是什么？嗯，一个 n-群胚是一个 n-范畴，其中所有态射都具有可逆性，至少在等价意义下如此。一个仅具有平凡 j-态射的（$k+n$）-群胚（ $j<k$ ）可以看作一种特殊的 n-群胚，我们称之为“k-重群化n-群胚”。

Joyal 的观点之一是，我们确实应该把整数看作“由一个对象自由生成的 k 重幺半 n-群胚”。这里的想法不是要一劳永逸地固定 n 和 k ——那只会妨碍我们理解随着 n 和 k 增大而显现的微妙之处！相反，我们应该把它们视为变量，或者考虑它们趋于无穷大时的极限。

他观点的另一部分是，在忽略所有维数高于 n 的同伦群时， n-群胚与拓扑空间中保留下来的信息——即所谓的“同伦 n-类型”——之间存在一种对应关系。利用这种对应，“一个对象上的自由 k-重幺半 n-群胚”对应于 k-球面的同伦（$k+n$）-类型。此外，如果我们不断增大 k，当 $k \geqslant n+2$ 时它就会稳定下来。实际上，正如上面图表中的同上符号所表明的那样， k-重幺半 n-群胚的概念对于 $k \geqslant n+2$ 会稳定下来，这是一个相当普遍的事实。

还有另一 p个要点是， p上面的图像阐 p明了高 gher-维纽结理论与球面的同伦群之间的关系，其方式非常生动而直接。

好。那么弦理论和神奇数字24又是怎么回事呢？注意，
pic上面的图形开始看起来有点像弦了！嗯.....

以下是我的理解。想必除了最坚韧的读者之外，大家现在都已经不再读这篇文章了，所以我就不再有所保留。弦世界面是一个黎曼曲面，因此我们需要一些关于黎曼曲面的知识，参见“第28周”。令$M(g,\ n)$为亏格为 g 且有 n 个穿孔的黎曼曲面模空间，并且

令 $G(g,\ n)$ 为相应的映射类群。由于 $M(g,\ n)$ 是 Teichm¨uller 空间对 $G(g,\ n)$ 取商所得，而 Teichm¨uller 空间是可缩的，因此我们有

$$M(g,n) = BG(g,n)$$

其中“$\mathcal{B}$”意为“分类空间”。存在一个自然的包含映射

$$G(g,n) \hookrightarrow G(g+1,n)$$

定义为将一个带两个穿孔的环面缝合到亏格为g、带有 n 个穿孔的曲面上，从而使亏格增加1。定义 $G(\infty,\ n)$为当 $g \to \infty$时的直接极限，并令

$$M(\infty,n) = BG(\infty,n).$$

现在，事实证明 $M(\infty,\ 1)$上有一种乘积结构。原因在于存在一些乘积

$$M(g,1) \times M(h,1) \to M(g+h,1)$$

它们由借助一个带三个穿孔的球面将两个曲面缝合在一起而给出。利用这个乘积，我们可以定义群完备化

$$M(\infty,1)^+$$

而Tillmann提出的结果让我兴奋不已：

$$\pi_3(M(\infty,1)^+) = \mathbb{Z}/24 \oplus H$$

对于某个未知群 H。既然这实际上是一个关于曲面映射类群的结果，它一定 与共形场论总是给这些映射类群的射影表示有关，其中的“相位歧义”形式为 $\exp(2\pi ci/24)$，而 c 是“中心荷”。不是吗？我就是不太明白为什么。也许有人能给我解释一下。

无论如何，她证明这一结果的方式，无疑与球面的稳定同伦群有关。她使用了球面的第三稳定同伦群之间的显式映射

$$\pi_{k+3}(S^k) = \mathbb{Z}/24 \quad \text{for} \quad k \geqslant 5$$

以及 $\pi_3(M(\infty,\ 1)^+)$！而她构造从后者到前者的映射时，实际上用到的正是我上面画的那些图。更准确地说，在

3）《高维代数与拓扑量子场论》，作者：John Baez 和 James Dolan，《数学物理杂志》**36**（1995年），6073–6105。另见q-alg/9503002。

我们认为，嵌入在（$n+k$）维空间中的带框架 n 维曲面，应该由在一个对象上带对偶的自由 k重幺半 n范畴来描述。按照“自由性”的通常套路，这应该映射到一个对象上的自由 k 重群化 n 群胚。取足够大的 $n = 3$ 和 k，我们应该能得到一个从任意黎曼曲面的映射类群到球面的第三稳定同伦群的同态！想必其中的想法是，当亏格趋于无穷时，这个同态是满射！

当然，Tillmann 并没有使用尚处于萌芽阶段的 n 范畴形式体系来证明她的结果，但我认为最终这是可以做到的。（另外，我粗略的论证适用于没有穿孔的黎曼曲面，而她考虑的是有一个穿孔的情形，不过她说的一些话让我觉得这或许不是什么大问题。）真正的谜题是：什么

$$\pi_3(M(\infty, n)^+)$$

与有限 g的 $G(g,\ n)$的中心扩张有关吗？如果我能弄明白这件事，就会非常高兴。

补记： Dan Christensen 回答了上面的谜题。下面介绍如何得到一个非平凡元素

$$\pi_4(S^2).$$

取映射 $f\colon S^3 \to S^2$，它生成

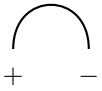
$$\pi_3(S^2)$$

并将它与映射 $g\colon S^4 \to S^3$ 复合，它生成

$$\pi_4(S^3)$$

（顺便说一句，它是由 f 通过“悬挂”得到的），从而得到所需的映射：从S^4 到 S^2。这是一个非常普遍的技巧：复合球面的同伦群中的元素，从而得到新的元素！

> 想想 1 和 −1。它们加在一起等于零，什么也没有，空无一物，对吧？想象它们合在一起，再想象它们分开，彼此剥离……现在你有了某种东西，有了两个东西，而先前那里什么也没有。
>
> ——约翰·厄普代克，《罗杰的版本》



第103周

1997年4月26日

从西北大学的同伦论会议转而谈到紧接着举行的高维代数与物理学会议，正好可以提一下 RonnieBrown 的网页：

1) Ronald Brown，《高维群论》，
https://web.archive.org/web/19970629093438/http://www.bangor.ac.uk/~mas010/hdaweb2.htm

Brown 是“高维代数”这一说法的创造者，多年来他一直在发展这一学科，主要将其作为研究同伦论的工具。两年前，我在“第53周”中简要介绍过他的想法。从那以后，高维代数领域发生了很多变化，上面的网页是了解其概况的好地方，其中还收录了一份不错的相关参考书目。

高阶范畴论与物理学研讨会令人振奋，因为它汇集了许多从事这两个领域交叉研究的人，其中许多人此前从未见过面。研讨会由 Ezra Getzler 和 Mikhail Kapranov 组织。Getzler 最为人熟知的，或许是他对阿蒂亚–辛格指标定理的证明。这条精彩的定理自20世纪60年代起，多年来一直令数学物理学家着迷。原因在于，它将流形的拓扑学与这些流形上的偏微分方程的解联系起来，从而开启了拓扑学应用于物理学的新纪元。20世纪80年代，Getzler 运用 Witten 提出的思想，为阿蒂亚–辛格定理找到了一个漂亮的“超对称证明”。后来，Getzler 转而研究其他课题，例如运用“拟运算子”（见“第42周”）研究共形场论（它自然地出现在弦理论中）。Kapranov 也在拟运算子、共形场论及许多其他领域做了大量工作，不过我最初是通过他与 Voevodsky 合写的关于“带状幺半2-范畴”的论文了解到他的（见“第4周”）。这让我十分兴奋，因为它使我开始关注 n-范畴论的许多主要主题。

遗憾的是，我对这场精彩会议的介绍将会极其简短而枯燥，因为我将在 3 小时后飞往华沙，参加一场量子引力研讨会。我只提及几篇涵盖了本次会议部分主题的论文。Ross Street 就 Batanin 对弱 n-范畴（甚至弱 ω-范畴）的定义作了两场报告，这一定义可以如下得到：

3) Ross Street，《Michael Batanin 的幺半群球面范畴所发挥的作用》，载于《高阶范畴论》，E. Getzler 和 M. Kapranov 编，《当代数学》230，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1998年，第 99–116 页。

随后，Batanin 又撰写了一篇更为详尽的论文，阐述他的定义：

4) Michael Batanin，《作为弱 n-范畴理论自然环境的幺半群球面范畴》，《Adv. Math》136（1998年），39–103。

我做了一场报告，介绍我和 Dolan 对弱 n-范畴的定义，该定义可以通过以下方式得到：fo如下：

5）John Baez，《n-范畴导论》，载于第七届范畴论与计算机科学会议，Eugenio Moggi 和 Giuseppe Rosolini 编，《计算机科学讲义》**1290**，施普林格，柏林，1997年。另见 q-alg/9705009。

遗憾的是，Tamsamani 没有到场介绍他对弱 n-范畴的定义，但至少我已经知道如何通过电子方式获取他的论文：

6) Zouhair Tamsamani，《关于通过多重单纯集合定义非严格的 ∞-范畴和 ∞-群胚》。另可见 alg-geom/9512006。Zouhair Tamsamani，《n-群胚的同伦理论与 n-截断拓扑空间的同伦理论之间的等价》。另可见 alg-geom/9607010。

此外，Carlos Simpson 运用 Tamsamani 的定义写了一篇有趣的论文：

7) Carlos Simpson，《n-范畴、内部 Hom、 n-代数栈及广义 Seifert–Van Kampen 定理的闭模型结构》。另可见 alg-geom/9704006。

另一方面，在一个相关但不同的方向上，Masahico Saito 谈到了一篇他与 Scott Carter 和 Joachim Rieger 合写的论文；他们在文中提出了一种简洁、纯组合性的描述，涵盖了将二维曲面嵌入四维空间的所有方式：

8) J.ScottCarter、Joachim H. Rieger 和 Masahico Saito，《纽结曲面及其同痕的组合描述》，《*Adv. Math.*》**127**（1997年），1–51。

我的学生 Laurel Langford 将他们的工作翻译成了 n-范畴论，并证明“无框无向二维缠结构成了由一个无框自对偶对象生成的自由编织幺半2-范畴”：

9) John Baez 和 Laurel Langford，《二维缠结》，《数学物理通讯》**43** （1998年），187– 197。（有许多排印错误。）也可从 q-alg/9703033 获取。

这篇论文总结了相关结果；证明将在以后发表。

我在那里时，Carter 还给了我一篇他与 Saito 和 Louis Kauffman 合作完成的非常精彩的论文。这篇论文讨论了四维流形以及三维空间中的二维曲面，并再次得到了纯粹的组合描述，真是迫不及待地想将其翻译成 n-范畴论：

10) J. Scott Carter、Louis H. Kauffman 和 Masahico Saito，《图示法、奇异性及其代数解释》，载于第十届巴西拓扑学会议（圣卡洛斯，1996年），《当代数学》第13卷，1997年。草稿版本见https://citeseerx.ist.psu.edu/pdf/c1ea0a98e7d5a6bd9ad18a695da412ad5823d610

很抱歉没能更详细地介绍这些论文，但我最近忙得焦头烂额。（事实上，我正琢磨着怎样调整生活，给自己多留些空闲时间。我想关键是要更常说“不”。）

感谢 Justin Roberts 指出了《第102周》中的一个错误。共形场论中的相位模糊性不一定是24次单位根；它是$\exp(2\pi ic/24)$，其中 c 是相关 Virasoro 表示的中心荷。这对我的谜题来说是一个重要线索。

此外，我还要感谢 Dan Christensen 帮助我更简单地理解 $\pi_4(S^2)$，也感谢 Scott Carter 写来一封精彩的信，探讨了“第102周”的主题。遗憾的是，我一直太忙，没能好好回复这些友善的邮件！

我得走了……

第104周

1997年6月8日

几个月前，我飞去了俄勒冈州科瓦利斯，参加美国数学学会的一场会议。如果你不熟悉美国数学学会，它的英文简称是 AMS。他们会举办许多地区性会议，并设有各种主题的专题讨论会。我去参加这场会议的原因之一，是会上有一个由 Tevian Dray 和 Corinne Manogue 组织的八元数专题讨论会。

实数之后是复数，复数之后是四元数，四元数之后是八元数——八元数是其中最神秘的。实数、复数和四元数在物理学中有许多应用。那么八元数呢？它们难道也没有什么用处吗？这个问题已经困扰我有一阵子了。

事实上，这个问题困扰我至深，于是我决定前往科瓦利斯寻找线索。毕竟，除了 Tevian Dray 和 Corinne Manogue——前者是数学家，后者是物理学家，两人都对八元数深感兴趣——那里还会有一群其他八元数专家。其中一位是我的朋友 Geoffrey Dixon。我在“第59周”中向你介绍过他。他写过一本关于复数、四元数和八元数及其在物理学中所扮演角色的书。他提出了一种物理学理论，认为它们分别与电磁学、弱力和强力相关。这理论有点离经叛道，但绝非荒谬！事实上，它非常引人入胜。

写完关于他的书的文章后，我联系了住在马萨诸塞州剑桥的他。我发现，除了八元数之外，他在生活中另一个主要兴趣是游戏《Myst》。这大概并非巧合。两者的核心问题都是：“这里到底发生了什么？”他已经完全摸透了《Myst》，但很喜欢看别人玩，于是让我玩了一会儿。总有一天，我会买一台 CD-ROM 光驱，在这款游戏上消磨几个星期。总之，我在1995年夏季就认识他了，所以能在科瓦利斯再次见到他，真是令人高兴。

另一位八元数专家是 Tony Smith。他也提出了一套天马行空却引人入胜的物理学理论，其中涉及八元数！我曾在 “第91周”中写过他的研究成果。科瓦利斯会议之前我从未见过他，但初次见面时我立刻就认出了他，因为他的主页上有一张他戴着牛仔帽的照片。后来我才知道，他总是戴着那顶帽子。他是八元数及其他有趣事物方面的知识宝库。他为人也非常友善随和。他住在佐治亚州亚特兰大。

我还遇到了一位此前不认识的八元数专家，来自约克的 Tony Sudbery。（是原来的约克，不是那个“新”约克。）他做了一场题为《证明规则的例外》的演讲。八元数与许多其他数学结构之间存在着一种十分诡异的联系。在各种不同的背景下，你都可以对代数结构进行分类，从而得到一份优美而系统的无穷列表，以及有限个例外。诡异之处在于，一个背景中的例外，竟然会与另一个背景中的例外产生联系。这些联系本身既复杂又神秘。仿佛水面之下有一只手，而我们所能看到的，只有它的手指不时从这里、那里探出来。似乎有一种“例外的统一理论”正等待着被发现，而八元数一定与它有关。我觉得，要真正

理解八元数有什么用，我们就需要理解这种“例外的统一理论”。

让我们先来回顾一下八元数是什么！
我想你知道实数。复数是这样的数：

$$a + bi$$

其中 a 和 b都是实数。我们可以按照以下规则将它们相乘：

$$i^2 = -1$$

初次接触时，它们可能显得神秘莫测；但当你发现它们只是以一种巧妙的方式来跟踪平面上的旋转时，它们的神秘感便会消失。

类似地，四元数就是这样的东西：

$$a + bi + cj + dk$$

我们可以按照以下规则进行乘法

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

and

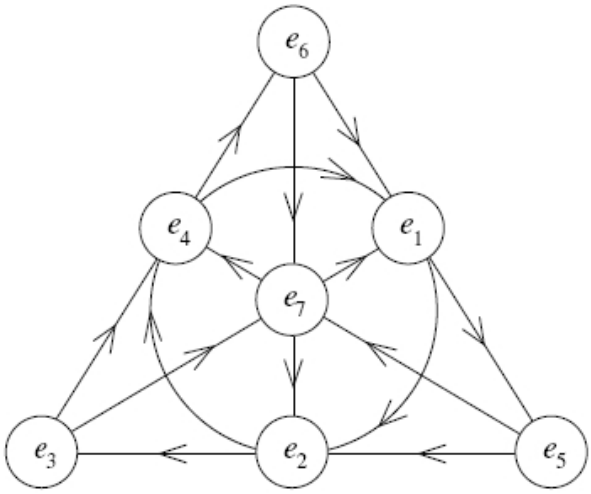
$$ij = k, jk = i, ki = j,$$
$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

它们不满足交换律，但仍然满足结合律。起初它们或许显得神秘莫测，但当你发现它们不过是一种巧妙的记法，用来追踪三维和四维旋转时，神秘感便会消失。高于二维的旋转通常不满足交换律，所以四元数最好也不满足交换律。事实上，哈密顿发明四元数并非为了研究旋转——他的目标只是构造一种“除法代数”，使你能除以任何非零元素（参见“第82周”）。不过，发现四元数后，他便用它们来研究旋转和角动量。如今，人们往往转而使用向量叉积，它是后来由 Gibbs 发明的。原因在于，19世纪末，四元数拥护者与向量拥护者之间爆发了一场激烈论战，而四元数派败下阵来。想进一步了解这段历史，请看：

1) Michael J. Crowe，《向量分析史》，Dover，Mineola，2011。

八元数是 Cayley 在 19 世纪后期发明的。对于八元数，我们从以下内容开始：七个 -1 的平方根，比如说从 e_1 到 e_7。要了解如何将它们相乘，请画出以下图形

图表：



画一个三角形，从每个顶点向对边的中点画一条直线，并在三角形内切一个圆。用 e_1 到 e_7 给图中的7个点标记——怎么标都行，我只是按自己喜欢的方式画了出来。在三角形的边上画箭头，方向沿顺时针；圆上也画顺时针方向的箭头；再在三条直线上画箭头，方向从三角形的每个顶点指向对边的中点。来吧，动手画！我都替你做了这么多了.....你也该做点什么。

好了。现在你就有了自己的八元数乘法表。注意，图中有六条直线和一个圆。它们各自都给出了八元数中四元数的一份拷贝。例如，假设你想计算 e_6 和 e_7的乘积。你会注意到，沿着箭头往下看，竖直的直线上写着“e_6, e_7, e_2”。因此，就像在四元数中处理 i, j和 k 一样，我们有

$$e_6e_7 = e_2, e_7e_2 = e_6, e_2e_6 = e_7$$
$$e_7e_6 = -e_2, e_2e_7 = -e_6, e_6e_2 = -e_7$$

因此，我们特别有 $e_6e_7 = e_2$。

如果你把八元数表弄丢了，也不用担心：你其实不必记住那 7 个 -1 平方根的名称及其在图表上的位置。你只需记住图表本身的几何结构。名称是任意的，并不重要，除非你是在和别人交谈；这种情况下，你们得先约定好名称。

想看看炫酷高科技的八元数乘法表，可以访问以下网站：

2) Tony Smith, https://web.archive.org/web/19990203054838/http://galaxy.cau.edu/tsmith/TShome.html3) Geoffrey Dixon, http://www.7stones.com

八元数有什么了不起？它们不满足交换律，更糟的是，甚至不满足结合律。它们的妙处在于构成了一个除法代数，这意味着可以除以任意非零八元数。更棒的是，它们构成了一个“赋范”除法代数。与实数、复数和四元数一样，我们可以定义八元数的范数

$$x = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7$$

成为

$$|x| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2}.$$

它们之所以被称为“赋范除法代数”，是因为

$$|xy| = |x||y|.$$

实数、复数、四元数和八元数是仅有的赋范除法代数，这是一个关于世界的奇妙事实。就是这样！

然而，至少对我来说，八元数仍然很神秘。它们与7维和8维中的旋转有关，但并不像人们希望的那样简单。毕竟，任意维数中的旋转仍然是结合的。这种非结合性究竟从何而来？我实在不知道。这个问题着实让我困扰。

前阵子，在“第95周”，我总结了 John Schwarz 关于超对称杨–米尔斯理论及其为何在3、4、6和10维中效果最佳的一篇论文。基本上，只有在这些维度中，才能构造出自旋$1/2$粒子，使其物理自由度与无质量自旋1 粒子一样多。我大致解释了原因。这样一来，费米子和规范玻色子之间便具有了对称性。我没有解释这种对称性是如何实现的……在我看来，这似乎相当棘手……不过无论如何，它确实成立。

到目前为止，一切顺利。但 Schwarz 不禁思索：数字 3、4、6 和 10 恰好比 1、2、4 和 8 多 2，是否只是巧合？后面这些数字分别是实数、复数、四元数和八元数的维数。

显然不是！以下论文解释了其中的缘由：

4) Corinne A. Manogue 和 Joerg Schray，《有限洛伦兹变换、自同构与除法代数》，《数学物理杂志》**34**（1993年），3746–3767。Corinne A. Manogue 和 Joerg Schray，《克利福德代数的八元数表示与三重性》，可见于 hep-th/9407179。5) Anthony Sudbery，《除法代数、（伪）正交群与旋量》，《物理学杂志*A*辑》**17**（1984年），939–955。Anthony Sudbery，《七种不协调》，手写笔记。

基本思路如下。设

- $\mathbb{R}$ 为实数
- $\mathbb{C}$ 为复数
- $\mathbb{H}$为四元数
- $\mathbb{O}$是八元数。

令 SO(n,1) 表示 $n+1$ 维洛伦兹群。粗略地说，它是 $(n+1)$维闵可夫斯基时空的对称群。令 $\mathfrak{so}(n,1)$ 为相应的李代数（关于李代数的简明介绍，请参见 "第63周" ）。那么结果是：

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(2,1)$
- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(3,1)$
- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{H}) = \mathfrak{so}(5,1)$
- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{O}) = \mathfrak{so}(9,1)$

这将实数、复数、四元数和八元数与3、4、6和10维中的洛伦兹群联系起来，并解释了Schwarz注意到的那个"巧合"！不过这需要一些解释。粗略地说，若SL(2，$\mathbb{K}$)是由行列式为1且元素属于除法代数 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{H}$，$\mathbb{O}$的 2×2 矩阵构成的群，那么$\mathfrak{sl}$(2，$\mathbb{K}$)就定义为这个群的李代数。这对 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$来说足够简单。然而，定义四元数矩阵的行列式时必须小心，因为四元数不满足交换律。在八元数的情形下则需要更加谨慎。由于八元数甚至不满足结合律，群SL(2，$\mathbb{O}$)究竟是什么远非显而易见，因此定义李代数"$\mathfrak{sl}$(2，$\mathbb{O}$)"需要相当巧妙的处理。详情请阅读相关论文。

正如 Corinne Manogue 向我解释的那样，八元数与10维中的洛伦兹变换之间的这种关系，提示了在10维物理学中运用八元数的一些有趣方式。众所周知，第10维是弦论学家生活的地方。这也与 Geoffrey Dixon 的理论有着很好的关联。该理论将电磁力与复数联系起来，将弱力与四元数联系起来，将强力与八元数联系起来。怎么联系？电磁学的规范群是 U(1)，即单位复数。弱力的规范群是 SU(2)，即单位四元数。强力的规范群是 SU(3).....

遗憾的是，群 SU(3)并非单位八元数。单位八元数并不构成一个群，因为它们不满足结合律。SU(3) 与八元数的关联更为间接。八元数的对称群（严格来说是"自同构群"）是例外群 G_2, ，其中包含 SU(3)。要得到 SU(3)，我们可以取 G_2 中保持某个给定单位纯虚八元数不变的子群.....比如 e_1。这就是 Dixon 将 SU(3) 与八元数联系起来的方式。

不过，为什么一个单位纯虚八元数就应该与其他的不同呢？想必是某种"对称性破缺"？这似乎有点牵强。不过，正如 Manogue 所解释的，有个巧妙的方法可以一举两得。如果我们选定一个特定的单位纯虚八元数，就能在八元数中得到一份复数的副本，于是便能在 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{O})$ 中得到一份 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的副本，进而在 $\mathfrak{so}(9,1)$ 中得到一份 $\mathfrak{so}(3,1)$ 的副本！换句话说，我们在十维洛伦兹群中得到了一个特定的、熟悉的四维洛伦兹群副本。因此，固定一个单位纯虚八元数，不仅会将八元数对称群 G_2 down 降至强相互作用对称群 SU(3)，还可能使我们从十维物理学回到四维物理学。

很酷吧？显然，要把这变成一个
fu成熟的理论，而且它们可能行不通。整个想法或许完全

是错误的！但从事物理学需要勇气，因此 Tevian Dray 和 Corinne Manogue 勇敢地探索这个想法，实在令人欣慰。

得知 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$、 $\mathbb{O}$ 与维数为 3、4、6、10 的洛伦兹群之间存在深刻关系后，人们自然会更有信心认真看待其他一些“巧合”。例如，在《第82周》中，我介绍了克利福德代数 C_n——也就是由 n 的反对易平方根生成的代数 -1。这些克利福德代数与 n 维欧几里得几何有关，而这有别于与 n维洛伦兹几何有关的克利福德代数；后者曾在《第93周》中出现。它们如下所示：

- $C_0 = \mathbb{R}$
- $C_1 = \mathbb{C}$
- $C_2 = \mathbb{H}$
- $C_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
- $C_4 = \mathbb{H}(2)$
- $C_5 = \mathbb{C}(4)$
- $C_6 = \mathbb{R}(8)$
- $C_7 = \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$
- $C_8 = \mathbb{R}(16)$

其中， $\mathbb{K}(n)$表示元素取自 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$的 $n \times n$ 矩阵，而“$\oplus$”表示“直和”。注意，C_8 与元素取自 C_0的 16×16 矩阵相同。这是称为“博特周期性”的一般模式的一部分：一般来说， C_{n+8} 与元素取自 C_n的 16×16 矩阵相同。

现在考虑 C_n的最小实表示的维数。只要记住， $\mathbb{K}(n)$或 $\mathbb{K}(n) \oplus \mathbb{K}(n)$的最小表示作用在 $\mathbb{K}^n$ 上——这个向量空间由 $\mathbb{K}$中元素组成的 n元组构成——就很容易算出这一点。我们得到

最小实表示的维数：

C_0 的• 为1

C_1 的• 为2

• （共 C_2 个）为 4
• （共 C_3 个）为 4
• （共 C_4 个）为 8
• （共 C_5 个）为 8
• （共 C_6 个）为 8
• 的 C_7 是 8

- 的 C_8 是 16

注意，它以 $n = 1$、2、4、8的速度递增。这些分别是 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$和 $\mathbb{O}$. 巧合吗?

不！事实上，当且仅当该向量空间 S^{k-1}中的单位球面存在 n 个线性无关的光滑向量场时， C_n 才在一个 k维实向量空间上有一个表示。因此，上表说明:

- 球面 S^0 上不存在任何线性无关的向量场。
- 球面 S^1 上存在一个线性无关的向量场。
- 球面 S^3 存在 3 个线性无关的向量场。
- 球面 S^7 存在 7 个线性无关的向量场。

这些球面分别是单位实数、单位复数、单位四元数和单位八元数！如果你了解赋范除法代数，就会明白这些球面显然拥有可能的最多数量的线性无关向量场：只需取某一点处的一组向量基，再将其"左平移"，就能得到一批线性无关的向量场。

现在——博特周期性的周期是 8，而八元数的维数也是 8。正如我们所见，这两者都与克利福德代数有很大关系。所以，八元数与博特周期性之间或许存在深层关系。这可能是真的吗？如果是，那可是个好消息，因为八元数常被视为古怪的例外，而博特周期性却是举足轻重、广受认可的主流成果！

而事实上它确实如此。接下来将进一步介绍博特周期性和八元数
Week.

补充说明： Robert Helling 对超对称规范理论和除法代数又提出了一些有趣的评论，现引述如下。他推荐了以下参考文献:

6) J. M. Evans, 《超对称杨–米尔斯理论和除法代数》, *Nucl.Phys.* **B298** （1988年）, 92–108。

他写道:

> 让我补充一则技术性说明，摘自 *Green*、*Schwarz* 和 *Witten* 的第*1*卷附录*4A*。
>
> 维度 *3*、*4*、*6* 和 *10* 的出现，最容易从尝试在任意维度写出超对称规范理论时看出来。也就是说，我们要设法将一些旋量加入纯规范理论的拉格朗日量中:
>
> $$-\frac{1}{4}F^2$$

使得新的拉格朗日量在某些无穷小变换下保持不变（至多相差一个全导数）。如果这些变换的交换子是一个导数（即一个时空平移的生成元），那么它们描述的就是超对称。和往常一样，我们用参数 ε 来表示这种变换，但现在 ε 是一个旋量。

我们从毕生都在从事这项工作的人那里得知，以下试探形式很常见：

$$\delta A_m = \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\Gamma_m\psi$$

$$\delta\psi = -\frac{1}{4}F_{mn}\Gamma^{mn}\varepsilon$$

这里，A 是联络，F 是它的场强，ψ 是一个类型待定的旋量。我省略了这些场的所有群指标。它们都处于伴随表示中。Γ 是克利福德代数的生成元，该代数如 *John Baez* 之前所述。

对于拉格朗日量，我们采用常见的杨–米尔斯项，并为费米子添加一个最小耦合的动能项：

$$-\frac{1}{4}F^2 + \frac{ig}{2}\psi^\dagger\Gamma^m D_m\psi$$

这里，D_m 是规范协变导数，g 是一个可以调节的数，使得它在上述变换下消失。对第一项作变分时，我们得到 $g = 1$。事实上，无须考虑某个特殊维数，所有项都会相消；唯一例外是一个关于 ψ 的三线性项，它来自费米子项中协变导数里的联络变分。其形式大致如下：

$$f_{abc}\bar{\varepsilon}\Gamma_m\psi^a\psi^b\Gamma^m\psi^c$$

这里我写出了群指标和结构常数 f_{abc}。由于没有其他可用的费米子三线性项，它必须基于其他原因而消失。确实，明确写出 f 的反对称性，并将旋量提取出来后，因为它应对 ψ 和 ε的所有取值都为零，我们便只剩下一个完全由伽马矩阵构成的表达式。事实上，依据费尔茨恒等式，该表达式在*3*、*4*、*6*和*10*维中恰好为零。（抱歉，我没有时间更详细地推导。）

这与除法代数的关系如下（正如 *John Baez* 指出的论文中所解释的）：具体来说，取 $d = 10$。这里我们通过使用坐标转到光锥系

$$x^+ = x^0 + x^9 \quad \textit{and} \quad x^- = x^0 - x^1.$$

然后我们将 Γ_m 写成分块矩阵，其中 Γ_+ 和 Γ_- 的 $+/-$ 单位矩阵作为分块，其余的则以 γ_i 为分块，其中 γ_i 是SO(8) 狄拉克矩阵（$i = 1, \ldots\ldots, 9$）。不过，它们与八元数有着密切的联系。请记住，SO(8) 中存在三重性，这意味着我们可以平等地看待左手旋量、右手旋量和向量（见“第*61*周”、“第*90*周”，

"第91周"）。现在我把 γ_i的三个指标都写出来。由于三重性，我可以用i、j、k分别表示旋量、带点旋量和向量指标。接下来已知

$$\gamma_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk} & \textit{for } i,j,k < 8\textit{;} \\ \delta_{ij} & \textit{for } k = 8 \textit{ (and } ijk \textit{ permuted);} \\ 0 & \textit{for more than two of } ijk \textit{ equal to } 8\textit{.} \end{cases}$$

是 Cliff(8) 的一个表示，其中 c_{ijk} 是八元数的结构常数（即 $e_i e_j = c_{ijk} e_k$ 对应八元数中 -1 的7个根）。

将 Γ 的这个表示代入上文提到的 γ 表达式后，你会发现，由于结合子的反对称性，该表达式为零。

$$[a,b,c] = a(bc) - (ab)c$$

在除法代数中。这是我对超对称性与除法代数之间关系的理解。

Robert

第105周

1997年6月21日

数学中有些令人匪夷所思的事实，你就算想上几百万年也猜不到.....只有当有人仔细推导出来后，它们才会变得明了。其中一个叫作“博特周期性”。

0维流形相当乏味：不过是一堆点。1维流形也没有多大变化：唯一的可能性就是圆和直线，以及通过取一堆圆和直线的并集得到的东西。2维流形更有趣一些，但仍然相当良性：有带 n 个孔的环面、射影平面、克莱因瓶、在这些基础上增加额外把手的变体；如果允许流形无限延伸，还会有一些相关的对象，比如平面，或添加了一堆把手的平面（可能有无穷多个！），等等.....所有这些对象都可以分类。3维流形要复杂得多：没人知道如何对它们进行分类。4维流形则<stye id='1'>复杂得多：你可以<stye id='3'>证明，对它们进行分类是<stye id='5'>不可能的——这称为马尔可夫定理。

现在，你可能想不到，当维数升到 5 左右时，很多事情开始变得更简单了。当然不是所有事情，只是其中一些。你仍然无法对这些高维流形进行分类，但如果做出一系列简化假设，在某种意义上你又可以做到——而且这种方法在较低维度中行不通。很奇怪，对吧？不过那是另一个故事了。博特周期性则有所不同。它表明，当维度达到 8 时，很多事情会与 0 维时非常相似！而当维数达到 9 时，很多事情又会与 1 维时非常相似。依此类推——随着你沿着维度阶梯向上攀登，大量事物会以 8 为周期不断重复。

（实际上，我有一个古怪的理论：拓扑学之所以在 4 维达到某种复杂性高峰，或许部分原因在于数字 4 正好位于 0 和 8 的中间，而拓扑学在 0 维时最为简单。也许这甚至就是物理学偏爱处于四维的原因！不过这又是另一段疯狂的离题发挥，我就先克制一下自己，不在这里展开了。）

博特周期性有许多种表现形式，我已经在“第104周”中介绍过一种。让我们从实数开始，然后加入 n 的平方根 -1，比如 e_1，.....，e_n。让我们让它们“反交换”，于是

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

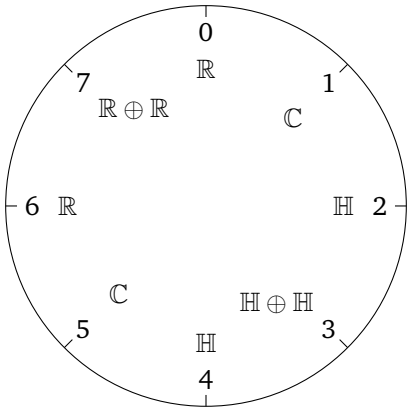
当 i 与 j不同时。我们称所得之物为“克利福德代数” C_n。例如，当 $n = 1$ 时，我们得到复数，记作 C。当 $n = 2$ 时，我们得到四元数，记作 H，以纪念 Hamilton。当 $n = 3$ 时，我们得到.....八元数？？不，不是八元数，因为我们总是要求乘法满足结合律！我们得到由四元数的数对构成的代数！我们称它为 $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$。当 $n = 4$ 时，我们得到由 2×2 个四元数矩阵构成的代数！我们称它为 $\mathbb{H}(2)$。如此继续下去：

- $C_0 = \mathbb{R}$
- $C_1 = \mathbb{C}$
- $C_2 = \mathbb{H}$

- $C_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
- $C_4 = \mathbb{H}(2)$
- $C_5 = \mathbb{C}(4)$
- $C_6 = \mathbb{R}(8)$
- $C_7 = \mathbb{R}(8) \ \oplus \mathbb{R}(8)$
- $C_8 = \mathbb{R}(16)$

请注意，到了 $n = 8$ 时，我们手头的就只有实数矩阵了。而后续也是如此： C_{n+8} 就是由 C_n中的元素构成的 16×16 矩阵！这就是最简单形式的博特周期性。

其实我现在就在维也纳的薛定谔研究所，另一位来访者是 Andrzej Trautman。前几天他做了一场题为“物理学中的复结构”的报告，其中提到了一个记住上表的好方法。想象一天只有 8 小时，然后画一个有 8 个小时刻度的时钟，再像这样标注：



这里的想法是，随着空间维数增加，你会沿着时钟走一圈。这个时钟有个妙处：它关于从 3 点到 7 点的轴具有反射对称性。要使用这个时钟，你需要知道，克利福德代数的维数每增加一个维度就会翻倍。由此你可以推断，例如，四维中的克利福德代数实际上不是 $\mathbb{H}$，而是 $\mathbb{H}(2)$，因为后者的维数是 $16 = 2^4$。

现在，让我们彻底换个话题，来聊聊无限维空间中的旋转！无限维空间中的旋转是什么样的呢？我们从基础开始，一步步向上探讨吧。在零维空间中，实际上无法旋转。在一维空间中，实际上也无法旋转，只能对事物进行反射.....不过，我们会把反射也算作旋转，并把乘以 1 或 -1 的运算称为一维空间中的“旋转”。在二维空间中，我们用 2×2 矩阵来描述旋转，比如

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

而且，既然我们慷慨地把反射也算进来，类似这样的矩阵也包括在内

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

这些矩阵的列都是正交归一向量。在三维空间中，我们用列向量正交归一的 3×3 矩阵来描述旋转，依此类推。在n维空间中，我们把列向量正交的 $n \times n$ 矩阵的集合称为“正交群”O(n)。

注意，我们可以把二维中的旋转看作

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

三维中的旋转，只要像这样再添一行一列：

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这只是绕z轴的旋转。用同样的方法，我们可以把 n 维中的任意旋转看作 $n+1$ 维中的旋转。因此，我们可以把O(0)看作包含在O(1)中，后者又包含在O(2)中，依此类推，直到O(3)、O(4)等等！我们来这么做吧。然后把所有这些集合并集 起来，就得到.....O(∞)！这是无限维空间中的旋转群以及反射群。

（现在，如果你学过数学，或者读过“第82周”，你就会发现我其实并没有真正换话题，因为克利福德代数 C_n 实际上只是研究 n维空间中旋转的一种方便工具。不过，这不重要。）

现在，O(∞) 是一个非常大的群，但它优雅地概括了所有维度中旋转的大量信息，因此拓扑学家研究它也就不足为奇了。拓扑学家研究一个空间时会做的一件事，就是求出它的“同伦群”。如果给他们一个空间 X，并在这个空间中选取一个点 x，他们就会找出将一个 n维球面嵌入这个空间的所有拓扑上不同的方式，同时要求球面的北极位于 x。这就是他们的工作。我们把所有这类方式组成的集合称为同伦群 $\pi_n(X)$。若想了解更精确的描述，可以看看“第102周”——不过目前这样理解就够了。

那么，O(∞) 的同伦群是什么？它们最初的排列如下：

n	π_n(八元数(∞))
0	$\mathbb{Z}/2$
1	$\mathbb{Z}/2$
2	0
3	$\mathbb{Z}$
4	0
5	0
6	0
7	$\mathbb{Z}$

之后，它们便以模 8 的周期重复。博特周期性再次显现！

但它们究竟是什么意思呢?

幸运的是，Jim Dolan 对此思考了很多。我们经常在喜欢待着的那家小咖啡馆里反复讨论这个问题，最后想出了下面这个故事。其中大部分内容各种各样的人已经知道了，但对我们来说，它多少算是一种启示。

表格中的第零项很容易理解。 π_0 记录了你的空间有多少个连通分支。旋转群 O(∞) 有两个连通分支：一类是旋转，另一类是先旋转再进行反射。因此，O(∞) 的 π_0 是 $\mathbb{Z}/2$，也就是具有两个元素的群。实际上，只要 n 足够大，即为 1 或更大，这对 O(n) 也成立。所以第零项完全是关于“反射”的。

第一项稍微微妙一些，但在物理学中非常重要。它意味着 O(∞) 中存在一条你无法拉紧的环路，但如果你沿着这条环路走 两次，就会描出一条你<style id='4'>可以拉紧的环路。事实上，只要 n 为 3 或更大，这对 O(n) 就成立。这就是为什么在三维的或更高维的空间中会有自旋-$1/2$ 粒子。要看出这一点，有许多很好的技巧，我希望读者已经了解并喜欢这些技巧。简而言之，第一项完全是关于“旋转 360 度，却没有回到起点”。

第二项为零。

第三项更加微妙，但在现代物理学中也非常重要。它意味着，将三维球面嵌入 O(∞) 的方式由整数 $\mathbb{Z}$ 分类。实际上，只要 n 为 5 或更大，这对 O(n) 都成立。对其他各种群也同样成立，例如所有“紧致单群”。但我能不能像概括前面那些非零项一样，用一句简洁的话概括这一项呢？恐怕不能。事实上，拓扑学在量子场论中的许多应用都依赖于这类 π_3 问题。例如，它是杨–米尔斯理论中“瞬子”等概念的关键，而这些概念又对理解 π介子如何获得质量至关重要。它也是“陈–西蒙斯理论”和“BF 理论”等内容的基础。遗憾的是，这些内容需要花些时间解释；不过，我们姑且把第三项称为“四维拓扑场论”。

第四项为零。

第五项为零。

第六项为零。

第七项大概是所有条目中最神秘的。从一个角度看，它最为微妙；但从另一个角度看，它又完全平凡。若把它看作是关于 π_7 的命题，那它就非常微妙：它说，把 7维球面嵌入 O(∞) 的各种方式由整数分类。（实际上，只要 n 大于或等于 7，这对 O(n) 都成立。）不过，如果我们牢记博特周期性，还可以换个角度理解它：我们可以把它看作是关于 π_{-1}的命题，因为 $7 = -1$ 模 8。

等等！从什么时候起，我们可以在 n 为负数？！ 时谈论 π_n 了？比如说，什么是 -1 维球面?

这里的思路是使用一个技巧。有一个与 O(∞) 密切相关的空间，称为 kO。和 O(∞) 一样，这个空间的同伦群以模 8 的周期重复。此外，我们有：

$$\pi_n(\mathrm{O}(\infty)) = \pi_{n+1}(k\mathrm{O})$$

综合这些事实，我们可以看出，O(∞) 中极其微妙的 π_7，不过就是 kO 的极其直白的 π_0，它只是在记录 kO 有多少个连通分支。

但 kO 是什么?

嗯。答案非常重要，也很有趣，但要解释清楚需要花些时间，而我想暂时先不谈，先讲出关键结论。简单来说，等我们把这一切都推导出来后，会发现表格中的第七项完全是关于维数的。

总结一下:

- π_0(O(∞)) $= \mathbb{Z}/2$ 是关于**反射**的
- $\pi_1(\mathrm{O}(\infty)) = \mathbb{Z}/2$ 是关于**旋转360度的**
- $\pi_3(\mathrm{O}(\infty)) = \mathbb{Z}$ 是关于**四维拓扑场论的**
- π_7(O(∞)) $= \mathbb{Z}$ 关于**维数**

不过，等等！数字 0、1、3 和 7 让你想到了什么?

嗯，我盯着它们看了几个星期后，它们开始让我想到数字 1、2、4 和 8。而这立刻让我想到了实数、复数、四元数和八元数!

确实，它们之间有一种显而易见的关系。令 n 取 1、2、4 或 8，并相应地令 $\mathbb{A}$ 表示实数 $\mathbb{R}$、复数 $\mathbb{C}$、四元数 $\mathbb{H}$或八元数 $\mathbb{O}$。这些恰好就是所有“赋范除法代数”，也就是说，显而易见的那种绝对值满足

$$|xy| = |x||y|.$$

因此，如果我们取 $\mathbb{A}$ 中任意一个满足 $|x| = 1$的元素 x ，那么乘以 x 的运算会保持长度不变，所以它在 $\mathbb{A}$中是一次反射或旋转。这就给出了一个从 $\mathbb{A}$ 中的单位球面到 O(n) 的函数，换句话说，就是从($n-1$)-球面到 O(n) 的函数。由此我们得到一些很好的

$$\pi_0(\mathrm{O}(1)), \quad \pi_1(\mathrm{O}(2)), \quad \pi_3(\mathrm{O}(4)), \quad \pi_7(\mathrm{O}(8))$$

而这恰好解释了为什么 O(∞) 的这些特定同伦群非平凡。

那么现在，我们有了下面这个更精致的图表:

- $\pi_0(\mathrm{O}(\infty))$与.....有关：**反射**以及**实数**
- $\pi_1(\mathrm{O}(\infty))$与.....有关：**旋转 360 度**以及**复数**
- $\pi_3(\mathrm{O}(\infty))$ 与.....有关：**四维拓扑场论**以及**四元数**
- $\pi_7(\mathrm{O}(\infty))$与.....有关：**维数**以及**八元数**

这实在很奇怪。反射和实数之间存在联系，并不那么令人惊讶：毕竟，在实数直线上，唯一的“旋转”就是反射。这大致就是 1 和 -1 所讲的内容。旋转 360 度与复数有关，也不那么令人惊讶。这大致就是单位圆所讲的内容。虽然微妙得多，但四维拓扑场论与四元数有关，也不那么令人惊讶。令人震惊的是，听起来如此基础的“维数”，竟然会与听起来如此艰深的“八元数”有关!

但这就是博特周期性以某种方式做到的：它把事物环绕起来，让最复杂的东西同时也变得最不复杂。

我想说的差不多就到这里了，除此之外还有一些参考文献，以及一些更具技术性的说明。

O(∞)的博特周期性最早由Raoul Bott于1959年证明。Bott是数学领域一位出色的讲解者，也是推动拓扑学应用于物理学的主要力量之一；他的许多论文如今已结集出版：

1) 《*Raoul Bott*论文集》，R. D. MacPherson编。第1卷：《拓扑学与李群》（*20*世纪*50*年代）。第2卷：《微分算子》（*20*世纪*60*年代）。第3卷：《叶状结构》（*20*世纪*70*年代）。第4卷：《与物理相关的数学》（*20*世纪*80*年代）。Birkhauser，波士顿，1994年，共2355页。

一篇论述O(∞)与克利福德代数之间关系的优秀论文是：

2) M. F. Atiyah、R. Bott 和 A. Shapiro，《克利福德模》，拓扑学 **3** （1964），3-38。

想进一步了解除法代数和博特周期性，可以看看 Dave Rusin 的网页，尤其是他对“Q5. 答案是 $n = 1$、2、4 或 8 的问题是什么？”的回答。

3) Dave Rusin，《二元乘积、代数与除环》，
https://web.archive.org/web/20150511070342/http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/95/division.alg

让我简要解释一下这个 $k\mathrm{O}$ 的问题。空间 $k\mathrm{O}$ 与一个更简单的空间有关ca称为 $\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)$，由以下方程定义

$$k\mathrm{O} = \mathcal{B}\mathrm{O}(\infty) \times \mathbb{Z},$$

所以我先来描述一下 $\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)$。对于任意拓扑群 G，都可以构造一个空间BG，使其环空间与 G 同伦等价。换句话说，从 S^1 到 BG 的（保持基点的）映射空间与 G 同伦等价。由此可得

$$\pi_n(G) = \pi_{n+1}(BG).$$

这个空间 BG 称为 G 的分类空间，因为其上有一个主 G丛；对于任意良好 的拓扑空间 X （例如 CW 复形），都可以通过取一个映射 $f\colon X \to BG$，再将这个主 G丛沿该映射拉回，得到 X 上所有的主 G 丛（在同构意义下）。此外，以这种方式得到的映入 BG 的同伦映射，会给出 X 上同构的 G 丛。

现在，主 O(n)-丛基本上等同于一个 n 维实向量丛——这两个概念之间有显而易见的相互转换方式。因此，主 O(∞)-丛很像一个维数任意 的实向量丛，只不过我们不在意添加任意多个一维平凡丛。若取 X 上实向量丛的同构类集合，并规定：若两个丛添加平凡丛后变得同构，就将它们视为等价，那么我们就得到一个称为 KX 的对象，即“X 的实K理论”。不难看出，这是一个群。根据我刚才所说的内容稍作推演，便可得出

$$KX = [X, \mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)]$$

其中右侧表示“从 X 到 $\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)$ 的映射的同伦类”。若令 X 为 S^{n+1}，便可得出

$$KS^{n+1} = \pi_{n+1}(\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)) = \pi_n(\mathrm{O}(\infty))$$

由此可知，我们可以从 S^{n+}上的实向量丛得到 π_n 的 $\mathrm{O}(\infty)$ 的所有元素 [1].

当然，上述方程只对非负的 n成立，因为谈论一个空间的 π_{-1} 毫无意义。不过，为了让博特周期性顺利成立，如果我们能假设

$$KS^{-1} = \pi_0(\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)) = \pi_{-1}(\mathrm{O}(\infty)) = \pi_7(\mathrm{O}(\infty)) = \mathbb{Z}$$

唉，这些方程毫无意义，而且 $\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)$是连通的，所以我们没有 $\pi_0(\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)) = \mathbb{Z}$。不过，我们可以构造一个稍加改进的空间 $k\mathrm{O}$，它具有

$$\pi_n(k\mathrm{O}) = \pi_n(\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty))$$

当 $n > 0$时如此，但也具有

$$\pi_0(k\mathrm{O}) = \mathbb{Z}$$

正如所希望的那样。这很简单——我们只需令

$$k\mathrm{O} = \mathcal{B}\mathrm{O}(\infty) \times \mathbb{Z}.$$

那么，从现在起，我们用这个来代替 $\mathcal{B}\mathrm{O}(\infty)$。

取 $n = 0$，我们可以把 S^1 看作 $\mathbb{RP}^1$，即实射影直线，也就是 $\mathbb{R}^2$的实一维子空间构成的空间。它上面有一个“典范线丛”，也就是说，一个一维实向量丛，它将 $\mathbb{RP}^1$ 中的每个点映射到 $\mathbb{R}^2$ 中由该 点对应的一维子空间。这个定义在 S^1 上的向量丛给出了 KS^1的生成元，换句话说，就是 $\pi_0(\mathrm{O}(\infty))$。

取 $n = 1$，我们可以把 S^2 看作“黎曼球面”，换句话说就是 $\mathbb{CP}^1$，即 $\mathbb{C}^2$的复一维子空间构成的空间。它上面也有一个“典范线丛”，这是一个一维复向量丛，或二维实向量丛。这个定义在 S^2 上的丛给出了 KS^2的生成元，换句话说，就是 $\pi_1(\mathrm{O}(\infty))$。

取 $n = 3$，我们可以将 S^4 视为 $\mathbb{HP}^1$，即 $\mathbb{H}^2$的 1 维四元数子空间构成的空间。其上的“典范线丛”给出 KS^4的生成元，换句话说，即 $\pi_3(\mathrm{O}(\infty))$。

取 $n = 7$，我们可以将 S^8 视为 $\mathbb{OP}^1$，即 $\mathbb{O}^2$的 1 维八元数子空间构成的空间。其上的“典范线丛”给出 KS^8的生成元，换句话说，即 $\pi_7(\mathrm{O}(\infty))$。

根据博特周期性，

$$\pi_7(\mathrm{O}(\infty)) = \pi_8(k\mathrm{O}) = \pi_0(k\mathrm{O})$$

因此，$\mathbb{OP}^1$ 上的典范线丛也定义了 $\pi_0(k\mathrm{O})$中的一个元素。但是

$$\pi_0(k\mathrm{O}) = [S^0, k\mathrm{O}] = KS^0$$

而 KS^0 只是记录了定义在 S^0 上的向量丛两个纤维之间的维数差，它可以是任意整数。这就是八元数与维数有关的原因。

如果我们对任意带基点空间定义

$$K^n(X) = K(S^n \wedge X)$$

我们得到一种称为K理论的上同调理论，结果发现

$$K^{n+8}(X) = K(X)$$

这就是陈述博特周期性的另一种方式。现在，如果 $\{*\}$ 表示一个单点，那么$K(\{*\})$是一个环（这在上同调理论中相当常见），它由度为1、2、4和8的元素生成。度为8的生成元就是 $\mathbb{OP}^1$ 上的典范线丛，乘以这个生成元便得到一个映射

$$K^n(\{*\}) \to K^{n+8}(\{*\})$$

这是一个群同构——也就是博特周期性！从这个意义上说，八元数是博特周期性的根源。

补遗：Clifford代数时钟比我上面描述的还要好，因为它能帮你推导出更复杂的克利福德代数$C_{p,\ q}$，它们由 p 平方根构成，平方根对应于 -1 以及 q 平方根构成，平方根对应于1，而这些元素彼此都反交换。当你有 p 个“空间”维度和 q 个“时间”维度时，这些克利福德代数就很有用；我在 $q = 1$ 中介绍了“第93周”。要推导它们，只需计算 $p - q$ 模8，看看时钟在那个时刻显示什么，然后取你看到的对象的 $N \times N$ 矩阵，并选择 N，使得$C_{p,\ q}$ 具有正确的维数，也就是 2^{p+q}。比如说，你是一位弦理论家，认为空间有9个维度，时间有1个维度。你会说：“好吧， $9 - 1 = 8$，那么我看看8点钟对应什么。好，那是 $\mathbb{R}$，实数。不过我的克利福德代数$C_{9,\ 1}$ 应该有 $2^{9+1} = 1024 = 32^2$维，所以我的克利福德代数必定由32×32 实数项矩阵构成。”

顺便说一句，要看出 $\mathbb{OP}^1$ 上的典范线丛是 KS^8 的生成元并不容易——或者等价地说，要看出单位八元数的左乘定义了一个从 S^7 到 SO(8) 的映射，该映射对应于 π_7 (O(∞)) 的生成元，也并不容易。我在上文声称这是真的，但有人问我为什么时，我才意识到自己无法证明！这让我很不安。于是我在 sci.math.research 上发帖询问这是否确实成立，并得到了这样的回复：

> 发件人：*Linus Kramer* 新闻组：
> *sci.math.research* 主题： $\pi_7(O)$与八元数 日期：
> *1999年11月9日，星期二，12:44:33 +0100*
>
> *John Baez* 问 $\pi_7(O)$ 是否由单位八元数（的乘法）生成。
> 将此视为*KO*理论中的一个问题：所要证明的是， H^8 生成*8*维球面的约化实*K*理论 $\tilde{K}\mathrm{O}(S^8)$ ；丛 H^8 是在 S^8 上沿赤道 S^7按照标准粘合过程，利用八元数乘法构造而成的。因此， H^8 是八元数*Hopf*丛。它的*Thom*空间就是射影*Cayley*

平面 $\mathbb{OP}^2$。结合这一点和*Hirzebruch*符号定理，可以看出， H^8 的庞特里亚金类为 $p_8(H^8) = 6x$，其中 x 是 S^8 *[*的*8*维整系数上同调的一个生成元。有关这一计算，可参考我的论文《光滑射影平面的拓扑》，《数学档案》***63*** （*1994*年）*]*。我们有如下图表

$$KO(S^8) \xrightarrow{\text{cplx}} K(S^8) \xrightarrow{\text{ch}} H(S^8)$$

左边的箭头是复化，第二个箭头是陈特征。在维数为 *8* 时，这些映射构成一个同构。现在 $\text{ch}(\text{cplx}(H^8)) = 8 + x$ （参见 *Husemoller* 的《纤维丛》中最后一段里的公式，所在章节为*"*博特周期性与整性定理*"*。常数因子并不重要，所以答案是肯定的， $\pi_7(O)$ 由映射 $S^7 \to \mathbb{O}$ 生成，该映射将单位八元数 A 映射为 l_A： $x \mapsto Ax$ ，其中取值于 $\text{SO}(8)$。

Linus Kramer

最近，Todd Trimble 给我发来一封电子邮件，引用了另一个关于这一事实的参考资料：

发件人：*Todd Trimble* 主题：*Hopf*丛
收件人：*John Baez* 日期：*2005*年*3*月*25*日（周五）*16:37:11 -0500*

John:

在《《Numbers》》（***GTM 123***）一书中，有一篇 *Hirzebruch* 撰写的文章，其中将˜博特周期性结果表述为：在 $n = 1$、2、4、8 这些情形下， $KO(S^n)$的生成元由 $[\eta] - 1$ 给出，其中 η 是分别对应于 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$、 $\mathbb{O}$ 的 *Hopf*丛，而 *1* 是这些标量*"*场*"*（实维数分别为 *1*、*2*、*4*、*8*）上的平凡线丛；在 $n = 3$、5、6这些情形下则为 *0*。7 *[*第 *294]*页。此外，*Bott*周期性同构

$$\tilde{K}O(S^n) \to \tilde{K}O(S^{n+8})$$

是由 $[\eta(\mathbb{O})] - 1$ *[*诱导的。第 *295]*页。我知道你已经了解这一点（感谢 *Linus Kramers* 对你在 *sci.math.research* 上提问的回复），但我想你可能会觉得，引用一篇由 *Hirzebruch* 这位权威人物发表的文献（如果你需要的话），比引用 *sci.math.research* 上的一段讨论更方便。

遗憾的是，这里没有给出证明。*Hirzebruch* 说（第 *295* 页）：

> 注。我们对博特周期性定理的表述，其核心内容可见于 *[* *Bott* 讲义的 $K(X)$，但没有证明*]*。在*K*理论框架内的详细证明见教科书 *[Karoubi* 的《*K*理论》*]*。不过，读者要从 *Karoubi* 的表述中提取出这里用到的结果，恐怕会遇到一些困难。

Todd

……因为几何，你知道，是科学的大门，而这扇门如此低矮狭小，以至于人只有像小孩子一样才能进入。——威廉·克利福德

第106周

1997年7月23日

好吧，在转而谈别的内容之前，我似乎还想再谈一次八元数。我有点担心，这种对八元数的痴迷会误导非专业人士，让他们以为八元数在主流数理物理中比实际情况更重要。我也担心专家们会觉得，我整天都在琢磨八元数，而不是去研究量子引力之类的实际问题。不过，管他的，现在可是暑假！要想让我继续写《This Week's Finds》，唯一的办法就是让我想写什么就写什么，不管内容多么无关紧要。那么就开始吧。

首先，我们得确保这里的每个人都知道什么是射影空间。如果你不知道，我最好解释一下。这是正经的主流内容，每个人都应该了解，是营养丰富的数学，所以接下来端上奢华的八元数甜点时，我就不必感到太内疚了。

从 $\mathbb{R}^n$ 开始，也就是我们熟悉的 n 维欧几里得空间。我们可以想象，希望将它"紧化"，这样一来，如果你朝某个方向驶向无穷，就会像麦哲伦一样从另一边驶回来。实现这一点有不同的方法。一种广为人知的方法是取 $\mathbb{R}^n$ ，再添上一个额外的"无穷远点"，从而得到n维球面 S^n。这里的想法是，无论你从 $\mathbb{R}^n$ 的哪个位置出发，朝哪个方向驶去，都是驶向这个"无穷远点"。

不过，还有一种更巧妙的紧化 $\mathbb{R}^n$的方法，它得到的不是 n 维球面，而是"射影 n 空间"。这里我们添加许多点，每条经过原点的直线对应一个点。于是，现在有许多 无穷远点，每个方向都对应一个！这里的想法是，如果你从原点出发，沿任意一条直线驶去，就会驶向与那条直线对应的无穷远点。沿着任意一条平行线驶去，都会到达同一个无穷远点。这有点像透视画：不同组的平行线会汇聚到地平线上的不同点——地平线上的点就是无穷远点。

射影 n空间也称为 $\mathbb{RP}^n$。 $\mathbb{R}$ 代表"实数"，因为这里实际上是"实射影 n空间"。之后我们会看到，如果用复数、四元数或八元数替换实数，会发生什么。

还有一些其他方式可以理解 $\mathbb{RP}^n$ ，这些方式既有助于将它可视化，也有助于进行计算。先介绍一种很好的可视化方法：首先，将 $\mathbb{R}^n$ 压缩成半径为 1 的球，更准确地说，是由所有长度小于 1 的向量构成的"开球"。我们可以通过如下坐标变换来实现：

$$x \mapsto x' = \frac{x}{\sqrt{1 + |x|^2}}$$

这里， x 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量， $|x|$ 是它的长度。将向量 x 除以 $\sqrt{1 + |x|^2}$，得到的向量 x' 的长度永远不会达到 1，不过可以任意接近 1。这样，我们就把 $\mathbb{R}^n$ 压缩成了半径为 1 的开球。

现在假设你从这个压缩版本的 $\mathbb{R}^n$ 中的原点出发，沿任意方向沿直线航行。那么，你其实是在朝开球的边界前进。因此，开球边界上的点就像是"无穷远点"。

现在，我们可以通过加入这些无穷远点来紧化 $\mathbb{R}^n$ 。换句话说，我们可以不使用开球，而改用由所有长度小于或等于 1 的向量 x'组成的“闭球”。

不过，要得到射影 n空间，我们还必须规定，对径点 x'和 $-x'$ （其中 $|x'| = 1$ ）应视为同一点。换句话说，我们需要“将闭球边界上的每个点与其对径点认作同一点”。原因在于，我们说过，沿着某条特定直线驶向无穷远时，你会趋近射影 n空间中的一个特定点。这其中隐含着，无论你沿着这条直线的哪个方向行进都无关紧要。两个方向都会带你趋向射影 n空间中的同一个点！

这听起来或许有些古怪：在这个世界里，当牛仔说“他往那边去了”，并指向视界上的某个点时，你得记住，他的手指指向两个方向，而那个坏蛋同样可能是朝相反方向去了。这样做的好处在于，它让射影空间成了几何学家的乐园：射影空间中的任意两条直线都会相交于一个点。再也没有烦人的例外：就连“平行”直线也会交于同一个点，只不过那个点恰好是无穷远点。这极大地简化了事情。

好，那么 $\mathbb{RP}^n$ 就是这样一个空间：取一个闭的 n维球，并将其边界上的对径点对识别起来。

以更抽象的方式来看待 $\mathbb{RP}^n$，在计算中这非常有用：它是 $\mathbb{R}^{n+1}$中所有经过原点的直线组成的集合。为什么这两者是同一回事呢？让我举个例子来说明。 $\mathbb{R}^3$中经过原点的直线所构成的空间是什么？为了追踪这些直线，我们在原点周围画一个球面。每条经过原点的直线都与这个球面相交于两个点。要么其中一个点位于北半球，另一个位于南半球；要么两个点都在赤道上。因此，我们可以用北半球和赤道上的点来表示所有这些直线，但要将赤道上的对径点识别起来。这就等同于取一个闭的二维球，并将其边界上的对径点识别起来！证毕。同样的论证也适用于高维空间。

既然我们知道， $\mathbb{RP}^n$ 中的一个点就是 $\mathbb{R}^{n+1}$中经过原点的一条直线，那么为 $\mathbb{RP}^n$设置坐标就很容易了。 $\mathbb{R}^{n+1}$中的任意一点都对应一条经过原点的直线，但如果我们将该点的坐标（x_1、.....、 x_{n+1}）乘以任意一个非零数，得到的仍是同一条直线。因此，我们可以用一列 $n+1$ 个实数来描述 $\mathbb{RP}^n$中的一个点，前提是：如果有人把这些数都乘以某个非零数，我们得到的仍是 $\mathbb{RP}^n$ 中的同一个点！这称为“齐次坐标”。

如果你不喜欢齐次坐标的这种不确定性，可以直接将所有坐标除以实数 x_1，得到

$$(1, x_2/x_1, \ldots, x_{n+1}/x_1)$$

这样一来，我们就可以用 n 个实数来描述 $\mathbb{RP}^n$ 中的一个点，这也符合 n维实流形的特点。当然，如果 x_1 恰好为零，这种方法就行不通了！但如果 x_2 不为零，我们可以除以 x_2，依此类推。其中必有一个非零，因此我们可以用$n+1$ 个不同的坐标片覆盖 $\mathbb{RP}^n$ ，分别对应不同的 x_i非零的区域。坐标变换也很容易。

这使得整个过程都非常具有代数性，因此很容易通过 $\mathbb{RP}^n$ 进行推广
re将实数与其他数系并列。例如，要定义“复数

射影 n空间”或 $\mathbb{CP}^n$，只需将前两段中的“实数”替换为“复数”，并将“$\mathbb{R}$”替换为“$\mathbb{C}$”。$\mathbb{CP}^n$ 甚至比 $\mathbb{RP}^n$更像几何学家的乐园，因为在复数范围内可以解出所有多项式方程。而且，椭圆和双曲线之间也不再有太大区别！正因如此，$\mathbb{CP}^n$ 被广泛用作“代数几何”的背景。

我们还可以更进一步，用四元数替代实数，$\mathbb{H}$，定义“ n四元数的射影空间” $\mathbb{HP}^n$。只要注意按正确的顺序书写，就不必担心四元数的非交换性。.....我们仍然可以除以任意非零四元数，因此可以用 n+1 个不同的坐标图覆盖 $\mathbb{HP}^n$ ，并可随意变换坐标。

我们可以尝试更进一步，使用八元数 O。我们能否定义“ n八元数的射影空间” $\mathbb{OP}^n$? 这下事情就变得棘手了！别忘了，八元数具有非结合性。定义并没有问题

$$\mathbb{OP}^1$$

；我们可以用两个坐标图覆盖它，分别对应于如下形式的齐次坐标

$$(x, 1)$$

and

$$(1, y),$$

我们可以在两者之间来回变换坐标，而不会有任何问题。这相当于取$\mathbb{O}$ 并添加一个无穷远点，从而得到8维球面 S^8。这是一个模式的一部分：

- $\mathbb{RP}^1 = S^1$
- $\mathbb{CP}^1 = S^2$
- $\mathbb{HP}^1 = S^4$
- $\mathbb{OP}^1 = S^8$

我在“第105周”中讨论了这种模式对博特周期性的影响。

我们还可以定义 $\mathbb{OP}^2$。这里有 3 个坐标图，对应于以下形式的齐次坐标

$$(1, y, z),$$
$$(x, 1, z),$$

and

$$(x, y, 1).$$

我们可以在不同的坐标系之间来回转换，但现在我们必须检查：如果从第一个坐标系出发，转换到第二个坐标系，再转换回第一个坐标系，最终是否会回到起点！这并非显而易见，因为乘法不满足结合律。不过，得益于几个在非结合语境中并非必然成立、但对八元数成立的恒等式，这一转换确实可行：

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

and

$$(xy)y^{-1} = x.$$

验证这些方程，是任何想要理解八元数的人都可以做的一道很好的练习。

现在进入精彩部分： $\mathbb{OP}^2$ 就是它的终点 s!

当 n 大于2时，我们无法定义 $\mathbb{OP}^n$，因为非结合性使我们无法多次变换坐标后回到起点！你也许希望我们能想办法绕开这个问题，但看来，高维八元数射影空间确实在某种意义上并不存在。

因此，我们面临着一种引人入胜的情况：有一座由 $\mathbb{RP}$^n构成的无限塔，有一座由 $\mathbb{CP}^n$构成的无限塔，还有一座由 $\mathbb{HP}^n$构成的无限塔，但由 $\mathbb{OP}^n$构成的塔只延伸到 $n = 2$，便夭折消散。这意味着，尽管涉及实数、复数和四元数的各种几何与群论都符合无限的系统模式，但涉及八元数的几何与群论却古怪而神秘。

我们常常把数学与“古典”的美联系在一起：模式无穷无尽地延续，仿佛由神圣的巴赫创作的复合乐章，其中蕴含着不可抗拒的逻辑。然而，当我们研究 $\mathbb{OP}^2$ 及其含义时，会发现数学同样容得下“例外”的美——这种美如韦伯恩的作品一般，骤然绽放，又迅速沉入寂静。物理学基本定律究竟建立在“古典”数学之上，还是建立在“例外”数学之上？既然我们的宇宙似乎独一无二、非同寻常——别问我如果不是这样我们怎么会知道——Witten提出了后者。事实上，它在弦理论中频繁出现。这就是我努力学习八元数的原因：数学中的许多例外对象都与它们息息相关。

我已经在“第64周”稍微讨论过这个话题，当时我概述了与 $\mathbb{R}^n$、 $\mathbb{C}^n$和 $\mathbb{H}^n$中的旋转相对应的3个“经典”单李群无限序列，以及与八元数有关的5个“例外”单李群。进一步研究之后，我现在可以更详细地介绍一些。

按维数从小到大的顺序，这5个例外李群分别称为G_2, F_4, E_6,E_7, 和E_8。其中最小的 G_2, 很容易用八元数来理解：它就是八元数作为一种代数时的对称群。一个奇妙的事实是，所有更大的群都与 $\mathbb{OP}^2$有关。这是弗洛伊登塔尔、蒂茨和温伯格等人发现的；而要了解这一主题，下面这本引人入胜的书是个绝佳的读物：

1) 鲍里斯·罗森菲尔德，《李群几何》，Kluwer，多德雷赫特，1997年。

空间 $\mathbb{OP}^2$ 具有自然度量，因此我们可以测量点与点之间的距离。这使我们能够定义一个特定的对称群 $\mathbb{OP}^2$，即所有保持度量不变的“等距变换”所构成的群。这个对称群就是 F_4!

然而， $\mathbb{OP}^2$还有一个更大的对称群。与实射影 n空间一样，在 $\mathbb{OP}^2$中，“直线”的概念也是成立的。但要注意：这里的“直线”是八元数直线，具有 8 个实维度。尽管如此，我们仍可据此定义 $\mathbb{OP}^2$的所有“共线变换”所构成的群，也就是将直线映射为直线的变换。这个对称群就是 E_6！（严格来说，这是 E_6的一个“非紧实形式”；在本文其余部分，我讨论的都是紧实形式。）

要得到 E_7 和 E_8, ，我们需要换个角度来看，这也为我们提供了另一种得到 E_6的方法。关键在于，两个代数的张量积仍是一个代数，因此我们可以将八元数与 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$ 或 $\mathbb{O}$ 做张量积，从而得到各种代数：

- 代数 $(\mathbb{R}\otimes\mathbb{O})$ 就是八元数。
- 这个代数（$\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$）称为“双八元数”。
- 这个代数（$\mathbb{H}\otimes\mathbb{O}$）称为“四元八元数”。
- 这个代数（$\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}$）称为“八元八元数”。

我可不是编的：这些内容全都写在Rosenfeld的书里！诗人Lisa Raphals建议把八元八元数称作“高辛烷值八元数”，我觉得这个叫法还挺不错。不过，与Rosenfeld相比，我可算是相当克制了：我甚至不会提二八元数、双八元数、分裂八元数、半八元数、分裂半八元数、 1/4-八元数或 1/8-八元数——要了解这些的定义，你得去读他的书。

显然，所有这些代数都可以定义射影平面，而且这些射影平面都有自然度量，形式大体相同。因此，每个这样的射影平面都有一个等距变换群。瞧：

- 八元数射影平面的等距变换群是 F_4。
- 双八元数射影平面的等距变换群是 E_6。
- 四元八元数射影平面的等距变换群是 E_7 .
- 八元八元数射影平面的等距变换群是 E_8。

现在我对上面这些内容的理解仍不如自己所希望的那样透彻——我不确定该如何为所有这些代数定义射影平面（尽管我有一些猜想），而 Rosenfeld 在这个问题上不幸有些讳莫如深。不过，这似乎是系统研究例外群的一种很酷的方式！这正是我想要的：一套关于例外群的系统理论。

我还想多谈谈上面的内容，不过首先要指出，思考例外群还有许多其他方式。关于它们，一部很好的资料来源是伟大的拓扑学家 Adams 身后出版的这本书：

2) 约翰·弗兰克·亚当斯，《例外李群讲义》，Zafer Mahmud 和三村守编，芝加哥大学出版社，芝加哥，1996年。

他略微谈到了 G_2 和 F_4，的八元数构造，但主要讨论的是如何利用经典群和旋量构造例外群。

在“第90周”中，我解释了 Kostant 的构造：F_4 和E_8 ，利用 8 维空间中的旋量和三重性来构造它们——正如“第61周”中所说的，三重性不过是谈论八元数的另一种方式。遗憾的是，我还不太明白这与上面所说的内容有何关联，也不清楚如何用 Kostant 的框架优美地构造E_6 和E_7 。

此外，还有一种用 16 维空间中的旋量构造 E_8 的巧妙方法！亚当斯对此作了精彩的解释，这也在弦理论的经典巨著中有所讨论：

3）Michael B. Green、John H. Schwarz 和 Edward Witten，《超弦理论》，两卷，剑桥大学出版社，剑桥，1987年。

这里的想法是，将李代数 $\mathfrak{so}(16)$ 与其 16维左手旋量表示 S_+ 直和，得到 E_8 的李代数。 $\mathfrak{so}(16)$ 中两个元素的括号按通常方式定义， $\mathfrak{so}(16)$ 中一个元素与 S_+ 中一个元素的括号定义为前者作用于后者的结果，而 S_+ 中两个元素的括号则定义为通过对偶化映射得到的 S_+ 中一个元素

$$\mathfrak{so}(16) \otimes S_+ \to S_+$$

得到一个映射

$$S_+ \otimes S_+ \to \mathfrak{so}(16).$$

这就是对 E_8 的李代数的完整描述！

无论如何，思考例外群有许多不同的方式，而八元数方法面临的挑战，是将这些方式系统化。

现在，我想用几句话收尾，谈谈例外约当代数如何融入上述论述。Jordan代数最初是为了研究希尔伯特空间上的自伴算符而创立的，这些算符代表量子力学中的可观测量。两个自伴算符 A 和 B 相乘，结果未必是自伴的，但“约当积”

$$A \circ B = (AB + BA)/2$$

则是自伴的。这启发我们考察约当积满足哪些恒等式，构造“Jordan代数”的一般概念，看看利用任意可观测量Jordan代数可以开展多少量子力学研究，并在可能的情况下对Jordan代数进行分类。

我们可以将 Jordan 代数中的“投影”定义为满足 $A \circ A = A$ 的元素 A。如果我们的 Jordan 代数由复希尔伯特空间 $\mathbb{C}^n$ 上的自伴算子构成，那么投影就是仅有零和一这两个特征值的自伴算子。从物理角度来说，这对应于关于量子系统的一个“是或否问题”。从几何角度来说，这样的算子是将空间投影到希尔伯特空间某个子空间上的投影。若改用实希尔伯特空间 $\mathbb{R}^n$ 或四元数希尔伯特空间 $\mathbb{H}^n$，以上结论同样成立。

在这些特殊情况下，可以将“极小投影”定义为希尔伯特空间中投影到一维子空间上的投影。从物理角度来说，极小投影对应于“纯态”——在这些情形下，对某个信息量最大的提问，答案是“是”。例如：“这个自旋为 $1/2$ 的粒子的角动量的 z 分量是否等于 $1/2$？”从几何角度来说，极小投影构成的空间就是希尔伯特空间中“直线”所构成的空间。根据我们使用实数、复数还是四元数，这个空间分别是 $\mathbb{RP}^{n-1}$、 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 或 $\mathbb{HP}^{n-1}$。因此，这类量子系统的纯态空间也是一个射影空间！量子理论与“射影几何”之间的关系，多年来一直受到深入研究。你可以在以下内容中了解相关信息：

4) V. S. Varadarajan，《量子理论几何》，施普林格，柏林，1985。

大多数人使用复希尔伯特空间进行量子力学研究。实希尔伯特空间显然过于乏味，但也有人考虑过四元数情形：

5) Stephen L. Adler，四元数量子力学与量子场，牛津大学出版社，牛津，1995年。

如果我们的希尔伯特空间是复希尔伯特空间 $\mathbb{C}^n$，那么它的对称群通常被认为是 U(n)—— $n \times n$ 酉矩阵群。这个群也作为自伴 $n \times n$ 复矩阵 Jordan 代数的对称群，同时也作用于空间 $\mathbb{CP}^{n-1}$。

同样，如果我们从 $\mathbb{R}^n$ 开始，就得到正交群 O(n)，它由正交 $n \times n$ 矩阵组成，并作用于实自伴 $n \times n$ 矩阵的 Jordan代数以及 $\mathbb{RP}^{n-1}$。

同样，如果我们从 $\mathbb{H}^n$ 开始，就得到群 Sp(n)，它作用于四元数自伴 $n \times n$ 矩阵的 Jordan代数以及 $\mathbb{HP}^{n-1}$。

这基本解释了经典群与不同味的 of 量子力学之间的关系。

那么八元数又如何呢？这里我们最多只能到 $n = 3$，基本上是出于前面解释过的原因：阻止我们将八元数射影空间定义到某个界限之后的同样因素，也阻止我们得到 Jordan代数！有趣的情形是 3×3 自伴八元数矩阵的 Jordan代数。这称为“例外约当代数”， J。它的对称群——你猜对了——是 F_4。我们还可以在 J 中定义“极小投影”，而这些投影构成的空间就是 $\mathbb{OP}^2$。

八元数量子力学是否可能在物理学中发挥某种作用？我不知道。

无论如何，以下是我对双八元数、四元八元数和八元八元数射影平面的猜想。我认为，要定义它们，大概应分别将例外Jordan代数与 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$和 $\mathbb{O}$作张量积，再取所得代数中的极小投影所成的空间。Rosenfeld似乎认为这就是可行的办法。不过，有些重要细节我还不太清楚，这让我很烦恼，因为我在上文定义 $\mathbb{OP}^2$ 所需的特殊恒等式，与 $\mathbb{O}$ 是交错代数有关，而 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$、 $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$ 都不是交错代数。

我还应补充一点：除了八元数射影几何之外，还可以研究八元数双曲几何。可以在Rosenfeld的著作以及以下文献中读到相关内容：

6) Daniel Allcock，《八度双曲平面上的反射群》，《代数杂志》**213**（1999年），467–498。

补遗：以下是 David Broadhurst 的一封邮件，后面附有一些评论。

John:

在保罗·狄拉克去世前不久，我与他共度了一个愉快的下午。与他的名声相反，他非常健谈。

在许多事情中，我记得这一件：狄拉克解释说，虽然他受过工程师训练，也以物理学家的身份闻名，但他的审美观是数学的。他说（这是我近 *20* 年后尽可能准确的回忆）：年轻时，我爱上了射影几何。我一直想在物理学中运用它，但始终找不到合适的地方。

后来有人告诉他，复数量子力学与四元数量子力学之间的差异，被描述为经典射影几何中定理失效的现象。

狄拉克脸上绽开了可爱的笑容："啊，"他说，"我正是希望做这样的事。"

今天回头读你的"第106周"时，我想起了这件事。
祝好，*David*

对四元数不成立、但对 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 成立的定理是"帕普斯定理"，详见"第145周"。

接下来简单谈谈 $\mathbb{OP}^n$。我们无法为维数大于 2 的 $\mathbb{OP}^n$ 定义 n，有几种不同的理解。其中一种是，如果我们尝试用类似于为 $\mathbb{OP}^2$ 定义坐标的方法，为 $\mathbb{OP}^n$ 定义坐标，非结合性会使我们无法反复变换坐标后回到起点！看到所需的转移函数 g_{ij} 在推广到 $\mathbb{OP}^3$ 时无法满足必要的余循环条件 $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$，确实很有启发性；这需要 4 个图表。

不过，在我与 James Dolan 的交谈中，逐渐浮现出一种更深刻的思考方式。Stasheff 创造了一种"A_∞ 空间"的概念，它是一种带基点拓扑空间，具有一个在同伦意义下满足结合律、且在同伦意义下满足五边形恒等式的乘积，等等。任何 A_∞ 空间 G 都有一个分类空间 BG，使得

$$\Omega(BG) \simeq G.$$

换句话说， BG 是一个带基点空间，使得以该点为基点的环空间与 G同伦等价。我们可以通过米尔诺构造构造这个空间 BG： 放入一个0-单形，为 G中的每个点放入一个1-单形，为每组三元组（g、 h、 k）放入一个2-单形，其中 $gh = k$；为每个结合子放入一个3-单形，依此类推。如果我们在 G 为 $\mathbb{R}$ 中长度为一的元素所构成的群（即 $\mathbb{Z}/2$）的情况下这样做，就会得到 $\mathbb{RP}^\infty$，正如预期，因为

$$\mathbb{RP}^\infty = B(\mathbb{Z}/2).$$

更妙的是，在米尔诺构造的第 n阶段，我们得到一个与$\mathbb{RP}^n$同胚的空间。同样，如果我们在 G 为 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$ 中长度为一的元素所构成的群的情况下这样做，就会得到 $\mathbb{CP}^\infty$ 或 $\mathbb{HP}^\infty$。但是，如果我们取 G 为 $\mathbb{O}$的单位元——它有乘积，却甚至不是同伦结合的——那么第一步得到 $\mathbb{OP}^1 = S^7$，第二步得到 $\mathbb{OP}^2$，.....但根本无法进行第三步！

接下来：这里再介绍一些关于八元数、双八元数、四元八元数和八元八元数射影平面的信息。Rosenfeld 声称，这些平面的等距变换群分别是 F_4, E_6, E_7，和 E_8, 。问题在于，除了普通的八元数情形外，我不太能理解他是如何构造这些空间的。

这些空间似乎也可以利用亚当斯的书中的思想来构造。具体如下。

- 李代数 F_4 具有一个与 $\mathfrak{so}(9)$同构的极大秩子代数。商空间是 16 维的——即八元数维数的两倍。因此，李群 F_4 模去由该子代数生成的子群后，是一个 16 维黎曼流形，F_4 在其上通过等距变换作用。

- 李代数 E_6 有一个与 $\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1)$ 同构的极大秩子代数。商空间的维数为 32，是双八元数维数的两倍。因此，李群 E_6 模去由该子代数生成的子群后，得到一个 32 维黎曼流形，E_6 在其上通过等距变换作用。

• 李代数 E_7 有一个与 $\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$ 同构的极大秩子代数。商空间的维数为 64，是四元八元数维数的两倍。因此，李群 E_6 模去由该子代数生成的子群后，得到一个 64 维黎曼流形，E_7 在其上通过等距变换作用。

• 李代数 E_8 有一个极大秩子代数，同构于 $\mathfrak{so}(16)$。商空间的维数为128，是八元八元数维数的两倍。因此，李群 E_6 对由该子代数生成的子群取商后，得到一个128维黎曼流形，E_8 在其上通过等距变换作用。

根据：

6) Arthur L. Besse，《爱因斯坦流形》，施普林格，柏林，1987年，第313–316页。

因此，上述空间分别应称为八元数、双八元数、四元八元数和八元八元数射影平面。不过，我并不完全理解其中的联络。

感谢 Tony Smith 指出了 Besse 的参考文献（顺便一提，他显然是著名的布尔巴基的一位表亲）。也感谢 AllenKnutson 向我展示了一个寻找单李代数极大秩子代数的技巧。

接下来，再介绍一些关于双四元数、双八元数、四元四元数、四元八元数和八元八元数的内容！这部分补充内容是我在1999年11月8日发到sci.physics.research的一篇帖子中的一部分.....

> 人们喜欢这些代数的一个原因是，其中有些——结合代数——同时也是克利福德代数。我在
> “第105周”中稍微谈过克利福德代数，不过只要记住，我们将克利福德代数 $C_{p,\,q}$ 定义为这样一种结合代数：它由实数扩展而来，并加入 p的平方根以及 -1 和 q 的平方根，且这些平方根彼此反交换。理解具有 p 个空间维度和 q 个时间维度的时空中的旋量，这种代数非常重要。（它也有助于研究其他维度中的问题，因此情况可能会变得有些棘手，不过我现在不想谈这个。）
>
> 例如：如果你只是加入一个 -1 的平方根，而不加入1的平方根，就会得到 $C_{1,\,0}$ ——复数！
> 同样，人们喜欢四元数的一个原因是它们是 $C_{2,\,0}$。从实数开始，加入两个 -1 的平方根，分别称为 I 和 J，确保它们反交换（$IJ = -JI$），如此一来——你就得到了四元数！
> 同样，人们喜欢双四元数的一个原因是它们是 $C_{2,\,1}$。你取四元数并将其复化——这相当于加入一个额外的数 i，它是 -1 的平方根，并且与四元数的I和 J交换——于是你得到一个代数，它同样由 I、J 和 $K = iI$ 生成。注意，I、J 和 K 都反交换，而 K 是1的平方根。因此，双四元数是 $C_{2,\,1}$！
> 同样，人们喜欢四元四元数的一个原因是它们是$C_{2,\,2}$。取四元数并将其四元数化——这相当于加入两个 -1的平方根，比如说 i 和 j，它们彼此反交换，但与对易

四元数的 I 和 J——这样就得到一个同样由 I、 J、 $K = iI$和 $L = jI$生成的代数。注意， I、 J、 K和 L 彼此都反交换，而且K 和 L 是1的平方根。因此，四元四元数是$C_{2,\ 2}$!

现在，一旦我们把八元数纳入其中，就不再得到克利福德代数了，因为八元数不是结合的，而克利福德代数是结合的。不过，它们与克利福德代数之间仍然存在关系。例如，假设我们考察由左乘运算生成的八元数上的所有线性变换

$$x \mapsto ax$$

这是一个结合代数，而事实证明它是把八元数视为一个所有线性变换的8维实向量空间时的代数。简言之，它就是 8×8 实矩阵代数。而这就是$C_{6,\ 0}$。

如果你对双八元数、四元八元数和八元八元数使用同样的技巧，就会得到其他的克利福德代数.....但我会把究竟是哪些这个问题留给读者作为一个谜题。如果你需要一些帮助，请参阅*"第105周"*中的"脚注"。

或许，这个技巧最精巧的例子涉及双四元八元数。说真的，我从没听过有人用这个术语来称呼代数 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$! 对这种代数感兴趣的主要人物是 *Geoffrey Dixon*，而他只称它为 T。不过，无论如何，如果我们考察由左乘生成的 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ 的线性变换代数，就会得到一个与16×16 复矩阵代数同构的代数。而后者又与 $C_{9,0}$ 同构。

双四元八元数在 *Dixon* 关于电磁力、弱力和强力的大统一理论中扮演着重要角色。这一理论有许多优点——例如，它为标准模型任意一代中的费米子给出了弱同位旋与超荷之间正确的关系（不过，与标准模型一样，三代的存在仍需"手动"设定）。它未必正确，但至少已经相当接近了!

You 可以在*"Wee k 59"*。

"主流数学"这个名称更适合用来指称属于日落大道的数学。——*Gian-Carlo Rota*，IndiscreteThoughts

第107周

1997年8月19日

今年夏季，我一直待在马萨诸塞州剑桥，从事量子引力研究，同时也享受着一些乐趣。不久前，在 Bruce Boghosian 的盛情邀请下，我在波士顿大学做了一场关于元胞自动机的报告；他正利用元胞自动机来模拟乳状液等有趣的事物：

1）Florian W. J. Weig、Peter V. Coveney 和 Bruce M. Boghosian，《二元不混溶流体和三元两亲流体中少数相畴生长的格气体模拟》，可见 cond-mat/9705248。

随着向二元不混溶流体（例如油和水）中加入越来越多的两亲分子（例如肥皂），边界层的面积会不断增大。这就是为什么要用肥皂洗手。根据这三种物质的浓度不同，会出现各种物态——“海绵状”物态、“液滴相”等等——而要用解析方法定量弄清其中的情况非常困难。

幸运的是，我们可以用元胞自动机来模拟这些现象！在处理普通流体力学问题时，求解纳维–斯托克斯方程的标准数值方法往往比元胞自动机更快；但对于这种新颖的“三元两亲流体”，元胞自动机似乎确实是研究这类问题最实用的方法——当然，实验除外。这让我倍感欣慰，因为和许多人一样，自从了解到约翰·康威的生命游戏后，我就一直很喜欢元胞自动机，也始终希望它们能发挥某种实际用途。

我谈到了我的学生 James Gilliam 的论文，以及我们共同撰写的一篇论文：

2）James Gilliam，离散力学中的拉格朗日量与辛方法，博士论文，河滨大学数学系，1996年。可在此处获取：http://math.ucr.edu/home/baez/thesis gilliam.pdf

John Baez 和 James Gilliam，《离散力学的代数方法》，《数学物理通讯》**31**（1994年），205–212。也可在此处获取：http://math.ucr.edu./home/baez/ca.pdf

这里的想法是，尽可能多地在纯离散的背景下建立经典力学的理论体系：时间以整数步进，态空间也具有离散结构。“离散力学”最著名的例子是细胞自动机，它是经典场论的离散类比；不过，也有一些更简单、让人联想到基础经典力学的系统，例如粒子沿直线运动——在这种情况下，“直线”指的是整数，而非实数。事实证明，只需稍作巧妙处理，就能将微积分的技巧应用于其中一些情形，并完成各种工作，例如证明诺特定理的离散版本——这条著名定理说明如何从对称性导出守恒量。

演讲结束后，我去光子学大楼拜访了我的朋友 Robert Kotiuga。他在波士顿大学的函子化电磁分析实验室工作。“光子学”是目前描述光学某些领域，尤其是量子光学的时髦术语。与它这个炫目的名字相称，光子学大楼崭新无比，里面摆满了各种小玩意儿，比如一台

只要你对着一个不起眼的麦克风说出“麦克斯韦方程组”几个字，设备就会用流动的灯光显示麦克斯韦方程组。（它还会其他一些技巧。）Robert 告诉我，他最近一直在研究用拓扑学和有限元方法求解静磁学问题——这种高深数学与实用工程的结合，正是他办公室名字略带戏谑的由来；这个名字却一本正经地刻在门外的牌匾上。

和拓扑学家 Raoul Bott 一样，Kotiuga 最初在麦吉尔大学学习电气工程，后来逐渐意识到，电路理论和麦克斯韦方程组中蕴藏着如此丰富的拓扑学。显然，他的一篇论文是首篇引用 Witten 关于陈–西蒙斯理论的著名成果的论文——不过，这恐怕只能证明，在快速发表论文这件事上，工程师显然胜过数学家和物理学家。在流体动力学中，以下量的原函数

$$v \cdot \nabla \times v$$

（其中 v 是速度向量场）称为“螺旋度泛函”。Kotiuga 一直在研究同一个数学对象在静磁学中的应用，即

$$A \cdot \nabla \times A$$

其中 A 是磁矢势。例如，它会出现在阻抗层析成像中。但在量子场论中，这个量推广到其他力后，称为“陈–西蒙斯泛函”；Witten 关于以此为拉格朗日量的 3维场论的研究，最终彻底革新了纽结理论。就我个人而言，我主要感兴趣的是它在量子引力中的应用——参见 “第56周”，了解相关内容。以下是 Kotiuga 撰写的几篇关于螺旋度泛函的论文，或者说，我们数学家所称的“$\mathrm{U}(1)$ 陈–西蒙斯理论”：

3) P. R. Kotiuga，《基于度量的反问题与螺旋度泛函》，《应用物理学杂志》，**70** (1993)，5437–5439。《由螺旋度泛函离散化所产生的有限元矩阵分析》，《应用物理学杂志》，**67** (1990)，5815–5817。《三维空间中的螺旋度泛函与度量不变性》，《*IEEE* 磁学汇刊》，MAG-**25**(1989)，2813–2815。《基于螺旋度的三维静磁学变分原理》，《应用物理学杂志》，**63** (1988年)，3360–3362。

后来，麻省理工学院的计算机科学家 Jon Doyle 听过我的演讲后，邀请我去麻省理工学院参加一场研讨会。在那里我遇到了 Gerald Sussman。他和 Jack Wisdom 一直在进行最出色的太阳系长期模拟，试图解决那个由来已久的问题：这该死的太阳系到底稳不稳定！结果发现，太阳系受到混沌的影响，因此只能对大约 400 万年内的情况作出较为可靠的预测……尽管他们的模拟一直延伸到了 1 亿年。

这里有一些有趣的事实：

- 即使是木星轨道，他们也需要将广义相对论考虑在内；木星轨道每十亿年大约进动一弧度。

- 他们只将小行星带视为对太阳四极矩的修正（并用太阳四极矩来模拟太阳的扁率）。

- 整个模拟中最令人担忧的事情——就引力效应对其他一切的影响而言，整个太阳系中最复杂、最难以预测的方面——是地月系统，它具有巨大的潮汐效应。

- 太阳每1亿年因辐射损失一个地球质量，另有四分之一个地球质量因太阳风而损失。

- 第一个离开的行星是水星！在他们的模拟中，水星最终通过共振获得能量并逐渐漂移远去。

更多内容请参阅：

4) Gerald Jay Sussman 和 Jack Wisdom，《太阳系的混沌演化》，《科学》，**257**，1992年7月3日。

Gerald Jay Sussman 和 Jack Wisdom，《冥王星运动呈混沌性的数值证据》，《科学》，**241**，1988年7月22日。

James Applegate、M. Douglas、Y. Gursel、Gerald Jay Sussman、Jack Wisdom，《两亿年间的太阳系外部》，《天文学杂志》，**92**，第176–194页，1986年7月，转载于恒星动力学中的超级计算机应用，《物理学讲义笔记》**267** 施普林格，柏林，1986年。

James Applegate、M. Douglas、Y. Gursel、P Hunter、C. Seitz、Gerald Jay Sussman，《数字天体运行仪》，载于《*IEEE*计算机汇刊》，C-**34**，第9期，第822–831页，1985年9月，转载于《物理学讲义笔记》**267**，施普林格，柏林，1986年。

与此同时，我也一直在努力跟进 n-范畴论的最新进展。“This Week's Finds”的一些读者对我总是用 n-范畴这个概念吊足大家胃口，却始终没有真正给出定义，表示很不耐烦。原因在于，要把这个概念清晰地阐述出来，需要花很多功夫！

不过，我最终还是抽空尝试了一下，所以现在你可以读到这篇文章：

5) John Baez，《 n-范畴导论》，载于第七届范畴论与计算机科学会议，Eugenio Moggi 和 Giuseppe Rosolini 编，《计算机科学讲义》第**1290**卷，施普林格，柏林。亦可通过 q-alg/9705009获取。

如今关于“弱 n-范畴”已有各种不同的定义，要逐一梳理并证明其中许多定义等价、让整套机制顺畅运作，还需要一段时间。在上面那篇论文里，我主要讨论的是我和 James Dolan 提出的定义。这里还有一些关于这类问题的新论文……我就只列出论文和摘要。

6) Claudio Hermida、Michael Makkai 和 John Power，“论弱高维范畴”，《纯粹与应用代数杂志》**154**(2000年), 221–246。另见 https://ncatlab.org/nlab/files/HermidaMakkaiPower01.pdf

受 *John C. Baez* 和 *James Dolan* 最近一篇论文中提出的 *opetopic* 集概念启发，我们提出了一种称为多主题集合的修订概念。这个名称反映了这样一个事实：*Baez/Dolan* 的概念以运算子为基础，而本文中的概念以多范畴为基础。本文所用的多范畴概念，是对 *Joachim Lambek* 于 *1969*年提出的同名概念所作的温和推广。*opetopic* 集和多主题集合都旨在作为弱高维范畴概念的载体。*Baez* 和 *Dolan* 将弱 n-范畴定义为满足某些性质的$(n+1)$维 *opetopic* 集。本文所设想的多主题 n-范畴，与多主题集合也有类似的关系。本文未描述多主题 n-范畴；相关内容将在后续论文中介绍。本文完整阐述了多主题集合相关概念的定义和基本性质。文中全面介绍了多主题形范畴——它们是 *Baez* 和 *Dolan* 的 *opetopes* 的类比——并证明多主题集合范畴等价于多主题形范畴上的集合值函子范畴。

7) Michael Batanin, 《球状集上的有限元单子及其生成的计算图概念》。（显然已不再提供。）

考虑球状集范畴上的一个有限元单子。我们证明，其代数范畴同构于由初始单子的数据构造出的特殊范畴（计算图范畴）上的某个适当单子的代数范畴。对于自由的 n-范畴单子，这一定义与 *RStreet* 对 n-计算图的定义一致。对于由高阶运算子生成的单子，这使我们能够在弱 n-范畴中定义粘贴运算。它也可以被视为迈向证明弱 n-范畴的不同定义彼此等价的第一步。

7) Carlos Simpson, 《n-范畴中的极限》，可见于alg-geom/9708010。

我们在一个 n-范畴中定义了直极限和逆极限的概念。我们证明，纤维化 n-范畴的（$n+1$）-范畴 $n\mathsf{CAT}'$ 存在直极限和逆极限。最后，我们对极限概念的一些应用作出推测（不提供证明），包括n-范畴的同伦纤维积和同伦余积、*n*-层的概念、可表函子，以及最后从一个稍有不同的角度讨论基本群在某个表示处的高阶同伦的相对 *Malcev* 完备化概念。

8) SjoerdCrans, “编织与 sylleptic 幺半 2-范畴的广义中心”, 《*Adv. Math.*》**136** （1998年, 183–223）。

Kapranov 和 *Voevodsky*、*Day* 和 *Street*，以及 *Baez* 和 *Neuchl* 在高维代数方面的最新进展包括带状、*sylleptic* 和对称幺半2-范畴的定义，以及一种用于幺半2-范畴、可生成带状幺半2-范畴的中心构造。我为带状和 *sylleptic* 幺半2-范畴给出了广义中心构造，分别生成 *sylleptic* 和对称幺半2-范畴，并修正了原有幺半2-范畴中心构造中的一些错误。

时间必定会重演：这就是它唯一的职责。——
Edward Dorn，《一月的天狼星》

第108周

1997年9月22日

接下来的几周，我想谈谈量子引力，尤其是广义相对论与旋量之间的关系，因为Barrett 和 Crane 以及我最近发表了几篇新论文，讨论如何从旋量数学出发，描述“量子四维几何”——即普朗克尺度上具有某种量子离散性的时空几何结构。

不过，首先我想简单介绍一下 CTCS ’97——这是一场关于范畴论与计算机科学的会议，由 Eugenio Moggi 和 Giuseppe Rosolini 组织。会议组织得非常周到，我们一到场，他们就把会议论文集交给了我们：

1) Eugenio Moggi 和 Giuseppe Rosolini 编，《范畴论与计算机科学》，《计算机科学讲义》第**1290**卷，施普林格，柏林，1997年。

会议在圣玛格丽塔利古雷举行。这是热那亚附近一座风景如画的意大利小海滨城镇——非常适合整天待在酒店地下室里，听技术性极强的讲座。这里靠近波托菲诺，那里以停满大型游艇、载着富有游客而闻名，不过我没能走那么远。不过，食物很棒，而且能看到地中海慵懒的海浪也很惬意；它与我熟悉并喜爱的海洋大不相同。这里的植被出人意料地与Riverside相似：到处都是棕榈树和仙人掌。

我讲的是 n-范畴，只是稍微提及了它们可能与计算机科学的相关性。不过，在场的人中我只是那位象征性的数学物理学家；其他大多数参与者都相当专注于“理论计算机科学”——这一学科涵盖了许多如今被称为“逻辑”的领域中颇为新潮的方面。有趣的是，我几乎听懂了其中一些报告，这要归功于范畴论为讨论过程提供了一种高度通用的语言。

归根结底，计算机不就是一种能够模拟相当任意的过程——包括其他物理过程——的物理过程吗？随着我们使用越来越优秀的计算机，并基于越来越多的物理学知识，以越来越精确的方式模拟越来越多的物理学现象，物理学和计算机科学最终被视为一门更普遍的过程理论的两个端点，似乎几乎是不可避免的。不是吗？

Gordon Plotkin 提供了一个理论计算机科学与数学物理学之间类比的精彩例子（在平面上，回程途中，在我强迫他向我解释他的演讲时）。计算机科学家喜欢递归地定义函数。例如，我们可以定义一个从自然数集到自然数集的函数：

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

通过给出它在 0 处的值，以及一条根据它在 n 处的值求得它在 $n+1$ 处的值的规则：

$$f(0) = c$$
$$f(n+1) = g(f(n))$$

同样，物理学家喜欢用微分方程来定义函数。例如，我们可以定义一个从实数到实数的函数：

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

给出它在 0 处的值，以及一条根据它的值求出其导数的规则：

$$f(0) = c$$
$$f'(t) = g(f(t))$$

两种情况下都会出现一个问题：我们怎么知道自己确实定义了一个函数？而在这两种情况下，答案都涉及一个“不动点定理”。在这两种情况下，上面的方程都将函数 f 定义为它自身的函数。我们可以用以下形式的方程来表示：

$$f = F(f)$$

其中，F 是一个将函数映射为函数的算子。如果满足这一条件，我们就称 f 为“ F的不动点”。不动点定理是指这样一种定理：断言这类方程存在一个解，最好还是唯一解。

但在这些例子中，我们如何更精确地描述这个算子 F 呢？对于递归定义，方法如下：对于任意函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们将函数 $F(f)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$定义为

$$F(f)(0) = c$$
$$F(f)(n+1) = g(f(n))$$

数学归纳法原理指出，任何这种形式的算子 F 都有唯一的不动点。

类似地，我们可以通过对等式两边积分，将上面的微分方程表述为一个不动点问题，得到：

$$f(t) = c + \int_0^t g(f(s))ds$$

这是一个“积分方程”的例子。如果我们把右边的函数称为 $F(f)$，那么这个积分方程就表示：

$$f = F(f)$$

在这种情况下，“关于常微分方程解的局部存在性与唯一性的皮卡定理”来帮我们解围，并断言存在一个唯一的不动点。

你可能会想知道皮卡定理是如何证明的。证明的基本思路非常巧妙，因为它利用了方程 $f = F(f)$ 中隐含的令人望而生畏的循环性。我将概述这个思路，省略所有细节。

那么，我们怎样才能解这个方程呢？让我们看看能用它做些什么。其实没什么可做的，只能把左边代入右边，得到：

$$f = F(F(f)).$$

嗯。接下来呢？好吧，我们可以再做一次：

$$f = F(F(F(f)))$$

再来一次：

$$f = F(F(F(f))).$$

我们玩得开心吗？看来我们进展甚微……甚至更糟，正在慢慢地原地踏步！我们能否重复这一过程足够多次，使右侧的 f 消失，从而得到我们想要的解：

$$f = F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F\ldots \quad ?$$

嗯，实际上，如果我们足够聪明，确实可以。我们的做法是这样的。我们先<style id='1'>猜测方程的解。怎么猜呢？我们的解 f 在 $f(0) = 0$处应该满足条件，所以只要从任意一个具有这一性质的函数开始即可。把它记作 f_1。然后，我们通过令其不断改进这个初始猜测：

$$f_2 = F(f_1)$$
$$f_3 = F(f_2)$$
$$f_4 = F(f_3)$$

依此类推。现在到了有趣的部分：我们证明这些猜测彼此越来越接近……因此它们会收敛到某个函数 f，且满足 $f = F(f)$！瞧！再多做一点工作，我们就能证明，无论初始猜测是什么，后续的猜测都会趋近于同一个函数 f，因此解 f 是唯一的。

当然，我略过了一些细节。要证明皮卡定理，我们需要假设函数 g 足够良好（仅仅连续还不够，我们需要类似“利普希茨连续”的条件），而且初始猜测也应该足够良好（在这里连续就可以了）。此外，皮卡定理只能说明存在一个定义在某个有限时间区间上的解，而不是定义在整条实数轴上的解。（这个小小的变化让 Plotkin 感到苦恼，因为它使数学归纳法的类比变得复杂了。不过，一定有某种巧妙的方法可以保留这种类比；这个类比实在太精妙了，不可能毫无意义！）

你可以在任何一本不错的分析学书籍中读到皮卡定理及其他相关的不动点定理。我个人喜欢：

2）Michael Reed 和 Barry Simon，《《现代数学物理方法》。第1卷：泛函分析。第2卷：傅里叶分析、自伴性。第3卷：散射理论。第4卷：算子分析。Academic Press，纽约，1980年。

这本书可谓是数学物理学家的分析学圣经。

现在，把数学归纳法原理改写成不动点定理，或许显得有些过于繁琐。不过，这种看待递归的方式是许多理论计算机科学内容的基础。它不仅适用于函数的递归定义，也适用于“类型”的递归定义，例如“巴科斯-诺尔形式”中的定义——这是计算机科学中的基本工具。

我来举个简单的例子，这是 Jim Dolan 告诉我的。假设我们有一个由“字母”组成的集合，并想定义由这些字母构成的所有非空“单词”的集合。例如，如果我们的字母集合是 $L = \{a, b, c\}$，那么就会得到一个无限的单词集合 W，其中包含 a、ca、bb、bca、$cbabba$ 等等。

使用巴科斯-瑙尔范式，我们可以如下表示：

字母 ::= a | b | c

单词 ::= <字母> | <单词> <字母>

英语中，第一行表示“字母只能是 a、b 或 c 中的一个”，而第二行表示“单词要么是一个字母，要么是一个单词后面跟着一个字母”。第二行很有意思，因为它是递归的。

用范畴论的语言，我们可以这样表达同一件事。设 L 是我们的字母集合。给定任意集合 S，令

$$F(S) = L + S \times L$$

其中 $+$ 表示不交并，$\times$ 表示笛卡尔积。那么，由 L 中的字母构成的“单词”集合满足 $W = F(W)$，换句话说，

$$W = L + W \times L.$$

这就是说：“一个单词要么是一个字母，要么是一个有序对，其中前者是一个单词，后者是一个字母。”简而言之，我们遇到了一个不动点！

我们该如何解这个方程呢？好吧，现在我要告诉你一件你刚开始学习集合论时从来没人告诉过你的事。我们只需运用代数的常规规则：

$$\begin{aligned} W &= L + WxL \\ W - WxL &= L \\ Wx(1-L) &= L \\ W &= L/(1-L) \end{aligned}$$

然后将答案展开成泰勒级数，得到

$$W = L + L \times L + L \times L \times L + \ldots$$

这就是说：“一个单词要么是一个字母，要么是两个字母组成的有序对，要么是三个字母组成的有序三元组，或者……”这简直是黑魔法，但确实管用！

现在，你可能会想知道，这一切究竟是怎么回事——比如，我们怎么能对集合做减法和除法，又怎么能把集合的函数展开成泰勒级数，等等。我对此并非专家，不过可以看看 Joyal 关于“解析函子”（可以展开成泰勒级数的函子）的研究：

3) Andre Joyal, 《Une th´eorie combinatoiredess´eries formelles》, 《*Adv. Math.*》**42**（1981年），1–82。

在解释这种黑魔法背后的一点想法之前，我再举一个例子。我已经说过，数学归纳法原理可以被看作是保证某些不动点存在的原理。但它背后还有更基本的东西：自然数集本身也是由一种不动点性质定义的！假设我们把上面那个字母集合取为只有一个元素的集合 $\{0\}$。那么，我们的单词集合就是 $\{0, 00, 000, 0000, 0000, \ldots\}$。我们可以把它看成一种古怪的自然数集写法，就称它为 $\mathbb{N}$吧。此外，我们效仿冯·诺伊曼，定义

$$1 = \{0\},$$

这是合理的，因为它是一个只有一个元素的集合。于是，我们的不动点方程表明：

$$\mathbb{N} = \mathbb{N} + 1$$

这就是自然数的不动点性质。

说到这里，你们中有些人可能已经坐立不安了……这些内容初看起来确实有点古怪。为了让论述更加严谨，我需要引入一些范畴论，因此假设你们已经读过 “第73周” 和 “第76周”，其中我解释了范畴、函子和同构。

如果你有一个函数 $F\colon\ S \to S$ 从某个集合映射到自身，那么 F 的不动点就是满足 $F(x)$ 等于 x 的元素 x。但现在假设我们有一个函子 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}$从某个范畴映射到自身。它的不动点是什么呢?

嗯，我们可以把它定义为 $\mathcal{C}$ 中满足 $F(x) = x$ 的一个对象 x。但如果你对范畴论略知一二，就会知道，与“弱”不动点相比，这种“严格”不动点十分乏味：“弱”不动点是一个配备了同构的 $\mathcal{C}$ 中的对象 x 同构

$$f\colon F(x) \to x.$$

相等很乏味，同构则很有意思。考虑一种更一般的概念也很有趣：所谓“宽松”不动点，指的是一个对象 x，配有一个态射

$$f\colon F(x) \to x.$$

Le我们来看一个例子。令范畴 $\mathcal{C}$ 为集合范畴，并令
fu函子 F 为函子

$$F(x) = x + 1$$

它表示“集合 x 与单元素集合的不交并”——这个函子是否成立，就留给你来验证。于是，F 的一个宽松不动点就是一个集合 x，配有一个函数

$$f\colon x + 1 \to x$$

因此，自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 00, 000, \ldots\}$ 显然是一个宽松不动点……事实上还是一个弱不动点。所以，我在上文写下 $\mathbb{N} = \mathbb{N} + 1$ 时，其实是在撒谎：它们并不相等，只是同构。集合相关的其他那些方程也一样。

现在，正如从一个集合到自身的任意函数都有一个不动点集合，从范畴 $\mathcal{C}$ 到自身的任意函子 F也都有一个宽松不动点范畴。这个范畴中的对象，就是一个对象 $x \in \mathcal{C}$，配有一个态射 $f\colon\ F(x) \to x$；而从这个对象到另一个对象 $g\colon\ F(y) \to y$的态射，就是一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{f} & x \\ {\scriptstyle F(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ F(y) & \xrightarrow[g]{} & y \end{array}$$

因此，在我们的例子中，自然数实际上是“初始”宽松不动点，这意味着在宽松不动点范畴中，从这个对象到任何其他对象都恰好有一个态射。

这就是巴科斯-瑙尔范式中那些古怪递归定义的真正含义：我们有一个从某个范畴（例如集合范畴）到自身的函子 F，然后通过说某个对象是这个函子的初始宽松不动点来定义它。这是对“将集合中的一个元素定义为某个函数的唯一不动点”这一做法的升级版!

提醒一下，范畴论学者和理论计算机科学家通常说函子的“代数”，而不是函子的“宽松不动点”。总之，这多少能让你了解这些人都在谈些什么。

补记： Doug Merritt 读过上面的内容后，给我发来了一封很有意思的邮件：

> 经过一番简单的网络搜索，并与 *Andras Kornai* 讨论后，得到了以下信息。
>
> 最初将文法表示为幂级数的研究是
>
> > *4) N. Chomsky* 和 *M. P. Schutzenberger*，《上下文无关语言的代数理论》，载于《计算机编程与形式系统》，*North-Holland*，阿姆斯特丹，*1963*年。
>
> ……其中，*Schutzenberger* 提出了形式幂级数这一方面的内容，基本上只是采用了通常的生成函数技巧。
> 这种代数联络在*20*世纪*60*年代和*70*年代逐步发展成熟，并在范畴论创始人 *Samuel Eilenberg* 的工作中达到高峰，例如：
>
> > *5) Samuel Eilenberg*，《自动机、语言与机器》，*Academic Press*，纽约，*1974*年。
>
> 该领域的许多研究都归入“句法半群”这一主题，顾名思义（在网上搜索时也能找到大量结果）。
> 像往常一样，通过综合除法展开文法的问题，归根结底在于：它是否能表示为完备除法代数。文法通常是非阿贝尔的；然而，为了运用更强大的数学工具，人们往往仍假设其具有交换性，强行把文法塞进普罗克鲁斯忒斯之床。
>
> 我偶然读到一篇近期颇有意思的论文（实际上是*1994*年的一篇博士论文），它将现代数学工具应用于这类问题（例如，解释如何通过拉格朗日反演公式用幂级数表示文法，以及如何通过广义拉格朗日反演公式表示具有多个非终结符的（多变量）文法），而且相当易读：
>
> > *6) Ole Vilhelm Larsen*，《计算随机上下文无关语言的顺序无关统计特征》，可在以下网址查阅：
> > https://web.archive.org/web/19970512050407/http://cwis.auc.dk/phd/fulltext/larsen/html/或
> > h
> > t
> > tps://web.archive.org/web/19971110034152/http://cwis.auc.dk/phd/fulltext/larsen/pdf/larsen.pdf
>
> 你大概比我更了解这些，不过：说到不动点，巴拿赫最初的定理只适用于压缩映射；但从*1968*年起，许多适用于各种不同非压缩情形的新定理开始涌现

而且相关研究至今仍如火如荼。仅仅假定不动点存在的一个风险是，可能出现的是轨道，而不是吸引域。我曾在自己的sci.math 常见问题解答条目中简要提到过这一点（该条目多年来已变得有些残缺），内容涉及通过直接不动点迭代($F(F(F(F(F...($猜测$)..))))$)求解 $f(x) = x^x$。在某些区域，这些轨道会导致振荡不稳定性，因此适合改用其他方法。

总之，这只是想说，确实存在一些空间，不能想当然地认为不动点定理成立，而这可能会带来实际影响。
希望这能引起一些兴趣。
Doug

Doug Merritt doug@netcom.com 职业狂热幻想家会员，更美好明天的斗士

Unicode Novis 密码朋克 古腾堡 小波 人工构造语言 Logli 人工生命 人类学 计算语言学 基础物理学 认知科学 埃及学 GA 三个字母缩略语

第109周

1997年9月27日

接下来的几周，我想聊聊量子引力。最近，这个领域发生了许多有趣的事情。不过，我想从源头说起……

20世纪60年代，约翰·惠勒提出了“时空泡沫”的概念。这个观点认为，在极短的距离尺度上，时空几何的量子涨落极其剧烈，以至于通常所设想的带有度量的平滑时空图景会崩解。相反，我们应当把时空想象成一种“泡沫”，大致相当于所有可能拓扑的叠加；只有在足够大的长度尺度上，它看起来才平滑而平静。他对此提出的论证远谈不上严谨，而是基于物理直觉。电磁学和所有其他场都会出现量子涨落，因此引力也应如此。简单的量纲分析表明，这些涨落会在普朗克长度左右的长度尺度上变得显著，而普朗克长度约为 10^{-35}米。这个尺度非常小，远小于我们目前能够探测的范围。在这一长度尺度附近，没有理由认为“微扰量子引力”仍然适用；这种理论把引力波视为平直时空上的微小涟漪，将其量子化，并由此得到“引力子”理论。事实上，量子引力的不可重整化性表明，情况可能并非如此。

惠勒不知道该用什么形式体系来描述“时空泡沫”，但他更关心的是勾勒出一个大致的图景。他口才极佳，尤其擅长用直观的论证来阐述观点，所以我在此引用他的话：

> 没有什么观点比这一点更为核心：空无一物的空间并非空无一物。它是最剧烈的物理现象发生之处。电磁场不断涨落。正负电子的虚粒子对实际上不断产生又湮灭，μ介子对、重子对以及其他粒子对也同样如此。所有这些涨落都与空间几何和拓扑学中的量子涨落共存。它们是对那些几何动力学零点扰动的额外贡献吗？还是说，它们以某种目前尚未被充分理解的方式，不过是这些扰动的表现？

引文出自：

1）查尔斯·米斯纳、基普·索恩和约翰·惠勒，《引力》，弗里曼出版社，1973年。

这段话出自那本书著名的最后一章，章名是《超越时间的终点》。真够震撼！正是这段话让我在大学时对量子引力产生了兴趣。后来我开始偏爱不那么华丽的文风，也意识到要把引人入胜的文字转化为真正的理论有多难……不过那时的我对这些内容照单全收，毫不质疑。

惠勒构想的一部分是，最终物理学的一切都关乎几何，而粒子可能是这种几何的表现形式。例如，电子-正电子对可能是由电场线穿过的虫洞两端：

> 总而言之，黎曼、克利福德和爱因斯坦所构想的、为物理学奠定纯粹几何基础的愿景，如今已发展到更高的阶段，并且比以往任何时候都展现出更丰富的前景——也提出了更深刻的问题。

> 作用量子为这种几何动力学增添了新的特征，其中最引人注目的是，整个空间中都存在虫洞类型的涨落。如果这种虚拟泡沫状结构与通过量子电动力学所认识到的物理真空之间确有某种对应关系，那么似乎无法避免将这些虫洞认定为“未着装电子”。根据所有现有证据，与这些“未着装电子”完全不同的是实验物理学中的电子和其他粒子。对于这些粒子，几何动力学图景提出了一种模型：它们是虚拟泡沫状真空中的集体扰动，类似于固体中不同种类的声子或激子。

这段引文出自：

2) 约翰·惠勒，《几何动力学》，Academic Press，纽约，1962年。

要让这种将粒子视为虫洞的图景成立，存在许多问题。首先，无论虚拟虫洞还是其他类型的虫洞，都没有——现在也仍然没有！——任何实验证据表明它们确实存在。人们相信虚拟虫洞的主要理由，是量子力学中“凡是不被禁止的，都是必然的”这一观念……但这种说法必须谨慎看待。其次，当时并没有关于“时空泡沫”或“虚拟虫洞”的数学模型。这不过是一个模糊的概念。

然而，惠勒主要担心的是另外两个问题。首先，如何将有虫洞的空间与没有虫洞的空间联系起来？由于两者的拓扑不同，就不可能以连续的方式从一个变到另一个。针对这个问题，他提出，以光滑流形来描述时空并非基础性的；我们实际上还需要另一种更根本的描述，某种“前几何”。其次，电子具有1/2自旋，这意味着什么？这意味着将电子旋转360度后，它不会回到相同的态：它会获得一个相位因子−1。只有旋转两周后，它才会回到原来的态！用“旋量”的数学理论可以很好地描述这一点，但用虫洞来描述就没那么恰当。

惠勒以他洒脱而直觉的方式，将第二个问题视为理解“前几何”本质的关键线索：

“任何对基本粒子的描述，若未能为自旋1/2留有一席之地，都是无法接受的。那么，纯粹几何的描述究竟能如何解释自旋1/2呢？更具体地说，也更重要的是，在量子几何动力学中，中微子该占据什么位置——它是唯一一种自身即为纯场的半整数自旋实体，因为它的静止质量为零，并以光速运动？如今，这个问题还没有明确或令人满意的答案。在答案出现之前，纯粹几何动力学必须被视为基本粒子物理学的一种有缺陷的基础。”

物理学的发展往往迂回曲折。尽管惠勒的话激励了许多研究相对论的学生，但“时空泡沫”方面的进展却相当缓慢。考虑到其中棘手的问题以及缺乏精确的数学模型，这并不令人意外。很久之后，霍金等人找到了用一种名为“欧几里得量子引力”的技术，对虚拟虫洞、虚拟黑洞等进行计算的方法。将这种方法推向极致，便会得出一种关于时空泡沫的理论，尽管它还不够严谨（见“第67周”）。

但早在那之前，Newman、彭罗斯等人就开始发现广义相对论与自旋-1/2 粒子数学之间有趣的联系……这些联系很久以后将催生一种时空泡沫理论，其中旋量发挥着关键作用！

要了解广义相对论中的旋量技巧，最好的读物大概是：

3）罗杰·彭罗斯和 Wolfgang Rindler，《旋量与时空》。第1卷：二旋量演算与相对论场。第2卷：时空几何中的旋量与扭量方法。剑桥大学出版社，剑桥，1985–1986年。

彭罗斯关于旋量和广义相对论的研究，大致有三个主要方面。第一是“旋量演算”，这在这些书的第1卷中有介绍。如今，它已成为相对论中的标准工具，在许多教科书中都能找到相关的入门介绍，例如《引力》或 Wald 较新的著作：

4）Robert M. Wald，《广义相对论》，芝加哥大学出版社，芝加哥，1984年。

第二是“扭量理论”，在第2卷中有介绍。它在数学上更加复杂，并包含一项雄心勃勃的计划，旨在重新表述物理定律，使无质量的自旋-1/2 粒子，而非时空点，成为基本要素。

第三种是“自旋网络”理论，它是一种非常激进、纯粹组合论的方法，用来描述空间几何。彭罗斯无法将其推广到时空，这促使他后来转向扭量理论。要了解彭罗斯最初的自旋网络思想，最好的说明大概可以在他一位学生的论文中找到：

5) John Moussouris，基于重耦合理论的时空量子模型，博士论文，牛津大学数学系，1983年。可见
https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid:6ad25485-c6cb-4957-b129-5124bb2adc67/

这里我想谈谈旋量演算，这是这些思想中应用最广泛的一种。它讨论的是3维空间中的旋转群，以及 3+1维空间中的洛伦兹群（这里指3个空间维度和1个时间维度）。许多物理学都建立在这些群的基础上。关于任意 维数中的旋转群和旋量的一般介绍，请参阅“第61周”和“第93周”。这里我将着重讨论那些只有在从*3*个空间维度出发时才适用的内容。

现在我会把数学难度再提高一个层次……

在角动量的量子力学中，重要的不是旋转群 SO(3) 的表示，而是其双覆盖 SU(2) 的表示。这个群在每个维数 $d = 1$、2、3……上各有一个不可约酉表示。物理学家更喜欢将这些称为“自旋-j”表示，其中 $j = 0,\ 1/2$、1……。其关系当然是 $2j + 1 = d$。

自旋0表示是平凡表示。物理学家将这一表示中的向量称为“标量”，因为它们只是复数。在 SU(2) 的自旋0表示下变换的粒子也称为标量。例如，π介子和其他介子都属于此类。标准模型中唯一的基本标量粒子是希格斯玻色子——它虽已被假设存在，但至今仍未被观测到。

自旋1/2 表示是基本表示，其中 SU(2) 以显而易见的方式作用于 $\mathbb{C}^2$ 。物理学家将这一表示中的向量称为“旋量”。自旋1/2 粒子的例子包括电子、质子、中子和中微子。标准模型中的基本自旋1/2 粒子是轻子（电子、μ子、τ子及其对应的中微子）和夸克。

自旋1表示来自通过双覆盖 SU(2) $\to$ SO(3)，将 SU(2) 的元素变为 3×3 矩阵。因此，这也被称为“向量”表示。标准模型中的自旋1粒子是规范场：光子、W玻色子和Z玻色子，以及胶子。

尽管当然可以构造出更高自旋的复合粒子，如强子和原子核，但标准模型中不存在自旋大于1的基本粒子。不过，标准模型并不涵盖引力。在引力理论中，自旋2表示非常重要。这一表示来自让 SO(3)，进而让 SU(2)，以显然的方式（通过共轭作用）作用于对称无迹的 3×3 矩阵上。在微扰量子引力中，预期引力子是自旋2粒子。为什么会这样？一个简单的回答是，空间上的度量由一个对称的 3×3 矩阵给出。但这并不令人十分满意……稍后我会给出一个更好的答案。

现在，构造所有这些表示的系统方法，就是用自旋-1/2 表示来构造它们。SU(2)以显而易见的方式作用于 $\mathbb{C}^2$ ，因此也作用于 $\mathbb{C}^2$上的多项式空间。于是，次数为 $2j$ 的齐次多项式空间本身就是SU(2)的一个表示，称为自旋-j 表示。由于多项式的乘法满足交换性，用数学术语来说，我们称自旋-j表示是2j个自旋-1/2 表示的“对称张量积”。这就是自旋-1/2 具有基础性意义的数学含义！

（从某种意义上说，这意味着我们可以把自旋-j 粒子看作由 $2j$ 个不可区分的自旋-1/2 玻色子构成。但这有些奇怪，因为在物理学中，我们通常把自旋-1/2 粒子视为费米子，并对它们取反对称化张量积！）

现在让我们从空间转向时空，来考察洛伦兹群 SO(3,1)。同样，在物理学中起作用的并不完全是这个群，而是它的双覆盖；它的双覆盖是 SL(2,$\mathbb{C}$)。注意，SL(2,$\mathbb{C}$) 有一个子群 SU(2)，正如 SO(3,1) 有一个子群 SO(3) 一样；这一切以一种非常优美的方式融为一体。

现在，SU(2) 只有一个二维不可约表示，而 SL(2,$\mathbb{C}$) 有两个，分别称为左手性和右手性旋量表示。“左手性”表示是基本表示，在这个表示中，SL(2,$\mathbb{C}$) 以显而易见的方式作用于 $\mathbb{C}^2$ 。而“右手性”表示是它的共轭表示：我们先对矩阵的各个元素取复共轭，再让它以显而易见的方式作用于 $\mathbb{C}^2$ 。将这两个表示限制到 SU(2) 时，它们就变得等价了……但对于 SL(2,$\mathbb{C}$)，它们并不等价！例如，当我们把粒子视为 SL(2,$\mathbb{C}$) 的表示来研究时，会发现中微子是左手性的，而反中微子是右手性的。

SL(2, $\mathbb{C}$) 在复向量空间上的所有不可约表示，都可以由左手性和右手性的旋量表示构造而成。方法如下：取 $2j$ 个左手性自旋表示的对称张量积，再与 $2k$ 个右手性自旋表示的对称张量积作张量积。我们称之为 (j, k) 表示。

研究广义相对论的人有一套记号来表示这些东西。他们把左手性

旋量写成带有一个“未加撇下标”的对象，就像这样：

$$v_A$$

其中 $A = 1$，2. 右手旋量是带有一个“带撇的下标”的小玩意儿，例如：

$$w_{A'}$$

其中 $A' = 1$，2. 照例，更复杂的张量会有更多下标。例如，属于 (j, k) 表示的对象有 j 个不带撇的下标和 k 个带撇的下标；当我们分别置换不带撇的下标或带撇的下标时，它们都不会改变。

现在，SO(3，1) 在 $\mathbb{R}^4$ 上有一个显而易见的表示，显而易见地称为“向量”表示。如果我们把它看作 SL(2，$\mathbb{C}$) 的表示，它就是 (1,1) 表示。因此，彭罗斯把四维向量写出来时，可以用老方法：

$$v_a$$

其中 $a = 0$，1，2，3，或者用新的旋量方法：

$$v_{AA'}$$

其中 A，$A' = 1$，2。

同样，我们可以用指标数量加倍的旋量来表示任意张量。这看起来或许不算什么重大进展，但实际上意义非凡……因为它让我们能以有趣的新方式，对广义相对论中的概念进行拆解和分析。

描述时空曲率的黎曼曲率张量在相对论中非常重要。它有 20 个独立分量，但可以分解为两部分：里奇张量和外尔张量，每部分各有 10 个独立分量。根据爱因斯坦方程，时空中任意一点的里奇张量由该处的物质决定（更准确地说，由能量和动量流经该点的情况决定）。特别是，在真空中，里奇张量为零。外尔张量

$$C_{abcd}$$

d描述曲率的某些方面，例如引力波或潮汐力，这些即使在真空中也可以
n不为零。用旋量记号表示为

$$CAA'BB'CC'DD'$$

但我们也可以将其写成

$$C_{AA'BB'CC'DD'} = \Phi_{ABCD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'} + \overline{\Phi_{ABCD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'}}$$

其中 ε 是矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

而 Φ 就是“外尔旋量”。外尔旋量的全部 4 个指标都是对称的，因此它属于 SL(2，$\mathbb{C}$) 的 (2,0) 表示。请注意，这是一个 5 维复表示，因此外尔旋量有 10 个实自由度，正如外尔张量一样——

但这些自由度的编码方式非常高效！更妙的是，我们在这里看到了为什么在微扰量子引力中，引力子是自旋2粒子！

我这里只是略微触及表面，但重点是，旋量技巧在广义相对论的方方面面都非常实用。一个很好的例子是 Witten 对正能量定理的旋量证明：

6) Edward Witten，《正能量定理的新证明》，《数学物理通讯》**80**（1981年），381–402。

该定理指出，对于任何一种时空：它在空间无穷远处看起来像平坦的闵可夫斯基空间，但中间可能存在引力辐射和物质，只要物质满足“主导能量条件”，也就是能量流速小于光速，那么“ADM质量”就大于或等于零。什么是 ADM 质量？基本思路是这样的：如果我们前往空间无穷远处，那里的时空几乎是平坦的，广义相对论效应也不太显著，我们就可以通过观察一颗卫星绕中间的物质运行得有多快，来测量这些物质的质量。这就是 ADM 质量。如果中间的物质吸引卫星，ADM 质量就是正的。Witten 运用旋量之前，正能量定理的证明极其复杂；旋量使我们能够把 ADM 质量写成一个显然非负的量的原函数。

下次我会谈谈自旋网络，以及它们如何出现在近期的量子引力研究中。我们将看到，从 SU(2) 的自旋-1/2表示构建万物这一想法，其规模会变得十分宏大：在这种设定中，空间本身由旋量构成！

宇宙中充满了奇妙之物，正耐心等待着我们的智慧变得更加敏锐。— 伊登·菲尔波茨

第110周

1997年10月4日

上次我简述了惠勒关于“时空泡沫”的构想，以及他的直觉：要想建立一套关于时空泡沫的好理论，就必须认真看待自旋-1/2 粒子。现在我想谈谈彭罗斯的“自旋网络”。它们试图从自旋-1/2 粒子的数学出发，构建一种纯粹的组合描述来刻画时空。他在这方面没有取得太大进展，因此转而发明了扭量理论。问题在于，自旋网络给出了一套关于空间的有趣理论，却不是关于时空的理论。但近期的量子引力研究表明，运用自旋网络技术可以取得相当大的进展。例如，你可以计算量子黑洞的熵。因此，自旋网络如今发展得相当蓬勃。

好的。用自旋构造空间！这是如何实现的?

彭罗斯最初的自旋网络纯粹是组合的构造：边上标记着数字 $j = 0,\ 1/2、1,\ 3/2$ .....这些数字表示总角动量或“自旋”。他要求每个顶点恰好连接三条边，其对应的自旋 j_1、j_2、j_3 之和为一个整数，并满足三角不等式

$$|j_1 - j_2| \leqslant j_3 \leqslant j_1 + j_2.$$

这些规则源于角动量的量子力学：如果我们将一个自旋为 j_1 的系统与一个自旋为 j_2的系统结合起来，合成系统的自旋 j_3 恰好满足这些约束。

在彭罗斯的构想中，自旋网络表示空间几何的一个量子态。为了证明这种解释合理，他运用一种特殊规则进行了大量计算，用来从任意自旋网络中算出一个数。这种规则如今称为“彭罗斯求值”或“色数求值”。在 “第22周” 中，我介绍了所有边的自旋均为 1 时如何进行求值，并说明了这种情形与四色定理的关系。一般情形并没有难多少，但若不配上大量图示，要把它讲清楚实在很麻烦，所以我就请你参阅原始论文：

1) 罗杰·彭罗斯，《角动量：一种组合时空研究方法》，载于《量子理论及其后续》，T. Bastin 编，剑桥大学出版社，剑桥，1971，第 151–180 页。亦可见 http://math.ucr.edu/home/baez/penrose/罗杰·彭罗斯，《负维张量的应用》，载于《组合数学及其应用》，D. Welsh 编，Academic Press，纽约，1971，第 221–244 页。亦可见 http://math.ucr.edu/home/baez/penrose/

罗杰·彭罗斯，《论量子几何的本质》，载于《无魔法的魔法》，J. Klauder 编，Freeman 出版社，旧金山，1972 年，第 333–354 页。也可见 http://math.ucr.edu/home/baez/penrose/

罗杰·彭罗斯：《组合量子理论与量子化方向》，载于 扭量理论进展，L. Hughston 和 R. Ward 编，Pitman Advanced Publishing Program，旧金山，1979年，第301–307页。亦可见 http://math.ucr.edu/home/baez/penrose/

解释彭罗斯求值的物理意义 比较容易。基本思路是这样的：在经典广义相对论中，空间由一个带有黎曼度量的三维流形来描述；黎曼度量是一种测量距离和角度的方法。而在量子引力的自旋网络方法中，空间几何则被描述为“自旋网络态”的叠加。换句话说，自旋网络构成量子引力态空间的希尔伯特空间的一组基，因此我们可以将任意态 ψ 写成

$$\psi = \sum c_i \psi_i$$

其中， ψ_i 遍历所有自旋网络，系数 c_i 是复数。最简单的态对应于人们熟悉的平坦欧几里得空间。在这个态中，每个系数 c_i 就是相应自旋网络 ψ_i的彭罗斯求值。

实际上，直到后来Rovelli和Smolin阐明自旋网络如何自然地出现在量子引力的所谓“圈表示”中，人们才完全理解这种诠释。他们还提出了更清晰的图景，说明自旋网络态如何对应一种可能的空间几何。基本图景是，自旋网络的边代表面积通量管：标记为自旋 j 的边，会为其所穿过的任意曲面贡献一个与 $\sqrt{j(j+1)}$成正比的面积。

妙处在于，Rovelli和Smolin并没有假定这一点，而是推导 出了它。请记住，在量子理论中，可观测量由作用于相关物理系统态的希尔伯特空间上的算子表示。通常，我们通过将相应经典可观测量的公式“量子化”来得到这些算子。因此，Rovelli和Smolin采用了带有黎曼度量的三维流形上曲面面积的通常公式，并将其量子化。将这个算子作用于自旋网络态后，他们发现了我刚才描述的图景：曲面的面积是若干项之和，每条穿过曲面的自旋网络边对应一项，该项与 $\sqrt{j(j+1)}$成正比。

当然，我在这里把物理学和历史都过度简化了。自旋网络和圈量子引力的故事相当漫长。我已经在 “第55周”和 “第99周”中讨论过这个话题，但只是粗略带过。想了解更多细节，可以参考：

2) Carlo Rovelli, 《圈量子引力》, 《相对论综述》**1** （1998年）。也可参阅 gr-qc/9710008。

摘要让人得以一窥其内容：

> 寻找引力场量子理论的问题，也就是理解量子时空为何物的问题，至今仍未解决。目前最活跃的研究路径之一是圈量子引力。圈量子引力是一种数学上定义良好、非微扰且独立于背景的广义相对论量子化理论，并包含其传统的物质耦合。如今，圈量子引力研究已形成一个广阔领域，涵盖从数学基础到物理应用的方方面面。已取得的最重要成果包括：（*i*）计算面积、体积等几何量的物理谱，由此对普朗克尺度物理作出定量预测。（*ii*）推导出贝肯斯坦–霍金黑洞熵公式。（*iii*）提出一种引人入胜的量子物理空间微观结构图景，其特点是具有类聚合物的普朗克尺度离散性。这种离散性自然地从量子理论中涌现，为.....提供

> ……惠勒关于时空“泡沫”的直觉提供了一种数学上定义良好的实现。该理论路径中长期悬而未决的问题（缺少标量积、圈基底过度完备、实条件的实现）现已全部解决。这一路径的薄弱环节在于动力学的处理：目前存在若干备受热议的方案。在此，我将概述这一量子引力候选理论的思想、技术、成果与未决问题，并介绍相关文献。

从这段摘要可以看出，圈量子引力面临的最大问题，是找到对动力学的恰当描述。部分原因在于，相比时空，旋量网络更适合描述空间。为此，Rovelli、Reisenberger和我一直尝试用“自旋泡沫”来描述时空——它有点像肥皂泡沫，只不过所有泡泡的面上都标有自旋。自旋泡沫的每个切片都是一个自旋网络。

不过，我说得太快了！我应该指出，圈表示中出现的自旋网络与彭罗斯所考虑的自旋网络有两处重要区别。

首先，在一个顶点处相交的边可以多于3条，而且顶点必须标记为“交织算子”（简称“交织子”）。这是群表示论中的一个概念；正如“第109周”中所述，我们一直称作“自旋”的东西，实际上是$\mathrm{SU}(2)$的不可约表示。如果给自旋网络的边定向，那么每个顶点都应标记一个交织算子，它将“入射”边上表示的张量积映射到标记“出射”边的表示的张量积。当标记为自旋 j_1、j_2、j_3 的3条边相交于一个顶点时，至多存在一个交织算子

$$f\colon j_1 \otimes j_2 \to j_3,$$

至少在相差一个标量倍数的意义下是如此。我写下的条件——三角不等式等等——只是这种非零交织算子存在的条件。这就是彭罗斯没有用交织算子标记顶点的原因：他考虑的是本质上只有一种做法的情形！当更多边汇聚于一个顶点时，交织算子也会更多，而这些额外信息在物理上非常重要。研究量子引力中的“体积算符”时就能看出这一点。正如边上的自旋会为它们穿过的曲面贡献面积，顶点上的交织算子也会为包含它们的区域贡献体积！

其次，在圈量子引力中，自旋网络嵌入在某个表示空间的三维流形中。彭罗斯的想法非常激进，他考虑用“抽象”自旋网络作为空间的纯组合替代物；而在圈量子引力中，传统做法是从某个固定时空上的广义相对论出发，再将其量子化。彭罗斯更激进的方法或许最终才是正确的。采用经典物理学并将其量子化的方法非常重要，因为我们对经典物理学了解得更多，而且总得从某处着手。然而，归根结底，世界是量子力学的，因此若能有一种完全基于量子力学概念的空间研究方法，那就再好不过了。此外，将自旋网络视为基本对象，似乎是理解我在“拓扑中的量子涨落”

所提到的"第109周"的更好方法。不过眼下，最好的做法或许还是两边都押注，同时努力推进这两种方法。

最近，第三种混合方法让我感到非常兴奋：

4) Andrea Barbieri，《量子四面体与单纯形自旋网络》，可查阅gr-qc/9707010。

Barbieri 研究了"单纯形自旋网络"：存在于一个固定的三维流形中的自旋网络，该流形被剖分成四面体。他只考虑与三角剖分对偶的自旋网络，也就是说，每个四面体的中心有一个顶点，并且每个三角形面上都有一条相交的边。

在这样的自旋网络中，每个顶点有 4 条边汇聚，而顶点标记有一个形如以下的交织算子

$$f : j_1 \otimes j_2 \to j_3 \otimes j_4$$

其中，j_1、……、j_4 是这些边上的自旋。如果你了解 SU(2) 的表示论，就会知道，$j_1 \otimes j_2$ 是自旋为 j_5 的表示的直和，其中 j_5 从 $|j_1 - j_2|$ 到 $j_1 + j_2$，以整数步长递增。因此，我们得到一组交织算子的基：

$$f : j_1 \otimes j_2 \to j_3 \otimes j_4$$

通过在每个表示中各选取一个经过 j_5的因式分解：

$$j_1 \otimes j_2 \to j_5 \to j_3 \otimes j_4$$

其中：

a) $j_1 + j_2 + j_5$ 是一个整数，且 $|j_1 - j_2| \leqslant j_5 \leqslant j_1 + j_2$；
b) $j_3 + j_4 + j_5$ 是一个整数，且 $|j_3 - j_4| \leqslant j_5 \leqslant j_3 + j_4$。

据此，只要用满足上述条件的自旋标记所有边和顶点，就能得到单纯形自旋网络的一组基。对偶地，这相当于用自旋标记我们流形中的每个四面体和每个三角形！不妨这样来理解。

现在聚焦于一个特定的单纯形自旋网络和其中一个特定的四面体。自旋 $j_1, \ldots, j_5$ 揭示了这个四面体的几何性质吗？正如我先前所说，自旋 $j_1, \ldots, j_4$ 描述了三角形面的面积：第 1 个面的面积与 $\sqrt{j_1(j_1+1)}$成正比，其他面也依此类推。那么 j_5呢？它同样描述一个面积。拿起这个四面体，将它摆放成面 1 和面 2 在前、面 3 和面 4 在后的样子。从这个角度看，四面体的轮廓是一个有四条边的图形。这四条边的中点构成一个平行四边形的角，而这个平行四边形的面积与 $\sqrt{j_5(j_5+1)}$成正比。换句话说，与这个平行四边形对应的面积算子的特征值，与 $\sqrt{j_5(j_5+1)}$成正比。最后，还有一个与该四面体对应的体积算子，它对我们的自旋网络态的作用由一个更复杂的公式给出，其中涉及自旋 $j_1, \ldots, j_5$。

好吧，这要么说得通，要么就说不通……而我觉得我们俩谁都不想留下来弄清楚到底是哪一种！你问重点是什么？首先，我们看到

普通四面体是一个“量子四面体”的经典极限，其各个面具有量子化面积，体积也经过量子化。其次，我们看到，如何将若干个这样的量子四面体组合起来，构成一个带有“量子几何”的三维流形——从对偶的角度看，它也可以视为一个自旋网络。第三，这一切以一种十分优雅的方式融为一体，说明其中确有可取之处。自旋网络与四面体之间的关系，将自旋网络理论与量子引力的某些研究方法联系起来；在这些方法中，空间被切分成四面体，例如“Regge微积分”和“动力三角剖分”方法。

下周我会简单介绍如何利用自旋网络研究量子黑洞。
之后我会谈谈动力学和自旋泡沫。
与此同时，在介绍新论文方面，我一直落后不少；这些论文陆续问世up……所以这里列出几篇有趣的论文：

5）Charles Nash，《拓扑学与物理学——一篇历史论文》，载于《拓扑学史》，Ioan M. James 编，North-Holland，阿姆斯特丹，1999年，第359–415页。另可参见 hep-th/9709135。

6) Luis Alvarez-Gaume 和 Frederic Zamora，《量子场论（及弦理论）中的对偶性》，可见于hep-th/9709180。

引用摘要：

> “本讲座介绍量子场论中的对偶性。我们讨论规范理论的相，以及电磁对偶变换对于描述禁闭机制的意义。我们回顾 *N=1*超对称量子色动力学的精确结果，以及 *N=2* 超杨–米尔斯理论的 *Seiberg–Witten*解。还将简要讨论其向弦理论的一些推广。”

7) Richard E. Borcherds，《什么是顶点代数？》，可见于 q-alg/9709033。

> “这是在波恩举行的一次非正式演讲的笔记，介绍了如何定义高维顶点代数的类似物。”

8) J. M. F. Labastida 和 Carlos Lozano，《拓扑量子场论讲义》，载于*AIP*会议论文集 **419**，美国物理学会，伍德伯里，纽约，1998年，第54–93页。也可见于 hep-th/9709192。

> “在这些讲座中，我们将概述拓扑量子场论。这些理论将在 *Mathai–Quillen*形式体系的框架下，以及扭曲的 *N=2* 超对称理论的背景下进行讨论。我们将详细探讨 *Donaldson–Witten*理论近期的发展，这些进展源于将基于对偶性的结果应用于 *N=2* 超对称杨–米尔斯理论。讲座还将介绍如何用 *Seiberg–Witten*不变量计算西蒙·唐纳森不变量。我们将回顾 *Donaldson–Witten*理论的推广，并在最简单情形的对偶性背景下分析其可观测量的真空期望值结构。”

9）Martin Markl，《单纯形、结合多面体与环形多面体》，可通过 alg-geom/9707009 获取。

“本文旨在以‘基础’的方式介绍拟运算子上的模理论，并探讨这类对象的三个典型例子——单纯形、结合多面体（= 斯塔谢夫多面体）和环形多面体（= 圆上点的构形空间的紧化）。”

第111周

1997年10月24日

本周我会谈一谈黑洞熵，下周则会如先前承诺的那样，聊聊利用自旋网络计算黑洞熵的尝试。先提醒一句：对这些内容都应持保留态度，因为没有实验依据支持它们。此外，我对这个主题所做的小小“历史”梳理非常业余。（尤其是，当我说某人在某年做了某件事时，我的意思只是那件事是在那一年发表的。）

为什么黑洞的熵如此引人关注？主要是因为它为检验我们对量子引力的理解提供了试验场。在经典广义相对论中，任何落入黑洞的物体在某种意义上都会永远消失。一旦越过“事件视界”，就再也无法出来。这会引发一个关于热力学第二定律的潜在悖论；该定律指出，宇宙的总熵永远不会减少。我的办公桌随着变得越来越凌乱、积满灰尘，熵也不断增加。我可以花些工夫给它掸尘，把纸张和书本整齐地摞起来，从而降低它的熵；但在这个过程中，我会流汗并消耗能量，使自身 的熵增加得更多——所以我懒得这么做。然而，如果我可以直接把办公桌扔进黑洞，也许就能钻热力学第二定律的空子。没错，黑洞会变得更大，但没人能看出我扔进去的是干净的桌子还是脏乱的桌子，所以从某种意义上说，熵就消失了！

当然，这种违反热力学第二定律的方法可能会遭到许多反对。任何 涉及热力学第二定律的内容都颇具争议，而通过将熵投入黑洞来违反该定律的想法尤其如此。如果不是霍金和彭罗斯的工作，整个课题或许仍只会是一个纯粹的奇闻。

1969年，彭罗斯展示了原则上可以从旋转黑洞中提取能量：

1）罗杰·彭罗斯，《引力：广义相对论的作用》，《新物理评论》**1**，（1969年）272–276。

基本上，人们可以利用黑洞的旋转来加速一块掠过它的岩石，前提是岩石发生分裂，其中一块在岩石处于“能层”——即“参考系拖曳”效应极其强烈、其中的任何对象都被迫使随之旋转的时空区域——时落入黑洞。这一结果引发了一系列涉及黑洞与热力学的思想实验和定理。

1971年，霍金证明了“黑洞面积定理”：

2）斯蒂芬·霍金，《碰撞黑洞产生的引力辐射》，《物理评论快报》**26**（1971），1344–1346。

这个定理的精确表述有些技术性，不过粗略地说，它指出，在合理的条件下——例如不存在负能量密度之类的“奇异物质”——任意一组黑洞的事件视界总面积都必定始终增加。这一结果为从旋转黑洞中提取多少能量、黑洞碰撞能释放多少能量等问题设定了上限。

现在，这听起来与热力学第二定律有着奇妙的相似之处：黑洞的面积扮演着熵的角色！后来人们发现，这只是黑洞物理学与热力学之间广泛类比的开端。我还有很长的路要走，所以这里只用一张晦涩的图表来概括这种类比：

	黑洞	热力学
	黑洞质量 M	能量 E
	事件视界面积 A	熵 S
	表面引力 K	温度 T
热力学第一定律：	$dM = KdA/8\pi +$ 功	$dE = TdS +$ 功
热力学第二定律：	A 增加	S 增加
第三定律：	无法获取 $K = 0$	无法获取 $T = 0$

想要找一篇由真正懂行的人撰写的更全面综述，可以看看：

3) Robert M. Wald，《黑洞与热力学》，载于 黑洞与相对论恒星研讨会（纪念 *S. Chandrasekhar*），1996年12月14日至15日，可通过以下地址获取：gr-qc/9702022。

1973年，Jacob Bekenstein 提议我们应当真正严肃地对待这个类比。特别是，他认为黑洞确实具有与其表面积成正比的熵。换言之，世界的总熵等于所有物质的熵加上某个常数乘以所有黑洞的面积：

4）Jacob Bekenstein，《黑洞与熵》，*Phys. Rev.* **D7**（1973年），2333–2346。

这就提出了一个显而易见的问题——这个常数是多少？？此外，在经典广义相对论的语境中，这一想法存在严重问题：无论你把这个常数定为多少，都可以构造出思想实验，使这样定义的总熵下降。

然而，1975年，霍金表明黑洞并不完全是黑的！

5）斯蒂芬·霍金，《黑洞的粒子产生》，*Commun. Math. Phys.* **43**（1975年），199–220。

更准确地说，他利用弯曲时空上的量子场论表明，黑洞应当以热辐射的方式发射光子，其温度 T 与事件视界处的表面引力 K 成正比。重要的是要注意，这并不是一项“量子引力”计算；它是一种半经典近似。引力被按经典方式处理！人们只需假定时空具有与黑洞相对应的“史瓦西度规”。量子力学仅在处理电磁场时才介入。此后所有人的目标，都是通过完整的量子引力计算重现霍金的结果。当然，问题在于如何得到一种量子引力理论。

总之，下面是霍金的神奇公式：

$$T = K/2\pi.$$

这里我采用的单位制中 $\hbar = c = k = G = 1$，但要注意，这个公式中实际上暗藏着一个 $\hbar$（普朗克常数），因此它只有在量子力学层次上才有意义。这就是贝肯斯坦的提议在纯粹经典层次上存在问题的原因。

这个公式意味着，我们可以认真看待 T 与 K之间的类比。我们甚至知道如何在两者之间转换！当然，我们也知道如何在黑洞质量 M 与能量 E之间转换：

$$E = M.$$

因此，利用热力学第一定律（如上方图表所示），我们也可以在熵和面积之间转换：

$$S = A/4.$$

我们怎么可能通过完整的量子引力计算得到这样的公式呢？在统计力学中，系统任一宏观态的熵，等于与该宏观态相对应的微观态数目的对数。微观态是对系统状态完整而精确的描述，而宏观态则是粗略的描述。例如，如果我告诉你“我的书桌上落满了灰尘，还堆满了文件”，我描述的就是一个宏观态。如果我的书桌有 N 种方式符合这一描述（也就是说，有 N 个与该宏观态相对应的微观态），那么我书桌的熵就是 $\ln(N)$。

我们预期，或者至少希望，一种可行的量子引力理论能够提供一种统计力学方法来计算黑洞的熵。换句话说，我们希望，指定黑洞视界的面积 A 就能确定其宏观态，并且与这个宏观态对应的微观态数量约为 $N = \exp(A/4)$。

这些微观态是什么？围绕这个棘手的问题，人们已经写下了大量文字；但一种合理的可能性是，它们是事件视界的几何结构的态。即使知道它的面积，事件视界仍然可能具有许多不同的几何结构……也许，出于某种原因，它们的数量约为 $\exp(A/4)$！要使这一点成立，我们大概需要某种“量子几何”理论，从而使几何结构的数量有限。

我想你已经看出我想说什么了：用自旋网络计算黑洞熵的想法；自旋网络的设计目的，正是描述“量子几何”，如“第55周”、“第99周”和“第110周”中所述。下周我会谈谈这个。

为了公平对待其他方法，我应该强调，弦论学家对于如何利用他们的量子引力方法计算黑洞熵，也有相当不同的想法。关于这种方法，有一篇很不错的综述文章：

6) Gary Horowitz，《黑洞的量子态》，可见于 gr-qc/9704072。

不过，下次我只会谈自旋网络（也称为“环路表象”）方法，因为这是我所理解的方法。

好了，最后我来列出几篇有意思的论文，它们散见各处，却都在给我桌上的熵添砖加瓦。现在是凌晨一点半，我有些累了，所以就偷个懒，直接引用摘要。第一篇是一篇简短易读的文章，解释了量子场论的局限性。其他几篇则更专业。

7) Roman Jackiw，《什么是量子场论，为什么有些物理学家放弃了它？》，可见于 hep-th/9709212。

文中描述了当今量子场论面临的危机。

8) Adel Bilal, 《M（矩阵）理论：一篇教学性导论》, 《物理学进展》**47**（1999年）, 5–28。也可见hep-th/9710136。

我尝试对 *Banks*、*Fischler*、*Shenker* 和 *Susskind*（*BFSS*）提出的 *M*理论矩阵模型作一篇教学性导论。第一讲中，我介绍并回顾 *D*膜的相关方面，以及矩阵模型作用量的出现。第二讲讨论十一维超引力和 *M*理论如何出现在强耦合的 *IIA*型超弦理论中。第三讲结合前两讲的内容，得出 *BFSS*猜想，并说明这些作者提出的证据。重点不在于最新进展，而在于尽可能以教学性的方式进行介绍。

这里有一篇关于胶球的文章（想进一步了解胶球，请参阅"第68周"）：

9) Gregory Gabadadze, 《通过闭玻色膜模拟胶球谱》, 《物理评论*D*》**58**(1998年), 094015。另见hep-ph/9710402。

我们利用杨–米尔斯理论哈密顿量与闭玻色膜理论的矩阵模型描述之间的类比，计算大 N_c 极限下的胶球谱。文中讨论了杨–米尔斯理论真空的一些特征，例如拓扑荷的屏蔽和真空拓扑磁化率。我们指出，拓扑磁化率的性质因其是在理论的弱耦合还是强耦合区间计算而有所不同。我们提出并研究了纯杨–米尔斯理论中赝标量胶球态的形成机制。

四元数和八元数的爱好者或许会对下面这篇论文感兴趣：

10) Jose M. Figueroa-O'Farrill, 《规范理论与除法代数》, 《几何与物理杂志》**32**(1999年), 227–240。另见hep-th/9710168。

我们提出了八维杨–米尔斯理论中瞬子方程的一种新表述。这一表述揭示出，这些方程是与实除法代数相关的一系列规范理论方程中的最后一个成员，其中包括二维中的平坦性和 *4* 维中的（反）自对偶性。利用这一表述，我们证明，在平直空间中，这些方程可以用联络空间上的矩映射来理解，而解的模空间则通过广义辛商得到：二维中是凯勒商，*4* 维中是超凯勒商，八维中是八元数凯勒商。可以将这些方程推广到曲空间：二维方程在任意曲面上都有意义，*4* 维方程在任意定向流形上都有意义，而八维方程只有在整体单值群包含于 $\mathrm{Spin}(7)$ 的流形上才有意义。用矩映射解释这些方程会进一步对流形施加约束：曲面必须是可定向的，*4* 维流形必须是超凯勒流形，而八维流形必须是平直的。

第112周

1997年11月3日

本周我将讲述如何通过计数黑洞的量子态，利用量子引力的自旋网络方法，尝试计算黑洞的熵。

不过，在事情变得棘手、读者开始纷纷退场之前，我应该先提一下这本科幻小说：

1）Greg Egan，《《*Distress*》》，HarperCollins，1995年。

近来我没有太认真地关注科幻小说，所以实在算不上最合适的评判者。但据我所知，Egan 是当今少数几位敢于直面现实重大议题的作家之一——他真正试图直面宇宙及其种种可能性那令人难以置信的奇异之处。现实发展的速度远超我们的想象，以至于大多数对未来的想象都显得可悲地缺乏雄心。许多作品刻意带有一种“复古”气息——故事发生在与古罗马惊人相似的银河帝国中的太空歌剧；背景设在直接借鉴自黑色电影的阴暗都市环境中的赛博朋克故事，配上愤世嫉俗的旁白……科幻小说注定会成为一种本质上怀旧的 文学形式吗?

也许我们变得过于明智了，因为我们已经见识过，对未来最狂野的想象总是赶不上现实；我们盲目地从当前趋势推演下去，却错过了那些真正有趣的转折。不过，科幻作家还是得试着想象不可想象之事，对吧？如果他们不这么做，又有谁会呢?

可是，我们又要如何敢于想象，比如说，一个世纪或一千年后的世界会是什么样子? Vernor Vinge 在他的小说中恰如其分地表达了这个问题：书中描写了一群被困的幸存者，他们经历了一场“奇点”——技术进步的速度曾在那一刻变得无限，而大部分文明却莫名其妙地……消失了。那些没赶上车的人，只能纳闷它究竟开去了哪里。他们只知道，那是某个无法想象的地方。

《Distress》并没有把目光投向太远的未来，只到 2053年。无性恋正迅速流行……“超雄性”和“超女性”选项也是如此，供那些不喜欢性别模糊这回事的人选择。自愿孤独症患者正尝试消除共情能力。一些令人不安的激进分离主义者则彻底改写了自己的遗传密码，用他们自行设计的碱基对取代了老掉牙的 ATCG。谢天谢地，基础物理学在新技术方面几乎没有什么新东西可贡献。几十年来，它一直转向内省，愈发抽象，数学理论也愈加繁复，却鲜有新实验为其指引方向。不过，这一年正值爱因斯坦百年诞辰会议！诺贝尔奖得主 Violet Masala 将公布她关于万有理论的新成果。传闻说，她或许终于攻克了这个难题，找到了——没错——最终、正确且真实的物理学理论。

科学记者 Andrew Worth 为了准备采访 Masala，试图恶补相关知识，却发现要跟上各种“全拓扑模型”的细节并不容易。这些模型旨在解释标准统一场论中时空的十维性。在我读过的科幻小说中，这段虚构的数学文字算是最逼真的描写之一。他读到：“至少有两种相互冲突的广义测度可应用于 T，即所有具有可数基的拓扑空间所构成的空间。Perrini测度 [Perrini， 2012] 和 Saupe测度 [Saupe， 2017]均定义于所有有界

T 的子集上；限制在 M——即 n 维旁紧 Hausdorff 流形所构成的空间——时，两者等价，但对于由更为奇异的空间构成的集合，它们会得出相互矛盾的结果。然而，这种差异（如果确实存在）的物理意义仍然晦暗不明。……”

不过，Worth既有坚韧不拔的精神，又是一位优秀的记者，最终还是能够向我们这些读者解释清楚这里究竟事关什么，以及为什么Masala的新作会让所有人议论纷纷。但这其实还只是开始。因为除了这项颇为正统的全拓扑模型研究之外，“人类宇宙学”中还进行着许多有些离经叛道的研究，涉及人择原理复杂而曲折的分支。有人认为，当正确的万有理论被发现时，某种宇宙自指反馈回路就会闭合。到那时，谁也说不准会发生什么！

好了，我就不再透露更多了。这很有趣：它让我想要冲出去，开展更多数理物理研究。它还提出了许多深刻的问题。结尾部分对我来说有点过于“充满动作”，不过话说回来，我心目中的刺激，就是躺在床上思考 n-范畴。

现在来谈谈黑洞。

在“第111周”中，我留下了一个谜题。根据量子引力理论，黑洞的熵应当等于其微观态数量的对数，而且应与事件视界的面积成正比。但这些微观态究竟是什么？弦理论对此给出了一种答案，不过我将聚焦于量子引力的圈表示。这种量子引力方法具有很强的几何性质，因此可以将黑洞微观态视为黑洞事件视界的“量子几何”。但这些量子几何与用自旋网络描述周围空间几何的方式有何关联呢?

从1995年开始，Smolin、Krasnov和Rovelli提出了一些解答这些谜“第56周”中，我已经提到过这些想法“第57周”和“第87周”。我现在要谈的这些想法，是对早期工作的进一步发展。不过，我不打算按历史顺序逐一介绍，而是直接呈现我如今所看到的图景。想了解更多细节，可以参考下面这篇论文：

2) Abhay Ashtekar、John Baez、Alejandro Corichi 和 Kirill Krasnov，《量子几何与黑洞熵》，即将发表于 《物理评论快报》**80** (1998年)，904–907。亦可见 gr-qc/9710007。

本文概述了一篇最终将扩展为较长论文的内容，该论文分为两部分：一部分讨论经典广义相对论的“黑洞扇区”，另一部分讨论这一扇区的量子化。先简要介绍其经典方面，然后再谈量子方面。

获得黑洞量子理论的一种方法，是先弄清楚经典意义上的黑洞是什么，构造出经典态的某个相空间，然后将其量子化。为此，我们需要某种方法来判定广义相对论的哪些解对应于黑洞。其实这并不容易。黑洞的特征在于存在事件视界——一种曲面，一旦越过它，除非以超光速运动，否则便永远无法返回。这让人很想找出能够说明“这个曲面是事件视界”的“边界条件”，并用它们筛选出对应于黑洞的解。

但事件视界不是一个局部概念。也就是说，光看时空的一小块区域，你无法判断其中是否存在事件视界，因为你能否在穿过某个曲面后“最终

返回外部”，取决于未来时空几何会发生什么。从技术角度来说，这很糟糕。处理非局部边界条件是一件极其麻烦的事，尤其是那些必须求解运动方程，看看未来会发生什么，才能判断是否满足边界条件的非局部边界条件。

幸运的是，有一个纯粹局部的概念，可以合理地替代事件视界这一概念，那就是“外部边际俘获面”。这有点专业——我的专长并非经典广义相对论，而只是量子方面的内容，所以我算不上这方面的专家！——不过，基本原理是这样的。

首先，考虑平直空间中的一个普通球面。设想光线向外发射，沿垂直于球面的方向射出。显然，每一圈想象中的光线的截面都会随着光线向外传播而扩张。在广义相对论中，人们用一个称为.....膨胀参数的量来定量描述这一点！

现在，假设你的球面包围着一个球对称黑洞。如果这个球面相较于黑洞的大小而言非常大，那么上面的图景仍然相当准确，因为离开球面的光线离黑洞很远，引力效应也很微弱。但现在设想让球面不断缩小，使它的半径越来越接近史瓦西半径（即事件视界的半径）。当球面只比史瓦西半径大一点时，从球面向外射出的光线膨胀得非常微弱。这似乎有些矛盾——向外射出的光线怎么会不膨胀呢？但请记住，事件视界附近的时空严重弯曲，因此你平常对平直时空的直觉不再适用。当我们逼近事件视界本身时，膨胀参数会趋于零！

这大致就是“外部边际俘获面”的定义。一个更数学化但仍不严谨的定义是：“外部边际俘获面是某个空间区域的边界 S，使得沿着垂直于 S 的出射零测地线族，其膨胀处处小于或等于零。”

我们要求空间中有一个球面 S，它是外部边际俘获面。我们还要求该曲面满足其他边界条件。我不详细解释这些条件，而是指出它们另外有两个重要特点：它们表明黑洞不旋转，并且禁止引力波落入S。第一个条件是为简化问题而作出的假设：本文只研究角动量为零的黑洞！第二个条件只要求在我们研究黑洞的这段时间内成立。它并不排除远离黑洞的引力波，也不排除这些波可能最终撞上黑洞。这些波不应影响熵计算。

如今，除了物理意义之外，我们采用的边界条件也有一种有趣的数学含义。和大多数其他场论一样，广义相对论由作用量原理定义。粗略地说，这意味着对时空中的某个量——称为拉格朗日量——进行积分，得到一个“作用量”，然后通过寻找使该作用量取极小值的状态，来求解场方程。但研究带边界区域上的场论并施加边界条件时，往往需要“在作用量中添加一个额外的边界项”——某种对边界的积分——才能使一切正常。如何找到与边界条件相配的正确边界项，自有一整套门道.....这是一门晦涩的小技艺.....只是理论物理学家所做的那些事情之一，不知为何，它们始终未能进入

大众媒体。

但在这种情况下，边界项至关重要，因为它就是.....

陈-西蒙斯作用量！

（是的，我能想象全世界的人们正盯着屏幕，心想："嗯？我应该记得那是什么吗？他现在又为什么这么激动？"还有少数知情者会想："哦，现在我明白了。这些关于边界条件的种种折腾，不过是为了在事件视界上构造一个拓扑量子场论而精心设计的圈套！"）

到目前为止，我们一直在真正的四维时空中研究广义相对论。陈–西蒙斯理论是一种与之密切相关、低一个维度的场论，存在于三维时空中。随着时间流逝，黑洞的曲面描绘出我们四维时空中的一个三维子流形。当我们依据选定的边界条件将经典引力理论量子化时，陈–西蒙斯项将在黑洞曲面上产生一个"陈–西蒙斯场论"。这个场论将描述黑洞曲面的几何，以及它如何随时间变化。

好了，别光说不做，咱们动手吧！我们使用标准的自旋网络技术来量子化理论，在黑洞外部使用陈–西蒙斯理论描述事件视界，结果如下。态看起来是这样的。在黑洞外部，态由自旋网络描述（参见"第110周"）。自旋网络边标记着自旋 $j = 0$、$1/2$、1，...

...。自旋网络边可以穿过黑洞表面，赋予它面积。每条自旋为j 的边贡献的面积与 $\sqrt{j}$（$j + 1$）成正比。总面积就是这些贡献之和。

任意选择一组以自旋标记的穿孔，即可确定陈–西蒙斯理论的态希尔伯特空间。这个空间中的态描述黑洞表面的内蕴曲率。除穿孔处外，曲率处处为零，因此在经典情况下，你可以把穿孔附近的曲面想象成一个顶点位于穿孔处的圆锥。曲率集中在顶点处。在量子层面上，若穿孔标记的自旋为 j，那么穿孔处的曲率由一个数 j_z 描述，该数从 $-j$ 到 j 按整数步长变化。

现在我们来问这样一个问题："给定一个面积在 ε of$A$范围内的黑洞，与这个面积相容的微观态数量的对数是多少？"这应该就是黑洞的熵。要找出答案，我们首先计算所有用自旋 j 标记穿孔的方式，使总面积落在 ε of A范围内。对于每一种这样的方式，我们再计算所有允许选取用于描述黑洞表面内蕴曲率的数 j_z 的方式。然后把这些数相加，再取对数。

大致来说，这就是我们所做的；而对于远大于普朗克尺度的黑洞，我们发现熵与面积成正比。这与贝肯斯坦和霍金的结果相比如何？他们的结果在"第111周"中有介绍。记得，他们计算出

$$S = A/4$$

其中，S 是熵，A 是面积，测量单位满足 $c = \hbar = G = k = 1$。我们得到

$$S = \frac{\ln 2}{4\pi\gamma\sqrt{3}}A$$

要比较这些结果，你需要知道第二个方程中那个神秘的“γ”因子是什么！它通常被称为Immirzi参数，因为许多人是通过下面这篇论文了解到它的：

3) Giorgio Immirzi，《量子引力与Regge微积分》，《核物理学：会议录增刊》**57**(1997年) 65–72。也可参见gr-qc/9701052。

不过，最先发现它的是Barbero：

4) Fernando Barbero，《洛伦兹号差时空的实Ashtekar变量》，《物理评论》**D51** (1995年)，5507–5510。也可参见gr-qc/9410014。

这是圈表示中一个令人恼火且不可避免的任意无量纲参数，在Barbero发现它之前，从未有人注意到它。它至今仍相当神秘。不过，它的作用大致如下。在普通量子力学中，我们把位置 q变成一个算子，也就是乘以 x，并且也把动量 p 变成一个算子，也就是 $-i$ (d/dx)。重要的是正则对易关系：$pq - qp = -i$。不过，我们也可以通过如下定义使正则对易关系成立

$$p = -i\gamma\frac{d}{dx}$$
$$q = \frac{x}{\gamma}$$

因为伽马因子相互抵消了！在这种情况下，加入一个 γ 因子不会影响物理学。得到的是“正则对易关系的等价表示”。然而，在圈表示中，类似的技巧确实会影响物理学——不同的 Immirzi 参数取值会带来不同的物理学！更多详情请看：

4) Carlo Rovelli 和 Thomas Thiemann，《量子广义相对论中的 Immirzi 参数》，*Phys. Rev.* **D57** （1998年），1009–1014。另可参见 gr-qc/9705059。

Immirzi 参数如何影响物理学？它决定了面积量子化。你可能注意到，我一直在说“自旋网络的每条自旋-j 边都会对其所穿过的任意曲面贡献一个与$\sqrt{j(j+1)}$成正比的面积”……却从未说明比例常数是多少！其实，这个常数是

$$8\pi\gamma$$

直到最近，大家还都说这个常数是 1。（至于8π这个因子，我不擅长这些，不过显然至少有些人也把它算错了！）现在 Krasnov 声称，终于把这些该死的因子彻底理顺了：

5) Kirill Krasnov，《正则量子引力中确定面积谱的常数》，《经典与量子引力》**15**（1998年），L1–L4。另见gr-qc/9709058。

因此，由于 Immirzi 参数存在这种任意性，我们似乎无法确定熵—面积关系中的比例常数。不过，我们当然可以，

将贝肯斯坦–霍金公式与我们的黑洞熵公式结合起来，以确定 γ，从而得到

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}}$$

这或许看起来像是在作弊，但眼下这是我们能做到的最好办法。我们只能说：我们有一个关于黑洞微观态的理论，它预言对于较大的黑洞，熵与面积成正比；再结合贝肯斯坦–霍金计算，我们便能够确定 Immirzi参数。

公式中的那些奇怪常数

$$S = \frac{\ln 2}{4\pi\gamma\sqrt{3}}A$$

是什么意思？其实很简单。对黑洞熵贡献最大的态，是几乎所有穿透其曲面的自旋网络边都标记为自旋1/2的那些态。每个自旋-1/2 穿孔可以是 $j_z = 1/2$ 或 $j_z = -1/2$，因此对熵的贡献为 ln(2)。另一方面，每条自旋-1/2 边对黑洞面积的贡献为$4\pi\gamma\sqrt{3}$ 。为了说得更有戏剧性，我们可以把 ln 2 称为“熵量子”，因为它是单个比特中包含的熵（或信息）。同理，我们可以把$4\pi\gamma\sqrt{3}$ 称为“面积量子”，因为这是自旋-1/2 边所贡献的面积。这些术语有些误导，因为熵和面积都不必是这个最小量的原函数 倍数。不过无论如何，我们有

$$S = \frac{\text{quantum of entropy}}{\text{quantum of area}}A$$

接下来呢？嗯，可以尝试利用这些思想来研究霍金辐射。这很困难，因为我们对量子引力中的哈密顿量 还不太了解，但Krasnov已经取得了一些进展.....

6）Kirill Krasnov，《量子几何与黑洞热辐射》，《经典与量子引力》**16**（1999年），563–578。另见gr-qc/9710006。

我来直接引用摘要：

> 最近，在被称为圈量子引力的方法中提出了一种对黑洞量子态的量子力学描述，我们利用这一描述来研究史瓦西黑洞的发射光谱。我们假设存在一个导致黑洞不同量子态之间发生跃迁的哈密顿算符，并利用费米黄金定则求出发射谱线强度。在对哈密顿量作出某些假设的情况下，我们发现，尽管发射光谱由离散谱线组成，但包络该谱的曲线接近普朗克热分布，其温度由黑洞的热力学温度给出，而该温度由熵对黑洞质量的导数定义。我们讨论了这一结果对于圈量子引力中*Immirzi* γ歧义问题可能产生的影响。

这很有意思，因为贝肯斯坦和 Mukhanov 最近指出，如果量子黑洞的面积以等间距的步长量子化，那么热辐射的普朗克分布就会出现显著偏差：

7) Jacob D. Bekenstein 和 V. F. Mukhanov，《量子黑洞的光谱学》，《物理快报*B*》**360**（1995年），7–12。另可参见 gr-qc/9505012。

然而，在圈表示中，面积并不是以等间隔的步长量子化的：面积 A 可以是诸如 $8\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}$ 这类量的任意和，而对于很大的 A，这类和会变得极为密集。

最后，我想就陈–西蒙斯理论在这里的作用谈几点技术性意见。长期以来，我一直在研究联系维数为2、3和4的场论的“维度阶梯”，部分原因是这为了解 n-范畴与拓扑量子场论之间的关系提供了一些线索，部分原因是它将神秘莫测的四维时空量子引力与人们已充分理解的三维时空陈–西蒙斯理论联系起来。如今，人们可以利用这架阶梯研究黑洞熵，这真是妙极了。值得将Carlip利用黑洞事件视界在曲面上留下的轨迹上一个2维场论（Wess-Zumino-Witten模型）对三维时空中的黑洞熵所作的计算进行比较——参见“第41周”。我们使用的理论和Carlip使用的理论，都属于同一架庞大的理论阶梯！这里正在发生一些有趣的事情。

不过，我们的计算中有个转折，着实让我大吃一惊。我们在黑洞表面上用的不是SU(2) Chern–Simons理论，而是 U(1) 陈–西蒙斯理论！原因很简单。我们采用的边界条件指出，黑洞表面是“边际外陷”的，同时也意味着它的外曲率为零。因此，在黑洞表面上，曲率张量就简化为内蕴曲率。三维空间上的曲率取值于 $\mathfrak{so}(3)$，而曲面 S 上的内蕴曲率取值于 $\mathfrak{so}(2)$。由于 $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2)$，广义相对论与 SU(2) 规范理论有很大关联。但由于 $\mathfrak{so}(2) = \mathfrak{u}(1)$，黑洞表面上的场论可以视为 U(1)规范理论。

（专家会知道，U(1) 是 SU(2) 的一个子群，这就是为什么我们要考察从 $-j$ 到 j的所有 j_z 取值：我们是在将 SU(2) 的表示分解为这个 U(1)子群的表示。）

如今，U(1) 陈–西蒙斯理论远没有 SU(2) Chern–Simons理论那么令人兴奋，因此从数学角度来看，这多少有些令人失望。但 U(1) 陈–西蒙斯理论也并非完全乏味。当我们在带孔曲面上研究 U(1) 陈–西蒙斯理论时，我们研究的是模去规范变换的平坦 U(1)联络。这些联络组成的空间称为“雅可比簇”。当我们使用几何量子化对 U(1) 陈–西蒙斯理论进行量子化时，我们寻找的是雅可比簇上某个线丛的全纯截面。这些截面称为“θ函数”。弦论学家和数论学家对 θ函数进行了深入研究，并利用它们完成了各种超出我理解范围的奇妙工作。关于 θ函数，我所知道的一切都可以在下面两本书的开头找到：

8) Jun-ichi Igusa，*θ*函数，施普林格，柏林，1972。

9) David Mumford，《*Tata Theta* 讲座》，3 卷，Birkhauser，波士顿，1983–1991。

θ函数很美妙，所以看到它们用来描述量子黑洞的态，真是令人欣喜！

第113周

1997年11月26日

本周我想谈谈“自旋泡沫”。人们已经花了很多心思，尝试用自旋网络来描述给定时间下三维空间的量子几何。这对量子引力的运动学方面很有帮助，但对动力学而言就不那么理想了。要研究动力学，最好能有一种描述四维时空量子几何的方法。这正是自旋泡沫派上用场的地方。

如果我们用自旋网络来描述普朗克尺度下的空间几何，那么该如何描述时空呢？空间被认为是时空的一种切片，所以让我们回想一下自旋网络是什么，看看它可以是何种对象的切片。

首先，自旋网络是一种图：由许多通过边连接起来的顶点组成。对一个图进行切片会得到什么？泡沫！想想洗碗时产生的肥皂泡沫。如果我们将其理想化为许多沿边相交的二维曲面，并设想用一个平面与之相交，就会发现结果通常是一张图。

拓扑学家把这类空间称为“二维复形”。它是图的一种推广：我们可以先取一组“顶点”，再用一组“边”将它们连接起来，得到一张图；然后取一组二维圆盘，即“面”，沿着它们的边界附接到这张图上。数学上，没有理由止步于二维。拓扑学家对各维复形都很感兴趣。不过，二维复形受到格外关注，因为有许多著名的未解问题与之相关。了解它们的一个绝佳去处是：

1) C. Hog-Angeloni、W. Metzler 和 A. Sieradski，《二维同伦与组合群论》，伦敦数学学会讲义系列197，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。

然而，自旋网络并不仅仅 是一个图：它是一个图，其边标记着某个对称群的不可约表示，顶点标记着交织算子。如果你不明白这是什么意思，别担心！如果我们将对称群取为 SU(2)，情况就会简单得多。如果我们让图的每个顶点都连接4条边，情况就更加简单了。在这种情况下，我们只需用一个数来标记每个顶点和每条边 $j = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,$ .....这个数称为“自旋”。

在这个特殊情况下，我们可以将自旋网络看作一个二维复形的切片，其面和边都标记着自旋。这样的东西看起来有点像一团肥皂泡沫，边和面上都标记着自旋——这就是“自旋泡沫”一词的由来！更一般地说，自旋泡沫是一个二维复形，其面标记着某个群的不可约表示，边标记着交织算子。切分自旋泡沫时，它的每个面都会形成一条自旋网络边，而它的每条边都会形成一个自旋网络顶点。

实际上，如果你曾仔细观察过肥皂泡沫，就会知道，通常每条边上都连接着 3 个面。这样的自旋泡沫对于三维时空中的量子引力十分重要。在四维时空中，使用另一种自旋泡沫似乎尤其有趣：每条边上连接着 4 个面。对其中一个进行切片后，我们会得到一个自旋网络，其中每个顶点连接着 4 条边。

每条边上连接着 4 个面的自旋泡沫究竟有什么有趣之处？假设我们取一个表示时空的四维流形，并对它进行三角剖分——也就是说，将它切分成 4-单形，即四面体的四维类比物。这样我们会得到一团由 4-单形组成的复杂结构；4-单形以四面体为面，而四面体又以三角形为面。

现在，我们可以构造一个自旋泡沫：每个4-单形的中心有一个顶点，每个四面体都有一条边与之相交，每个三角形都有一个面与之相交。这种技巧称为“庞加莱对偶性”：自旋泡沫中每个 d维的部分，都会与三角剖分中一个（$4-d$）维的部分相交。由于三角剖分流形中的每个四面体都有4个三角形面，因此从对偶的角度看，自旋泡沫的每条边上都会有4个面相交。由于每个4-单形有5个四面体和10个三角形，因此每个自旋泡沫顶点都会有5条边和10个面与之相交。

这似乎是四维量子引力中特别有趣的一类自旋泡沫：它与时空的三角剖分对偶。如果我们将这样的自旋泡沫切片，一般会得到一个与空间的三角剖分对偶的自旋网络！

我在“第110周”中讨论了 Barbieri 关于这类自旋网络的工作。这样的自旋网络可以很好地诠释为“三维量子几何”，也就是说，它是空间几何的一个量子态。每条标记了自旋 j 的自旋网络边，都对应一个面积，~~该面积~~与 $\sqrt{j(j+1)}$ 成正比；这就是它所相交的三角形的面积。此外，还有一个计算每个四面体体积的公式，其中涉及对应自旋网络顶点上的自旋，以及与该顶点相连的4条自旋网络边上的自旋。

如果能对与时空三角剖分对偶的自旋泡沫作出类似的几何诠释，那就好了。以下论文介绍了朝这个方向取得的一些最新进展：

2）John Barrett 和 Louis Crane，《相对论性自旋网络与量子引力》，《数学物理杂志》**39**(1998年)，3296–3302。另见gr-qc/9709028。3）John Baez，《自旋泡沫模型》，《经典与量子引力》**15** (1998年)，1827-1858。另见gr-qc/9709052。

或许在此追溯一些个人经历，也请大家见谅。Michael Reisenberger 长期以来一直在推动自旋泡沫这一思想（尽管他并未使用这个术语）.....例如，可以参阅他的这篇论文：

4) Michael Reisenberger，《规范理论与引力的世界面表述》，可从以下网址获取 gr-qc/9412035。

最近，Carlo Rovelli 和他从所谓的正则量子化方法出发，给出了量子引力自旋泡沫方法的一种启发式推导：

5) Michael Reisenberger 和 Carlo Rovelli，《圈量子引力的“曲面求和”形式》，《物理评论》**D56** （1997年），3490–3508。另可从以下网址获取：gr-qc/9612035。

今年春天，我开始发表关于自旋泡沫的演讲。沿着 Reisenberger 和 Rovelli 的思路，我试图说服大家把自旋泡沫看作费曼图的高维类比物。

从数学上说，费曼图不过是一个图，其边标记着表示-
ta某个群的.....。但从物理角度看，费曼图描述的是一个过程，其中

一群粒子发生相互作用。它的边对应于某些粒子随时间推移所描绘出的世界线，而它的顶点则代表相互作用。不同的量子场论使用具有不同类型顶点的费曼图。对于我们理论中的任意费曼图，我们都希望计算一个称为“振幅”的数。该振幅的模平方给出了相关过程发生的概率。

我们通过为每条边和每个顶点分别计算一个数，并将这些数全部相乘，来计算这个振幅。边对应的数称为“传播子”——它们描述粒子从这里到那里传播的振幅。顶点对应的数称为“顶点振幅”——它们描述各种相互作用发生的振幅。

类似地，自旋泡沫是一个二维复形，其面标记为表示，边标记为交织算子。每个自旋泡沫面都对应于自旋网络边随着时间流逝所描绘出的“世界面”。因此，除了将自旋泡沫视为一种“四维量子几何”，我们还可以将其视为一种过程。自旋泡沫量子引力方法的目标是计算每个自旋泡沫的振幅。根据我们对费曼图的了解，合理的做法似乎是为每个自旋泡沫面、边和顶点分别计算一个数，然后将它们全部相乘。

量子引力与一种更简单的理论有关，这种理论称为 BF 理论，它有一种自旋泡沫表述，称为Crane–Yetter模型——参见“第36周”、“第58周”和“第98周”。有各种线索表明，面和边的数值——即“传播子”——在量子引力中应当像在Crane–Yetter模型中那样计算。问题在于顶点振幅！顶点至关重要，因为它们代表相互作用：真正有事情“发生”的地方。我们为顶点算出的数值，代表相应相互作用发生的振幅。在我们弄清这一点之前，就无法了解我们理论的动力学！

“量子引力的自旋泡沫顶点振幅”成了我的圣杯。每次我就这方面的内容发表演讲后，都会四处询问大家能否帮我弄清这些振幅。我会把掌握的所有线索一一列出，恳请大家帮忙……或者至少给我一点灵感。三月，我在宾夕法尼亚州立大学做了一场演讲，提出了这些顶点振幅的一种候选形式——如今我已不再相信它。之后，Carlo Rovelli 告诉我，他曾尝试与Louis Crane和Lee Smolin一起推导类似的结果……但始终未能取得进展。我们也曾一起试过，却没能理出头绪。五月，我在华沙的一场会议上向John Barrett请教顶点振幅。他说自己也猜不出来。我没能让任何人猜出答案。六月，在维也纳的一场量子引力研讨会上，我向罗杰·彭罗斯问了一大堆关于旋量的问题，希望这可能就是关键——参见“第109周”。我学到了许多有趣的东西，但还是没能找到圣杯。

我一直在思考，渐渐有了一些颇有希望的想法。到了夏季，我便全身心投入这个问题，埋头进行计算。我还在写一篇关于自旋泡沫的长篇论文，内容包括一般形式体系、与三角剖分的关系、与范畴论的联系，等等。我对这篇论文很满意——但在弄清自旋泡沫顶点振幅之前，我不想把它写完。我想，那会是锦上添花。

后来某个周末，Louis Crane 给我发了封邮件，说他和 John Barrett 写了一篇论文，提出了一个量子引力模型。啊啊啊！难道他们抢先找到了圣

杯？我焦急地把自己掌握的一切都写了下来，等待星期一——他们的论文届时会出现在预印本服务器 gr-qc 上。星期一，我下载了论文，没错，他们抢在我前面了。那是一篇薄薄的小论文，我几乎立刻就读完了。他们对自旋泡沫只字未提——他们采用的是对偶的三角剖分方法——但在我看来，他们所做的就是给出了自旋泡沫顶点振幅的公式。

唉，既然打不过他们，那就加入他们吧！我完成了论文，解释他们的公式如何与我此前写下的内容相契合，并在接下来的周末把论文放到了预印本服务器上。

他们是如何得出这个公式的？关键诀窍是不把 SU(2) 用作对称群，而是使用 SU(2) × SU(2)。这是 SO(4) 的双覆盖，而 SO(4) 是四维空间中的旋转群。沿用了 Ashtekar 为广义相对论提出新变量的思路，我只使用了这个群的“左手性半边”，也就是其中一个 SU(2) 因子。不过，4-单形的几何及其与量子理论的关系，在某些方面用完整的 SU(2) × SU(2) 对称群更容易理解。

毫不奇怪，SU(2) × SU(2) 的不可约表示由一对自旋（j，k）描述。原因在于，我们可以将“左手性”SU(2) 的自旋-j 表示与“右手性”SU(2) 的自旋-k 表示作张量积，从而得到 SU(2) ×SU(2) 的一个不可约表示。因此，如果我们以 SU(2) × SU(2) 为群，那么与三角剖分对偶的自旋泡沫中，每个面和每条边都会标记一对 自旋。然而，Barrett 和 Crane 的研究表明，只有那些标记一个面或一条边的两个自旋相等的自旋泡沫，其振幅才不为零！所以从某种意义上说，我们又回到了 SU(2)——但我们看待它的方式略有不同。

我很想详细解释这个模型究竟如何运作，因为其中涉及许多优美的几何结构。不过这需要花不少时间，所以还是不说了。首先，你得真正理解所有可能的 4-单纯形的几何结构所构成的相空间。接着，你要将这个相空间量子化，从而得到“量子 4-单纯形的希尔伯特空间”。然后，你要注意到这个希尔伯特空间上有一个特殊的线性泛函，称为“彭罗斯求值”——参见“第110周”。把这些合在一起，就得到了量子引力的顶点振幅……但愿如此。

总之，回到我那段小小的个人经历……

虽然我在 Barrett 和 Crane 动手之前就开始写论文，而他们也比我先完成，但 Michael Reisenberger 开始得更早，完成得却更晚！事实上，他多年来一直在研究量子引力的自旋泡沫模型——参见“第86周”。他采用了纯粹左手性的 SU(2) 方法，这与我尝试的方法略有不同，但关系密切。他向许多人介绍过这一想法，但遗憾的是，他发表文章的速度非常慢。

听说 Barrett 和 Crane 即将发表他们的论文时，我给 Reisenberger 发了封邮件提醒他。他和我一样，都不喜欢被人抢先发表。遗憾的是，我只有他在加拿大时的旧邮箱地址，而他如今已远在乌拉圭，所以他一直没收到那封邮件。因此，Barrett 和 Crane 的论文随后又接着我的论文发表，让他大吃一惊！幸好，这促使他加快进度，发表了自己论文的一个版本：

6）Michael Reisenberger，《四维欧几里得广义相对论的格点世界面求和》，可在 gr-qc/9711052获取。

让我引用一下摘要：

> “本文为单纯形时空提出了一种四维欧几里得量子广义相对论的格点模型。文中展示了如何将该模型表示为自旋网络世界面的求和，并基于正则圈量子化广义相对论中自旋网络所定义的几何，对这些世界面作出时空几何的诠释。时空几何具有普朗克尺度的离散性，这种离散性「自然地」源于$SU(2)$表示中自旋的离散谱（而非源于使用时空格点）。该动力学格点模型是对*Reisenberger*论文《欧几里得广义相对论的左手性单纯形作用量》中经典格点模型的形式量子化；在连续极限下，它会重现欧几里得广义相对论。”

最后，为这段简短的历史作个总结，说说最近的进展。关于这些自旋泡沫模型，仍有许多疑问和谜团……它们是否真的能如预期般奏效，远未明朗。我们可能在某些细节上做得不太对，也可能完全走错了方向。4-单形的相空间涉及一些棘手的约束方程；如果处理不当，它们可能会让我们功亏一篑。Barbieri 提出了 Barrett 和 Crane 方法的一种修正版，或许能够克服约束方面的一些问题：

7) Andrea Barbieri，《相对论自旋网络顶点空间》，可见gr-qc/9709076。

John Barrett 上周来看望了我，我们在这个问题上取得了一些进展，但它仍然相当棘手。

此外，上述所有研究都涉及所谓的“欧几里得”量子引力——这就是它使用旋转群$SO(4)$的双覆盖的原因。对于“洛伦兹”量子引力，我们则需要使用洛伦兹群$SO(3,1)$的双覆盖。这个群同构于$SL(2,\mathbb{C})$。正如“第109周”所述，$SL(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示也可用自旋对来描述，因此洛伦兹理论应当与欧几里得理论相似。不过，迄今为止的大多数研究都针对欧几里得情形；这一点需要加以处理。

最后，Crane 又写了一些关于他与 Barrett 合作成果的几何意义的内容：

8) Louis Crane，《关于相对论性自旋网络和平衡态和的解释》，可见于gr-qc/9710108。

下周我会谈谈量子引力圈表示领域的其他进展，其中一些源自 Thiemann 关于哈密顿约束的研究。之后，我想谈谈完全不同的东西，比如同伦论。最近，我一直在努力让“This Week’s Finds”尽可能浅显易懂——相对而言，我是说——但我现在开始想用更专业、更难以理解的方式写作，而同伦论正是这类写作的理想主题。

第114周

1998年1月12日

课程已经开始了！不过我昨天才从巴尔的摩的联合数学会议飞回来——这是由美国数学学会、美国数学协会、工业与应用数学学会及其他学会组织的大型年度会议。人们可以看到四千多名数学家三五成群地在华丽的港口区及其周边治安混乱的贫民区闲逛，争论着抽象概念，大多对周遭世界浑然不觉。人人都吃了必不可少的蟹肉饼，这是巴尔的摩理所当然引以为豪的美食。我们当中也有些人喝了太多啤酒。

Witten 做了一场关于“M理论”的全体大会报告，尽管他实际上并没有说明 M理论究竟是什么，但报告非常有趣。Steve Sawin 和我主持了一场关于量子引力和低维拓扑的讨论会，因此我想谈谈其中的一些内容。此外，还有一场为纪念 J. Michael Boardman 而举办的同伦论专题讨论会。我将在下周谈谈那场讨论会以及其他各种事情。

我们这场讨论会中许多热议的话题，都围绕着我在 “第113周”中介绍的量子引力全新“自旋泡沫”方法展开。重大问题在于：如果不进行不切实际的计算机模拟，应如何检验这种方法？Lee Smolin 下面的论文提出了一种途径。我们是否只应对与时空某个特定三角剖分对偶的自旋泡沫求和，还是应对能够嵌入某个特定 4维时空流形中的所有自旋泡沫求和，抑或应对 所有 自旋泡沫求和？对此大家争论得很激烈。除了什么才符合物理实际这一问题之外，还存在如何避免发散无穷和这一数学问题。也许，为回答任何真正的物理问题所需的求和只涉及有限多个自旋泡沫——这是我的希望。最后，利用自旋泡沫构造的时间演化算符，究竟应被视为描述真正的时间演化，还是仅仅是投影到哈密顿约束的核上？这个问题听起来有些技术性，但对于理解该理论至关重要；它属于他们所谓的“时间问题”的一部分。

Carlo Rovelli 谈到了自旋泡沫如何在正则量子引力中产生，而 John Barrett 和 Louis Crane 则讨论了自旋泡沫在量子引力离散化路径积分（也称为态求和模型）中的应用。与较为传统的“Regge 微积分”方法一样，这些模型首先将时空切分为单形。最大的区别在于，如今三角形的面积比边的长度更为重要。不过，Barrett、Crane 等人正开始探索它们之间的关系：

1）John W. Barrett、Martin Rocek 和 Ruth M. Williams，《Regge 微积分中的面积变量札记》，《经典与量子引力》**16**（1999年），1373–1376。亦可参见 gr-qc/9710056。2）Jarmo Makela，《Regge 微积分中面积变量的变分》，《经典与量子引力》**17**（2000年），4991–4998。亦可参见gr-qc/9801022。

此外，从 Barrett–Crane 态和模型的经典极限中推导出广义相对论的爱因斯坦方程，也取得了一些进展。下面引用这篇论文的摘要：

3) Louis Crane 和 David N. Yetter，《平衡态求和的经典极限》，可在此处获取：gr-qc/9712087。

本文旨在推进对 *Barrett* 和 *Crane* 在 gr-qc/9709028 中提出的平衡态和模型作为量子引力理论的诠释。首先，我们概述 *Barrett* 和 *Baez* 在私人通信中指出的模型定义中的一个缺陷，并说明如何修正。其次，我们证明，只要态和中所应用的项具有几何解释，我们的态和的经典极限就会重现爱因斯坦–希尔伯特拉格朗日量。接下来，我们概述一项研究计划，旨在证明态和的经典极限实际上由具有几何意义的项主导。这项计划的关键在于我们为修正第一节所讨论的缺陷而对模型所作的修改。最后，我们简要讨论该模型的闵可夫斯基号差版本。

Lee Smolin 谈到了他关于将自旋泡沫模型与弦理论联系起来的想法。他为此写了一篇新论文，因此我就引用一下摘要：

4) Lee Smolin，《弦作为演化自旋网络的微扰》，《核物理学：会议录增刊》**88**（2000年），103–113。亦可见hep-th/9801022。

本文基于 *Markopoulou* 提出的一种非微扰动力学表述，展示了量子引力的非微扰表述与微扰弦理论之间的联系。在这一表述中，自旋网络态及其推广的动力学，是通过历史来描述的；这些历史具有洛伦兹时空因果结构和多指时间的离散类比。事实证明，这些历史的微扰可以用定义在嵌入离散时空的2维类时曲面上的自旋系统来描述。当历史具有闵可夫斯基时空这一经典极限时，微扰理论的作用量在首阶由曲面的时空面积给出，与玻色弦理论中的情形相同。这种非微扰量子引力表述与 *1+1*维理论之间的映射，可推广到一大类理论，其中群$\mathrm{SU}(2)$ 被扩展为任意量子群或超群。文中还论证，非微扰理论要具有良好的经典极限，一个必要条件是所得的 *1+1* 维理论能够定义出一致且稳定的微扰弦理论。

Fotini Markopolou 谈到了她最近与 Smolin 合作的成果：以一种明显局域且因果的方式构建自旋泡沫模型。

5) Fotini Markopoulou 和 Lee Smolin，《具有内禀局域因果性的量子几何》，《物理评论*D*》**58** (1998年，084032。也可见 gr-qc/9712067。

定义了一大类量子时空动力学背景独立理论的态空间和算符。量子广义相对论中的$\mathrm{SU}(2)$ 自旋网络被带标记的紧致二维曲面取代。该理论的态空间是量子群 G_q 在所有紧致（有限亏格）定向二维曲面上的不变张量空间的直和。其动力学背景无关且具有局部因果性。

> 动力学构造出具有时空几何离散特征的历史，例如因果结构和多指时间。对于 SU(2)，该理论满足贝肯斯坦界，而全息假说则在这一形式体系中得以重新表述。

这篇论文的核心技术思路是采用“加厚”或“框架化”的自旋网络，这相当于用固体把手体取代图。人们预计，这种“框架化”做法对于具有非零宇宙学常数的量子引力十分重要。这种框架化做法也出现在 Barrett 和 Crane 模型的 q 变形版本中，以及我对他们模型所作的“抽象”版本中；后者不假设存在背景时空流形。Markopoulou 和 Smolin 没有指定动力学，而是描述了一类理论，我的模型是其中的一个特例；不过，他们处理因果性的方式更适用于洛伦兹理论，而我的方式则适用于欧几里得理论。

正如我常常指出的，自旋泡沫关乎时空几何，也就是动力学；而自旋网络则是描述空间几何，也就是运动学的一种方式。运动学总是比动力学容易，因此，空间量子几何的自旋网络方法远比新近的自旋泡沫研究成熟。Abhay Ashtekar 在题为“量子黎曼几何”的演讲中概述了这些运动学问题；Kirill Krasnov 则介绍了我们对这些问题的理解如何已足以让我们计算黑洞的熵（参见 “第112周”）。这里值得一提的是，Ashtekar 与 Jerzy Lewandowski 合著论文的第二部分终于发表了：

6) Abhay Ashtekar 和 Jerzy Lewandowski，《几何的量子理论 II：体积算符》，《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**1** (1998年)，388–429。另可见gr-qc/9711031。

> 最近，人们在不涉及任何背景度规的情况下，在（广义）联络空间上引入了泛函演算。它被用于继续探索量子黎曼几何。对三维区域体积所对应的算符进行了严格的正则化。结果表明，存在两种自然的正则化方案，且每一种都能导出定义良好的算符。只需给出这些算符在以图为标签的态上的作用，就能完全确定这两个算符。最终得到的两个结果密切相关，但彼此有所不同：其中一个算符对图在其顶点处的微分结构敏感，而另一个算符仅对其拓扑特征敏感。（第二个算符最初由 *Rovelli* 和 *Smolin*，以及 *De Pietri* 和 *Rovelli* 在略有不同的框架下引入。）这两个算符之间的差异可直接归因于标准量子化歧义。由于体积算符在当前关于量子动力学的讨论中发挥着重要作用，因此文中详细讨论了两种情况下的基础假设以及正则化过程中的细微问题。

在自旋泡沫思想出现之前，量子引力圈表示的基本策略是从光滑流形上的广义相对论出发，并尝试用“正则量子化”方法将其量子化。这里最重要也最困难的是，如何将“哈密顿约束”实现为运动学态希尔伯特空间上的算子，从而写出惠勒-德威特方程；它

粗略地说，就是量子引力版的薛定谔方程。（若想了解这一方法的概要，可以试试"第 43 周"。）

迄今为止，最为严谨的尝试是 Thiemann 的这项工作：

7) Thomas Thiemann，《量子自旋动力学（QSD）》，《经典与量子引力》**第75卷** (1998), 839–873。亦可参阅gr-qc/9606089。

《量子自旋动力学（QSD）II》，《经典与量子引力》**第75卷**(1998), 875–905。亦可参阅gr-qc/9606090。

《QSD III：量子广义相对论中的量子约束代数与物理标量积》，《经典与量子引力》**第75卷**(1998), 1207–1247。亦可参阅gr-qc/9705017。

《QSD IV： 2+1 作为检验模型的欧几里得量子引力 3+1 洛伦兹量子引力》，《经典与量子引力》**第75卷**(1998), 1249–1280。亦可参阅gr-qc/9705018。

"QSD V：量子引力作为物质量子场论的自然调节器"，《经典与量子引力》**15** (1998年), 1281–1314。另可见gr-qc/9705019。

"QSD VI：量子庞加莱′代数与正则量子引力的量子能量正定性定理"，《经典与量子引力》**15** (1998年), 1463–1485。另可见gr-qc/9705020

"费米子与希格斯量子场论的运动学希尔伯特空间"，《经典与量子引力》**15** (1998年), 1487–1512。另可见 gr-qc/9705021

如果一切进展得尽可能顺利，那么哈密顿约束就会与该理论的其他约束满足良好的对易关系，从而构成某种称为"狄拉克代数"的表示。然而，正如 Don Marolf 在演讲中解释的那样，实际情况并非如此，至少在包括 Thiemann 方法在内的一大类方法中是这样：

8) Jerzy Lewandowski 和 Donald Marolf，《环路约束：一个栖息空间及其代数》，《国际现代物理学杂志 *D*》**7** (1998年)，299–330。另见gr-qc/9710016。9) Rodolfo Gambini、Jerzy Lewandowski、Donald Marolf 和 Jorge Pullin，《论自旋网络量子引力中约束代数的一致性》，《国际现代物理学杂志 *D*》**7** (1998年)，97–109。另见gr-qc/9710018。

这实在令人忧心……毕竟，凡是涉及量子引力的事情总是如此。就我个人而言，这些结果让我觉得，应该少花些时间研究哈密顿约束，尤其是考虑到它在一定程度上仍假设时空是光滑流形这一旧图景；而应多花些时间研究从离散时空图景出发的方法。不过，取得实质性进展的唯一途径，是让不同的人同时在不同方向上推进研究。

还有许多其他精彩的报告，但由于我在这里专注于量子引力，因此就不介绍那些主要讨论拓扑学的报告了。最后，我想提一下 Steve Carlip 关于时空泡沫的报告。他通过论证宇宙学常数取负值时这个和会发散，生动地说明了"对拓扑求和"有多么困难。他有一篇论文探讨了这个问题：

10) Steven Carlip, 《时空泡沫与宇宙学常数》, 《物理评论快报》**79**(1997年) 4071–4074。也可参见gr-qc/9708026。

我再次引用摘要:

> 在鞍点近似中，量子引力的欧几里得路径积分与热力学配分函数十分相似，其中宇宙学常数 Λ 扮演温度的角色，而“拓扑密度”则充当有效态密度。对于 $\Lambda < 0$，拓扑密度超指数增长，对拓扑求和会发散。在热力学中，这种发散可能预示着最高温度的存在。量子引力中或许也如此：拓扑密度迅速增加，可能会使有效宇宙学常数趋于零。

第115周

1998年2月1日

最近我一直在努力多了解一些同伦论。James Dolan 向我解释了同伦论如何为 n-范畴论提供许多重要线索，这让我对它产生了兴趣。从那以后，我们一直在尝试了解过去几十年来同伦论学者都在做些什么。由于尝试解释某件事往往是学习它的最佳方式，接下来几周我会聊聊这些内容。

不过，在深入探讨之前，我还想提及 Greg Egan 的另一部小说：

1) Greg Egan，《*Diaspora*》，Orion Books，1997年。

这本书的主人公 Yatima 是一段软件……也是一位数学家。故事始于 2975年，讲述了 ver 的诞生；她是一名“孤儿”，是城邦中的一位公民，没有父母，其心智种子由构思所随机选定。Yatima 在一个名为真理矿井的虚拟景观中学习数学。引用如下（略作修改）：

> 埋在洞穴地面中的《光辉》物体，广播着拓扑空间的定义：一个点集，被划分为若干“开子集”，这些开子集规定了各点彼此之间如何连通——无需借助“距离”或“维数”之类的概念。除了毫无结构的原始集合之外，这差不多就是最基本的形式：几乎所有名副其实的“空间”实体的共同祖先，不论它们多么异类。一条隧道通入洞穴，连接着必要的先行概念；另有六七条隧道通向外面，缓缓斜向下延伸至基岩深处，探索这个定义所蕴含的种种结果。假设 T 是一个拓扑空间……接下来会怎样？这些路线由小宝石铺成，每一颗都广播着通往某个定理途中得出的中间结果。
>
> 矿藏中的每一条隧道都由严密证明的步骤构筑而成；无论定理埋藏得多深，都可以追溯到它的每一个假设。为了准确界定“证明”的含义，数学的每个领域都有自己的一套形式系统：其中包括公理、定义和演绎规则，以及陈述定理和猜想时所需的专门术语。
>
> *[……]*
>
> 图书馆里保存着过去的矿工们充实这些定理的种种方法；*Yatima*本可以把这些细节与原始数据一同移植进心智中，从而获得数千名曾走过这条路的*Konishi*公民所积累的理解。只要接受合适的心智移植，*Yatima*就能毫不费力地赶上所有仍在世的矿工——他们正沿着各自灵光乍现的方向，不断把采煤工作面向更深处推进……代价则是，从数学意义上说，*Yatima*将沦为他们的拼凑克隆体，除了追随他们的脚步，别无所能。
>
> 如果 *ve* 曾想成为一名独当一面的矿工——像高斯和欧拉、黎曼和列维-奇维塔，

> 德拉姆和嘉当、*Radiya* 和 *Blanca* 那样，在采煤工作面提出并检验自己的猜想，那么 *Yatima* 知道，探索矿藏没有捷径，也没有替代之道。若不亲自探索矿藏，若不对旧有结果提出新见解，*ve* 就别指望开辟一条全新的方向，一条从未有人走过的道路。只有在 *ve* 绘制出属于自己的矿藏地图之后——那地图独特地皱折、沾染污渍，装饰和注释也与众不同——*ve* 才能开始猜测，下一条蕴藏着未发现真理的丰富矿脉埋在何处。

故事的结尾，经过漫长的探索之旅，主人公身处一个与我们的宇宙相隔 267,904,176,383,054 次对偶性变换的宇宙中。那时 Yatima 会做什么？继续学习数学！“前往采煤工作面的路途会漫长而艰辛，但这一次不会再有任何干扰。”

我不会再透露更多剧情。只需说，这是一部硬科幻小说——寻找刻画细腻人物的读者或许会失望，但喜欢虚拟现实、虫洞和哲学的人，应该会享受一段精彩刺激的旅程。我得承认，我对这本书有所偏爱，因为书中提到了一本我写的教科书。一位真正懂得高斯-博内定理的科幻小说作家！我们应该对此深表感激。

好了，玩笑到此为止——该谈同伦论了。其实，同伦论非常 有趣，但要真正接近采煤工作面，需要相当大的毅力。促使这一学科诞生的原始问题很容易表述。我们把拓扑空间简称为“空间”，把它们之间的连续函数简称为“映射”。如果一个映射可以连续变形成另一个映射，换句话说，如果它们之间存在一个“同伦”：一个连续函数 F：$[0,1]\times X\to Y$满足.....那么两个映射 f，g：$X\to Y$就称为“同伦的”。

$$F(0,x)=f(x)$$

and

$$F(1,x)=g(x).$$

此外，如果存在函数 f：$X\to Y$ 和 g：$Y\to X$，使得 fg 和 gf 同伦于恒等态射，那么两个空间 X 和 Y 就是“同伦等价”的。比如，圆、环带和实心环面彼此都是同伦等价的。

同伦论学者希望按照同伦等价对空间进行分类。对于两个空间 X 和 Y，他们还希望理解从 X 到 Y 的映射的同伦类构成的集合 $[X,Y]$。然而，这些问题都非常难！要解决它们，需要强大的工具。

同伦论大致有两个方面：构建工具，以及用这些工具进行计算。当然，这两者从根本上密不可分，但人们通常更倾向于其中一项。我是一名数学物理学家，总是在寻找能用于自己研究的新工具，因此比起同伦论学者将那些工具用于令人望而生畏的研究，我更感兴趣的是他们打造出的精巧闪亮的工具。

接下来的内容会充分体现这种偏好：我将着重介绍一系列优雅的概念，它们位于同伦论与范畴论的交界处。这一领域可以称为“同伦代数”。这一领域的思想不仅可用于拓扑学，也能应用于许多其他领域。事实上，这一领域最著名的两位实践者，

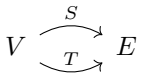
James Stasheff 和 Graeme Segal，过去十年左右一直在弦理论中运用这些思想！我最终也会试着稍微谈谈这是如何实现的。

好了……现在我开始列举一些概念和工具，先从比较基础的讲起，再逐步深入。要理解这些内容，大概需要具备一定的“数学素养”。所以，放上一张 Coltrane 的唱片，给自己做杯玛奇朵咖啡，放松下来，接着读吧。如果你觉得自己在某个地方不太懂，不妨重读《 n范畴论故事》，从“第73周”开始；那里定义了许多基本术语。

A. 预层范畴。 给定一个范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 上的“预层”是一个反变函子F： $\mathcal{C} \to$ 集合范畴。最初的例子是这样的： $\mathcal{C}$ 是一个范畴，其对象是拓扑空间 X的开子集；当开集 U 包含于开集 V时，二者之间有唯一的态射 f： $U \to V$。例如，连续实值函数构成一个预层：对于开集 F，U(U)是定义在 U上的所有连续实函数的集合；对于任意包含关系 f： $U \to V$，映射 $F(f)$： $F(V) \to F(U)$是一个“限制”映射，它将定义在 V上的任意连续函数映射为其在 U上的限制。这样就可以一次性研究 X 的所有邻域中的函数。

不过，我提起这个话题另有原因，和另一类例子有关。假设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，其对象是某种“形状”，态射 f: $x \to y$ 对应于将形状 x 作为“部分”包含在形状 y中的方式。那么， $\mathcal{C}$ 上的预层可以看作一种几何结构，它由这些形状沿着共同的部分粘合而成。

例如，假设我们想把有向图描述为预层。有向图由若干顶点和边组成，其中边具有指定的方向。由于它们由两种“形状”构成，即顶点和边，我们来构造一个小范畴 $\mathcal{C}$，其中有两个对象： V和 E。顶点可以作为边的一部分包含在其中，有两种方式：作为它的“源点”或“目标”。因此，我们的范畴 $\mathcal{C}$有两个态射，S: $V \to E$ 和 T: $V \to E$。除了恒等态射之外，这些就是仅有的态射——恒等态射对应于边是自身的一部分、顶点也是自身的一部分！省略恒等态射后，我们的小范畴 $\mathcal{C}$ 如下所示：



现在来推导一下， $\mathcal{C}$ 上的预层是什么。它是一个反变函子 F: $\mathcal{C} \to$ Set。具体来说是什么呢？它由一个集合 $F(V)$（称为“顶点集合”）、一个集合 $F(E)$（称为“边集合”）、一个函数 $F(S)$: $F(E) \to F(V)$（将每条边映射到它的源点）， 以及一个函数 $F(T)$: $F(E) \to F(V)$（将每条边映射到它的目标）组成。这就是一个有向图！

注意这里反变性所起的作用：如果一个小形状 V是大形状 E的一部分，我们的范畴中就有一个态射 S: $V \to E$，而在预层中，我们会得到一个函数 $F(S)$: $F(E) \to F(V)$，方向正好相反，它描述了每个大形状如何由一组小形状作为部分组成。

给定任意范畴 $\mathcal{C}$，实际上存在一个预层范畴，其上的预层为 $\mathcal{C}$。给定预层F, G: $\mathcal{C} \to$集合范畴，从 F到 G的态射 M就是一个自然变换 M: $F \Rightarrow G$。这种说法简洁而优美，表达了相当丰富的内容。例如，如果 $\mathcal{C}$ 是上文所述的小

范畴，使得 F 和 G 是有向图，那么自然变换M: $F \Rightarrow G$ 等同于:

- 一个映射 $M(V)$，将图 F 的每个顶点映到图 G 的一个顶点,

and

- 一个映射 $M(E)$，将图 F 的每条边映到图 G的一条边,

使得

- M图 F中任意边 e 的源点的 V 等于图 e中 $M(E)$ 的源点,

and

- M图 F中任意边 e 的目标的 V 等于图 e中 $M(E)$ 的目标。

呼！直接说 M 是函子之间的自然变换就容易多了！想进一步了解预层，可以看:

2) Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk，《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论初探》，施普林格，柏林，1992年。

B. 单纯形范畴， Δ。这是一个非常重要的范畴例子，其对象是形状——也就是单形——而其态射对应于一种形状作为另一种形状的组成部分的各种方式。 Δ 的对象称为 1，2，3，.....，分别对应于具有 1 个顶点（点）、2 个顶点（区间）、3 个顶点（三角形）的单形，依此类推。低维单形可以作为高维单形的面，方式有很多种，这些方式在 Δ中给出态射。更微妙的是，也有很多种将高维单形映射到低维单形中的方式，称为“退化映射”。例如，我们可以将一个四面体映射到一个三角形中，使四面体的顶点 $\{0,1,2,3\}$ 按如下方式映射到三角形的顶点 $\{0,1,2\}$:

$$0 \mapsto 0$$
$$1 \mapsto 0$$
$$2 \mapsto 1$$
$$3 \mapsto 2$$

这些退化映射也给出了 Δ 中的态射。

我们可以明确列出所有态射及其复合规则，但有一种更简洁的方法来描述它们。我们沿用老办法，把自然数 n 看作由所有小于 n 的自然数组成的全序 n 元集合 $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$。例如，我们把 Δ 中的对象 4，也就是四面体，看作全序集 $\{0,1,2,3\}$。这些对应四面体的 4 个顶点。于是 Δ 中的态射就是所有保序映射之间的映射。

这些全序集。因此，例如存在一个态射 $f\colon \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2\}$，由保序映射给出，满足

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 0$$
$$f(2) = 1$$
$$f(3) = 2$$

态射的复合规则显而易见：只要复合这些映射就行！很巧妙吧?

如果愿意使用一个与.....等价的 Δ 范畴（技术意义上的定义见"第76周"），我们还可以做得更巧妙：这个范畴就是所有非空全序集构成的范畴，其态射为保序映射。它的对象比 $\{0\}$、$\{0,1\}$、$\{0,1,2\}$等多得多，但它的所有对象都同构于其中某一个。在范畴论中，等价范畴在实际应用中没有区别——所以我们也大胆地把这个范畴称作 Δ。这样一来，我们就得到了对单纯形范畴的如下极其巧妙的描述：它就是有限非空全序集构成的范畴！

如果你是真正的数学家，一定会想："为什么不把空集也用上呢？"通常，遗漏空集可不是好事。它看起来似乎是"什么都没有"，但"什么都没有"往往非常重要。在这里，它对应着"空单形"，没有任何顶点！拓扑学家常常把它省略掉，但有时后来会后悔，又把它加回来（这个行话叫作"增广"）。真正的范畴论学者，例如 Mac Lane，从来不会把它省略。他们将 Δ 定义为由所有有限全序集构成的范畴。想要了解这种方法的精彩介绍，可以看看：

3) Saunders Mac Lane，《工作数学家的范畴》，施普林格，柏林，1988年。

C. 单纯集。 现在，我们把前面的两个思想结合起来："单纯集"就是单纯形范畴上的预层！换句话说，它是一个逆变函子$F\colon \ \Delta \to$ 集合范畴。从几何上看，它基本上就是一堆以任意方式沿着各个面粘合在一起的单形。我们可以把它看作一种纯粹的"空间"组合版本。这也是单纯集在拓扑学中如此流行的原因之一：它们让我们能够在真正优雅的代数环境中研究空间。我们可以定义拓扑学家喜爱的所有对象——同调群、同伦群（见 "第102周"）等等，同时完全不必处理开集、连续函数之类的东西。要了解具体做法，请尝试：

4) J. Peter May，《代数拓扑中的单纯对象》，范·诺斯特兰德，普林斯顿，1968年。

当然，并非所有人都喜欢代数那种简朴的乐趣，而更偏爱几何质朴的愉悦。代数拓扑学家为范畴、函子和自然变换而兴奋，几何拓扑学家则喜欢画出在四维空间中被扭曲得面目全非、布满孔洞的甜甜圈。一切不过是个人喜好而已。就我个人而言，两者我都喜欢！

D. 单纯对象。 我们可以用任意其他范畴 $\mathcal{C}$替换集合范畴 Set，从而将“单纯集合”的概念推广得彻彻底底。“ $\mathcal{C}$中的单纯对象”定义为一个反变函子 $F\colon \Delta \to \mathcal{C}$。存在一个范畴，其对象是这样的函子，态射则是它们之间的自然变换。

例如，“单纯阿贝尔群”就是阿贝尔群范畴中的一个单纯对象。正如我们可以为任意集合 X 关联一个以 X 为基的自由阿贝尔群，我们也可以为任意单纯集合 X 关联一个以 X 为基的自由单纯阿贝尔群。事实上，这不仅仅是类比：后者的构造正是从前者衍生出来的！有一个函子

$$L\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Ab}$$

将任意集合映射为以该集合为基的自由阿贝尔群（参见 “第77周”）。给定一个单纯集合

$$X\colon \Delta \to \mathsf{Set}$$

我们可以与 L复合，得到一个单纯阿贝尔群

$$XL\colon \Delta \to \mathsf{Ab}$$

（这里我采用自己喜欢的那种奇特顺序来书写复合）。这就是以单纯集合 X 为基的自由单纯阿贝尔群！

之后我会讲如何计算单纯阿贝尔群的同调群。结合上面这个技巧，我们就能以一种非常优雅的方式定义单纯集合的同调群。同调群是代数拓扑中非常流行的一类不变量；我们可以毫不费力地得到它们。

正如一场精彩的烟花表演会以无数烟花同时绽放收尾，让观众惊叹不已、震耳欲聋却又心满意足，我也该用一阵抽象的“爆炸”来收尾，就图个痛快。还记得我在“第53周”中关于“理论”的讨论的话，你们很容易就能查到，有一个叫作“阿贝尔群理论”的范畴。这使我们能够在任何具有有限极限的范畴中定义一个“阿贝尔群对象”。特别是，由于单纯集范畴具有有限极限（任何预层范畴都拥有所有极限），我们可以在单纯集范畴中定义阿贝尔群对象。接下来是一个非常漂亮的结果：单纯集范畴中的阿贝尔群对象与单纯阿贝尔群是一回事！换句话说，生活在单纯集世界里的抽象“阿贝尔群”，与生活在阿贝尔群世界里的抽象“单纯集”是一回事。我非常喜欢这种“抽象的交换性”。

最后，我想强调，这些内容最初都是 James Dolan 向我讲解的。我只是想把这些讲解分享给所有人。

第116周

1998年2月7日

虽然广义相对论与粒子物理学标准模型在许多方面大不相同，但它们有一个重要的共同点：二者都是规范理论。我不打算在这里解释什么是规范理论，只想推荐下面这本关于这一领域早期历史的好书：

1) Lochlainn O'Raifeartaigh，《规范理论的黎明》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1997年。

本书收录了这一主题最重要的早期论文，译成英语，并附有详尽且极具见地的评论。开篇是 Hermann Weyl 1918 年的论文《引力与电》，他在文中提出了引力与电磁学统一的设想。爱因斯坦在 Weyl 论文末尾的一段话中证明了这一理论是错误的——爱因斯坦注意到，该理论会预言原子的大小各不相同！——但它凸显了广义相对论与麦克斯韦方程组的共同特征，这些特征后来经过推广，形成了现代规范理论的概念。

书中还收录了 Theodor Kaluza 1921 年的论文《物理学的统一问题》，以及 Oskar Klein 1926 年的论文《量子理论与五维相对论》。这两篇论文开启了一股风潮——如今在弦理论中十分盛行——即通过假设时空存在额外维度来尝试统一各种力。有意思的是，规范理论的历史渊源竟然植根于这种看似更为异类的观念。最初的卡鲁扎–克莱因理论假设时空有五维，额外维度卷曲成一个小圆。从五维广义相对论出发，并利用圆的 U(1)对称性，他们得到了与 U(1)规范理论耦合的四维广义相对论——也就是麦克斯韦方程组。遗憾的是，他们的理论还预言了一种未被观测到的自旋0粒子；在介子尚未被发现的年代，这尤其成问题。

这本书里还有一项内容我并不熟悉，那就是 Wolfgang Pauli 写给 Abraham Pais 的信，题为《介子—核子相互作用与微分几何》。这套理论"于 1953 年 7 月 22 至 25 日写下，目的是看看它是什么样子"，假设存在两个额外维度，其形状是一个小球面。信的开头写道："将一个六维空间分成一个 $(4+2)$ 维空间。"当时，人们认为介子—核子相互作用具有 SU(2) 对称性，这对应于"同位旋"的守恒。Pauli 利用球面的 SU(2) 对称性，构建出具有这一对称群的理论。

显然，Pauli从Weyl的1929年论文《电子与引力》中汲取了许多灵感；这篇论文也重印在本卷中。这部杰作完成了以下诸多工作：引入二分量旋量的概念（见"第109周"），探讨了物理定律可能违反宇称和时间反演对称性的可能性，引入了广义相对论的四重标架表述和旋量联络的概念，并明确地从规范原理推导出了电磁学！Pauli以批评严苛著称，他猛烈抨击了Weyl关于违反宇称和时间反演对称性的观点——而如今这些观点已被证明是正确的。不过，就连他也承认从规范原理推导麦克斯韦方程组的重要性，并说道："在这里，我必须承认你在物理学方面的才华。"他还将许多这些思想融入了自己1953年的信中。

对于任何真正对物理学史感兴趣的人来说，这都是一本值得一读的好书！最好是已经了解一些规范理论。

现在让我继续上周开始的同伦论之旅。我当时在谈单形。单形是两栖生物，能够轻松地生活在两个不同的世界里。一方面，我们可以把它们看作拓扑空间；另一方面，也可以把它们看作纯粹的代数结构：有限全序集范畴中的对象，我们称之为 Δ。这使单形在连接拓扑学与代数的桥梁中扮演着特殊角色。

本周我将开始描述这一过程是如何运作的。下次我们会聊聊一些很酷的衍生内容。我会继续逐一列出工具：

E. 几何实现。 在 “第115周” 中，我谈到了单纯集。单纯集是范畴上的一个预层 Δ。直观地说，它是一种纯粹组合的方式，用来描述许多沿着各自的面粘合在一起的抽象单形。我们需要一种过程，将这类对象变成实际的拓扑空间；同时也需要一种过程，将拓扑空间转换回单纯集。

我们先从第一个说起。给定一个单纯集合 X，我们可以通过按照 X 给出的模式，将形状像单形的空间粘合起来，构造一个空间 $|X|$，称为 X 的“几何实现”。单纯集合之间的态射会自然地诱导出它们的几何实现之间的连续映射，因此几何实现实际上是一个函子

$$|\cdot|\colon \mathsf{SimpSet} \to \mathsf{Top}$$

从单纯集范畴 SimpSet 到拓扑空间范畴 Top。

补全细节并不难。不过，如果想更简洁一些，我们可以借助伴随函子的妙用来定义几何实现——见下文。

F. 奇异单纯集。 基本思路是，给定一个拓扑空间 X，它的“奇异单纯集”$\mathrm{Sing}(X)$ 由所有将单形映射到 X 中的可能方式组成。由此得到一个函子

$$\mathsf{Sing}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{SimpSet}.$$

我们按如下方式给出精确定义。

把单形看作显然的空间后，我们便可以为 Δ 的每个对象关联一个空间，也可以为 Δ 中的每个态射关联一个连续映射。因此，我们得到一个函子

$$i\colon \Delta \to \mathsf{Top}.$$

对于任意空间 X，我们定义

$$\mathrm{Sing}(X)\colon \Delta \to \mathsf{Set}$$

by

$$\mathrm{Sing}(X)(-) = \mathrm{Hom}(i(-), X)$$

其中，空白槽位表示 $\mathrm{Sing}(X)$ 正等着吞下一个单纯形，并吐出所有将它映射到空间 X 中的方式所构成的集合——把这些方式看作一个空间！空白

槽位还表示 Sing(X) 正等着吞下单形之间的一个 态射，并吐出集合之间的一个函数。

说过 Sing 对空间做了什么之后，它对映射又做了什么呢？同一个公式仍然适用：对于任意一个拓扑空间之间的映射 $f\colon X \to Y$，我们定义

$$\mathrm{Sing}(f)(-) = \mathrm{Hom}(i(-), f).$$

要理解这一点，可能得费些脑筋；但如果你推导一下，就会发现它确实成立。如果你觉得自己正被对象、态射、范畴和函子的浪潮淹没，别担心！医学研究已经证实，人们在学习范畴论时实际上会长出新的神经元。

事实上，尽管看起来也许并非如此，我的讲解其实极其循循善诱、体贴周到。如果我真想卖弄一番，就会把前面几段压缩成下面这一行：

$$\mathrm{Sing}(--)(-) = \mathrm{Hom}(i(-), --).$$

其中，利用如下事实，Sing 成为一个函子：对于任意范畴 $\mathcal{C}$，都有一个函子

$$\mathrm{Hom}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$$

其中 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 表示 $\mathcal{C}$的对偶范畴 $\mathcal{C}$，也就是将其中所有箭头反转后的范畴。（参见“第78周”，了解相关解释。）

或者我也可以这样说：构造复合

$$\Delta^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Top} \xrightarrow{i\times 1} \mathsf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Top} \xrightarrow{\mathrm{Hom}} \mathsf{Set}$$

再将其取对偶，得到

$$\mathrm{Sing}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{SimpSet}.$$

这些都是表达同一件事的不同方式。取一个空间的奇异单纯集，并不是真正意义上几何实现的“逆运算”，因为如果我们取一个单纯集合 X，对它作几何实现，再取其奇异单纯集，得到的东西会比 X 大得多。不过，仔细想想，就会发现有一个显然的映射从 X 到 Sing($|X|$)。类似地，如果我们从一个拓扑空间 X 出发，就有一个显然的映射从 Sing(X)$|$ 下到 X。

这意味着 Sing是 $|\cdot|$的右伴随，换句话说，$|\cdot|$是 Sing的左伴随。因此，如果想简洁一些，我们可以直接定义几何实现为 Sing的左伴随。（参见“第77周”-“第79周”，了解伴随函子的介绍。）

G.链复形。 现在，请做好准备，迎接一些毫无铺垫的定义！如果你上过基础的代数拓扑课程，很可能已经学过链复形；如果没有，你大概也不会继续读下去了——所以我就直接开始吧。

“链复形” $C_\bullet$ 是一系列阿贝尔群以及如下的“边界”同态：

$$C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} C_3 \leftarrow \dots$$

满足魔法方程

$$d_i d_{i+1} x = 0.$$

这个方程表明， d_{i+1} 的像包含在 d_i的核中，因此我们可以将“同调群”定义为商

$$H_i(C_\bullet) = \ker(d_i)/\mathrm{im}(d_{i+1}).$$

对这些内容的研究称为“同调代数”。你可以在以下这些权威巨著中读到相关内容：

2) Henri Cartan 和 Samuel Eilenberg，《同调代数》，普林斯顿大学出版社，1956年。

or

3) Saunders Mac Lane，《同调》，施普林格，柏林，1995年。

不过，如果你想读一些更易懂的内容，可以试试：

4) Joseph J. Rotman，《同调代数导论》，Academic Press，纽约，1979年。

链复形之所以有趣，主要是因为它们与拓扑空间相似，但更为简单。在“奇异同调理论”中，我们使用某个函子将拓扑空间转换为链复形，从而把拓扑学问题化归为更简单的代数问题。这通常是人们学习代数拓扑时最先学习的内容之一。在下面的 G 和H 节中，我会提醒你这是如何实现的。

尽管奇异同调非常有用，但并不是每个人都有机会了解其背后的深层原因！事实上，链复形不过是描述某一类特别简单的拓扑空间的另一种方式，这类空间称为“阿贝尔群的 Eilenberg–Mac Lane 空间的乘积”。在这样的空间中，不同维度的拓扑现象以一种尤其平凡的方式相互作用。因此，奇异同调实际上等同于忽略不同维度拓扑之间更微妙的相互作用。这正是它易于处理的原因——但归根结底也限制了它的能力。

在我继续絮叨之前，应该先介绍一下链复形范畴，我把它称为 Chain。它的对象就是链复形；给定其中两个对象，譬如 C 和C'，一个态射 $f\colon C \to C'$ 是一列群同态

$$f_i\colon C_i \to C'_i$$

使下面这个大图表交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \xleftarrow{d_3} & C_3 & \longleftarrow & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\
C'_0 & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \xleftarrow{d'_3} & C'_3 & \longleftarrow & \dots
\end{array}$$

Chain 之所以如此类似于拓扑空间范畴 Top，是因为我们可以仿照连续映射之间的同伦定义链复形态射之间的同伦，照搬

连续映射之间同伦的定义。首先，有一个称为 I 的链复形，它类似于单位区间。它看起来是这样的：

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_2} 0 \xleftarrow{d_3} 0 \xleftarrow{d_4} \dots$$

唯一非零的边界同态是 d_1，其定义如下：

$$d_1(x) = (x, -x)$$

（为什么？我们取 $I_1 = \mathbb{Z}$ 和 $I_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，因为这个区间由一个一维对象（即区间本身）和两个零维对象（即它的两个端点）构成。我们按这种方式定义 d_1，因为一个定向区间的边界由两个点组成：它的起始端点，定向为正；以及它的终止端点，定向为负。对于尚未掌握同调理论背后代数与拓扑学之间那些神秘类比的人来说，这番话注定晦涩难懂！）

有一种定义链复形 C 和 C'的“张量积” $C \otimes C'$ 的方法，它类似于拓扑空间的乘积。此外，还有一些态射

$$i, j \colon C \to I \otimes C$$

它们类似于从一个空间到它与单位区间的乘积空间的两个映射：

$$i, j \colon X \to [0,1] \times X$$
$$i(x) = (0, x), \quad j(x) = (1, x).$$

利用这些类比，我们可以在链复形态射 $f, g\colon C \to C'$ 之间定义一种“链同伦”，其方式与映射之间的同伦完全类似。也就是说，它是一个态射 $F\colon I \otimes C \to C'$，使得复合

$$C \xrightarrow{i} I \otimes C \xrightarrow{F} C'$$

等于 f，而复合

$$C \xrightarrow{j} I \otimes C \xrightarrow{F} C'$$

等于 g。这里我们用到了范畴论的一条基本原则：有了好点子，就用交换图把它写出来，然后尽情推广！

这一切的妙处在于，链复形的一个态射 $f\colon C \to C'$ 会导出同调群之间的同态，

$$H_n(f) \colon H_n(C) \to H_n(C').$$

事实上，我们得到了一个函子

$$H_n \colon \mathsf{Chain} \to \mathsf{Ab}.$$

更妙的是，如果 $f\colon C \to C'$和 $g\colon C \to C'$链同伦，那么 $H_n(f)$ 和$H_n(g)$ 就相等。因此我们说：“同调是同伦不变的”。

H. 单纯阿贝尔群的链复形。现在让我来说明一种构造链复形的巧妙方法，这也有助于解释链复形为何如此重要。回想一下“第115周”中的D 节“第115周”，单纯阿贝尔群是一个反变函子 $C\colon \quad \Delta \to \mathsf{Ab}$。特别是，对每个对象 C_n，它都会给出一个阿贝尔群 n，并且还有“面”同态

$$\partial_0, \ldots \partial_{n-1} \colon C_n \to C_{n-1}$$

这是由所有可能方式构成的：具有（$n-1$）个顶点的单纯形可以成为具有 n 个顶点的单纯形的一个面。因此，我们可以通过如下定义 d_n，将 C 构造成一个链复形： $C_n \to C_{n-1}$

$$d_n = \sum_i (-1)^i \partial_i.$$

需要验证的是

$$d_n d_{n+1} x = 0.$$

交错符号使所有项都相互抵消！借用物理学家约翰·惠勒那句不朽的话：“边界的边界为零”。

不出所料，这就给出了从单纯阿贝尔群到链复形的一个函子。我们把它称为

$$\mathrm{Ch}\colon \mathsf{SimpAb} \to \mathsf{Chain}$$

更令人惊讶的是，这是一个范畴等价！我留给你来证明这一点——如果你放弃了，可以看看第复数 节中引用的“第115周”May 的书。这意味着单纯阿贝尔群只是理解链复形的另一种方式……反过来也一样。因此，如果我想表现得特别高深，本可以跳过链复形，只谈单纯阿贝尔群！这样会节省时间，不过更多人了解链复形，所以我想提一提它们。

I. 奇异同调。 好了，现在我们已经有了许多漂亮、闪亮的机器，接下来把它们连接起来，看看会发生什么！取“奇异单纯集合”函子：

$$\mathrm{Sing}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{SimpSet},$$

“基于单纯集合的自由单纯阿贝尔群”函子：

$$L\colon \mathsf{SimpSet} \to \mathsf{SimpAb},$$

以及“单纯阿贝尔群的链复形”函子：

$$\mathrm{Ch}\colon \mathsf{SimpAb} \to \mathsf{Chain},$$

然后将它们复合起来！我们得到“奇异链复形”函子

$$C\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Chain}$$

它以拓扑空间为输入，并从中提炼出一个链复形。然后，我们可以求出这个链复形的同调群，从而得到该空间的“奇异同调”。

更妙的是，函子 C：拓扑空间范畴 $\to$ Chain 会将映射之间的同伦映射为链复形的态射之间的同伦！由此可知，空间之间的同伦映射会在这些空间的奇异同调群之间诱导出相同的同态。因此，同伦等价空间的同调群彼此同构……这样，我们就有了一个研究空间在同伦等价意义下性质的好工具。

现在我们已经掌握了奇异同调，可以轻而易举地花很长时间用它来解决各种有趣的问题。我在这里就不展开了；你可以从各种教科书中读到相关内容，例如：

5) Marvin J. Greenberg、John R. Harper，《代数拓扑：初阶课程》，Benjamin/Cummings，马萨诸塞州雷丁，1981年。

or

6) William S. Massey，《奇异同调理论》，施普林格，柏林，1980年。

这本书使用立方体而非单形。

我想在这里强调的是，奇异同调是由一些函子复合而成的，而这些函子本身也很有趣。下次我会更深入地探讨它们的用途。

> 很小的时候，我曾以为一位成功的物理学家只需要懂初等数学。后来，我非常遗憾地意识到，自己的这个想法完全错了。—— 阿尔伯特·爱因斯坦

第 117 周

1998年2月14日

真正的物理学家热爱物质的各种态。我们在学校学过的物态——固体、液体和气体——不过只是故事的开端！此外还有许多其他物态，例如液晶、等离子体、超流体和中子物质。今天我想简单介绍另外两种人们正试图创造的物态：夸克—胶子等离子体和奇异夸克物质。前者几乎肯定存在；后者则引发了许多讨论。

1）E864合作组，“在11.5 A GeV/c金 +铅碰撞中产生的带电奇异夸克物质搜索”，《物理评论快报》**79** （1997年），3612–3616。另见nucl-ex/9706004。

上周，我去听了一场关于奇异夸克物质搜索的演讲，演讲者是其中一位合作者肯尼斯·巴里什。演讲内容基于巴里什在 E864实验中的工作；该实验位于纽约长岛布鲁克海文国家实验室的“AGS”（交变梯度同步加速器）。

什么是“奇异夸克物质”？首先，请回想“第93周”中提到的：在标准模型中，玻色子携带力：

电磁力	弱力	强力
光子	W_+、W_-、Z	8 个胶子

以及构成物质的费米子 er:

轻子		**夸克**	
电子	电子中微子	下夸克	上夸克
muon	μ子中微子	奇夸克	粲夸克
τ子	τ子中微子	底夸克	顶夸克

（还有神秘的希格斯玻色子，至今尚未被观测到。）

夸克和轻子各有3代。普通物质中唯一存在的夸克是最轻的两种，即第一代的上夸克和下夸克。它们是质子和中子的组成部分，而质子和中子是唯一由夸克构成的稳定粒子。一个质子由两个上夸克和一个在强力作用下结合在一起的下夸克组成，而一个中子则由两个下夸克和一个上夸克组成。上夸克的电荷为 $+2/3$，而下夸克的电荷为 $-1/3$。它们还通过强力和弱力发生相互作用。

其他夸克质量更大，并通过弱相互作用衰变为上夸克和下夸克。然而除此之外，它们相当相似。有许多寿命很短的粒子由夸克的各种组合构成。到目前为止我们见到的所有组合都属于两种基本类型。一种是“重子”，由3个夸克组成；另一种是“介子”，由一个夸克和一个反夸克组成。这两类粒子都可大致想象成一种袋子，夸克和一大群胶子被束缚在其中。

它们为什么会被禁闭？嗯，我在“第94周”中略述过一种解释，所以你应该

阅读那篇文章以了解更多详情。目前我们只需说，强力倾向于“聚在一起”，因此能量在集中于小范围区域时会更低，而不是像电磁场那样向四处扩散。实际上，即使没有夸克，强力也可能做出类似的事情，形成短命的“胶球”，其中仅由胶子和虚夸克—反夸克对构成。（关于胶球的更多内容，请参阅“第68周”。）

出于一些我实在不理解的原因，原子核中的质子和中子并不会聚合成一大团夸克。即使在中子星中，夸克也仍被禁锢在各自的小袋子里。但计算表明，在温度或压力足够高时，应该会发生“退禁闭”。大体而言，在这种条件下，重子和介子要么猛烈碰撞，要么受到极其强烈的挤压，以至于破裂开来。结果应该会形成由自由夸克和胶子组成的汤状物质：“夸克—胶子等离子体”。

要实现退禁闭并不容易——在低压下，预计需要达到2万亿开尔文的温度！根据宇宙学的传统观点，上一次普遍出现退禁闭是在大爆炸后约1微秒！在E864实验中，他们将金原子核加速到每个核子11.5吉电子伏特的能量，并使其与铅制固定靶碰撞；显然，这样的能量还 不足以完全实现退禁闭——他们认为达到的温度约为1万亿开尔文。在欧洲核子研究中心，他们将铅原子核加速到每个原子核160吉电子伏特，并使其与铅靶碰撞。他们或许发现了退禁闭的迹象，但正如Jim Carr在最近一篇发到sci.physics的帖子中所解释的那样，他们对公开表态非常谨慎。到1999年年中，布鲁克海文的人们希望借助相对论重离子对撞机获得更高能量；该装置将使两束金原子核束流以每个核子100吉电子伏特的能量迎头相撞……更多内容请见“第76周”。

退禁闭的一个预期迹象是“奇异性增强”。除了上夸克和下夸克之外，最轻的夸克是奇夸克；在夸克—胶子等离子体所具有的高能量下，应该会形成奇异夸克。此外，由于泡利不相容原理禁止两个相同的费米子处于同一态，因此周围存在奇异夸克在能量上可能更有利，因为它们可以占据已经被上夸克和下夸克填满的较低能态。他们似乎正在欧洲核子研究中心观测到奇异性增强：

2) J¨urgen Eschke，NA35合作组，“200吉电子伏特/核子的硫核碰撞中的奇异性增强”。另见 hep-ph/9609242。

据我所知，人们几乎同样确信高温下会发生退禁闭，就像他们确信钨在高温下会沸腾一样，即使他们从未真正见过这一过程。一个更具推测性的可能性是，夸克—胶子等离子体冷却时，会以“奇异夸克物质”的形式形成“奇异滴”：由上夸克、下夸克和奇异夸克组成的大团块。这正是他们在E864中寻找的对象。他们的实验只能探测到那些存活时间足够长、能够到达探测器的奇异滴。实验运行时，他们每秒获得 10^6 次碰撞。到目前为止，他们已将每次碰撞中带电奇异滴的数量上限设为 10^{-7}，而中性奇异滴更难探测，也更难排除。若想进一步了解奇异滴，可以看看这个：

3) E. P. Gilson 和 R. L. Jaffe，《非常小的奇异滴》，《物理评论快报》**71**（1993年）

332–335。另见hep-ph/9302270。

奇异夸克物质也引起了天体物理学领域的关注。1984年，Witten 撰写了一篇论文，提出在夸克数很大的极限下，奇异夸克物质可能比普通核物质更加稳定！

4) Edward Witten，《宇宙相分离》，*Phys. Rev.* **D30** （1984年）272–285页。

最近，Farhi 和 Jaffe 的一项计算估计，在夸克数很大的极限下，奇异夸克物质的能量为每个夸克 301 兆电子伏，而铁-56 的能量为每个夸克 310 兆电子伏；铁-56 是最稳定的原子核。这提出了一种可能性：在适当条件下，中子星可能会坍缩成为“夸克星”或“奇异星”。下面引用一篇论文的摘要：

5) Dany Page，《奇异星：有限重子数下量子色动力学的基态是什么？》，载于高能唯象学，M. A. Perez 和 R. Huerta 编，世界科学出版社，新加坡，1992年，第347–356页。另见astro-ph/9602043。

> 介绍了 *Witten* 关于奇异夸克物质（“奇异物质”）在有限重子数下是量子色动力学基态的猜想，并将由奇异物质构成的恒星（“奇异星”）与中子星进行了比较。奇异星与中子星唯一可观测到的差异在于其早期热历史；文中详细研究了奇异星冷却，并将其与中子星冷却进行了比较。由此得出结论：未来若能探测到 *SN 1987A* 核心坍缩产生的致密天体所发出的热辐射，便可能首次证实奇异物质的存在。

以下是几本关于这个主题的书，可惜我一直没能找到：

6) 《物理学与天体物理学中的奇异夸克物质：物理学与天体物理学中的奇异夸克物质国际研讨会会议论文集》，Jes Madsen 编，North-Holland 出版社，阿姆斯特丹，1991年。

7) 《奇异性与夸克物质国际研讨会》，Georges Vassiliadis 等编，世界科学出版社，新加坡，1995年。

如果有人了解奇异夸克物质的最新理论，并能用通俗易懂的语言解释，我很想听听。

好了，先不说这个。现在，继续我的同伦论之旅！

到目前为止，我主要谈的是单纯集。我介绍了一个叫作“几何实现”的函子，它能把单纯集合变成拓扑空间；还介绍了另一个函子，它能把空间变成称为该空间的“奇异单纯集”的单纯集合。我还展示了如何把单纯集合变成单纯阿贝尔群，以及如何把这些 之一变成链复形……反过来也一样。

如你所见，关键在于手头要有大量函子，这样你就能把特定语境中的问题——或者更准确地说，特定范畴中的问题！——转移到其他可能更容易解决问题的语境中。最终，我想谈谈我们所使用的所有这些范畴有什么共同点：它们都是“模型范畴”。一旦

我们理解了这一点，就能更深入地看清我们一直在玩的所有游戏中究竟发生了什么。

但首先，我想再介绍几个重要的技巧，用来把这个变成那个。回顾“第115周”，有一个范畴 Δ，其对象0、1、2，.....是单形，其中 n 对应于具有 n 个顶点的单纯形——具有0 个顶点的单纯形称为“空单形”。我们还可以用纯粹代数的方式将 Δ 定义为有限全序集的范畴，其中 n 对应于全序集 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$。于是， Δ 中的态射就是保序映射。利用这个代数定义，我们可以做一些很酷的事情：

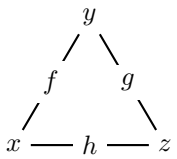
J. 范畴的神经。这是一个将范畴变成单纯集合的技巧。给定一个范畴 $\mathcal{C}$，我们如下构造单纯集合 Nerve($\mathcal{C}$)。Nerve($\mathcal{C}$) 的0维单形就是 $\mathcal{C}$ 的对象，它们看起来像这样：

$$x$$

Nerve($\mathcal{C}$) 的 1-单形就是态射，它们看起来是这样的：

$$x \xrightarrow{f} y$$

Nerve($\mathcal{C}$) 的 2-单形就是这样的交换图：



其中 $f\colon\ x \to y$、 $g\colon\ y \to z$，以及 $h\colon\ x \to z$。依此类推。一般来说，Nerve($\mathcal{C}$) 的 n-单形就是 $\mathcal{C}$ 中看起来像 n-单形的交换图！

我第一次听说这个想法时，忍不住笑了出来。这听起来像是一种疯狂的玩笑：把一个范畴变成一种由单形构成的几何对象？真够伤脑筋的！这到底能有什么用呢？

要了解这个想法在计算机科学中的一种应用，请参见“第70周”。我们很快就会看到它在拓扑学中的许多应用。不过首先，让我简洁抽象地描述一下这个把范畴变成单纯集的“神经”过程。它实际上是一个函子

$$\mathrm{Nerve}\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{SimpSet}$$

从范畴的范畴转向单纯集范畴。

首先，谈谈 Cat。它的对象是范畴，态射是函子。由于“所有范畴构成的范畴”有点令人不安，我们真正希望 Cat 的对象是所有“ փոքր”的范畴，也就是说，其对象仅构成一个集合的范畴。这样就能避免罗素悖论冒出来破坏我们的乐趣和游戏。

接下来请注意，任何偏序集都可以看作一个范畴，其中对象就是集合中的元素，并且我们规定从 x 到

y 有一个态射，当且仅当 $x \leqslant y$。由于“小于或等于”具有传递性，态射复合会自动成立。因此我们得到一个函子

$$i\colon \Delta \to \mathsf{Cat}$$

将每个有限全序集对应到其相应的范畴，并将每个保序映射对应到其相应的函子。

现在我们可以照搬在F 节“第116周”中用过的技巧。对于任意范畴 $\mathcal{C}$，我们定义单纯集合 $\mathrm{Nerve}(\mathcal{C})$如下：

$$\mathrm{Nerve}(\mathcal{C})(-) = \mathrm{Hom}(i(-), \mathcal{C})$$

想一想！如果在空白处填入单纯形 n，我们就得到 Hom(i(n) $\mathcal{C}$)，它是从该单纯形（将其视为一个范畴）到范畴 $\mathcal{C}$ 的所有函子的集合。这恰好就是 $\mathcal{C}$ 中所有形状如单纯形 n 的图示集合，正如我们所期望的那样！

我们还可以用更简洁的方式表述这一切：取

$$\Delta^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Cat} \xrightarrow{i\times 1} \mathsf{Cat}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Cat} \xrightarrow{\mathrm{Hom}} \mathsf{Set}$$

并将其取对偶，得到

$$\mathrm{Nerve}\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{SimpSet}.$$

我还要指出，拓扑学家通常会用 Δ 的拓扑学家版本来做这些事情，其中不包含“空单纯形”。

K. 范畴的分类空间。如果将我们新的函子复合起来

$$\mathrm{Nerve}\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{SimpSet}$$

与“几何实现”函子

$$|\cdot|\colon \mathsf{SimpSet} \to \mathsf{Top}$$

在E节中定义，我们就得到了一种将范畴变为空间的方法，称为它的“分类空间”。这个技巧最早由同伦论学家 Graeme Segal 使用，他后来成为共形场论领域的权威。他在以下论文中发明了这一技巧：

8) Graeme B. Segal，《分类空间与谱序列》，高等科学研究所数学出版物**34**（1968年），105–112。

事实证明，每个合理的空间都是某个范畴的分类空间！更准确地说，每个作为某个单纯集合的几何实现的空间，都同胚于某个范畴的分类空间。为此，假设空间 X 是单纯集合 S 的几何实现。取 S 中所有单形构成的集合，并按如下规则赋予偏序：若 x 是 y 的一个面，则 $x \leqslant y$。这里的“面”并不只是指比 y 维数少一维的面；我允许维数小于或等于 y 的面的任何维数。这样我们就得到一个偏序集。现在把它看作一个范畴 $\mathcal{C}$。那么 Nerve($\mathcal{C}$) 就是 S 的“重心细分”。换句话说，它是

一个新的单纯集合，它是通过把 S 的单形切分成更小的部分，并在每个单形的中心放置一个新顶点而形成的。因此，Nerve($\mathcal{C}$) 的几何实现与 S 的几何实现同胚。

有许多有趣的特殊范畴，例如群胚、幺半群或群（参见"第74周"）。这些是"分类空间"构造的特殊情形，其中有些实际上早于一般情形就已被发现。下周我会进一步谈谈其中一些，因为它们在拓扑学中非常重要。

有时，人们也会研究自己感兴趣的范畴；这些范畴可能与拓扑学没有明显的联系，而人们则通过研究它们的分类空间来了解它们。这为将拓扑学应用于各种主题提供了出人意料的途径。一个很好的例子是"代数K理论"，我们从某种环上模的范畴入手。

L. Δ 作为由幺半对象生成的自由幺半范畴。回想一下，"幺半群"是一个带有乘积和单位元的集合，并满足结合律以及左、右单位律。将这一概念范畴化后，我们得到"幺半范畴"的概念：一个带有乘积和单位对象的范畴 $\mathcal{C}$，并且满足相同的定律。幺半范畴的一个很好的例子是带有通常笛卡尔积的集合范畴 Set，或带有通常张量积的向量空间范畴 Vect。我们通常将幺半范畴中的乘积称为"张量积"。

现在，"微观宇宙原理"指出，代数结构常常喜欢存在于自身的范畴化版本之中。这有点像"侏儒理论"：我脑袋里坐着一个小小的我，透过我的眼睛观察，并替我思考所有事情。不过，与那个理论不同，这是真的！

例如，我们可以在任意幺半范畴中定义一个"幺半对象"。给定一个幺半范畴 A，其张量积为 $\otimes$，单位对象为 1，我们将 A 中的一个对象 a 称为幺半对象，只要它配备了一个"乘积"

$$m\colon a \otimes a \to a$$

和一个"单位"

$$i\colon 1 \to a$$

它们满足结合律以及左右单位律（可写成交换图）。集合范畴 中的幺半对象就是幺半群，而 向量空间范畴 中的幺半对象则是代数。我还在"第89周"介绍过一些截然不同的幺半对象例子。

现在来考虑"由一个幺半对象生成的自由幺半范畴"。换句话说，考虑一个幺半范畴 A，其中有一个幺半对象 a；并假设 A 没有对象和态射，除了"幺半范畴"和"幺半对象"的定义所要求的那些方程之外，不满足任何方程。

因此，A 的唯一对象是单位对象，以及 a 和它的张量幂。类似地，A 的所有态射都是通过复合和张量积态射构造而成的

m 和 i。所以 A 看起来是这样的：

$$1 \longrightarrow a \;\underset{\leftarrow m \rightarrow}{\overset{\rightarrow 1\otimes i \leftarrow}{\rightarrow i\otimes 1 \leftarrow}}\; a\otimes a \;\underset{\leftarrow 1\otimes m \rightarrow}{\overset{\rightarrow 1\otimes 1\otimes i \leftarrow}{\overset{\rightarrow 1\otimes i\otimes 1 \leftarrow}{\rightarrow i\otimes 1\otimes 1 \leftarrow}}}\; a\otimes a\otimes a \quad \ldots$$

这里我没有画出所有态射，只画了足够多的态射，使得 A 中的每个态射都是这类态射的复合。

这是什么范畴？它就是 Δ！a 的 n次张量幂对应于具有 n 个顶点的单纯形。向右的态射描述了具有 n 个顶点的单纯形如何成为具有 $n+1$ 个顶点的单纯形的一个面。向左的态射对应于“退化映射”——将具有 $n+1$ 个顶点的单纯形压缩成具有 n个顶点的单纯形的方式。

所以：除了其他描述之外，我们还可以将 Δ 定义为一个幺半对象上的自由幺半范畴！下次我们将看到，这为何是同调代数的基础。

第118周

1998年3月14日

和许多同龄人一样，我年轻时对数学和物理学的兴趣，是由《科学美国人》滋养起来的，尤其是马丁·加德纳的精彩专栏。此后，这本杂志似乎每况愈下。对我而言，压垮骆驼的最后一根稻草是一篇荒唐的文章，讨论数学中所谓的“证明之死”，作者对这个领域完全不了解。那篇文章的作者后来又写了一本书，宣称“科学终结”，随后经营起一家成功的殡仪馆连锁店。

然而，最近我很高兴地发现，在一篇刊登于——没错，就是《科学美国人》！——的文章中，有一段简洁有力的文字反驳了这种世纪末悲观主义。

1) 迈克尔·J·达夫，《曾经被称为弦的理论》，《科学美国人》**278**（1998年2月），64–69。

文章开篇写道：

> 在某些评论家声称科学已经终结、理由是所有重要发现都已完成之际，值得强调的是，*20*世纪物理学的两大支柱——量子力学和爱因斯坦的广义相对论——彼此并不相容。

因此，此时便宣称科学终结，甚至宣称粒子物理学终结（两者可不是一回事！），都未免荒唐地为时过早。诚然，寻求一种统一自然界所有力和粒子的统一理论正面临困难。一方面，粒子加速器变得非常昂贵；另一方面，很难想象有一种自洽而优雅的形式体系，能够同时涵盖广义相对论和粒子物理学标准模型，更不用说还能提出可检验的新预言了。不过，真正的爱情之路从来都不是一帆风顺的。

Duff 本人的构想确实颇有魅力。他长期以来一直主张将弦理论推广为一种关于高维“膜”的理论。如今，人们把这些膜称为“p-膜”，以标明膜的维数：0-膜是点粒子，1-膜是弦，2-膜是二维曲面，依此类推。

长期以来，高维膜理论并不受欢迎，即使在弦论学家中也是如此，因为弦理论中消除无穷大的特殊技巧似乎对高维膜不起作用。但最近，膜大受追捧：它们似乎会出现在弦理论中，不管你一开始是否把它们加入其中！事实上，它们似乎是证明五种不同的超对称弦理论其实都是同一个更深层理论的不同侧面的关键——这个理论有时被称为“M理论”。

现在，我其实完全不懂这些东西，但最近一直在努力学习，所以还是想说几句，希望有真正的专家能纠正我的错误。我说的很多内容都来自下面这篇很棒的综述文章：

2) M. J. Duff，《超膜》，可通过以下链接获取 hep-th/9611203。

还有弦理论的圣经：

3) Michael B. Green、John H. Schwarz 和 Edward Witten，《超弦理论》，共两卷，剑桥大学出版社，剑桥，1987年。

我们先从超弦理论说起。这里的“超”指的是：我们拥有的弦不仅仅是振动模对应玻色子的弦，还具有额外自由度，对应费米子。我们实际上可以把超弦看作是在“超空间”中摆动的弦：这是一种在通常的“玻色子”维度之外，还具有额外“费米子”维度的空间。这些额外维度由彼此反交换、并与通常的玻色子坐标（它们彼此当然是对易的）对易的坐标来描述。这相当于我们非常认真地看待玻色子与费米子的区别，甚至从一开始就将其纳入对时空的描述！若想深入了解超空间的数学，请参阅：

4) Bryce DeWitt，《超流形》，剑桥大学出版社，剑桥，1992年。

更深入地说，“超”指的是“超对称”，这是一种特殊的对称变换，会混合玻色子坐标和费米子坐标。如果每个玻色子坐标都对应一个费米子坐标，我们就称之为“$N = 1$ 超对称”；如果对应两个，则称之为“$N = 2$超对称”，依此类推。

和所有优美的物理学理论一样，只要知道作用量的公式，原则上我们就能推导出关于超弦理论的一切。对于玻色弦而言，作用量非常简单。随着时间流逝，一根弦会在时空中描绘出一个二维曲面，称为“弦世界面”。作用量就是这个世界面的面积。

因此，对于超弦理论，我们需要一个表示超空间中曲面的“超面积”的公式。而且，我们需要它在超对称变换下保持不变量。令人惊讶的是，只有当时空的维数为3、4、6或10时，这才可能实现。更准确地说，这些正是 $N = 1$超对称弦理论作为经典理论成立的维度。

注意：这些维度恰好比四个赋范除法代数的维度多2：实数、复数、四元数和八元数！这并非巧合。Robert Helling最近在`sci.physics.research`上发表了一篇很棒的文章，我已将其附在“第104周”之后。基本思想是，我们可以用弦世界面上的一个场来描述弦在 n维时空中的振动，该场具有 $n - 2$个分量，分别对应于垂直于世界面的 $n - 2$ 个方向。为了得到一个在超对称变换下保持不变量的作用量，我们需要发生一些神奇的抵消。只有当我们能够将这个场看作取值于某个赋范除法代数时，这种情况才会发生！

这是超弦理论中颇为奇妙的一点：基本思想很简单，但当你试图让它真正运作起来时，就会遇到许多障碍；只有在某些特殊情况下，这些障碍才会消失——这要归功于一系列神秘的、美妙的数学事实之间的巧合。这些“巧合”或许只是表明，我们对这套理论的理解还不够深入。眼下，我对超弦理论的代数方面最感兴趣，尤其是它与八元数、李群 E_8, 等“例外代数结构”之间的关系。学习超弦理论时，我喜欢留意这些结构以各种方式出现的情形，就像在读神秘小说时记住那些线索一样。

有趣的是，超弦理论的量子版本比经典版本更微妙。据我上次查阅时所知，它只有在维数为10时才有意义。因此，它本质上带有某种八元数特性！关于这个角度的更多内容，请参阅：

5) E. Corrigan 和 T. J. Hollowood，《例外约当代数与超弦》，《数学物理通讯》**122**(1989), 393. 6) E. Corrigan 和 T. J. Hollowood，《一种与例外约当代数相关的交换非结合代数的弦构造》，《物理快报》**B203** (1988), 47。

我稍后还会给出更多参考文献。

正如我在“第72周”中解释的那样，10维超弦理论实际上有5种变体：

1. I型超弦——这是开弦，而非闭合环路。2. IIA型超弦——闭弦，其左移和右移费米子模具有相反的手征性。3. IIB型超弦——闭弦，其左移和右移费米子模具有相同的手性。4. E_8 杂化超弦——闭弦，其左移模纯为玻色子，对称群为 $E_8 \times E_8$。5. $\mathrm{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$ 杂化超弦——闭弦，其左移模纯为玻色子，对称群为 $\mathrm{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$

要从其中任何一种理论中得到四维物理，我们需要把十维时空看作一个丛：在传统的四维时空的每个点上方，都附着着一个小小的六维“卡拉比–丘流形”。不过，要理解超弦理论对普通粒子物理学的影响，还有另一个非常有用的步骤，那就是考察低能极限。在这个极限下，只有弦的最低能量振动模会产生作用，每一种振动模都表现得像一种不同的无质量粒子。因此，在这个极限下，超弦理论的表现就像普通的量子场论。

我们会得到什么场论？这是一个非常重要的问题。在十维闵可夫斯基时空中，这种场论看起来最简单；当我们把六个维度卷曲起来，并将其视为四维场论时，情况就会变得更复杂。因此，我们还是只谈简单的情形吧。

无论我们从哪一种超弦理论出发，其低能极限看起来都具有某种形式的“与超杨–米尔斯场耦合的超引力”。这是什么呢？超引力基本上是将广义相对论的爱因斯坦方程推广到超空间后得到的理论。同样，超杨-米尔斯理论是杨–米尔斯方程的超对称版本——这些方程在粒子物理学中十分重要，因为它们描述了除 引力之外的所有力。因此，超弦理论蕴含着广义相对论以及其他自然力的雏形——或者至少是它们的超对称类比。

和超弦理论一样，超杨–米尔斯理论只能在3、4、6和10维时空中成立。（关于这一点的更多内容，请参见“第93周”。）不同形式的超引力在不同维度中才有意义，相关说明见：

7) Y. Tanii, 《不同维度中的超引力简介》, 《不同维度中的超引力简介》, *Soryushiron KenkyuElectronics* **96** （1998年）, 315–351.. 亦可见hep-th/9802138。

特别是，超引力理论所能成立的最高维数是11维（此时只有 $N = 1$ 超引力）。请注意，这比弦理论所偏好的维数多一维！这个问题困扰了人们很长时间。如今，M理论似乎正开始解开这些谜团。另一个有趣的发现是，11维超引力与例外李群 E_8 有关：

8) Stephan Melosch 和 Hermann Nicolai, 《超引力的新正则变量》 $d = 11$, 《物理快报*B*》 **416**（1998）, 91–100。另见 高能物理理论/9709227。

不过，我在这里有点说得太远了！我现在谈的是10维超弦理论的低能极限。我说过，它相当于“与超杨–米尔斯场耦合的超引力”，现在我正试着稍微展开说明。那么，从11维的$N = 1$ 超引力出发，只需要求所有场在一个方向上保持常数，就能得到10维超引力理论——这种技巧称为“维数约化”。它称为“IIA型超引力”，因为它出现在IIA型超弦的低能极限中。10维中还有另外两种超引力形式：“IIB型超引力”出现在IIB型超弦的低能极限中，第三种则出现在I型超弦和杂化超弦的低能极限中。另两种超引力形式都是手征的——也就是说，它们内含“左右手性”。

现在让我们转向高维超对称膜，即“超膜”。Duff 在一份称为“膜扫描”的图表中概述了这一主题。该图表列出了已知的经典超对称 p-膜理论。当然，随着时间的推移，一个 p-膜会描绘出一个（p+1）维曲面，因此从时空的角度来看，p+1 才更有意思。不过，无论如何，下面是 Duff 的图表，展示了在哪些时空维度 d 中可能存在超对称p-膜理论：

$d \diagdown p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11			✓			✓				?	
10	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
9	✓				✓						
8				✓							
7			✓			✓					
6	✓	✓	✓	✓	✓	✓					
5	✓		✓								
4	✓	✓	✓	✓							
3	✓	✓	✓								
2	✓										
1											

我们立刻注意到一些规律。首先，在3、4、6和10维中，我们看到水平条纹：所有可能的 p膜理论都存在于这些维度中。我不知道

这为何成立，但这必定与超弦理论和超杨–米尔斯理论在这些维度中能够成立有关。其次，有四种特殊的 p膜理论：

- 4 维中的2-膜
- 6维中的3-膜
- 10维中的5-膜
- 11维中的2-膜

它们分别与实数、复数、四元数和八元数有关。Duff为我们提供了以下论文，以供进一步了解：

9) G. Sierra，“将Jordan代数与弗洛伊登塔尔三重系统理论应用于粒子与弦”，《经典与量子引力》**4**（1987年），227。

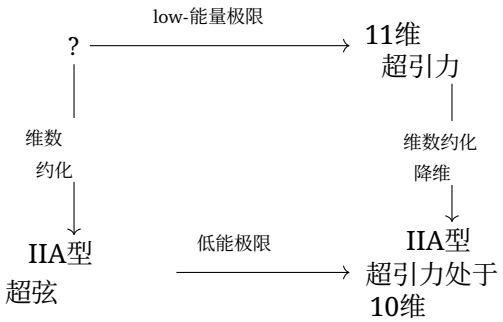
10) J. M. Evans，“超对称杨–米尔斯理论与除法代数”，*Nucl.Phys.* **B298**（1988年），92–108。

从这四种 d 维“基本” p膜理论出发，我们可以通过对时空和 p膜进行维数约化，得到 $d-k$维的（$p-k$）膜理论。因此，我们看到从这些“基本”理论出发，斜向左下方延伸的对角态射。请注意，这些对角态射包括3、4、6和10维超弦理论！

最后，我想简单谈谈M理论、超弦和超引力之间的联系。我已经说过：

1）10维中的IIA型超引力是11维超引力的维数约化结果；2）IIA型超弦的低能极限是与超杨–米尔斯场耦合的IIA型超引力。

这表明存在一种 11 维理论，可以填补下方的问号：



这种猜想中的理论称为“M理论”。这种理论的具体细节仍相当神秘，但它与 11 维中的超对称 2-膜理论有关，这并不令人意外——因为经过维数约化后，它们会产生 10 维中的超弦。更令人惊讶的是，它也 与 11 维中的五维膜 理论有关。原因在于，11 维超引力存在“孤子”解——这类解能保持自身形状而不发生弥散，其形状类似于 5-膜。如今，人们相信这些也是 M理论的另一种映现。

我所勾勒的图景看起来或许有些繁复，但它其实只是一个更宏大、更精细的图景的一小部分；那个图景将全部5种超弦理论与M理论联系起来。不过，我想就此打住！也许以后等我了解得更多，就能补充一些细节。顺便说一句，感谢 Dan Piponi 指出了《科学美国人》上的那篇文章。

想进一步了解这方面的内容，请参阅以下综述文章：

11) W. Lerche，《弦理论的最新进展》，可见于 hep-th/971024 6.

12) John Schwarz，《弦理论的现状》，可见于 hep-th/9711029。

13) M. J. Duff，《M理论（曾经被称为弦的理论）》，刊于《国际现代物理学杂志*A*》**11**（1996年），5623–5642。亦可见于 hep-th/9608117。

如果你对非技术性的概览感兴趣，第一篇尤其不错；另外两篇则更加详细。

好了。现在，让我们回到我的同伦论之旅！我本来答应要谈谈群和幺半群的分类空间，但这篇文章已经写得相当长了，所以我只谈另一件我承诺过的事：同调代数的《基础》。那么，请记住：

一旦我们能够从某种东西中挤出一个单纯集合，就有各种各样的方法来研究它。我们可以把这个单纯集合变成一个空间，然后运用拓扑学的所有方法来研究这个空间。或者，我们也可以把它变成一个链复形，并应用同调理论。因此，掌握将各种各样的构造转化为单纯集合的技巧非常重要：群、环、代数、李代数，凡是你能想到的都可以！方法如下……

M. 伴随产生的单纯对象。 还记得第 D 节《第115周》中提到的内容吗？在某个范畴中，一个“单纯对象”是从 Δ 到该范畴的逆变函子。在下文中，我将把 Δ 视为包含空单形的单纯形范畴版本。拓扑学家通常不会这样做，所以对于我所称的“单纯对象”，他们会称之为“增广单纯对象”。随它去吧。

具体来说，范畴中的单纯对象由一系列对象 x_0、x_1、x_2、……以及如下所示的态射组成：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \longrightarrow i_1 \longrightarrow & & \\ & & & \longrightarrow i_0 \longrightarrow & & & \longrightarrow i_0 \longrightarrow & & \\ x_0 & \longleftarrow d_0 \longrightarrow & x_1 & \longleftarrow d_0 \longrightarrow & x_2 & \longleftarrow d_0 \longrightarrow & x_3 \ldots \\ & & & \longleftarrow d_1 \longrightarrow & & \longleftarrow d_1 \longrightarrow & & & \\ & & & & & \longleftarrow d_2 \longrightarrow & & & \end{array}$$

这些态射 d_j 称为“面映射”，而这些态射 i_j 称为“退化映射”。它们必须满足一些方程。这里我就不费事把方程写出来了，因为只要读一读B节《第114周》，你自己就能推导出来。

现在，假设我们有一个伴随，也就是一对伴随函子：

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

这意味着我们有自然变换 ns

$$e\colon LR \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$$
$$i\colon 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$$

满足几个方程，我就不再写出来了，因为我已经在“第79周”和“第83周”中解释过了。

那么，范畴 $\mathcal{D}$ 中的对象 d 会自动给出如下的单纯对象：

$$d \xleftarrow{\ e\ } LR(d) \;\begin{array}{c}\xleftarrow{e\cdot LR} \\ \xleftarrow{LR\cdot e} \\ \longrightarrow \\ \end{array}\; LRLR(d) \;\begin{array}{c}\xleftarrow{e\cdot LRLR} \\ \xleftarrow{LR\cdot e\cdot LR} \\ \xleftarrow{LRLR\cdot e} \\ \to \\ \to \\ \end{array}\; LRLRLR(d)$$

其中 $\cdot$ 表示函子和自然变换的水平复合。

例如，如果 AbGp 是阿贝尔群范畴，那么我们有一个伴随

$$\mathsf{Set} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathsf{AbGp}$$

其中 L 将每个集合映射为该集合上的自由阿贝尔群，而 R 将每个群映射为它的底层集合。因此，给定一个阿贝尔群，上述技巧便可构造出一个 AbGp 中的单纯对象——换句话说，就是一个单纯群。它有一个底层单纯集合，我们可以由此按照H 节“第116周”中的方法构造出一个链复形。这样一来，我们就能用同调理论研究群了！我们可以用完全相同的方法定义许多其他代数结构的同调（和上同调）。

注意：我没有解释伴随函子的定义中的方程——我并没有把它们写下来——为何能推出单纯对象定义中的方程——这些方程我也没有写下来！

关键在于，理解这些方法为何奏效，还有一种更具概念性的方法。还记得上周K 节中提到的，Δ 是“由一个幺半对象生成的自由幺半范畴”。这意味着，只要我们在幺半范畴 $\mathcal{M}$中有一个幺半对象，就会得到一个幺半函子

$$F\colon \Delta \to \mathcal{M}.$$

这给出了一个函子

$$G\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to M^{\mathrm{op}}$$

因此： $\mathcal{M}$ 中的一个幺半对象给出了 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$中的一个单纯对象。

实际上，如果 $\mathcal{M}$ 是一个幺半范畴，那么 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 也会成为一个幺半范畴，且具有相同的张量积和单位对象。因此，同样可以说， $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 中的幺半对象会给出 $\mathcal{M}$中的单纯对象！

$\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 中的幺半对象还有另一个名称，即“ $\mathcal{M}$中的余幺半对象”。记住，$\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 就像 $\mathcal{M}$ ，只是所有箭头方向都反过来了。因此，如果我们在 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$中有一个幺半对象，那么在 $\mathcal{M}$中也会得到一个类似的结构，只是所有箭头方向都反过来了。更准确地说， $\mathcal{M}$ 中的余幺半对象是一个对象，记作 m，具有“余乘法”

$$c\colon m \to m \otimes m$$

和“余单位”

$$e\colon m \to 1$$

态射，并满足“余结合律”以及左、右“余单位律”。只需将结合律和左、右单位律写成交换图，然后把所有箭头方向反过来，就能得到这些律。

因此：幺半范畴中的余幺半群对象 $\mathcal{M}$ 会给出一个单纯对象 $\mathcal{M}$。现在来看看这与伴随函子有什么关系。假设我们有一个伴随，也就是说，我们有一些函子

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

以及自然变换

$$e\colon LR \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$$
$$i\colon 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$$

它们满足我之前没有写出来的那些相同方程。

令 $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{C})$ 为一个范畴，其对象是从 $\mathcal{C}$ 到其自身的函子，态射则是这些函子之间的自然变换。它是一个幺半范畴，因为我们可以复合从 $\mathcal{C}$ 到其自身的函子。在 “第92周” 中，我证明了$\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{C})$ 中有一个幺半对象，也就是 RL。这个幺半对象的乘积为

$$R \cdot e \cdot L\colon RLRL \Rightarrow RL$$

单位元为

$$i\colon 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$$

人们通常把这类东西称为“单子”。

类似地，$\mathbf{Hom}(\mathcal{D},\ \mathcal{D})$ 是一个包含余幺半群对象（即 LR）的幺半范畴。该余幺半群对象的余乘法为

$$L \cdot i \cdot R\colon LR \Rightarrow LRLR$$

余单位为

$$e\colon LR \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$$

人们把这个东西称为“余单子”。但这里重要的是，我们已经看到，这个余幺半群对象会自动在 $\mathbf{Hom}(\mathcal{D},\ \mathcal{D})$ 中给出一个单纯对象！如果我们选取 $\mathcal{D}$ 中的任意对象 d，就会得到一个函子

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{D},\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$$

通过取

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{D},\mathcal{D})\times\mathcal{D}\to\mathcal{D}$$

并在第二个参数中代入 d。这个函子让我们可以把 Hom($\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$) 中的单纯对象映射到 $\mathcal{D}$ 中的单纯对象。瞧！

第119周

1998年4月13日

最近我一直没怎么更新 This Week's Finds，因为忙着在 Riverside 把事情办妥，好让我能以相当轻松的心情，来宾夕法尼亚州立大学这里的引力物理与几何中心访问。的确，有时我的整个人生似乎都像是一连串没完没了的干扰，专门妨碍我写 This Week's Finds。不过，现在我已经到了这里，准备好享受一番了……

最近我一直在尝试了解大统一理论，也就是"大统一理论"。这类理论在20世纪70年代末和20世纪80年代初颇为流行。当时，粒子相互作用的标准模型已经成熟，人们开始寻找一种更好的理论，来统一该模型中的所有力和粒子——简而言之，统一除引力之外的一切。

标准模型运行良好，但它相当繁复，因此人们自然希望其背后存在某种更优雅的理论。还记得它是怎么回事吗：

规范玻色子

电磁力	弱力	强力
光子	W_+、W_-、Z	8 个胶子

费米子

轻子		**夸克**	
电子	电子中微子	下夸克	上夸克
muon	μ子中微子	奇夸克	粲夸克
τ子	τ子中微子	底夸克	顶夸克

希格斯玻色子（尚未发现）

?

强力、电磁力和弱力都由杨-米尔斯场描述，其规范群为 SU(3) × SU(2) ×U(1)。接下来，我会假设你了解规范理论的基本知识，或者至少能装作了解。

SU(3)是强力的规范群，其 8 个生成元对应胶子。SU(2) ×U(1)是电弱相互作用的规范群，它将电磁相互作用与弱力统一起来。并非SU(2)的生成元对应W_+、W_- 和Z，而U(1)的生成元对应光子。实际上，光子对应的是一个更隐蔽的U(1)子群的生成元，它斜向嵌在SU(2) × U(1)之中；这里要记住的基本公式是：

$$Q = I_3 + Y/2$$

其中， Q 是普通电荷， I_3 是“弱同位旋”的第3个分量，即SU(2)中对应于以下矩阵的生成元

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

而 Y“超荷”是 U(1) 因子的生成元。希格斯粒子的作用是自发破缺 SU(2) × U(1) 对称性，同时赋予所有有质量粒子以质量。不过，我不想在这里讨论这些；我想重点谈谈费米子，以及它们如何构成规范群 SU(3) × SU(2) × U(1) 的表示，因为我想谈谈大统一理论如何试图简化这一图景——代价是必须假设存在更多希格斯玻色子。

如上图所示，费米子分为 3 代。我想解释一下，给定一代中的费米子如何组成 SU(3) × SU(2) × U(1) 的不可约表示。所有各代的情况都相同，所以我只讨论第一代。此外，每个费米子都有一个对应的反粒子，但反粒子只是按照对偶表示进行变换，因此这里将忽略反粒子。

在告诉你它如何运作之前，我应该提醒你，所有费米子除了是 SU(3) × SU(2) × U(1) 的表示之外，也是自旋为 $1/2$ 的粒子。有质量的费米子——夸克、电子、μ子和τ子——都是狄拉克旋量，这意味着它们可以沿任意轴朝两个方向自旋。无质量费米子——中微子——是外尔旋量，这意味着它们总是沿运动轴逆时针自旋。这很合理，因为它们没有质量，以光速运动，所以所有人都能对它们的运动轴达成一致！因此，有质量的费米子有两种螺旋度态，我们称之为“左手性”和“右手性”；而中微子只有“左手性”这一种形式。

（这里讨论的是经典形式的标准模型。我没有考虑处理中微子质量可能非零所需的任何修正。关于标准模型、中微子质量和不同类型旋量的更多内容，见“第93周”。）

好。标准模型将左手性中微子和左手性电子归入 SU(3) ×SU(2) × U(1) 的同一个不可约表示：

$$(\nu_L, \mathrm{e}_L) \qquad\qquad (1, 2, -1)$$

这个二维表示称为 (1,2, −1)，这意味着它是 SU(3) 的一维平凡表示、SU(2) 的二维基本表示和超荷为 -1 的 U(1) 一维表示的张量积。

类似地，左手性上夸克和下夸克组合在一起，构成：

$$(\mathrm{u}_L, \mathrm{u}_L, \mathrm{u}_L, \mathrm{d}_L, \mathrm{d}_L, \mathrm{d}_L) \qquad\qquad (3, 2, 1/3)$$

这里我把两种夸克都写了 3 次，因为它们也各有 3 种色态。换句话说，这个六维表示是 SU(3) 的三维基本表示、 SU(2) 的二维基本表示和超荷为 $1/3$ 的 U(1) 一维表示的张量积。这就是我们把这个表示称为 (3,2, 1/3) 的原因。

（如果你熟悉 U(1) 的不可约表示，就会知道它们通常用整数来参数化。这里我们使用的是除以 3 的整数。原因是，在夸克被发现之前，人们将电子电荷定义为 -1

而夸克被发现后，人们才发现，电荷的最小单位只有此前所认为的 $1/3$ 那么大。）

右手电子单独处于一个一维表示中，因为不存在右手中微子：

$$\mathrm{e}_R \qquad\qquad (1,1,-2).$$

同样，右手上夸克单独处于一个三维表示中，右手下夸克也是如此：

$$(\mathrm{u}_R,\mathrm{u}_R,\mathrm{u}_R) \qquad\qquad (3,1,4/3)$$

$$(\mathrm{d}_R,\mathrm{d}_R,\mathrm{d}_R) \qquad\qquad (3,1,-2/3)$$

就这些了。如果你想研究这些内容，可以试着用这个公式

$$Q = I_3 + Y/2$$

来计算所有这些粒子的电荷。例如，由于右手电子在 SU(2) 的平凡表示下变换，它的 $I_3 = 0$ 为，而如果你往上看，就会发现它的 $Y = -2$ 为。这意味着它的电荷是 $Q = -1$，正如我们早已知道的那样。

总之，很显然我们手头的情况有点乱！标准模型中充满了引人入胜的模式，但也复杂得令人恼火。大统一理论的想法，是通过将群 SU(3) × SU(2) × U(1) 嵌入一个更大的群中，从所有这些数据里找出潜藏的模式。能做到这一点的最小维数“单”李群是 SU(5)。这里的“单”是一个技术术语，用来排除例如由其他群的乘积构成的群——这些群不够“统一”。Georgi 和 Glashow 于 1975年提出了他们的“最小”SU(5) 大统一理论。其思路是以显而易见的对角方式将 SU(3) × SU(2) 嵌入 SU(5)，并留出足够的空间；如果你够聪明，就能把 U(1) 也塞进去。

现在，将上述所有表示的维数相加，得到 $2 + 6 + 1 + 3 + 3 = 15$。这意味着我们需要找到 SU(5) 的一个 15 维表示，以容纳所有这些粒子。虽然有多种选择，但考虑到所有物理因素，只有一种真正可行。有关这一推理过程的简明介绍，请参阅：

1) Edward Witten，《有超对称与无超对称的大统一》，载于《粒子物理学与核物理学中的超对称导论》，O. Castanos、A. Frank、L. Urrutia 编，PlenumPress，1984年。

我就直接给出答案。首先，我们取 SU(5) 的 5 维基本表示，并按如下方式将费米子装入其中：

$$(\mathrm{d}_R,\mathrm{d}_R,\mathrm{d}_R,\mathrm{e}_R^+,\bar{\nu}_R) \qquad\qquad 5 = (3,1,-2/3) + (1,2,-1)$$

这里，e_R^+ 是右手正电子，$\bar{\nu}_R$ 是右手反中微子——有趣的是，为了让一切正确运作，我们需要把一些反粒子和粒子放在一起。请注意，上述列表中的前三个粒子，即右手下夸克的三个态，按照 SU(3) 的基本表示和 SU(2) 的平凡表示进行变换；而剩下两个则按照 SU(3) 的平凡表示和

SU(2) 的基本表示进行变换。这是必然的，因为我们把 SU(3) × SU(2) 嵌入了 SU(5)。

还要注意，这份列表中5个粒子的电荷总和为零。由于SU(5)的生成元是无迹的，因此情况也必须如此。注意，要使这一点成立，下夸克的电荷必须是 $-1/3$ ！从某种意义上说，SU(5)模型表明，夸克的电荷必须 以 $1/3$为单位，因为它们分为3种不同的色荷！这非常酷。

然后，我们取SU(5)的10维表示，即基本表示的第二外幂——也就是反对称的 5×5 矩阵——并将其余的费米子按如下方式装入其中：

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathrm{u}}_L & \bar{\mathrm{u}}_L & \mathrm{u}_L & \mathrm{d}_L \\ -\bar{\mathrm{u}}_L & 0 & \bar{\mathrm{u}}_L & \mathrm{u}_L & \mathrm{d}_L \\ -\bar{\mathrm{u}}_L & -\bar{\mathrm{u}}_L & 0 & \mathrm{u}_L & \mathrm{d}_L \\ -\mathrm{u}_L & -\mathrm{u}_L & -\mathrm{u}_L & 0 & \mathrm{e}_L^+ \\ -\mathrm{d}_L & -\mathrm{u}_L & -\mathrm{d}_L & \mathrm{e}_L^+ & 0 \end{pmatrix} \qquad 10 = (3,\ 2,\ 1/3) + (1,\ 1,\ 2) + (3,\ 1,\ -4/3)$$

这里的 $\bar{\mathrm{u}}$是上夸克的反粒子——我们再次需要使用一些反粒子。不过，你可以很容易地验证，这两个SU(5)表示及其对偶共同涵盖了所有费米子及其反粒子。

SU(5)理论有许多优点。正如我之前提到的，它解释了为什么上夸克和下夸克的电荷分别是 $2/3$ 和 $-1/3$。它还对一个称为温伯格角的量作出了相当准确的预测，而温伯格角与W玻色子和Z玻色子的质量比有关。它还提出了可以检验的新预测！其中最引人注目的是，由于它允许夸克转变为轻子，因此预言质子可能会衰变——半衰期约为 10^{29} 或 10^{30} 年。于是人们开始着手寻找质子衰变.....

然而，即使在SU(5)模型刚被提出时，人们也认为它略显不够优雅，因为它没有将某一代的所有费米子统一到一个不可约表示中（并连同其对偶一起纳入，以表示反粒子）。这也是人们开始探索更大规范群的原因之一。1975年，Georgi，以及独立地，Fritzsch和Minkowski提出了一个规范群为SO(10)的模型。可以将SU(5)嵌入SO(10)作为一个子群，使得上面列出的SU(5)的5维和10维表示都能包含在SO(10)的一个16维表示中，也就是手征旋量表示。没错，是16，不是15——这可不是打字错误！SO(10)理论预言，除了上面列出的15种态之外，还存在第16种态，对应于右手中微子！我还不确定最近那些表明中微子质量非零的实验结果该如何融入这一理论，不过这很有意思。

大约在这个时候，人们注意到我们一直在研究的这些群有个有趣的共同点：它们都属于“E系列”！

我没精力在这里解释Dynkin图和ABCDEFG 单李群的分类，不过幸好我已经讲过这些，所以你只要看看“第62周”——“第65周”就能了解相关内容。关键在于，存在一个与实向量空间中的旋转相关的无限单李群级数——$\mathrm{SO}(n)$ 群，也称为B 和D级数。还存在一个与复向量空间中的旋转相关的无限级数——$\mathrm{SU}(n)$ 群，也称为A 级数。此外，还有一个与四元数向量空间中的旋转相关的无限级数——$\mathrm{Sp}(n)$ 群，也称为C 级数。还有一组零散的5个例外，它们与

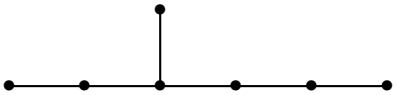
八元数有关，称为 $mathrmG_2$、F_4, E_6, E_7, 和E_8。我对这些颇感兴趣——详情参见“第90周”、“第91周”和“第106周”——因此，发现E系列在大统一理论中扮演特殊角色时，我感到极为欣喜。

如今，人们通常只谈论 E_6, E_7, 和 E_8, ，但我们可以利用 Dynkin图反向推导，定义 E_5, E_4, E_3, E_2, 和 E_1。我们来试试！感谢 Allan Adler 和 Robin Chapman 帮助我理解其中的原理.....

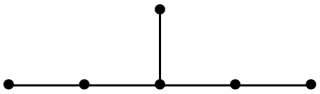
E_8 是一个庞大的李群，它的 Dynkin图如下：



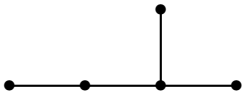
如果我们移除最右边的根，就会得到一个名为 E_7的子群的 Dynkin图：



如果我们再次移除最右边的根，就会得到 E_7,的一个子群——也就是 E_6——的 Dynkin图：



它曾是大统一模型中广受欢迎的规范群；原因在我们再次移除最右边的根后便显而易见了：这样就得到了一个我们可以称为 E_5的子群的 Dynkin图：



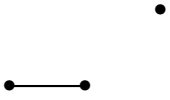
但这其实就是我们刚刚讨论过的老朋友 SO(10)！如果我们再次移除最右边的根，就会得到一个子群的 Dynkin图，我们可以称它为 E_4：



o|

o--o--o

这就是 SU(5)！我们再次移除最右边的根，得到 E_3 的 Dynkin 图。好吧，最右边的根具体指什么或许并不明显，但移除它后，我想得到的是这样的：



这就是 SU(3) ×SU(2)，按照我们刚才讨论的方式嵌入 SU(5) 中！所以，出于某种神秘的原因，标准模型和大统一理论似乎都与 E 系列有关！

我们可以继续往下，定义 E_2：

•

•

它其实就是 SU(2) ×SU(2)，而 E_1：

•

它其实就是 SU(2}.....不过我不太确定这些群有什么了不起。

顺便说一句，你可能会想知道，我按照那个顺序去掉这些根的真正原因是什么——除了得到我想要的答案之外——答案是，我其实也不知道！如果有人知道，请告诉我。这可能是一个重要线索。

现在，关于大统一理论和E 级数的这些内容，是人们喜欢弦理论的原因之一，因为异质弦理论与E_8 密切相关（参见“第95周”）。不过，现在我必须告诉你关于大统一理论的坏消息。而且这消息非常糟糕。

坏消息是，那些去探测质子衰变的人从未发现它！到20世纪80年代中期，人们已清楚地认识到，质子寿命至少约为 10^{32} 年，远大于SU(5)理论最自然地预言的数值。当然，若有人不惜一切要用美丽的理论来挽救丑陋的事实，就可能诉诸极端手段。例如，可以通过提高大统一质量标度，使SU(5)模型预言极其缓慢的质子衰变。不幸的是，这样一来，强相互作用与电弱相互作用的耦合常数在大统一质量标度处就无法吻合。随着对强耦合常数的测量日益精确，这一点变得令人痛苦地明显。

理论粒子物理学从未真正从这沉重打击中恢复过来。从某种意义上说，粒子物理学逐渐放弃了作出可检验预言这一目标，漂入纯数学的仙境.....先是超对称，接着是超引力，然后是超弦.....理论愈发优雅，却至今没有一项得到实验验证的预言。或许我们应该做些不同的、更好的事情？说起来容易，做起来难！如果我们在欧洲核子研究中心发现一个超伙伴，那么这种“超前思考”在很大程度上就会得到证实——所以我想，大多数粒子物理学家都在祈祷并交叉手指，希望这能发生。

下面这本关于大统一理论的教科书非常不错，尤其是因为它从标准模型的综述开始：

2) Graham G. Ross，《大统一理论》，Benjamin-Cummings，1984年。

这一本更具个人特色，但同样很不错——Mohapatra尤其关注这样一类理论：其中CP破坏源于自发对称性破缺：

3) Ranindra N. Mohapatra，《统一与超对称》：夸克—轻子物理学的前沿，施普林格，柏林，1992年。

我还觉得以下文章很有意思：

4) D. V. Nanopoulos，《大统一理论时代的故事》，载于大统一理论及相关主题，第四届京都夏季研究所会议论文集，世界科学出版社，新加坡，1981年。

5) P. Ramond，《大统一》，载于 大统一理论及相关主题，第四届京都夏季研究所会议论文集，世界科学出版社，新加坡，1981年。

好，现在来聊聊同伦论！我觉得自己大概永远也讲不到那些真正精彩的内容了……为了尝试系统地解释一切，光是做准备工作就已经让我筋疲力尽了。唉，继续吧……现在该开始谈谈环空间了！它们非常重要，因为能把一切联系起来。不过，要真正理解它们的重要性，还需要一段时间。

N. 拓扑空间的环空间。假设我们有一个“带基点空间” X，也就是一个有一个称为“基点”的特殊点的拓扑空间。然后，我们可以构造出由 X 中所有“基点环路”组成的空间 LX ——也就是从基点出发并最终回到基点的环路。

LX 如此美妙的一个原因是，它的同伦群与X的同伦群相同，只是指标有所平移：

$$\pi_i(LX) = \pi_{i+1}(X).$$

LX 如此美妙的另一个原因是，它几乎是一个拓扑群，因为我们可以复合基于基点的回路，而且每个回路都有一个“逆元”。不过，这里必须小心！如果不特别留意，复合只会在同伦意义下满足结合律，而回路的“逆元”也只是在同伦意义下的逆元。

实际上，只要使用“Moore路径”，我们就能让复合严格满足结合律。 X 中的一条 Moore路径是一个连续映射

$$f\colon [0,T] \to X$$

其中 T 是任意非负实数。给定如上所述的一条 Moore路径 f ，以及另一条 Moore路径

$$g\colon [0,S] \to X$$

w它从 f 的终点出发，我们可以用显而易见的方式将它们复合，得到一条 Moore路径

$$fg\colon [0,T+S] \to X$$

请注意，这种运算严格满足结合律，而不只是同伦意义下满足结合律。如果我们定义 LX 使用起点和终点都在基点处的 Moore路径，就可以轻松地将 LX 构造成一个拓扑幺半群——也就是说，一个具有连续结合乘积和单位元的拓扑空间。（如果你读过L 一节《第 117 周》，就会知道这只是拓扑空间范畴中的一个幺半对象！）特别是， LX 的单位元是路径 $i\colon\ [0,0] \to X$它只是停留在 X的基点处。

LX 不是拓扑群，因为即使是 Moore路径也没有严格的逆元。但 LX 也很接近成为一个群。我们可以用各种方式精确表述这一事实，有些方式比另一些更详细。我相当确定，可以这样说：从LX 到其“群完备化”的自然映射是一个同伦等价。

O. 拓扑幺半群的群完备化。 设 TopMon 为拓扑幺半群范畴，TopGp 为拓扑群范畴。存在一个遗忘函子

$$F\colon \mathsf{TopGp} \to \mathsf{TopMon}$$

而且它有一个左伴随

$$G\colon \mathsf{TopMon} \to \mathsf{TopGp}$$

它通过引入所有元素的形式逆元，并为所得的群赋予良好的拓扑，将拓扑幺半群转化为拓扑群。这个函子 G 称为“群完备化”，最早由 Quillen（在未发表的论文中，以单纯形语境讨论）提出，Barratt 和 Priddy 也独立提出了这一概念：

> 6) M. G. Barratt 和 S. Priddy，《非连通幺半群及其关联群的同调》，《*Commentarii Mathematici Helvetici*》**47**（1972），1–14。

对于任意拓扑幺半群 M，都存在一个从 M 到 $F(G(M))$ 的自然映射，这要归功于伴随函子的奇妙之处。这就是我在上一节提到的自然映射！

第120周

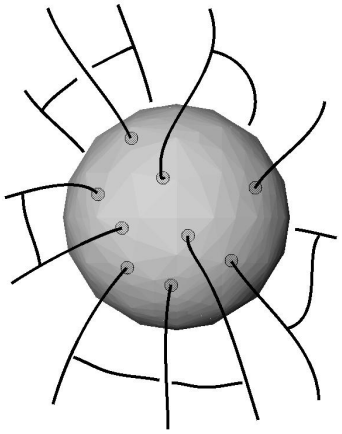
1998年5月6日

既然我现在和宾夕法尼亚州立大学的引力圈子打成一片，不妨也聊聊最近这里发生的事。

首先，Ashtekar 和 Krasnov 撰写了一篇介绍性文章，阐述他们关于量子黑洞熵的研究：

1）Abhay Ashtekar 和 Kirill Krasnov，《量子几何与黑洞》，可见于 gr-qc/9804039。

不过，如果你更想看一张没有任何方程的量子黑洞图像，可以试试这个：



这展示了一大批自旋网络刺入视界，为其赋予面积和曲率。当然，这不过是一种理论。

其次，近期涌现出一批新研究，以自旋泡沫的形式探讨量子引力。自旋泡沫看起来有点像一大堆肥皂泡沫——气泡的面以及气泡相接处的边都标记着自旋 $j = 0$，$1/2$、1，$3/2$、……。自旋泡沫试图以量子的方式描述时空几何。如果用一个代表“$t = 0$”的超平面切开自旋泡沫，就会得到一个自旋网络：一个其边和顶点都标记着自旋的图。多年来，自旋网络一直被用于量子引力，以描述特定时间下的空间几何，因此人们自然希望它们是某种描述时空几何的结构的切片。

和量子引力领域的常态一样，现在判断这种方法能否奏效还为时尚早。照例，它也有许多严重问题。不过，在谈这些问题之前，我先提醒你自旋泡沫理论上应该如何运作。

为了将自旋泡沫与关于时空的更传统观念联系起来，可以考虑存在于三角剖分的4-流形中的自旋泡沫：每个4-单形中有一个自旋泡沫顶点，每个四面体中穿过一条自旋泡沫边，每个三角形与一个自旋泡沫面相交。用自旋来标记自旋泡沫边和面，应当能赋予这个三角剖分的4-流形一种“量子4-几何”。换

句话说，它应该能让我们计算三角形的面积、四面体的体积以及4-单形的4-体积等量。目前，关于该如何正确实现这一点，仍有一些争论，但这绝非随意之举：群表示论与几何之间的相互作用，为实现方式提供了诸多指引。在简化的三维时空情形下，这方面已经相当成熟——难点，也是乐趣所在，是让它在四维中奏效。

假设我们能够做到这一点，接下来的诀窍就是以一种巧妙的方式计算每个自旋泡沫顶点的振幅，就像计算费曼图顶点的振幅一样。自旋泡沫顶点被认为代表一个“事件”——如果我们用一个超平面切割自旋泡沫，就会得到一个自旋网络；当我们将这个切面沿“时间方向向前”移动时，每当经过一个自旋泡沫顶点，自旋网络的拓扑学就会发生变化。一个顶点的振幅告诉我们这一事件发生的可能性有多大。和量子理论中通常的做法一样，我们需要取振幅的绝对值，再将其平方，以得到概率。

我们还需要计算自旋泡沫的边和面（称为“传播子”）的振幅，这类似于计算费曼图各条边的振幅。将给定自旋泡沫的所有顶点振幅和传播子相乘，就能得到整个自旋泡沫的振幅。这告诉我们整个自旋泡沫发生的可能性有多大。

Barrett 和 Crane 提出了实现这一切的一种具体方法，Reisenberger 则提出了另一种方法。我提出了一套通用形式体系来理解这些内容，而如今人们正忙着争论不同方法各自的优劣。这里有几篇相关论文——我将从“第113周”。接着往下讲

2) Louis Crane、David N. Yetter，《平衡态求和的经典极限》，可通过以下地址获取：gr-qc/9712087。

这里的目标是说明，在自旋很大的极限下，Barrett 和 Crane 的公式所给出的振幅会趋近于

$$\exp(iS)$$

其中 S 是经典广义相对论的作用量——经过适当离散化，并采用 $+++-$ 符号约定。关键技巧是运用 Regge 于1961年提出的一个想法。

Regge 提出了经典广义相对论中通常作用量公式的离散类比。他的公式适用于边长已指定的三角剖分的4-流形。在这种情况下，每个三角形都有一个与之相关的“角亏”。将维度降低两维后，情况更容易想象：在三角剖分的2-流形中，每个顶点的角亏等于所有以该顶点为角的三角形的角度之和，再减去 2π。没有角亏就意味着没有曲率：三角形平铺在一个平面上。这个想法在四维中也类似。下面是 Regge 的作用量公式：取三角剖分的4-流形中的每个三角形，求出它的面积，将面积乘以它的角亏，然后对所有三角形求和。

很简单吧？在连续极限下，Regge作用量趋近于里奇标量曲率的原函数，也就是广义相对论中的常规作用量。更多信息请参阅：

3) T. Regge，《无坐标的广义相对论》，*Nuovo Cimento* **19**（1961年），558–571。

因此，Crane 和 Yetter 试图证明，当自旋很大时，Barrett–Crane 自旋泡沫振幅趋近于 $\exp(iS)$，其中 S 是 Regge作用量。他们的论证很有意思，但相当粗略。应该有人来补全其中的细节！

不过，我不确定大自旋极限在物理上是否有意义。如果时空确实由许多4-单形组成，并且由自旋标记，那么这些4-单形必定相当小，因此标记它们的自旋应该也比较小。在我看来，值得研究的正确极限，是用大量由较小自旋标记的4-单形对四维流形进行三角剖分的极限。毕竟，在量子黑洞的自旋网络图景中，标记为自旋 $1/2$ 的自旋网络边似乎贡献了大多数态（见“第112周”）。

将一个存在于三角剖分的四维流形中的自旋泡沫，沿着与三角剖分相容的方式切开，得到的自旋网络就是一个四价图。因此，Barrett 和 Crane 的顶点振幅公式与一种不变量有关，这种不变量适用于边由自旋标记的四价图，这并不令人意外。数学中早已有一个分支研究这类不变量与群表示和量子群表示之间的关系，而他们的公式恰好属于这一领域。Yetter 已经找到了如何将这种图不变量推广到边由自旋标记的 n 价图，并且还更仔细地研究了当人们对整个结构进行“q变形”时会发生什么——也就是用相应的量子群替代原来的群。如果数学上的种种线索没有误导我们，这应该与宇宙学常数非零时的量子引力有关。参见：

4) David N. Yetter，《广义 Barrett–Crane 顶点与嵌入图的不变量》，可在此获取：math.QA/9801131。

Barrett 还用积分给出了一个优美的公式，用来表示标记了自旋的四价图的不变量。这个公式受到物理学的启发，也很好地阐明了其中的物理内涵：

5) John W. Barrett，《相对论自旋网络的经典求值》，可在此获取：math.QA/9803063。

请允许我引用摘要：

> 对于李群SU(2) 的经典情形，相对论自旋网络的求值可由一个在多个SU(2) 副本上取值的积分公式给出。对于由4单纯形确定的图，该求值可表示为在4单纯形几何空间上的积分。

好了，好消息就说到这里。坏消息呢？要解释这一点，我得更具体地谈谈 Barrett 和 Crane 的方法。

他们的方法基于一种描述 4-单形几何的特定方式。与旧的 Regge 方法中指定各条边的长度不同，我们为它的所有面指定双向量。从几何上说，双向量就是一种“有向面积元”；从技术上说，双向量空间是 2-形式空间的对偶。如果我们在四维实数空间中有一个 4-单形，并为它的三角形面选定定向，就可以很自然地为每个面关联一个双向量。这样我们就得到 10 个双向量。

这 10 个双向量满足哪些约束？它们不可能是任意的！首先，对于同一四面体的四个三角形面，相应的双向量

之和必须为零。其次，每个双向量都必须是“简单”的——它必须是两个向量的楔积。第三，只要两个三角形是同一四面体的面，相应双向量之和就必须是简单的。

结果发现，这些约束几乎足够，但还不完全足够，无法推导出这10个双向量来自一个4-单形。一般而言，有四种可能：这些双向量来自一个4-单形；这些双向量的负值来自一个4-单形；它们的霍奇对偶来自一个4-单形；或者它们的霍奇对偶的负值来自一个4-单形。

如果我们不理会这个问题，用满足上述三个约束的双向量来描述4-单形，然后将这种描述量子化，就会得到“量子4-单形”的图景，这正是Barrett–Crane模型的出发点。但显然，忽视这个问题是危险的。

事实上，我是从sci.math.research上的Robert Bryant那里了解到这个问题的，并且在我的自旋泡沫模型论文中讨论了此事，当然也引用了Bryant。Barrett 和 Crane在论文的第一个版本中忽略了这个问题，但现在他们认识到了它的重要性。最近有两篇论文对此进行了进一步探讨：

6) Michael P. Reisenberger，《从“左手性面积 = 右手性面积”得到的经典欧几里得广义相对论》，可见于gr-qc/9804061。

7) Roberto De Pietri 和 Laurent Freidel，《$\mathfrak{so}(4)$ Plebanski 作用量与相对论自旋泡沫模型》，可见于gr-qc/9804071。

这些论文研究了以带约束的 SO(4) BF理论形式表述的经典广义相对论。这里所需的约束，在数学上与确保 10 个双向量来自一个实际 4-单形各个面的约束完全相同！这正是这种方法的奇妙之处。不过同样地，如果只施加我上面列出的三个约束，还不够：得到的场要么是广义相对论的解，要么是另外三种理论的解！这让人担心，Barrett–Crane 模型量子化的并非严格意义上的广义相对论，而是掺杂了这些额外理论的广义相对论。

这是宾夕法尼亚州立大学经典与量子引力中心最近的另一项成果：

8) Laurent Freidel 和 Kirill Krasnov，《3维BF 理论与量子引力的离散时空体积》，可从 hep-th/9804185 获取。

Freidel 和 Krasnov 在 Turaev-Viro模型这一与3维时空中的量子引力密切相关的拓扑量子场论框架下，研究单个3-单形的体积作为一种可观测量。

以下是一些其他近期发表的量子引力论文，作者是在 CGPG 工作的人士，或至少偶尔会来这里交流的人士。下面我只引用这些论文的摘要：

9) Ted Jacobson，《今日的黑洞热力学》，即将发表于 第八届马塞尔·格罗斯曼会议论文集，世界科学出版社，1998年。另可通过gr-qc/9801015 获取。

> 简要回顾了20世纪90年代黑洞热力学的主要主题与发展，随后概述了在这一主题上所作的报告

这些报告在*MG8*上进行，并附有一些评论，最后展望未来。

10) Rodolfo Gambini 和 Jorge Pullin，《圈量子引力是否意味着 $\Lambda = 0$? 》，可见 gr-qc/9803097。

我们认为，在最近提出的一种量子引力框架中，*Vassiliev*不变量张成态空间；若宇宙学常数非零，态空间将大幅缩小。这自然意味着宇宙初态应当是具有 $\Lambda = 0$的态。

11) R. Gambini、O. Obregon 和 J. Pullin，《杨–米尔斯理论中的 Immirzi 歧义类比》，可见 gr-qc/9801055。

我们将近期提出的正则量子引力 *Ashtekar*类表述中的*"Immirzi*歧义*"*与杨–米尔斯理论中出现的其他歧义（如 θ 歧义）进行比较。我们还讨论了麦克斯韦情形中的歧义，以及这些理论的圈量子化所带来的影响。

12) John Baez 和 Stephen Sawin，《微分同胚不变自旋网络态》，《泛函分析杂志》，**158** (1998年)，253–266。另见 q-alg/9708005。

我们将微分同胚不变自旋网络态理论从实解析范畴推广到光滑范畴。设 G 是一个紧致连通半单李群，$P \to M$ 是一个光滑主 G-丛。在 P 上的光滑联络空间中，一个"柱函数"是由 M 中有限条分段光滑浸入曲线的全纯绕行所构成的连续复值函数。我们利用"自旋网络"构造柱函数空间上的微分同胚不变泛函：这些自旋网络是 M 中的图，其边标记为 G 的表示，顶点标记为交织算子。借助 *Ashtekar*、*Marolf*、*Mourao* 和 *Thiemann* 的"群平均"技术，我们在由这些"微分同胚不变自旋网络态"张成的空间上赋予一个自然内积。

最后，这里有两篇关于弦理论和超对称的近期综述：

13）John H. Schwarz 和 Nathan Seiberg，《弦理论、超对称、统一以及诸如此类》，《现代物理评论》**71**（1999年），S112。另见hep-th/9803179。

14）Keith R. Dienes 和 Christopher Kolda，《超对称粒子物理中的二十个未解问题》，可见hep-ph/9712322。

我担心这周会在自己的"同伦论之旅"中偷懒。我想尽快讲到模型范畴和 E_∞ 空间这类有趣的内容，但要达到这个目标，结果发现得付出不少功夫！This Week's Finds 总是这样：我开始学习某个主题，心想"哇，这些内容真棒；我要好好写下来，让大家都能看懂"，可接着发现这实在太费工夫，以至于写到一半时，我已经转而迷上了别的东西。

第121周

1998年5月15日

这次我想谈谈高维代数及其在拓扑学中的应用。Marco Mackaay 刚发表了一篇引人入胜的论文，介绍了如何从某些“幺半2-范畴”构造四维拓扑量子场论。

1）Marco Mackaay，《球面2-范畴与4-流形不变量》，可在此获取：math.QA/9805030。

妙的是，这一构造只是 Barrett 和 Westbury 从“幺半范畴”构造三维拓扑量子场论的一种范畴化版本。范畴化——将方程替换为同构的过程——本应带你沿着维度阶梯向上攀登。这里我们正看到它在发挥作用！

为了让你理解 Mackaay 的论文，也许我应该解释一下范畴化的概念。最近我刚写过一些相关内容，所以想我只要稍微转述一下就行了。其中有些内容老读者已经很熟悉了，因此如果你都知道，就直接跳过吧。

2) John Baez 和 James Dolan，《范畴化》，载于 高阶范畴论，Ezra Getzler 和 Mikhail Kapranov 编，《当代数学》**230**，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1998年，1–36页。亦可见 math.QA/9802029。

那么，什么是范畴化？这个拗口的术语由 Louis Crane 创造，指的是这样一种过程：利用集合论与范畴论之间的如下类比，为用集合论语言表述的思想寻找范畴论类比：

集合论	范畴论
元素 元素之间的等式	对象 对象之间的同构
sets 集合之间的函数 函数之间的等式	范畴 范畴之间的函子 函子之间的自然同构

正如集合拥有元素，范畴拥有对象。正如集合之间存在函数，范畴之间存在函子。有趣的是，元素之间的等式恰当的类比并非对象之间的等式，而是同构。更一般地说，函数之间的等式所对应的类比是函子之间的自然同构。

例如，范畴 FinSet 的对象是有限集，态射是函数；它是自然数集 $\mathbb{N}$ 的一种范畴化。有限集的不交并和笛卡尔积分别对应于 $\mathbb{N}$ 中的和与乘积。注意，尽管 $\mathbb{N}$ 中的加法和乘法满足交换性、结合律和分配律等各种等式律，不交并和笛卡尔积却仅在自然同构意义下满足这些等式律。这是一个很好的例子，说明方程

在范畴化时，函数之间的等式会被自然同构取代。

研究范畴化，很快就会发现一个惊人的事实：数学中许多听起来深奥的结果，其实只是我们在高中学过的事实的范畴化！这背后有一个很好的理由。一直以来，我们都在不知不觉中通过假装范畴只是集合，对数学进行“去范畴化”。我们通过忽略态射，并假装同构对象彼此相等，来对一个范畴进行“去范畴化”。这样剩下的就只有一个普通的集合：对象的同构类所构成的集合。

为了理解这一点，下面这个寓言或许会有所帮助。很久以前，牧羊人想知道两群羊是否同构时，会寻找一个明确的同构。换句话说，他们会把两群羊排成两列，试着将一群中的每只羊与另一群中的一只羊配对。但有一天，一位牧羊人出现了，她发明了去范畴化。她意识到，可以分别“数一数”每群羊，建立它与某个“数字”之间的同构；这些“数字”是“一、二、三……”之类的无意义单词，专为此目的而设计。比较得到的数字，她便能证明两群羊同构，而无需明确地建立一个同构！简而言之，通过对有限集范畴进行去范畴化，自然数集便被创造出来了。

按照这个寓言的说法，去范畴化最初源于数学天才的灵光一现。后来，它才变成一种盲目习惯，而我们如今正努力通过范畴化来克服这种习惯。尽管历史的真实情况要复杂得多，范畴化确实推动了20世纪数学的巨大进步。例如，诺特通过强调同调群的重要性，彻底改变了代数拓扑。此前的研究侧重于贝蒂数，它们不过是有理同调群的维数。就像计算一个集合的基数一样，计算向量空间的维数也是一种去范畴化过程，因为两个向量空间同构，当且仅当它们的维数相同。诺特指出，如果研究同调群，而非贝蒂数，我们就能解决更多问题，因为这样得到的不变量不仅属于空间，也属于映射。

用现代术语来说，第 n个有理同调是定义在拓扑空间范畴子上的一个函子，而第 n 个贝蒂数只是定义在拓扑空间同构类函数上的一个集合。当然，这样表述诺特的见解是不合时代的，因为当时范畴论尚未诞生。事实上，范畴论正是在 Eilenberg 和 Mac Lane 随后关于同调的研究中诞生的！

去范畴化是一个直接了当的过程，通常会摧毁有关当前情形的信息。范畴化试图恢复这些丢失的信息，因此不可避免地充满困难。其中一个原因是，范畴化时，人们并非只是用同构替换方程，还要求这些同构满足一些新的方程，称为“相干律”。为特定情形找到恰当的相干律，或许是范畴化中最棘手的环节。

例如，幺半群是一个带有乘积的集合，该乘积满足结合律；它还带有一个满足左右单位律的单位元。幺半群的范畴化版本称为“幺半范畴”。这是一种范畴 $\mathcal{C}$，带有一个乘积

$$\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

an以及单位对象 1。如果我们天真地要求结合律以及左右单位律
eq……律，由此得到“严格”幺半范畴的定义。然而，

范畴化哲学则建议，我们只要求它们在自然同构意义下成立。因此，作为“弱”幺半范畴结构的一部分，我们指定一个自然同构

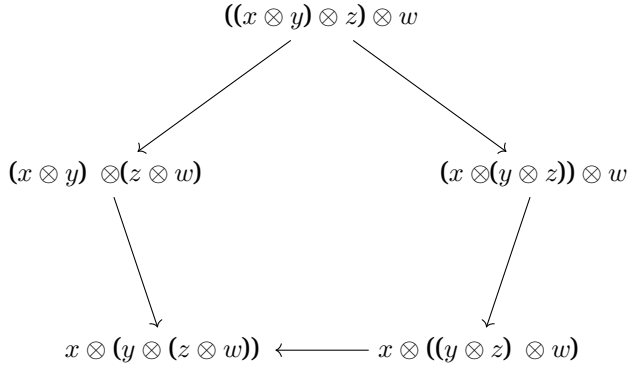
$$a_{x,y,z}\colon (x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$$

称为“结合子”，以及自然同构

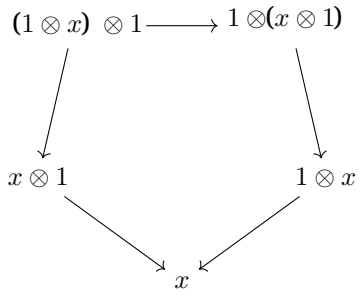
$$l_x\colon 1 \otimes x \to x,$$

$$r_x\colon x \otimes 1 \to x.$$

利用结合子，可以在几个对象的张量积的任意两种加括号形式之间构造同构。然而，我们真正想要的是一个唯一的同构。例如，4个对象的张量积有5种加括号方式，它们通过结合子关联如下：



在弱幺半范畴的定义中，我们施加了一条称为“五边形恒等式”的相干律，指出该图表交换。同样地，我们施加一条相干律，指出由 a、l 和 r 构成的下图交换：



这个定义引出了一个显而易见的问题：我们怎么知道已经找到了所有正确的相容律？事实上，在这种语境下，“正确”到底是什么意思？ Mac Lane 的相干定理给出了这个问题的一种答案：上述相容律意味着，任何由 a、l 和 r 构造而成且源点和目标相同的两个同构都必然相等。

沿着这些思路进一步研究，可以让我们更精确地说明 $\mathbb{N}$ 是 FinSet 的去范畴化意味着什么。例如，正如 $\mathbb{N}$ 在加法或乘法下都构成幺半群一样，只要恰当地选取同构 a、 l 和 r ，FinSet 在不交并或笛卡尔积下也会成为一个幺半范畴。事实上，正如 $\mathbb{N}$是一个“幺半环”，满足除涉及加法逆元之外的所有环公理，FinSet 也是一种可以称为“幺半环范畴”的结构。换言之，它满足幺半环公理，但只在满足 Kelly 和 Laplaza 发现的相容律的自然同构意义下成立；他们在这一语境中证明了一个相干定理。

正如幺半范畴的去范畴化是幺半群一样，任何幺半环范畴的去范畴化都是幺半环。特别是，将幺半环范畴 FinSet 去范畴化，就得到幺半环 $\mathbb{N}$。这个想法在组合学中尤为重要，因为涉及自然数的恒等式，最好的证明往往是“双射证明”：实际建立有限集之间同构的一种证明。

有时，相干律可以事后通过相干定理加以论证，但某些谜题表明，我们需要更深入地理解相干律的起源 。例如，假设我们想将“交换幺半群”的概念范畴化。最严格的做法是取一个严格幺半范畴，并施加形如 $x \otimes y = y \otimes x$ 的等式律；但这种做法几乎毫无趣味。更好的做法是从一个配备自然同构的弱幺半范畴开始

$$B_{x,y} \colon x \otimes y \to y \otimes x$$

称为“编织”，然后施加称为“六边形恒等式”的相干律，要求由编织和结合子构成的以下两个图表可交换：

$$\begin{array}{ccc}
x \otimes (y \otimes z) & \longrightarrow & (y \otimes z) \otimes x \\
\downarrow & & \uparrow \\
(x \otimes y) \otimes z & & y \otimes (z \otimes x) \\
\downarrow & & \uparrow \\
(y \otimes x) \otimes z & \longrightarrow & y \otimes (x \otimes z)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(x \otimes y) \otimes z & \longrightarrow & z \otimes (x \otimes y) \\
\downarrow & & \uparrow \\
x \otimes (y \otimes z) & & (z \otimes x) \otimes y \\
\downarrow & & \uparrow \\
y \otimes (z \otimes y) & \longrightarrow & (x \otimes z) \otimes y
\end{array}$$

这给出了弱“编织幺半范畴”的定义。如果我们再加入一条相干律，规定 $B_{x,\ y}$ 是 $B_{y,\ x}$ 的逆，我们就得到“对称幺半范畴”的定义。这两个概念都非常重要；哪一个才是“正确的”，取决于具体语境。然而，两者都不能保证由编织构造出的每一对平行态射都相等。一套完善的相干律理论必须自然地解释这些事实。

关于这类谜题，最深刻的见解历来都来自拓扑学。在同伦论中，研究带有满足等式律的代数结构的空间会带来问题，因为无法沿同伦等价传递这类结构。更好的做法是让这些律仅在同伦意义下成立，并要求这些同伦满足某些相干律；但这些相干律也只需在同伦意义下成立，同时这些高阶同伦满足它们各自的高阶相容律，如此层层递进。因此，相干律自然会出现在无限序列中。例如，Stasheff 在研究与环空间同伦等价的空间所具有的代数结构时，发现了五边形恒等式以及一系列关于结合律的高阶相容律。类似地，六边形恒等式是与二重环空间同伦等价的空间所对应的一系列相干律的一部分；而对称幺半范畴额外的相干律，则是与三重环空间同伦等价的空间所对应的一系列相干律的一部分。当我们试图反复执行范畴化这一过程时，这些序列中的高阶相容律就显得至关重要。

为了迭代范畴化这一过程，我们需要一个“n-范畴”的概念——大致来说，它是一种代数结构，由一组对象（或称“0-态射”）、对象之间的态射（或称“1-态射”）、态射之间的2-态射，依此类推，直到 n-态射构成。要精确定义这一概念，有多种方式；目前，人们正致力于研究这些不同方法之间的联系。但需要记住的基本要点是，“$(n+1)$-范畴”的概念是“n-范畴”概念的一种范畴化。在n-范畴中， n-态射之间的等式律被自然的$(n+1)$-同构所取代，而这些同构自身也必须满足某些相干律。

为了理解这些相容律与同伦论之间的关系，最好思考某些特殊类型的 n-范畴。如果我们有一个在不超过 k-态射层数的范围内都是平凡的（$n+k$）-范畴，就可以通过一个简单的重新编号技巧，将其变成一个 n-范畴：只需把它的 j-态射看作（$j-k$）-态射即可！我们把这样得到的 n-范畴称为“k-重幺半 n-范畴”。下面是一张小图表，展示了当 n 和 k 取各种较小值时它们分别对应什么：

k-重幺半 n-范畴

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$k=0$	sets	范畴	2-范畴
$k=1$	幺半群	幺半 范畴	幺半 2-范畴
$k=2$	交换 幺半群	带状单oidal 范畴	带状单oidal 2-范畴
$k=3$	“ ”	对称的 幺半 范畴	弱对合的 幺半 2-范畴
$k=4$	“ ”	“ ”	强 对合的 幺半 2-范畴
$k=5$	“ ”	“ ”	“ ”

James Dolan 和我之所以对这张图表如此感兴趣，原因之一就是“缠结假设”。粗略地说，该假设认为，嵌入（$n+k$）-维空间中的 n-维曲面，可以纯粹使用代数来描述，即使用某个特殊的“k-重幺半 n-范畴（带对偶）”。如果这是真的，就能将大量微分拓扑问题化归为纯代数问题！它还有助于理解参数 n 和 k：应将 n 理解为“维数”，将 k 理解为“余维”。

例如，取 $n=1$ 和 $k=2$。三维空间中的纽结、链环和缠结可以用一种特定的“带对偶的辫子幺半范畴”通过代数方式加以描述。这是支持辫结假设的第一条有趣证据。它由此催生了一个名为“量子拓扑学”的完整数学分支，人们正试图将其推广到高维。

近来，Laurel Langford 研究了 $n=2$、$k=2$的情形。她证明了2维纽结曲面可以用一种特定的“带对偶的辫子幺半2-范畴”通过代数方式加以描述。这些所谓的“二维缠结”尤其令我感兴趣，因为它们与量子引力的自旋泡沫模型有关，而这些模型同样都涉及四维空间中的曲面。参考资料见“第103周”。不过，如果你想进一步了解这方面的内容，最好的起点莫过于：

3) J. S. Carter 和 M. Saito，《纽结曲面及其图示》，美国数学学会，普罗维登斯，1998年。

T这是一本插图极为精美的书，读后你就能真正「看见」二维曲　面在四维空间中的纽结。书末概述了 Langford 的结果。

上表还有一点很有意思：k重幺半 n范畴keep 随着 k 增大而变得“更加交换”，直到达到 $k=n+2$ 时，

此时一切趋于稳定。有大量证据表明，这个“稳定化假设”对所有 n 都成立。假设它确实成立，那么将带有 $k \geqslant n+2$ 的 k 重幺半 n-范畴称为“稳定的 n-范畴”便合情合理。

那么，同伦论是从哪里介入的呢？这里需要研究 n-范畴，其中所有的 j-态射对于所有 j都是可逆的。这些范畴被称为“n-群胚”。利用它们，可以在 n-范畴论与同伦论之间建立一份翻译词典，如下所示：

ω-群胚	同伦型
n-群胚	同伦 n-型
k重群化 ω群胚	k重环空间的同伦型
k重群化 n群胚	n重环空间的同伦 k型
k重幺半 ω群胚	E_k 空间的同伦型
k重幺半群 n群胚	空间的同伦 n类型
稳定 ω群胚	无限环空间的同伦型
稳定 n群胚	无限环空间的同伦 n类型
$\mathbb{Z}$-群胚	谱的同伦型

左侧的条目从代数观点来看非常自然；右侧的条目则是拓扑学家已经在研究的对象。我们会在论文中解释所有这些术语的含义，不过也许我应该先说说前两行，因为它们在某种意义上是最基本的。同伦型大致来说就是“在同伦等价意义下”的拓扑空间，而 ω-群胚则可以看作当 n 趋于无穷时，n-群胚的一种极限情形。如果无穷让你感到害怕，你可以研究同伦 n-型，它们基本上是高于n维的部分没有有趣拓扑的同伦型。这些应当对应于 n-群胚。

利用这些基本对应关系，我们便可以将各种特殊的同伦型与各种特殊的 ω-群胚联系起来，从而得到图表其余各行。同伦论学者对右侧这一列非常了解，因此我们可以利用这一点获得关于左侧一列的大量信息。特别是，我们可以推导出 n-群胚的相容律；而且——这是最精彩、但也是理解得最少的部分——接下来我们可以猜测关于一般 n-范畴的相容律的许多内容。简而言之，我们正在利用同伦论敲开 n-范畴论的大门。

不过我应该强调，这份翻译对照表有一部分是推测性的。要准确说明哪些内容已知、哪些尚未知，技术性相当强，尤其是相关领域的发展十分迅速。就在过去几个月里，也出现了一些有意思的新进展。例如，Breen 发表了一篇论文，将 k-重幺半 n-范畴与 Postnikov塔以及各种颇为前沿的同调代数联系起来：

4) Lawrence Breen，《Braided n-范畴 and Σ-结构》，巴黎第十三大学数学预印本，98-06，1998年1月；即将发表于*1997*年*3*月在伊利诺伊州埃文斯顿西北大学举行的高阶范畴论与数学物理研讨会论文集，编者：Ezra Getzler 和 Mikhail Kapranov。

此外，以下这些人也提出了“迭代幺半范畴”的概念

其神经给出了 k 重环空间的同伦型，正如范畴的神经给出了任意同伦型一样：

5) C. Balteanu、Z. Fiedorowicz、R. Schwaenzl 和 R. Vogt，《迭代幺半范畴》《*Adv. Math.*》**176** (2003年)，277–349。也可在此处获取：math.AT/9808082。

无论如何，除了阐明 n-范畴论与同伦论之间的关系之外，Dolan 和我的论文还讨论了最简单代数结构的迭代范畴化：自然数和整数。自然数是由一个生成元生成的自由幺半群；整数是由一个生成元生成的自由群。我们认为，这只是这张图表的起点，它列出了各种代数结构以及由一个生成元生成的相应自由结构：

sets	单元素集合
幺半群	自然数
群	整数
k重幺半 n范畴	余维为 k 时的辫群 n胚
k重幺半 ω范畴	余维为 k 时的辫群 ω胚
稳定的 n-范畴	无限余维中的辫群胚
稳定的 ω-范畴	无限余维中的辫群胚
带对偶的 k-重幺半 n-范畴	$n+k$ 维空间中带框架的 n-缠结的 n-范畴
带对偶的稳定 n范畴	带框架的协边 n范畴
k重群化 n群胚	S^k的 k重环空间的同伦 n型
k重群化 ω群胚	S^k的 k重环空间的同伦型
稳定的 ω-群胚	无限环空间 S^∞的同伦型
$\mathbb{Z}$-群胚	球谱

你可能认识右边那些对象，也可能不认识，但其中有些非常有趣且复杂，因此它们都在某种意义上被范畴化和／或稳定化为整数和自然数集的版本，这实在令人兴奋。

呼！还有很多可以说，不过我只提几篇相关论文，然后就此打住。如果你对 n-范畴感兴趣，也可以看看“ n-范畴的故事”，从“第73周”开始。

6) Martin Neuchl，*Hopf* 范畴的表示论，博士论文，慕尼黑大学数学系，1997年。可在以下地址获取：http://math.ucr. edu/home/baez/neuchl.ps和 http://math.ucr.edu/home/baez/neuchl.pdf

正如霍普夫代数的表示范畴构成了一个优美的幺半范畴，Hopf 范畴的表示所构成的 2-范畴也形成了一个优美的幺半 2-范畴！范畴化再次大显身手——这或许是我们获取所需数据、将其输入 Mackaay 的机器，从而得到四维拓扑量子场论具体实例的最佳希望！

7) Jim Stasheff，《将 Boardman 的樱桃树嫁接到量子场论中》，可见math.AT/9803156。

从 Boardman 和 Vogt 的工作开始，不久之后 May 的工作也接踵而至，拟运算子在同伦论、弦理论以及如今的 n-范畴论中变得极其重要；这篇综述文章概述了其中的一些联络。

8) Masoud Khalkhali，《关于 A_∞ 代数的循环同调》，可见于math.QA/9805051。
Masoud Khalkhali，《 L_∞ 代数的同调与循环同调》，可见于math.QA/9805052。

一个 A_∞ 代数是一种代数，它在结合子意义下是结合的，而该结合子在五边形子意义下满足五边形恒等式；五边形子又在某种相干律意义下满足自身的相干律，如此无穷递归。这个概念源于 Stasheff 关于 A_∞ 空间的研究——这类空间与某个带有结合乘积的空间同伦等价。（这与我在 n群胚理论和同伦论之间的翻译词典中称为 E_1 空间的概念相同。）不过，这里是把它从拓扑空间范畴迁移到了向量空间范畴。类似地， L_∞ 代数是一种李代数，它“满足无穷多个更高阶相干律”。Loday-Quillen 和 Tsygan 证明，结合代数上的稳定矩阵代数的李代数同调，作为霍普夫代数，与该代数的循环同调的外代数同构。在上文的第二篇论文中，Khalkali 建立了相应的工具，以便将这一结果推广到 L_∞ 代数范畴。

第122周

1998年6月24日

夏季来临，学者们离开巢穴，四处奔走，在世界各地遥远的角落寻访会议与交流。五月底，大家纷纷离开引力物理与几何中心：Lee Smolin 前往圣菲研究所，Abhay Ashtekar 前往乌拉圭和阿根廷，Kirill Krasnov 回到他的故乡乌克兰，等等。这里变得如此安静，我本来真能做些工作，可惜我也飞出了窝：先去了芝加哥，然后是葡萄牙，接着又去了地球上最偏远、技术最落后的地方之一——我父母家。那里只有一丝微弱的网络连接，写作新一期的 This Week's Finds 几乎成了不可能的事……

不过，我确实读了一些新闻组的帖子。Jim Carr通过这种方式告诉我，《科学新闻》上刊登了一篇关于量子引力自旋泡沫模型的文章。我忍不住提起这件事，因为文章引用了我的话：

1）伊瓦尔斯·彼得森，“引力回路：计算泡沫状量子时空”，《科学新闻》，1998年6月13日，第**153**卷，第24期，376–377页。

文章简要介绍了圈量子引力、自旋网络，以及人们对自旋泡沫重新燃起的兴趣。内容并不特别专业——但如果你刚开始了解这个领域，读来很不错。如果你想看更详细、但仍然通俗易懂的内容，不妨读读Rovelli的新论文：

2）Carlo Rovelli 和佩什·乌帕迪亚，《圈量子引力与空间量子：入门》，可从 gr-qc/9806079获取。

我还没读这篇文章，因为我现在仍身处地球上一个相当缺乏技术设备的地方。不过，文中用简明的方式推导了圈量子引力的一些基本结果，例如面积算子特征值的公式。正如《第110周》所解释的，圈量子引力的一项主要预言是，面积等几何可观测量会呈现离散谱，这很像氢原子的能级。起初，面积算子特征值的计算似乎相当复杂，但如今这一问题已得到充分理解，因此 Rovelli 和乌帕迪亚得以给出更简明的论述。

说到面积算子，我还应该提一下 Rovelli 的另一篇论文；他在文中证明，物质（更准确地说，是费米子）的存在不会影响它的谱：

3) CarloRovelli 和 MercedMontesinos，《费米子对非微扰量子引力中面积算子谱的贡献》，可从 gr-qc/9806120 获取。

这尤其令人感兴趣，因为它与其他证据相吻合：费米子可能只是虫洞的末端——这是约翰·惠勒的一个古老想法（见“第109周”）。

我还应该提到最近出现的其他一些优秀综述文章。
Rovelli 撰写了一篇综述，比较了弦理论、圈表示以及其他

量子引力研究方法。这篇综述非常出色，因为它指出了所有这些方法中的缺陷，而这些方法的支持者通常都很乐意对此保持沉默：

4) Carlo Rovelli，《弦、回路及其他：量子引力现有方法的批判性综述》。在印度浦那举行的*GR15*会议上关于量子引力的全体会议演讲，见gr-qc/9803024。

此外，Loll还撰写了一篇综述，介绍假设时空具有离散结构的量子引力方法。该综述没有讨论自旋泡沫方法，因为它还很新；而是主要谈到格点量子引力、Regge微积分和动力三角剖分方法。在格点量子引力中，你把时空视为固定的格，通常是超立方格，并使用广义相对论中常见场的离散版本进行研究。在Regge微积分中，你将4维时空进行三角剖分——也就是说，把它切分成许多4维单形——并以这些单形各边的长度作为基本变量。（详情请参见"第120周"。）在动力三角剖分方法中，你同样对时空进行三角剖分，但不是采用固定方式，而是考虑所有可能的三角剖分。不过，你假设所有单形的边长度都相同——例如取普朗克长度。因此，关于时空几何的全部信息都包含在三角剖分本身之中——这就是"动力三角剖分"这一名称的由来。一切都变成纯粹的组合结构——我们对时空几何的描述中不再有实数。这使动力三角剖分方法非常适合计算机模拟。量子引力的计算机模拟！Loll报告了许多此类模拟的结果：

5) Renate Loll，《四维量子引力的离散方法》，可从gr-qc/9805049获取。

以下是一些了解动力三角剖分方法研究量子引力的其他不错资料：

7) J. Ambjørn，《以动力三角剖分表示量子引力》，《经典与量子引力》**12**（1995年）2079–2134。

8) J. Ambjørn、M. Carfora 和 A. Marzuoli，《动力三角剖分的几何学》，施普林格，柏林，1998年。也可从hep-th/9612069获取。

我忍不住想指出动力三角剖分与数理逻辑之间一个颇为有趣的关系，Ambjørn 在他的综述文章中提到了这一点。在采用动力三角剖分方法进行计算机模拟时，人们希望计算某些量在固定紧流形的所有三角剖分上的平均值——例如，四维球面，S^4。通常的做法是从某个特定的三角剖分开始，然后通过各种运算——"Pachner变换"——不断改变它；这些运算保证最终能够将任意一个紧四维流形的三角剖分变为另一个。

现在，数理逻辑就派上用场了。马尔可夫定理指出，不存在一种算法，能够判定两个三角剖分是否属于同一个紧致四维流形。（严格来说，我说的"同一个"是指"分片线性同胚"，不过不用担心这个！）如果它们是 这个流形的三角剖分，

那么用 Pachner变换胡乱操作，最终总能从一个变到另一个；但如果它们不是，你可能永远也无法确定。

另一方面， S^4 可能很特殊。 S^4 是否“算法可判定”仍是一个悬而未决的问题。换言之，是否存在一种算法能够判定某个三角剖分是否为四维球面的三角剖分，仍是一个悬而未决的问题。

现在，假设 S^4 不是算法可判定的。那么，在两个 4 维球面的三角剖分之间转换所需的Pachner变换的极大数量必定增长得极其迅速：比任何可计算函数都快！毕竟，如果不是这样，我们就可以利用这个上界，在尝试使用Pachner变换将我们的三角剖分化简为 S^4的一个已知三角剖分时，知道何时该放弃。因此，必定存在一些“瓶颈”，使得难以利用Pachner变换高效探索 S^4 所有三角剖分的集合。例如，必定存在成对的三角剖分，使得通过Pachner变换从其中一个到达另一个时，必须经过含有多得多的 4-单形的三角剖分。

然而，使用包含多达 65,536 个 4-单形的三角剖分进行的计算机模拟，尚未发现这种“瓶颈”。这是怎么回事？嗯，也许 S^4 实际上是 算法可判定的。或者它并非如此，但瓶颈只会出现在一开始就含有超过 65,536 个 4-单形的三角剖分中。有趣的是，维数再高一维时，已知五维球面不是 算法可判定的，因此在这种情况下，瓶颈必定 存在——但计算机模拟仍未发现它们。

我应该强调，除了这些有趣的可计算性问题，动力三角剖分方法在量子引力研究中还带来了大量有趣的物理学 成果。遗憾的是，我现在没精力解释这些——所以请阅读那些综述文章，再看看 Ambjørn、Carfora 和 Marzuoli 合著的那本好书！

另一方面……如今都在爱因斯坦研究所工作的 Ambjørn 和 Loll 最近携手研究二维洛伦兹量子引力格点模型中的因果性：

9) J. Ambjørn 和 R. Loll，《非微扰洛伦兹量子引力、因果性与拓扑变化》，可见 hep-th/9805108。

我就引用一下摘要：

> 我们通过对具有因果结构的几何结构进行路径积分，构建了一个二维洛伦兹量子引力的非微扰格点模型。该模型在离散层面上可以精确求解。其连续极限与在固有时规范下量子化二维连续体引力所得的理论一致，但与通过矩阵模型或 *Liouville*理论定义的二维引力不符。允许紧致空间切片发生拓扑变化（即婴儿宇宙产生）后，所得结果便与矩阵模型和 *Liouville*理论一致。

现在来点截然不同的内容……

我一直隐约听闻，Kreimer 有一些有趣的研究，将重整化、费曼图和霍普夫代数联系起来。我在葡萄牙时，Kreimer 的一位友善学生 Mathias Mertens 给了我几篇基础论文：

10) Dirk Kreimer，《重整化与纽结理论》，《纽结理论及其应用杂志》，6 (1997年)，479–581。也可见q-alg/9607022。

Dirk Kreimer：《微扰量子场论的霍普夫代数结构》，可见于 q-alg/9707029。

我正在浏览这些论文，但目前还不太理解。基本思路似乎是这样的：在量子场论中，通过计算与某种称为费曼图的图示相对应的积分，可以求出粒子之间某种反应发生的概率。这些积分往往会得出无穷大的结果，因此必须采用一种称为重整化的技巧来消除无穷大，得到有限结果。这种技巧之所以有效，部分原因在于，尽管积分会发散，但通常以明确的速率发散。例如，结果可能渐近于一个常数乘以 $1/d^k$，其中 d是你为了得到有限结果而引入的空间截断。这里得到的常数可以明确计算出来。例如，它往往涉及像 $\zeta(n)$ 这样的数，其中 ζ 是深受数论学家喜爱的黎曼ζ函数：

$$\zeta(n) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

Kreimer 注意到，如果对费曼图施展一些技巧，将它变成纽结或链环的图，那么得到的常数就会以有趣的方式与这个纽结或链环的拓扑学相关！更复杂的纽结或链环会对应更精巧的常数，而且其中还有各种耐人寻味的模式。他在上文引用的第一篇论文中推导了不少例子；此后，人们又推导出了许多其他例子，你可以在参考文献中找到。

显然，这些模式背后的根本原因来自重整化的组合学，而 Kreimer 能够用一种称为霍普夫代数的代数结构来概括它。霍普夫代数在组合学和物理学中都很重要，所以这或许并不令人惊讶。不过，至少据我所知，其中仍有许多神秘之处。

真正令人着迷的是，Kreimer 发现这些东西时研究的是哪些量子场论：并非陈–西蒙斯理论这类与纽结理论已有充分理解的关系的拓扑量子场论，而是普通粒子物理学家几十年来一直在研究的场论，例如量子电动力学、 φ^4 四维理论和 φ^3 六维理论——在这些场论中，由于“重叠发散”等棘手问题，重整化是一件极其严肃的事情。

纽结理论与这些 场论有关联，这个想法令人兴奋，却也有些令人困惑，因为它们不像陈–西蒙斯理论那样存在于三维时空中。熟悉陈–西蒙斯理论的人早已发现纽结理论、量子场论和数论之间令人着迷的模式。这些新进展与之有关吗？还是说它们完全是另一回事？Kreimer似乎认为两者有关。

据 Kirill Krasnov 称，著名数学家 Alain Connes 到处告诉人们要了解这方面的内容。显然，Connes 现在正与 Kreimer 合写一篇关于此主题的论文，而正是 Connes 让本文作者对这一领域产生了兴趣：

11) Thomas Krajewski 和 Raimar Wulkenhaar，《关于费曼图的 Kreimer 霍普夫代数结构》，可见于hep-th/9805098。

我还没深入研读，所以就直接引用摘要：

> 我们重新考察*Kreimer*的微扰量子场论霍普夫代数结构。在*Kreimer*的原始研究中，首先利用薛温格–戴森方程，将重叠发散拆解为不相交发散和嵌套发散的线性组合，然后通过*Hopf*代数运算处理这一线性组合。我们提出了一种表述方式，其中余乘法本身就能生成该线性组合，无需借助外部输入。

但愿数学家会研究这些内容，最终弄懂重整化！

第123周

1998年9月19日

这一切最初都只是个玩笑。纯粹为了争论而争论。*Alison* 和她那些令人恼火的异端观点。
“她宣称：‘数学定理’只有在某个物理系统对其进行检验后才会成为真理：当系统的行为以某种方式取决于该定理是真还是假时。”

那是*1994*年*6*月。我们坐在一处铺着石板的小庭院里，刚听完一学期课程的最后一讲。这门课讲的是数学哲学，算是从枯燥艰深的正经课程中稍作喘息。我们还有十五分钟才要和朋友碰面吃午饭，正好打发时间。这只是一次社交闲谈，隐约带着些调情意味，仅此而已。也许某些疯癫的学者藏身于某处阴暗的墓穴中，坚信某种关于数学真理本质的观点，甚至愿意为之献身。但我们当时才二十岁，而且我们知道 这不过是些无聊的争论。

我说：“物理系统不会创造数学。没有什么东西能创造数学——数学亘古不变。即使宇宙中除了一个电子之外什么也没有，整个数论也仍会一模一样。”

Alison 哼了一声。“是啊，因为即便是一个电子，再加上一个供它存在的时空，也需要用到全部量子力学和全部广义相对论——以及它们所需要的全部数学基础设施。一个漂浮在量子真空中的粒子，就需要群论、泛函分析、微分几何中的半数重要成果——”

“好吧，好吧！我明白你的意思了。但如果真是这样……大爆炸后最初的一个皮秒里发生的事件，就已经‘构建’出了任何物理系统所需的每一条数学真理，一直到大挤压。只要你掌握了万有理论所依据的数学……就够了，这就是全部，再也不需要别的了。故事到此结束。”

“但事实并非如此。要把万有理论应用于某个特定系统，你仍然需要处理该系统所需的全部数学——其中可能包括远远超出万有理论本身所需数学的成果。我的意思是，大爆炸十五亿年后，仍然可能有人站出来证明，比如说……费马大定理。”普林斯顿的 *Andrew Wiles* 最近宣布证明了这个著名猜想，不过他的工作仍在接受同事们的审查，最终结论尚未出炉。“物理学以前从来不需要那个。”

我抗议道：“你说的‘之前’是什么意思？费马大定理过去与物理学的任何分支毫无关系，将来也不会有任何关系。”
Alison 窃笑起来。“没有分支，没有。但这只是因为行为取决于它的物理系统类别实在具体得荒谬：正试图验证怀尔斯证明的数学家们的大脑。”

> “想想看。一旦你开始尝试证明一个定理，那么即使这门数学‘纯粹’到与宇宙中的任何其他对象都毫无关系……你也已经让它与你自己相关了。你必须选择某种物理过程来检验这个定理——无论你使用计算机、纸笔……还是只是闭上眼睛，扰动神经递质。不存在不依赖物理事件的证明，而这些事件发生在你的头骨之内还是之外，并不会让它们变得丝毫不真实。”

而这仅仅是个开始……是 Greg Egan 的故事的开端：算术公理中存在不一致性——数学结构中遗留下来的一个“拓扑缺陷”，就像某些思考早期宇宙的物理学家所假设的宇宙弦或磁单极子——以及发现它的数学家们，还有他们如何竭力阻止一家大公司为了邪恶目的利用它。这是他新作集《光辉》的同名篇章。

我还应该提一下他更早的一部故事集，它以一类精密的、能够改变心智的纳米技术命名，称为“公理”，使用者的特定信念会受到它的影响：

1) Greg Egan，《公理》，Orion Books，1995年。
Greg Egan，《光辉》，Orion Books，1998年。

这些书集中的一些故事涉及数学和物理学，例如《普朗克潜航》，讲述一些遥远未来的探险者将自己的副本送入黑洞，亲身研究量子引力。从吹毛求疵者的角度看，这个故事的一大妙处是，Egan 确实设想出了一种可信的方案，来应对其中涉及的技术难题——这要归功于一点23世纪技术。另一个妙处是，它进一步探索了这样一个世界：所有人早已被上传到虚拟“景域”中，可以轻松修改和复制自己——对于读过他的小说《Diaspora》的读者来说，这个世界并不陌生（见“第115周”）。但我真正喜欢的是，这不仅仅是一场硬核科学的盛宴；它还是对死亡的沉思。除非亲自穿越事件视界，否则你永远无法真正知道那是什么感觉……

其他故事则聚焦于生物技术和身份认同的哲学问题。后一类故事尤其会吸引所有喜欢这本书的人：

2) Daniel C. Dennett 和 Douglas R. Hofstadter，《自我的幻想与反射：关于自我与灵魂》，矮脚鸡图书公司，纽约，1982年。

其中有一篇我最喜欢的故事，名为“Closer”。你和某个人究竟能有多亲近，却又不至于真的成为对方？暂时与所爱之人合而为一，是否能帮助你更好地理解对方？各位想省钱的读者有福了，这篇特别的故事可以在以下网站免费阅读：

3) Greg Egan，*Closer*，https://www.gregegan.net/MISC/CLOSER/Closer.html

哎呀！我是不是已经偏离数理物理太远了？自指与数理逻辑有很大关系，不过……为了温和地回到正题，我想指出，Egan 有一个网站，以一种简洁易懂、非技术性的方式解释狭义相对论和广义相对论：

4) Greg Egan，《基础》，https://www.gregegan.net/FOUNDATIONS/

此外，以下是一些有趣的论文：

5) Gordon L. Kane，《更多维度的实验依据得到报告》，《今日物理》，1998年5月，13–16页。

Paul M. Grant，《研究人员在仿生纳米聚合物中发现异常高温超导性》，《今日物理》，1998年5月，17–19页。

Jack Watrous，《核糖体机器人技术接近关键实验；政府机构对此兴趣不一》，《今日物理》，1998年5月，21–23页。

这些论文的共同之处在于，它们都是科幻小说作品，而非科学作品。它们表面上读起来像是严肃的科学报道，实际上却是《今日物理》“《物理学的明天》”征文比赛的获奖作品！

例如，Grant 写道：

> *Little* 的设想是用激子取代声子——声子以德拜温度为特征；激子的特征能量则高得多，约为 *2 eV*，即 *23,000 K*。如果激子能成为电子配对的“胶水”，那么即使在弱耦合条件下，也可能实现最高达 *500 K* 的超导体。*Little* 甚至提出了这一设想的一种可能实现方式：由共轭聚合物链（多烯）构成的结构，并在其侧链上连接高极化率分子（芳香族化合物）。简而言之，多烯链将是一种普通金属，每个 *C-H* 分子单元上有一个可自由移动的电子；不同单元上的电子会通过与侧链高极化率分子上的激子场相互作用而配对。

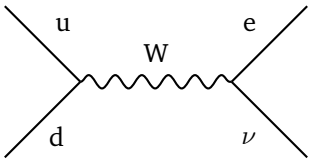
其实，我认为这部分完全属实——William A. Little 早在 20 世纪 60 年代就提出了这种实现高温超导的方法。科幻小说的成分仅在于 Grant 文章后面描述的 Little 的梦想究竟是如何实现的。

好了，科幻小说就说到这里！该谈谈真正的科学了！也就是量子引力。（别偷笑，怀疑论者们……）

6) Laurent Freidel 和 Kirill Krasnov，《自旋泡沫模型与经典作用量原理》，《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**2**（1999年），1183–1247。另可见hep-th/9807092。

我在“第113周”中介绍了量子引力的自旋泡沫方法。不过，还是让我来提醒你一下它的基本思路。理解这一思路的一种好方法，是把它与费曼图作类比。在通常的量子场论中，有一个称为“福克空间”的态希尔伯特空间。这个空间有一个态基，其中包含特定数量、位于特定位置的粒子。我们可以这样直观地想象这种态：空间中有一群点，每个点都标有相应的粒子种类，例如电子、夸克等。量子场论的主要任务之一，是让我们能够计算一个这样的态随着时间推移演化为另一个态的振幅。费曼证明了

我们可以通过计算时空中所有图的和来做到这一点。这些图称为费曼图，它们代表“历史”。例如，



这代表这样一段历史：一个上夸克发射出一个W玻色子，转变为一个下夸克；W玻色子被一个电子吸收，使电子转变为中微子。时间随着你沿页面向下阅读而流逝。量子场论为计算任意费曼图的振幅提供规则。把所有从一种态开始、以另一种态结束的费曼图的振幅相加，就能得到给定跃迁发生的总振幅。

那么，计算费曼图振幅的这些规则从何而来？它们并非凭空设定，而是源自微扰理论。量子场论中有一个用于计算振幅的一般抽象公式，但在具体计算中，这个公式并不容易使用，某些非常简单的场论除外；这类理论称为“自由理论”。这些理论描述的是完全不相互作用的粒子。它们在数学上易于处理，但在物理上并无趣味。所谓无趣味，除非 将其作为研究我们感兴趣的理论——所谓“相互作用理论”——的起点。

诀窍在于把相互作用理论看作包含一些参数，这些参数称为“耦合常数”；当它们被设为零时，理论就会退化为自由理论。接下来，我们可以尝试把想要了解的跃迁振幅展开为这些参数的泰勒级数。和往常一样，计算泰勒级数的系数只需要计算一系列导数。而我们可以利用自由理论来计算这些导数！通常，计算某个跃迁振幅的第 n 阶导数，会得到一系列与含有 n 个顶点的费曼图相对应的积分。

顺便说一句，这意味着你不应完全照字面看待费曼图中出现的粒子。它们并非纯粹源自相互作用理论的数学结构，而是在我们用自由理论对该理论进行近似时出现的。这并不是无关紧要的一点，因为我们可以用不同的自由理论来近似同一个相互作用理论。根据所采用的自由理论不同，我们对相互作用理论所描述的粒子可能会有不同的说法！在凝聚态物理学中，人们有时使用“准粒子”一词，来描述出现在某个自由理论中的粒子，而该自由理论恰好对某个问题很有用。例如，用“声子”描述晶体中的振动，或用“自旋子”描述倾斜的电子自旋形成的波，可能会很有帮助。凝聚态理论学家很少担心这些粒子是否“真的存在”。相比于它们是否“真的存在”，更重要的问题是：它们所处的特定自由理论，是否能为处理某个问题提供良好的近似。粒子物理学家也越来越认识到，我们不应过分担心哪些基本粒子“真的存在”。

不过我扯远了！我只是想说，费曼图源于用自由理论近似相互作用理论。细节很复杂，而且在大多数情况下，从来没有人成功地使这些做法在数学上严格成立，但我不想在这里展开。相反，我想转向自旋泡沫。

我所说的关于费曼图的一切，在这种量子引力研究方法中都有对应的类比。最大的区别在于，通常的“自由理论”建立在具有固定度量的时空上——通常是闵可夫斯基时空及其通常的平直度量。试图用这种自由理论来近似量子引力，结果惨败。也许其根本原因在于，广义相对论并不预设时空具有固定的度量——恰恰相反，它是一种以度量为主要变量的理论！

因此，Freidel 和 Krasnov 的想法是用一种截然不同的“自由理论”来近似量子引力：在这种理论中，度量是一个变量。他们所用的理论称为“BF理论”。我在 BF 理论《第36周》中谈了很多，但这里的要点很简单：它是一种拓扑量子场论，简称 TQFT。拓扑量子场论是一种不预设固定度量的量子场论，但它属于一种非常简单的类型，因为它没有局域自由度。我很喜欢这样一种想法：拓扑量子场论或许可以作为一种新颖的“自由理论”，用于研究量子引力。

Freidel 和 Krasnov 所做的一切都让人想起熟悉的量子场论，但又截然不同，因为他们的出发点是 BF 理论，而非传统类型的自由理论。例如，普通量子场论从福克空间出发；同样，在量子引力的自旋网络方法中，我们从一个简单而优美的态希尔伯特空间出发。但这个空间的基并非由一群位于空间特定位置的零维粒子构成，而是由一维“自旋网络”构成。（关于自旋网络的更多内容，参见《第55周》和《第110周》。）我们不再使用一维费曼图来计算跃迁振幅，而是改用称为“自旋泡沫”的二维构造。在 BF 理论中，自旋泡沫的振幅很容易计算，因为存在许多显式公式，它们用到了所谓的“考夫曼括号”——一种易于计算的自旋网络不变量。因此，诀窍就在于利用这项技术来计算量子引力的自旋泡沫振幅。

不过，我不想让你在这件事上产生错误的印象。这项研究中有许多严肃的问题和非常基础的未决问题，整个理论最终也可能以某种方式存在致命缺陷。尽管如此，其中似乎有些东西是对的，所以我觉得它非常有意思。

总之，接下来看看其他一些论文。很抱歉，我没精力详细介绍，因为我正忙着搬进新家，所以基本上只能把它们指给你看看……

7) Abhay Ashtekar、Alejandro Corichi 和 JoseA. Zapata，《量子理论与几何 III：黎曼结构的非对易性》，可见 gr-qc/9806041。

这是备受期待的系列论文第三篇，旨在为如何将自旋网络态解释为“量子三维几何”提供一套数学上严谨的形式体系；所谓“量子三维几何”，就是描述三维空间度量及其外曲率（即该空间嵌入四维时空时的外曲率）的量子态。摘要如下：

> “最近，人们提出了系统构建黎曼几何量子理论的基本框架。黎曼结构的量子版本——例如三重标架和面积算符——表现出非交换性。乍看之下，这一特性令人意外，因为它意味着该框架不允许三重标架表象。为了更好地理解这一性质并使其与直觉相协调，我们详细分析了它的起源。在

> 特别是，我们仔细研究了基础相空间，并追溯发现这一特性源自经典理论；量子化并未引入任何反常。我们还说明了为何这种非交换性带来的不确定性在半经典区间内可以忽略。”

如果你好奇的话，“三重标架”场大致相当于数学家所说的“标架场”或“焊接形式”——它也就是 BF 理论中的“B”场。在 Ashtekar 对广义相对论的表述中，它编码了度量的信息。

接下来谈谈 n-范畴相关的问题：

8) Andre Hirschowitz, Carlos Simpson，《关于 n-代数栈的下降》（关于n-代数栈的下降），可见math.AG/9807049。

显然，这篇文章提出了一种“n-代数栈”理论，它们是 n-范畴意义下对层的推广。自从 Grothendieck 写给 Quillen 的600页长信问世以来（参见“第35周”），这一直是 n-范畴论的圣杯。遗憾的是，我还鼓不起足够的勇气去啃完这240页法文，所以并不真正了解其中的细节！

对于以下两篇 n-范畴论文，它们探讨了一些我十分关注的主题，我就直接引用摘要：

9) Michael Batanin，《球状集上有限元幺半群的计算图》，可访问于 https://citeseerx.ist.psu.edu/pdf/5ebfd5445a832eb9a104b2f9ef7ae9bc58741af6

> 这项工作源于对高维范畴理论基础的反思。任何关于弱 n-范畴的拟议定义，其中一个主要组成部分就是我们所接受的、可进行复合的图示（粘贴图）的形状。在由 *Batanin* 提出的球状方法 *[*中*]*，每个 k-细胞都有一个源点和一个目标$(k-1)$-细胞。在 *Baez* 和 *Dolan* 的 *opetopic* 方法，以及 *Hermida*、*Makkai* 和 *Power* 的多主题方法中，每个 k-细胞都有唯一的$(k-1)$-细胞作为目标，并有一个完整的$(k-1)$-维粘贴图作为源点。在严格 n-范畴理论中，源点和目标都可能是一般的粘贴图。
>
> 球状方法似乎是最简单的方法，但用它描述高维复合的组合学似乎过于受限。然而，我们认为这只是一种错觉。此外，我们证明，这种方法具有基础性，其他类型的可复合图示都可以由此导出。本文证明的一个定理指出，在 *n*-球状集范畴上一个有限元单子的代数范畴，与由原单子的数据构造出的特殊范畴（计算图范畴）上某个适当单子的代数范畴是等价的。对于由泛可缩歌剧导出的单子，这一结果可以解释为：基于“球状”粘贴图与一般粘贴图的弱 n-范畴定义（按 *Batanin* 的意义）彼此等价。它也可以看作迈向证明不同弱 n-范畴定义等价的第一步。

> 我们还发展了计算图的一般理论，并研究广义计算图范畴的一些性质。结果表明，在良好情形下，这个范畴是一个托扑斯（在某些不太苛刻的条件下，甚至是一个预层托扑斯；这一性质最初由 *S. Schanuel* 发现，随后 *A. Carboni* 和 *P. Johnstone* 针对 *Street* 意义下的 *2*-计算图表重新证明）。

10) Tom Leinster，《高维范畴论中的结构》，可于以下网址获取：math/0109021

> 本文介绍了高维范畴论中出现的一些构造。我们先回顾运算子的通论和多范畴。基于此，我们阐述 *Batanin* 对 n-范畴的定义；也以图示给出一个非正式定义。接下来，我们讨论 *Gray*范畴及其在相干性问题中的作用。最后，我们介绍与 n-范畴的 *opetopic*定义相关的各种构造。新内容包括：对松弛立方 n-范畴定义的一项建议；将小*Gray*范畴刻画为2-Cat中的小子结构；关于高维相干定理的一个猜想；树范畴以及更一般的 n-粘贴图范畴的构造；还有运算子通论中 *Baez–Dolan*切片过程的一个类比。

好了——现在来点截然不同的内容。在"第122周"中，我提到 Kreimer 和 Connes 携手撰写了一篇论文，将霍普夫代数、重整化与非交换几何联系起来。现在论文已经发表：

11) Alain Connes 和 Dirk Kreimer，《霍普夫代数、重整化与非交换几何》，《数学物理通讯》**199** （1998年），203–242。另可见高能物理理论/9808042。

此外，这里还有一篇对 Kreimer 研究的介绍：

12) Dirk Kreimer，《纽结理论和数论对圈图计算能有多大用处？》，在研讨会规范理论中的圈与腿上所作的报告，见高能物理理论/ 9807125

转到同伦论及其衍生领域……今年春天我拜访约翰斯·霍普金斯大学的 Dan Christensen 时，他把那里的同伦论学者都介绍给我认识；Jack Morava 还给了我一篇论文，充分展现了新潮的"量子拓扑"与传统的同伦论交融到了何种程度：

12) Jack Morava，《量子广义上同调》，可见于 math.QA/9807058。

这次我还是直接引用摘要，不尝试自己概述：

> 我们在复余边与有理数的张量积上构造了一种环结构，它与通常的环结构之间的关系，类似于量子上同调与普通上同调之间的关系。由此得到的对象定义了一种广义的二维拓扑场论，其取值于谱范畴。

最后，Morava 有一位学生给了我一篇关于拟运算子和模空间的有趣论文：

13) Satyan L. Devadoss，《模空间的镶嵌与镶嵌歌剧集》，收录于 同伦不变代数结构——纪念 *J. Michael Boardman* 的会议，由 J. P. Meyer、Morava 和 W. S. Wilson 编，《当代数学》**239**。另见 math.QA/9807010。

> “我们构造了一种新的（循环）镶嵌运算子，由带有标记对角线的多边形定义。其底层（非球面）空间是模空间中带 *puncture* 的黎曼球面的实点集合 $M_{0,\ n}(\mathbb{R})$，这些空间自然地由 *Stasheff*结合多面体铺砌。我们以组合方式将它们描述为迭代爆破，并证明它们的基本群构成一个运算子，与辫群歌剧集有相似之处。”

> 有些事情太过严肃，以至于人们只能拿它们开玩笑。——尼尔斯·玻尔

第124周

1998年10月23日

我刚从图森回来，在那里和我的朋友 Minhyong Kim 聊了很多。他在亚利桑那大学数学系任教。1986年，我还是博士后、他还是耶鲁大学的研究生时，我们相识了。当时弦正风靡一时。刚刚发现了5种自洽的超弦理论，许多物理学家兴奋不已、满怀乐观，有些人甚至认为万有理论会在世纪之交前完成。许多数学家也欣然加入其中，为那些优美而精巧的数学架构——共形场论、顶点算子代数等等——深深着迷。Minhyong 当时正在考虑以这些课题之一作为论文主题，因此我们花了很多时间讨论数理物理。

不过，他最终决定与 Serge Lang 一起研究算术几何。这是代数几何的一个分支，研究的是整数而非域上的问题——对丢番图方程尤为重要。说实话，我有点失望。也许是因为我觉得物理学比纯数学那些颓靡的乐趣更重要——也可能是因为这让我和他合作写论文的机会大大降低了。

不过，Minhyong 学习弦理论时学到的许多数学知识，在算术几何中也很重要。椭圆曲线理论就是一例。粗略地说，椭圆曲线是一个环面：取复平面中的一个平行四边形，并将其对边粘合起来，就得到这个环面。

你可能会好奇，为什么一个基本上长得像甜甜圈的东西会被称为椭圆曲线！这就来解释一下。“椭圆”一词源自它与椭圆函数的关系；椭圆函数将熟悉的三角函数从圆推广到了椭圆。“曲线”一词则源于这样一个事实：要描述你在一个具有两个实坐标的曲面上的位置，只需一个复数 $z = x + iy$ （x，y），所以喜欢卖弄的人会说环面是一维的——也就是说，是一个复维的对象！——因此称为“曲线”。简而言之，你得先理解椭圆曲线，才能知道它们到底为什么叫椭圆曲线。

那么，椭圆曲线为何重要？一方面，它们在数论中随处可见，例如出现在安德鲁·怀尔斯证明费马大定理的过程中。另一方面，在弦理论中，弦会在时空中描绘出一个称为弦世界面的曲面，而这个曲面上的点可以方便地用单个复数来描述，因此那些自以为是的人称之为“曲线”——而椭圆曲线就是最简单的例子之一！

如果你想了解费马大定理是如何被归结为一个关于椭圆曲线的问题——也就是所谓的志村-谷山-魏尔猜想——可以看看“第13周”中列出的椭圆曲线教科书。不过我就不谈这个了，因为我不懂。相反，我想聊聊椭圆曲线如何出现在弦理论中。若想进一步了解这两种应用如何相互关联，可以参考：

1) Yuri I. Manin，《关于算术物理的思考》，载于《共形不变性与弦理论》，Petre Dita 和 Vladimir Georgescu 编，Academic Press，1989。

我先引用开头部分：

> 二十世纪最后四分之一时期，理论物理的发展受到一套极富浪漫色彩的价值体系引导。物理学家若立志描述普朗克尺度上的基本过程，就注定会失去与可观测世界的直接联络。在这种社会背景下，弦理论中涌现出的精妙数学不再只是计算某些可测效应所需的技术工具，而成为一种原则问题。
>
> 如今，我们当中至少有一些人再次怀有一种古老的柏拉图式情怀：数学思想似乎注定要用来描述物理世界，无论它们的起源看起来距离现实多么遥远。
>
> 从这一观点来看，人们反而应当预期，数论会成为数学中最具应用性的分支。”

我认为，这句话明智地概括了这样一种物理学的魅力与危险：它更多地依赖数学优雅这一标准，而不是实验验证。

总之，我不想过多深入椭圆曲线理论；只需了解足够的内容，让我们明白为什么数字24在弦理论中如此重要。你可能还记得，玻色弦理论在26维中运行得最好（而在物理学上更为重要、包含自旋-1/2粒子的超弦理论，则在10维中运行得最好）。为什么会这样？答案有很多，其中一种说法是：如果你把弦看作在垂直于自身二维曲面的24个方向上摆动——也就是两个真正的 维度！——那么数字24的各种神奇性质便共同作用，使一切得以顺利运转。

数字 24 有哪些神奇的性质？嗯，

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2$$

本身是一个完全平方数，而除了 0 和 1 这类无聊的数字外，24 是唯一具有这一性质的整数。正如“第95周”中所述，这与弦理论有着一些非常深刻的联系。遗憾的是，我不知道有什么办法能由此推导出玻色弦理论在26维中效果最佳。

玻色弦理论在 26 维中效果最佳的一个原因是

$$1 + 2 + 3 + \ldots = -\frac{1}{12}$$

以及 $2 \times 12 = 24$。当然，这种解释在许多方面都不尽如人意。首先，你可能会疑惑上面的等式是什么意思！这个和难道不会发散吗？？？

事实上，这是这个解释中最不令人满意之处。虽然这个和会发散，但你仍然可以对它作出合理解释。黎曼ζ函数定义为

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \ldots$$

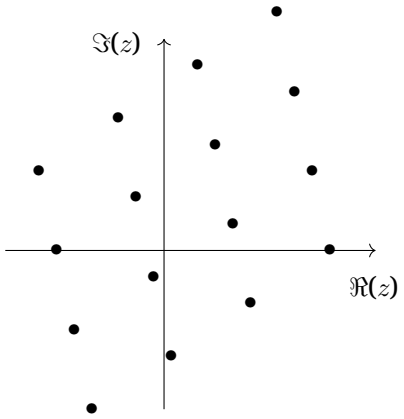
只要 s 的实部大于 1，和就会收敛。不过，你可以将它解析延拓到整个复平面，除了 1 处的一个极点。这样做之后，你会发现

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

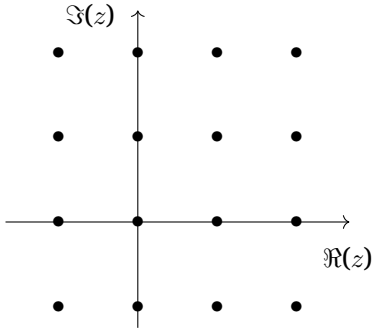
因此，我们可以开玩笑地说 $1+2+3+\ldots=-1/12$。但真正重要的是，ζ函数如何出现在弦理论以及一般的量子场论中。（它在数论中也很重要。）

遗憾的是，细节很快就变得相当技术化；必须进行一些计算之类的工作。这正是其中真正令人不满意的部分。我想要的是某种能清楚地把弦和数字24联系起来的东西，简单到连孩子都能理解；而且当你推导出它的全部含义时，会发现玻色弦理论只有在26维中才有意义。我并不指望孩子能够推导出所有这些含义.....但我希望其本质简单得像孩子都能理解一样。

答案就在这里。假设弦世界面是一条椭圆曲线。那么，我们可以在复平面中取一个由平行四边形组成的“格”来构造它：

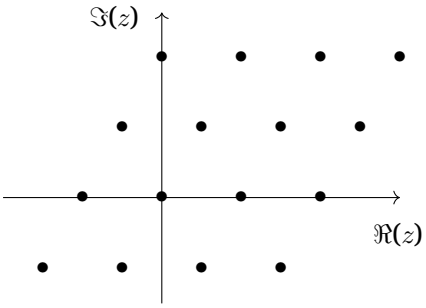


并将每个平行四边形中的每个点与其他所有平行四边形中对应的点一一对应起来。这样便将平面卷成了一个环面。现在，有两种格比其他格更对称。其中一种是正方格：



w具有四重旋转对称性。另一个是有许多等边三角形的格

其中的三角形：



它具有六重旋转对称性。数字24的神奇性质使弦理论在26维中运作良好，而这种性质是

$$4 \times 6 = 24$$

好，太棒了。不过，如果你和我差不多，这时候肯定会纳闷：这到底有什么用？弦理论为什么要关心这些具有特殊对称性的格？我们又为什么要把4和6相乘？到目前为止，我说的都是些华而不实的东西。下周我会补充一些细节。当然，我得把深奥程度再提高一两档。

与此同时，你可以读读下面这篇关于Richard Borcherds的文章，了解更多相关内容。他因研究玻色弦理论、24维中的Leech格以及怪兽群之间的联系而获得菲尔兹奖：

2) W. Wayt Gibbs，《怪兽月光是真的》，《科学美国人》，1998年11月，40–41。也可见 http://www.sciam.com/1998/1198issue/1198profile. html。

Gibbs请我用简单的方式解释椭圆曲线的 j 不变量；你可以 j判断我做得如何。若想看更详细的尝试，“第66周”，其中还列出了更多关于怪兽群的参考资料。顺便说一句，John McKay并非在阅读一本19世纪的椭圆模函数著作时，发现了那个著名的、与怪兽群有关的 j 不变量；他表示：“在du Val的《椭圆函数》中， j 被错误地展开成一个 q 级数——这可是一本货真价实的20世纪著作。”除此之外，据我所知，这篇文章似乎准确无误。

如果你真的想了解椭圆曲线与弦之间的关系，就需要学习一些共形场论。可以从这里入手：

3）Phillippe Di Francesco、Pierre Mathieu 和 David Senechal，《共形场论》，施普林格，1997年。

这是一次真正精彩的主题导览。全书长达890页，但它旨在让数学家和物理学家都能读懂，因此你可以挑选自己感兴趣的部分阅读。开篇是60页的量子场论导论，接着是30页的统计力学导论。原因在于，当我们进行一种称为“Wick变换”的代换时：

$$it/\hbar \mapsto k/T,$$

量子场论会转变为统计力学，而一个漂亮的洛伦兹流形可能会转变为黎曼流形——换句话说，“时空”会变成“空间”。这就赋予了共形场论双重人格。

首先，共形场论研究二维量子场论，这些理论在所有共形变换下均保持不变——共形变换能够保持角度，但不一定保持长度。这些理论对于弦理论十分重要，因为我们可以将其视为保持弦世界面复结构的变换。

其次，如果进行Wick变换，这些量子场论就会变成在所有共形变换下均保持不变的二维统计力学问题。这看似是一个深奥的问题，但在一切实际应用中，材料的薄膜通常可以视为二维的，而共形不变性在“临界点”处十分常见——临界点是两个或更多物态之间的边界，在此处不存在潜热，例如铁磁体的磁化态与未磁化态之间的边界。在二维情况下，可以利用共形场论彻底理解这些临界点。

在这一番热身之后，本书将介绍共形场论本身的基础知识，包括：

- 共形不变性的概念（它在二维情形下尤其强大，因为此时共形变换群是无限维的），
- 自由玻色子场和费米子场，
- 算子乘积展开，
- Virasoro代数（它与共形变换群的李代数密切相关，并且在任意共形场论的态空间上都有表示），
- 极小模型（粗略地说，其希尔伯特空间由有限多个Virasoro代数的不可约表示构成的共形场论），
- 库仑气体形式体系（一种用自由玻色子场和费米子场描述极小模型的方法），
- 模不变性（研究环面上的共形场论——椭圆曲线正是在这里悄然进入视野，并带来了椭圆函数、θ函数、戴德金η函数等精彩的数学工具），
- 临界渗流（将共形场论应用于物质试图在多孔介质中渗流的系统，特别关注孔洞刚好大到足以让物质一路渗流通过时的临界点），
- 二维伊辛模型（将共形场论应用于铁磁体，特别关注温度刚好低到足以使铁磁性开始显现时的临界点）

到现在我们已经读到第486页了。光是总结这本书，我就已经累了！

无论如何，接下来本书转向具有李群对称性的共形场论：尤其是所谓的韦斯–祖米诺–维滕模型，或简称“WZW”模型。纯数学家们也可以在这里加入，甚至业余棋手也不例外，因为接下来我们将读到一篇精彩的、长达78页的单李代数入门，从零开始，迅速讲完各种有趣内容，同时跳过所有令人讨厌的证明。然后是关于仿射李代数的54页入门介绍。仿射李代数是单李代数的无限维推广，在弦理论中发挥着至关重要的作用。最后，我们将学习一门详细的、长达143页的WZW模型课程——WZW模型基本上是这样的共形场论：其中场取值于一个李群；以及余集模型——其中场取值于一个李群模去一个子群。听起来，所有极小模型似乎都可以描述为余集模型，不过我也不是十分确定。

哎呀！信不信由你，作者们打算再出第二卷！总之，这是一本值得放在手边的好书。去年春天，我正准备在芝加哥买一本——当时只卖50美元——却发现自己的信用卡丢了。唉，好东西总是擦肩而过……

有多种用于研究共形场论的形式体系，上文并未涉及。例如，“顶点算子代数”或“顶点代数”理论，在研究共形场论和怪兽群的数学家中非常流行。

顶点算子代数的标准定义冗长而复杂：它概括了人们对共形场论的许多期望，但除非你已经了解一些其他 共形场论研究方法，否则很难喜欢上它。还有一种基于拟运算子的定义，要好得多，最终也会流行起来——有人抱怨拟运算子太抽象，但那纯属胡说。不过，无论如何，我们确实需要更多关于这个主题的入门读物。这里推荐一本：

4) 维克托·卡茨，《初学者的顶点代数》，美国数学会，大学讲座系列第**10**卷，1997年。

当然，还有真正的弦理论。要怎么学习呢？Green、Schwarz 和 Witten 编写的经典圣经总是值得一读（参见“第118周”），不过自那本书出版以来，已经发生了许多变化。幸运的是，约瑟夫·波尔钦斯基推出了“新约”；我还没读过，但物理学家们都说它非常好：

5) 约瑟夫·波尔钦斯基，《弦理论》，两卷，剑桥大学出版社，1998年。

当然，还有其他教科书。下面这本如果自己打印出来，就是免费的：

6) E. Kiritsis，《超弦理论导论》，可通过hep-th/9709062获取。

如果想采用更数学化的方法，可以试试这本即将出版的书：

7) 《量子场与弦：数学家课程》，P. Deligne、P. Et- inghof、D. Freed、L. Jeffrey、D. Kazhdan、D. Morrison 和 E. Witten 编，美国数学会，即将出版。

最后，如果你厌倦了所有这些新潮玩意儿，想读读物理学家预测新粒子、而这些粒子最终真的被观测到的美好旧时光，那就可以读读这本关于狄拉克及其工作的书：

8) Abraham Pais、Maurice Jacob、David I. Olive 和 Michael F. Atiyah，《保罗·狄拉克：其人及其工作》评介，剑桥大学出版社，1998年。

也请看：

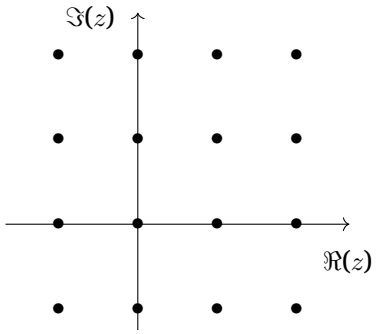
9) Michael Berry，《保罗·狄拉克：物理学中最纯粹的灵魂》，《物理世界》，1998年2月，第36–40页。

> 首先，也是对狄拉克而言最重要的一点是，导向这一理论的逻辑虽然深奥精妙，却在某种意义上美得简洁。许久之后，有人问他（想必此前已有许多人这样问过）“你是如何找到狄拉克方程的？”据说他回答道：“我觉得它很美。”
>
> — *Michael Berry*

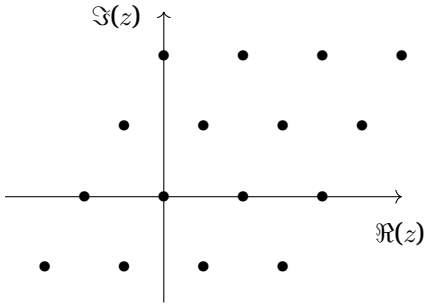
第125周

1998年11月3日

上周我承诺要解释椭圆曲线、弦理论与数字 24 之间一些神秘的联络。我声称，这一切归根结底都源于平面上存在两种特别对称的格，也就是正方格：



具有四重对称性，以及六角晶格：



具有六重对称性。现在该由我来为这些说法提供依据了。

首先，我需要稍微谈谈格和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$。正如我在 “第66周”中解释的那样，复平面中的格由两个复数（比如 ω_1 和 ω_2）的所有整数线性组合构成。不过，我们可以在不改变格的情况下改变这两个数，只需令

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$$
$$\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$$

其中

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是一个由整数构成的 2×2 可逆矩阵，其逆矩阵也由整数构成。通常，我们最好要求变换保留基的左右手性（ω_1，ω_2），这意味着该矩阵的行列式应为 1。这类矩阵构成一个群，称为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$。在椭圆曲线的语境中，它也称为“模群”。

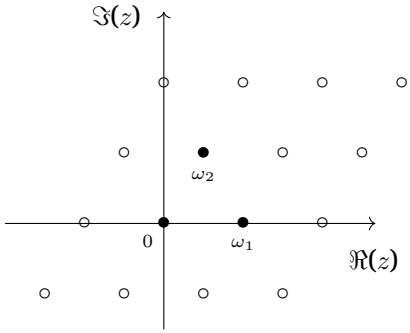
现在，与正方格相关联的是 SL(2，$\mathbb{Z}$) 中一个特殊的元素，它对应于 90度旋转。大家都把它称为 S:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

与六角晶格相关联的是 SL(2，$\mathbb{Z}$) 中一个特殊的元素，它对应于一次60度旋转。大家都称它为 ST:

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

（瞧，已经有一个矩阵被称为 T，而 ST 就是由 S 和那个矩阵相乘得到的。）现在，你可能会抱怨矩阵 ST 看起来不像旋转，但一定要谨慎！我的意思是，如果取六角晶格，并像这样为它选取一个基:



那么在这个基下，矩阵 ST 表示一次60度旋转。

到目前为止，一切都相当直截了当，但接下来会有一些令人惊讶的发现。首先，事实证明，SL(2，$\mathbb{Z}$) 由 S和 ST生成。换句话说，每个行列式为 1 的 2×2 整数矩阵，都可以写成若干个 S、ST及其逆元的乘积。其次，S 和 ST 满足的所有关系，都可以由以下显而易见的关系推出:

$$S^4 = 1$$
$$(ST)^6 = 1$$

再加上

$$S^2 = (ST)^3$$

这个关系成立，因为等式两边都表示一次 180度旋转。

这立刻意味着 SL(2，$\mathbb{Z}$) 天生就带有某种“12性”。我来解释一下。SL(2，$\mathbb{Z}$) 是一个非阿贝尔群——用博士学位持有者的话来说，就是矩阵乘法不满足交换性——但假设我们通过添加强制交换性的额外关系来对它进行阿贝尔化。那么我们得到一个由 S 和 ST生成的群，它满足上述关系，此外还满足 S 和 ST 可交换这一关系。这个群就是 $\mathbb{Z}/12$，它有 12 个元素！

这种“12性”与弦理论中数字 24 的神奇性质有很大关系。不过，要了解这种“12性”如何影响弦理论，我们还需要多谈一些椭圆

曲线。除非我稍微提高一点数学上的难度，否则这会没完没了。所以.....

我们可以将椭圆曲线定义为一个环面 $\mathbb{C}/L$，它由复平面$\mathbb{C}$ 对格 L 取商得到。由于 $\mathbb{C}$ 是阿贝尔群，而 L 是一个子群，这个环面也是阿贝尔群；但在椭圆曲线理论中，我们不仅把它视为一个群，也把它视为一个复流形。因此，如果存在一个从椭圆曲线 $\mathbb{C}/L$ 到 $\mathbb{C}/L'$ 的复解析函数，同时也是群同构，我们就认为这两条椭圆曲线同构。当且仅当存在一个非零数z 使得 $zL = L'$时，这种情况才会发生；换句话说，只要 L' 是 L旋转和／或缩放后的版本即可。

有一个很棒的空间叫作椭圆曲线的“模空间”：其中的每个点都对应一个椭圆曲线的同构类。在物理学中，我们把其中的每个点看作描述环面形弦世界面几何的对象。因此，在弦理论的路径积分方法中，我们需要对这个空间积分，同时还要对一系列对应于具有不同拓扑的弦世界面的其他模空间积分。所有这些模空间都很重要，也很有趣，但当你刚开始学习这些内容时，椭圆曲线模空间是一个不错而简单的例子。这个空间看起来是什么样的?

好，假设我们有一条椭圆曲线 $\mathbb{C}/L$。我们可以取格 L，并用一个右手基 (ω_1, ω_2) 来描述它。为了将椭圆曲线分类到同构的意义下，用某个数 z 乘以这些基元素并不重要，因此真正重要的只是这个比值

$$\tau = \omega 1/\omega 2.$$

由于我们的基是右手基，τ 位于上半平面，也就是人们常称的 H。

好，现在我们已经用一个位于 H 中的复数 τ 描述了椭圆曲线。但问题是，我们可以为格 L 选择另一个右手基，从而得到另一个数 τ。我们得想想这个问题。幸运的是，我们已经知道如何在不改变格的情况下更换基：只需对基应用一个 SL(2, $\mathbb{Z}$) 矩阵，就能得到一个新基

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$$
$$\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$$

这样一来，τ 就会变为

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

如果你不明白原因，就自己推导一下——要理解椭圆曲线，你就必须弄懂这一点!

总之，两个数 τ和 τ' 描述同构的椭圆曲线，当且仅当它们相差上述类型的变换。因此，我们已经找到了椭圆曲线模空间：它是商空间 $H/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，其中 SL(2, $\mathbb{Z}$) 按照上述方式作用于 H！

现在，商空间 $H/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 不是光滑流形，因为尽管上半平面 H 是一个流形，且群 SL(2, $\mathbb{Z}$) 是离散的，但 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的作用

在 H 上并非自由的：也就是说，某些点 H 在受到 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的某些元素作用时不会移动。

如果你不明白这为什么会造成麻烦，可以想想一个更简单的例子，比如群 $G = \mathbb{Z}/n$ 作用于复平面 $\mathbb{C}$，将其视为旋转。平面上的大多数点都会在旋转时移动，但原点不会。商空间 $\mathbb{C}/G$ 是一个圆锥，其顶点对应于原点。除了顶点之外，它处处光滑；在顶点处则有一个“圆锥奇点”。这个故事的寓意是，当我们用一个对称群对流形取商时，会得到一个带有奇点的空间，而这些奇点对应于原流形中特别对称的点。

因此，我们预计 H/SL(2, $\mathbb{Z}$) 会有奇点，这些奇点对应于 H 中与特别对称的格相对应的点。当然，这些格就是我们的老朋友：正方形格和六边形格！

不过，我们还是要更加仔细一些。首先，对 H 中的任何东西施加th矩阵 -1时，什么都不会移动。但这没什么大不了的：我们只需将群 SL(2, $\mathbb{Z}$) 替换为

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$$

由于 -1 不会移动 H中的任何点，SL(2, $\mathbb{Z}$) 在 H 上的作用便给出了 PSL(2, $\mathbb{Z}$) 的作用，而椭圆曲线模空间就是 H/PSL(2, $\mathbb{Z}$)。

现在，H 中的大多数点都不会被 PSL(2, $\mathbb{Z}$) 的任何元素保持不变。不过，确实有些点会！对应于

$$\tau = i$$

正方格的点，会被 S 及其所有幂保持不变。而对应于

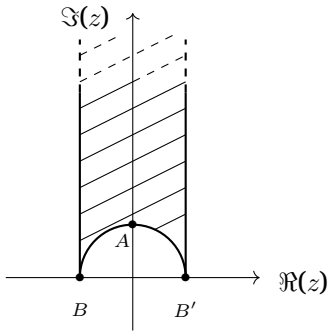
$$\tau = \exp(2\pi i/3)$$

六角晶格的点，会被 ST 及其所有幂保持不变。这些点在椭圆曲线模空间中产生了两个圆锥奇点。除这些点外，模空间都是光滑的。

为了免得你产生误解，我得赶紧向你保证，模空间并没有那么复杂：它看起来几乎就像复平面！有一个著名的从模空间到复平面的双射函数，称为“模函数”，记作 j。因此，从拓扑角度看，模空间就和复平面一样；唯一的区别是它在两个点处并不光滑，那里存在圆锥奇点。

这可能看起来有点难以想象，但其实没那么难。可以这样理解：先取上半平面中单位圆外、位于

竖直线 $x = -1/2$ 和 $x = 1/2$之间的区域。它看起来大致像这样：



接着，将从 B 开始的竖直线与从 B'开始的竖直线粘合，再将弧 AB与弧 AB'粘合。这样得到的空间处处光滑，除了点 A 和$B = B'$处存在圆锥奇点。点 A 周围的总角度只有 180 度——是模空间在此处光滑时角度的一半。 B 周围的总角度只有 120 度——是模空间在此处光滑时角度的三分之一。

这样做的原因是，上图所示区域是 PSL(2, $\mathbb{Z}$) 在 H 上作用的“基本域”。换句话说，每条椭圆曲线都同构于一条参数 τ 位于该区域内的椭圆曲线。点 A 是 $\tau = i$ 的位置，而点 B 是 $\tau = exp(2\pi i/3)$ 的位置。

现在让我们看看这个图景中的“12”是怎么来的。Minhyong Kim 用一种非常巧妙的方式向我解释了这一点，不过要告诉你他说了什么，我就得把数学的深奥程度再提高一个档次。（不用说，所有错误都由我承担。）

那么，我就假设你知道什么是“复直线丛”——它只是“一维复向量丛”的另一种叫法。局部来看，复直线丛的一个截面很像复值函数，但除非你的线丛是平凡的，否则在整体上并非如此。如果不够谨慎，有时你可能会以为自己定义了一个作用在某个空间上的函数，后来才发现它实际上是一个线丛的截面。这种事在物理学中时常发生。在弦理论中，当你在模空间上做路径积分时，必须确保被积对象确实是一个函数！因此，理解模空间上的所有线丛非常重要。

现在，给定任意一种空间，我们都可以构造出该空间上所有线丛的同构类所组成的集合。它实际上是一个阿贝尔群，因为两个线丛的张量积仍是一个线丛，而任意线丛与其对偶张量积后都会得到平凡线丛；对于张量积而言，平凡线丛扮演乘法单位元的角色。这个群称为该空间的“皮卡群”。

椭圆曲线模空间的皮卡群是什么？嗯，我说“任何类型的空间”时，是在暗示空间有各种各样的类型——拓扑空间、光滑流形、代数簇等等，而每一种都有自己特定的线丛概念。因此，在研究模空间的皮卡群之前，我们得先决定要在哪种背景下开展研究！作为一个纯粹的拓扑空间，我们已经看到，椭圆曲线模空间与平面无法区分，而平面上的每个拓扑线丛都是平凡的，所以在这一背景下，皮卡群就是平凡群——真无聊！

但模空间实际上远不止是一个纯粹的拓扑空间。它不是光滑流形，但也非常接近：它是光滑流形 H 对离散群 SL(2，$\mathbb{Z}$)取商得到的空间，而且它的奇点性质相当温和。

我们应该想办法在定义模空间的皮卡群时利用这一点。一种做法涉及“代数栈”理论。不深入讨论这一理论的细节，我先大致勾勒一下它在这里为我们所做的事情。若想更严谨地处理，并且希望内容更具代数几何的风格，可以参考：

1) David Mumford，《模问题的皮卡群》，载于 算术代数几何，O. F. G. Schilling 编，Harper and Row，纽约，1965年。

设离散群 G 作用在光滑流形 X上。 X 上的一个“G-等变”线丛，是指一个配备了 G 作用的线丛，并且该作用与 G 在 X上的作用相容。如果 G 在 X上自由作用，则 X/G 上的线丛与 G-等变线丛相同。当 G 在 X 上的作用不自由时，情况并非如此。不过，我们仍然可以继续将 X/G 的皮卡群定义为 G-等变线丛的同构类所成的群。当然，我们应该说明一些情况，让人们知道我们采用了这个特殊的定义。在我们的例子中，人们称它为椭圆曲线模代数栈的皮卡群。

那么，这个群究竟是什么？

事实证明，只要取 H 上的平凡线丛，并用 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的一维表示来指定它在纤维上的作用方式，就能在同构意义下得到 H 上任意的 SL(2, $\mathbb{Z}$)-等变线丛。因此，我们只需要理解 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的一维表示。这些表示的同构类在张量积运算下构成一个群，而这正是我们要找的群。

一维表示总是可以通过一个群的阿贝尔化来分解。我们知道 SL(2, $\mathbb{Z}$) 的阿贝尔化是 $\mathbb{Z}/12$。但众所周知， $\mathbb{Z}/n$ 的一维表示群又是 $\mathbb{Z}/n$ —— 这称为庞特里亚金对偶。因此：椭圆曲线模叠的皮卡群是$\mathbb{Z}/12$。

由此我们再次看到，椭圆曲线理论内在地包含着“12”！你可能会想知道，这与弦理论中数字 24 为何如此重要有什么关系。特别是，多出来的因子 2 从何而来？下周我会对此再多说一些。我不确定能否把这些未解之处串联起来！

你可能也会想知道什么是“代数栈”。对此感到困惑的并非只有你一人。下面这本书中有一段关于代数栈的有趣文字：

2) Joe Harris 和 Ian Morrison，《曲线模空间》，施普林格，柏林，1998年。

他们写道：

> “当然，这里我研究的是模空间堆，而不是模空间。对于不熟悉代数栈的读者，不必担心：简单来说，这意味着我可以假装模空间是光滑的，并且其上存在一个万能族。”
>
> 谁没在演讲中听过这些单词，或意思相近的话？又有谁没幻想过抓住演讲者的衣领摇晃他，直到他说清楚这些话究竟是什么意思？不过，也许你现在

> 正想着这一切都已成为过去，自己终于要弄明白什么是 *astack*，以及它们的作用。
> 希望渺茫。

其实，上文引用的 Mumford 的论文很好地介绍了代数栈理论，而且没有提到那个令人望而生畏的“stack”一词。或者，你也可以试试这个：

3）The Stacks Projects，网址：https://stacks.math.columbia.edu/

不过，我还是简单介绍一下代数栈，尤其是椭圆曲线模叠。代数栈是弱层范畴。要理解这个概念，你必须先知道层是什么！在最简单的情形下，对于拓扑空间上的层，每个开集 U 都对应一个集合 $S(U)$，并且只要开集 U 包含于开集 V，就有一个函数 $S(U, V)$：$S(U) \to S(V)$。这些函数必须满足一些规律。“代数栈”的概念只是将这一思想范畴化。也就是说，拓扑空间上的代数栈 S 对每个开集 U 都对应一个范畴 $S(U)$，并且有一个函子 $S(U, V)$：$S(U) \to S(V)$。这些函子满足与之前相同的规律，但只在指定的自然同构意义下成立。而这些自然同构又必须满足一些新的规律，这些规律称为相干律。

在这个例子中，椭圆曲线模空间上有一个代数栈。对于模空间中的任意开集 U，$S(U)$ 的一个对象是一个以 U 为底空间的椭圆曲线族，其中每条椭圆曲线都位于模空间中与其同构类对应的点上。同样，$S(U)$ 中的态射是椭圆曲线的同构族。这样我们就能追踪这样一个事实：有些椭圆曲线的自同构比另一些更多！这也处理了模空间奇点处发生的那些奇特情况。

顺便说一下，这个简化版的概述省略了很多代数几何内容；通常人们谈论代数栈时，你会看到这些内容。

最后再提一件事——看起来 Kreimer 等人在以一种真正优雅的方式理解重整化方面进展很大。

4) D. J. Broadhurst 和 D. Kreimer，《通过霍普夫代数自动化重整化》，可参见 高能物理理论/9810087。

请允许我引用一下摘要：

> 最近有研究表明，量子场论的重整化由带标记的根树的霍普夫代数组织起来，其余乘法确定需要减去的发散，而对极则实现了这一减除。我们用几行递归符号代码自动化这一过程，从而为任意费曼图给出有限的重整化表达式。由此，我们验证了算子乘积展开的一种表示，它将陈引理推广到迭代积分。森林结构蕴含唯一一个本原子发散的图表子集，给出了无标记根树霍普夫代数的一种表示。我们的无标记霍普夫代数程序旨在处理 *7,813* 个图表的重整化中 *24,213,878* 项 *BPHZ* 贡献，环路数最多为 *12*。我们考察了 *10* 个模型，每个模型采用 *9* 种重整化方案。最简单的两个模型揭示了这一

Connes 和 *Moscovici* 的子代数对应于微分同胚群霍普夫代数的交换部分：它为费曼图赋予权重，从最小减除方案的反项中消去 ζ 值。我们设计了一种计算这些权重的快速算法，将其平方乘以置换因子后求和，即可得到有理反项。

第126周

1998年11月17日

为了补充我前两周说过的一些内容，让我再多谈一点弦理论和欧拉的神秘方程。

$$1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12}.$$

为此，我需要你对量子场论有一些初步了解。

在量子场论中，几乎任何问题都有两种互补的处理方式：拉格朗日方法，也称为“路径积分量子化”；以及哈密顿方法，也称为“正则量子化”。让我从这两种角度来描述弦理论。我只谈玻色弦理论，因为我的目标是概述它为何在26维时空中最为适用，而且它比超弦理论简单。此外，我只谈闭弦。

在经典理论中，这样一条弦不过是从一个闭曲面到时空的映射。在量子化的拉格朗日方法中，我们首先要选定一个作用量公式。我们采用最简单的方案，也就是曲面的面积。当然，要定义时空中曲面的面积，就需要时空具有度量。最简单的做法是采用 n 维闵可夫斯基时空，我们就这样做。

我们通过极值化作用量来求弦的运动方程。这些方程意味着，随着时间流逝，如果我们观察空间中的弦，它的行为就像一组由完全弹性材料构成的环路。这些环路会随着时间振动、分裂并合并。

要看清弦如何振动，或许转而采用哈密顿方法会容易一些。这有些微妙，因为弦理论具有极其丰富的“规范对称性”——物理学家所说的规范对称性，指的是这样一种对称性：它源于我们能够在不同的数学描述之间切换，而这些描述对应的是同一种物理情形。根据作用量可以推导出任何理论的规范对称性，这有一套方法。将其应用于弦理论后会发现，如果两个从曲面到时空的映射仅相差对映入时空的曲面进行重参数化，那么它们就算是“物理上相同”。

转向哈密顿方法时，我们必须处理这种规范对称性。处理它有不同的方法——但我们不能直接忽略它。假设我们采用一种称为“光锥规范固定”的方法。这相当于选择曲面的参数化方式，使曲面上的两个坐标与 n维闵可夫斯基空间中的两个坐标以一种简单的方式关联起来。由于重参数化规范对称性，我们可以这样做。但完成这一步后，我们就不再有重新参数化曲面的自由了。简而言之，我们已经榨尽了规范对称性的所有潜力：这就是“规范固定”的全部意义。

我们首先研究了一个从曲面 S 到 n维时空的映射，可以将其视为定义在 S 上的、具有 n 个分量的场。不过，在光锥规范下，这个场的 2 个分量可以用其余分量的简单公式表示。这样，我们就可以把弦看作一个只有 $n-2$ 个分量的场 X。这样做时，它满足

你能想象到的最简单的方程！也就是波动方程

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-\frac{d^2}{dx^2}\right)X(t,x)=0.$$

这与描述理想化小提琴弦的方程相同。唯一的区别是，现在我们面对的不是一段小提琴弦，而是一堆闭合弦环。能量，也就是哈密顿量，同样由通常的波动方程哈密顿量给出：

$$H=\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\right]dx.$$

第一项表示弦的动能，第二项则表示它的势能——也就是弦被拉伸时所具有的能量。

从现在起，我将不再考虑弦环可以分裂或结合这一事实，而只讨论单个弦环的振动。利用波动方程的线性性，我们可以将波动方程的任意解分解为沿两个方向传播的正弦波——即所谓的“左移模”和“右移模”——再加上一个形如

$$X(t,x)=A+Bt$$

的解，它描述弦的质心运动。左移模和右移模彼此之间，以及它们与质心运动之间，都不会相互作用，因此，只研究右移模就能让我们学到很多。

首先，假设场 X 只有一个分量。那么右移振动模看起来是这样的

$$X(t,x)=A\sin(ik(t-x))+B\cos(ik(t-x))$$

其频率为 $k=1$，2，3，.....。抽象地说，这些振动模中的每一个都相当于频率为 k 的谐振子，因此我们可以把弦看成一大群谐振子。

现在假设我们将弦量子化——更准确地说，是将右移模量子化。根据前面所说，这就相当于将一系列谐振子量子化，每个自然数 k 对应一个频率为 k 的谐振子。这很棒，因为谐振子是最容易量子化的物理系统之一！

你可能知道，量子简谐振子有离散能级，能量分别为 $k/2$，$3k/2$，$5k/2$，.....。（这里我采用的单位满足 $\hbar=1$；否则就需要乘上一个 $\hbar$ 因子。）特别地，最低能态的能量称为“零点能”或“真空能”。通常，通过重新定义哈密顿量将这部分能量减去并不会造成太大影响，但有时这很重要。

那么，所有右移模的零点能总和是多少？要算出这个数，我们将所有频率 $k=1$、2、3、.....对应的零点能 $k/2$ 相加，得到

$$\frac{1+2+3+\dots}{2}.$$

当然，这个级数是发散的，但有很多巧妙的技巧可以为发散级数赋值，所以先别气馁！欧拉想出了这样一种技巧来计算

和 $1+2+3+\ldots$，并得到了值 $-1/12$。如果我们暂且假设这有意义，那么总零点能算出来是 $-\frac{1}{24}$。更一般地说，如果我们在 n 维闵可夫斯基时空中有一根弦，那么场 X 有 $n-2$ 个分量，因此总零点能为

$$-\frac{n-2}{24}$$

然而，出于其他原因，事实证明，当零点能为 -1时，弦理论效果最好。这一点有些难以解释，但与量子场论中规范固定的微妙之处有关。在经典层次上运行良好的事物，在量子层次上很容易出问题；尤其是，经典理论的对称性在量子化时可能会丧失。我们必须仔细检查，光锥规范固定不会破坏弦理论的洛伦兹不变性。事实证明，除非右移模的零点能为 -1，否则它确实会破坏这种不变性。因此，玻色弦理论在以下情况下效果最好：

$$\frac{n-2}{24}=1$$

换句话说，当 $n=26$时。

这些内容可千万别只听我一面之词！你可以在下面这本书第一卷的第95–96页附近找到更多细节：

1）Michael B. Green、John H. Schwarz 和 Edward Witten，《超弦理论》，共两卷，剑桥大学出版社，剑桥，1987年。

我还应该补充很多细节，但眼下最要紧的是解释欧拉那个神秘的公式

$$1+2+3+\ldots=-\frac{1}{12}$$

正如我在“第124周”中所说，这是ζ函数正则化的一个例子。黎曼ζ函数定义为

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots$$

当级数收敛时如此定义，但它可以通过解析延拓取到级数不收敛时的 s 值。如果我们进行解析延拓，就得到

$$\zeta(-1)=-\frac{1}{12}.$$

严格证明这一点需要费些功夫。一种方法是利用黎曼ζ函数的“函数方程”，它指出

$$F(s)=F(1-s)$$

其中

$$F(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

而 Γ是著名的函数，满足 $\Gamma(n)=(n-1)!$ 对于 $n=1$、2、3、.....以及所有 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$。利用

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

and

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

函数方程可推出 $\zeta(-1) = -1/12$。当然，你必须证明这个函数方程！对此有一篇不错的讲解，见：

2) Neal Koblitz，《椭圆曲线与模形式导论》，第2版，施普林格，柏林，1993年。

我不知道欧拉最初的论证是如何得到 $\zeta(-1) = -1/12$ 的。不过，Dan Piponi 最近在新闻组 sci.physics.research 上给出了下面这个“物理学家的证明”。令 D 为微分算子：

$$D = \frac{d}{dx}$$

那么，根据泰勒公式，将一个函数向左平移距离 c，等同于对它应用算子 e^{cD}，因为

$$e^{cD} f = f + cf' + \left(\frac{c^2}{2!}\right) f'' + \ldots$$

经过一些形式运算，我们得到

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + f(2) + \ldots &= ((1 + e^D + e^{2D} + \ldots)f)(0) \\ &= \left(\left(\frac{1}{1 - e^D}\right) f\right)(0) \end{aligned}$$

或者，如果 F 是 f 的原函数，使得 $DF = f$，

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots = \left(\left(\frac{D}{1 - e^D}\right) F\right)(0)$$

在某些语境下，这个公式可以严谨地推导出来；但现在我们不拘泥于严谨性，将它应用于函数 $f(x) = x$，得到

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots = \left(\left(\frac{D}{1 - e^D}\right) F\right)(0)$$

其中

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

为完成这项工作，我们来推导 $D/(1 - e^D)$ 的泰勒级数开头几项。其系数与伯努利数密切相关，这很容易引出更多有趣的延伸话题，但我们只需知道

$$\frac{D}{1 - e^D} = -1 + \frac{D}{2} - \frac{D^2}{12} + \ldots$$

将这个算子作用于 $F(x) = x^2/2$，并在 $x = 0$ 处求其值，唯一的非零项来自幂级数中的 D^2 项，因此我们得到

$$1 + 2 + 3 + \ldots = \left(\left(-\frac{D^2}{12}\right)F\right)(0) = -\frac{1}{12}$$

瞧`!

顺便说一句，Dan Piponi 在想出这个证明之后，发现下面这本书中有一个几乎完全相同的证明：

3) G. H. Hardy，《发散级数》，Chelsea 出版公司，纽约，1991年。

现在换个话题。除了黎曼ζ函数之外，椭圆曲线研究中还会出现许多其他特殊函数。不出所料，其中许多在弦理论中也很重要。例如，考虑玻色弦理论的配分函数。这里所说的"配分函数"是什么意思？好吧，只要我们有一个哈密顿量为 H的量子系统，它的配分函数就定义为

$$Z(\beta) = \mathrm{tr}(\exp(-\beta H))$$

其中 $\beta > 0$ 是逆温度。这个函数是统计力学的基础，原因嘛，我懒得在这里解释。

在着手研究玻色弦之前，我们先来算一下量子简谐振子的配分函数。为了简化问题，我们先减去零点能，使能级为 0、 k、 $2k$，依此类推。从数学上说，这些能级就是简谐振子哈密顿量 H 的特征值。因此，$\exp(-\beta H)$ 的特征值为 1、$\exp(-\beta k)$、$\exp(-2\beta k)$ 等。这个算子的迹就是其特征值之和，所以我们得到

$$Z(\beta) = 1 + \exp(-\beta k) + \exp(-2\beta k) + \ldots = \frac{1}{1 - \exp(-\beta k)}$$

这一结果最早由普朗克推导出来。他假设谐振子的能级是离散且等间距的，并在努力理解电磁场热力学的过程中计算了它的配分函数。

好，现在来研究玻色弦。为了简化问题，我们再次减去零点能。此外，我们只考虑右移模，并从假设描述弦振动的场 X 只有一个分量开始。正如之前所见，这时弦就等同于一组频率为 $k = 1$，2，3，..... 的量子简谐振子。我们已经看到，频率为 k 的振子，其配分函数为 $1/(1 - \exp(-\beta k))$。要计算由多个非相互作用部分构成的量子系统的配分函数，只需将各部分的配分函数相乘（因为张量积算子的迹等于各算子迹的乘积）。因此，我们这条弦的配分函数是

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - \exp(-\beta k)}$$

So 目前为止一切顺利。不过现在假设我们把零点能考虑在内。我们
do 通过从弦的哈密顿量中减去 $1/24$ 来实现这一点，其效果是

将其配分函数乘以 exp($\beta/24$)。因此我们得到

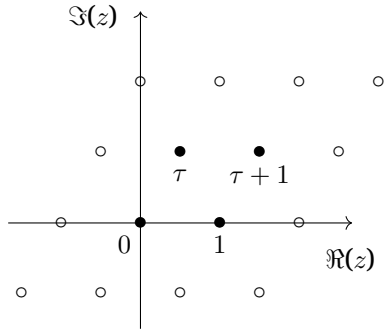
$$Z(\beta) = \exp(\beta/24)\prod \frac{1}{1-\exp(-\beta k)}$$

瞧：戴德金η函数的倒数！

你问那是什么？它是椭圆曲线理论中一个非常重要的函数。人们通常把它写成 q =exp($-\beta$)的函数，像这样：

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}}\prod(1-q^k)$$

但为了看出它与椭圆曲线的关系，我们应当再次换用变量，并写成$q = \exp(2\pi i\tau)$。我已经在 τ 中谈过这个变量“第125周”，当时我们在研究这样一种椭圆曲线：在复平面中将一个平行四边形卷起来形成它：



在物理学中，这条椭圆曲线只是由一根弦描绘出的曲面形状的一种可能性。数字 1 表示该曲面在空间方向上绕回之前延伸了多远，而数字 τ 则表示它在时间方向上绕回之前延伸了多远！

（“在时间中绕回”这一想法或许看起来很奇怪，但它在物理学中非常重要。事实证明，研究某个给定逆温度下一个系统的统计力学，等同于研究时间以给定周期为周期的时空上的欧几里得量子场论。这个想法正是将变量 β 和τ联系起来的原因。）

正如我在“第13周”中解释过的，上述椭圆曲线并不只是一个抽象的环面状小东西。我们也可以把它看作是下列二元三次方程的复数解集合：

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

其中数 g_2 和 g_3 是 τ的某些函数。此外，只要右侧的多项式没有重根，这个方程就定义了一条椭圆曲线。因此，除其他方面外，椭圆曲线实际上只是一种研究三次方程的方法！

但 $4x^3 - g_2x - g_3$ 什么时候会有重根？恰恰是在“判别式”

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

等于零时。这正是三次方程的判别式，与更为人熟知的二次方程判别式相类似。

现在说说精彩的部分：判别式可以用变量 τ 表示成一个显式公式，而且其中还涉及戴德金η函数的24次方！公式如下：

$$\Delta = (2\pi)^{12}\eta^{24}$$

如果你以前没见过这个，那么你应该会觉得，利用弦理论中出现的配分函数的24次方来计算三次方程的判别式，实在惊人。当然，历史上并非如此：戴德金发现他的η函数，远早于弦理论的出现。真正的情况是，弦理论利用了复曲线的特殊性质，因此也获得了椭圆曲线某种“24性”。

如果我还有精力，下次我会借助戴德金η函数的一些特殊性质，更好地解释玻色弦理论为何在26维中效果最佳。

与此同时，如果你想看看戴德金η函数的图像，以及它满足的一些有趣公式，可以试试这些：

4) Mathworld，《戴德金η函数》，
http://mathworld.wolfram.com/DedekindEtaFunction.html

5) 维基百科，《戴德金η函数》，http://en.wikipedia.org/wiki/Dedekindeta function _
_

”尊敬的先生：

拜读您*1913*年*2*月*8*日的来信，我深感欣慰。我原本以为您会像伦敦的一位数学教授那样回信，叫我仔细研读布罗姆维奇《无穷级数》，并提醒我不要陷入发散级数的陷阱。如今我在您这里找到了一位能够理解并同情我工作的朋友，这已经给了我继续前行的一些鼓励。我发现，您的信中有许多地方要求给出严谨的证明，并询问我能否说明证明方法。若我把自己的证明方法告诉您，我相信您也会像那位伦敦教授一样。但事实上，我并未给他任何证明，只是在我的新理论下作出了一些断言，例如：在我的理论下，级数 $1+2+3+4+\ldots=-1/12$ 中无穷多项的和。如果我把这件事告诉您，您马上就会指出，精神病院才是我的归宿。”

— *S*斯里尼瓦瑟·拉马努金，致 *G. H.* 的第二封信　哈代

第127周

1998年11月30日

如果你喜欢 π，不妨看看这本书：

1) Lennart Berggren、Jonathan Borwein 和 Peter Borwein，*π：资料汇编*，施普林格，柏林，1997年。

书中收录了大量关于 π的原始论文重印本，内容从莱因德纸草书一直到 Bailey、Borwein 和 Plouffe 于1996年发表的论文；他们在文中提出了一种无需计算此前各位数字，就能计算 π 任意给定十六进制位的方法——参见“第66周”，了解更多相关信息。顺便一提，Colin Percival 最近用这种方法算出了 π的第5万亿个二进制数字！（我不记得它是0还是1了。）Percival 是西蒙弗雷泽大学一名17岁的数学专业学生，如今他正带领一个分布式计算项目，计算 π的第1000万亿个二进制数字。使用 Windows 95、98 或 NT 的奔腾或更快计算机用户都可以加入。更多信息请见：

2）PiHex项目，http://wayback.cecm.sfu.ca/projects/pihex/

总之，上面提到的那本书充满了有趣的内容，比如用初等微积分证明π 是无理数的一页纸证明，出自Niven之手；还有下面这个由欧拉给出的、奇异而优美的公式，可惜书中并未解释：

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \ldots$$

这里的分子是奇素数，分母则是最接近形如 $4n+2$ 的数。

最近我一直在学习椭圆曲线之类的内容，因此也很感兴趣地发现，π 与模函数之间存在许多关系。例如，书中重印了拉马努金的论文《模方程与 π的近似值》，他在文中推导出许多关于 π的奇特公式，有些是精确的，有些则是近似的，例如：

$$\pi \sim \frac{12}{\sqrt{190}} \ln((2\sqrt{2}+\sqrt{10})(3+\sqrt{10}))$$

精确到18位小数。天才竟能有如此奇妙的用途，真是无穷无尽！

好了，现在我想结束这个小故事，谈谈玻色弦理论为何最适用于26维。这次我想解释弦理论中的路径积分该如何计算。我接下来要讲的大部分内容，都来自朋友Minhyong Kim推荐给我的几篇论文；当初我开始缠着他请教这些问题时，他便推荐了这些论文：

3) Jean-Benoit Bost，《复曲线模空间上的纤维行列式、正则化行列式与测度》，*Asterisque* **152–153**（1987年），113–149。

4) A. A. Beilinson 和 Y. I. Manin，《弦理论中的 Mumford形式与 Polyakov测度》，《数学物理通讯》**107** （1986年），359–376。

若想采用更基础的讲解方式，请阅读本书第 IX 章和第 X.4 章：

5) Charles Nash，《微分拓扑与量子场论》，Academic Press，纽约，1991年。

正如我在"第126周"中解释的那样，弦会在时空中描绘出一个称为"弦世界面"的曲面。为了简化讨论，我们假设弦世界面是一个环面，并且时空是欧几里得的 $\mathbb{R}^n$。那么，要计算任意物理可观测量的期望值，我们需要对从环面到 $\mathbb{R}^n$的所有映射所构成的空间进行积分。

具体来说，我们用 X 表示从环面到 $\mathbb{R}^n$的一个映射。那么，物理可观测量将是某个函数 $f(X)$，而它的期望值为

$$\frac{1}{Z}\int f(X)\exp(-S(X))dX$$

这里， $S(X)$是弦理论的作用量，也就是弦世界面的面积。数值 Z 是一个称为配分函数的归一化因子：

$$Z = \int \exp(-S(X))dX$$

但这里有个大问题！和量子场论中的常见情况一样，我们试图对其进行积分的空间是无穷维的，因此上述积分没有明显的意义。从技术上讲，问题在于无穷维流形上不存在勒贝格测度"dX"。

数学家也许会绝望地举手投降，到此放弃。但物理学家采取了更务实的态度：他们不断调整问题，必要时不惜打破一些规则，直到得到可处理的结果。物理学家称之为"计算路径积分"，但从某种角度看，他们真正做的是定义路径积分，因为只有在他们完成之后，它才具有精确的意义。

就眼前这个问题而言，是Polyakov找到了正确的处理方法：

6) A. M. Polyakov，《玻色弦的量子几何》，《物理快报》**B103** （1981年），207。

他将上面的原函数改写成了一个二重原函数：首先在环面上的度量空间 g 上取原函数，然后对每个度量，再在从环面映射 X 到时空的映射上取原函数。当然，任何这样的映射都会在环面上给出一个度量，因此这个二重原函数在某种程度上是多余的。不过，引入这种冗余并无妨。事实上，它还有帮助！

为了简化问题，我们就只讨论配分函数吧

$$Z = \int \exp(-S(X))dX$$

如果我们能处理这个问题，那当然也能处理包含可观测量 $f(X)$ 的原函数。Polyakov技巧将配分函数转化为一个二重积分：

$$Z = \int (\int \exp(-\langle X, \Delta X \rangle) dX) dg$$

其中， Δ 是环面上的拉普拉斯算子，尖括号表示 $\mathbb{R}^n$值函数的通常内积；二者都由度量 g定义。

乍看之下，Polyakov技巧似乎是倒退了一步：现在我们有两个未定义的积分，而不是一个！然而，实际上这是向前迈进了一步。现在我们可以照搬有限多个变量的高斯函数积分公式，来计算内部积分——这是量子场论中的一种标准技巧。忽略一个反正之后会被抵消的无穷常数，内部积分的结果是：

$$(\det \Delta)^{-\frac{1}{2}}$$

等等！这里的拉普拉斯算子是环面上 $\mathbb{R}^n$值函数构成的向量空间上的线性算子。这是一个无限维向量空间，因此我们不能像在有限维空间中那样，轻率地谈论行列式。在有限维空间中，自伴矩阵的行列式是其特征值的乘积。但拉普拉斯算子有无穷多个特征值，而且这些特征值会越来越大。我们该如何定义所有这些特征值的乘积呢?

当然，拉普拉斯算子的最小特征值是零，你可能会认为这就能解决问题：它们的乘积必定为零！但那会使上面的表达式失去意义，而我们不会这么轻易放弃。相反，我们只需忽略零特征值！这样一来，我们只需要面对其余部分的乘积。

（实际上，有一种方法比简单地忽略零特征值更加严谨一些，但我稍后会谈到。）

好了，现在我们要处理一个发散乘积。嗯，在 “第126周” 中，我使用了一种称为ζ函数正则化的技巧来处理发散的和，而在这里我们也可以使用这一技巧来处理发散乘积。假设我们有一个自伴 A 算子，其离散谱由正特征值组成。那么， A 的“ζ函数”定义为：

$$\zeta(s) = \mathrm{tr}(A^{-s})$$

要计算 $\zeta(s)$ ，我们只需取出 A的所有特征值，将它们提升到 $-s$ 次幂，然后把它们加起来。例如，如果 A 的特征值为 1、2、3、.....，那么 $\zeta(s)$ 就是我们在“第126周”中已经讨论过的通常的黎曼ζ函数。

如果 A 是紧流形上的拉普拉斯算子，这套方法就不太适用了，因为它有一个特征值为零。不过我们已经同意舍弃零特征值，所以在将 $\zeta(s)$定义为特征值之和时，就把它舍弃。结果发现，当 s 的实部足够大且为正时，这个和会收敛。更妙的是，有一个定理指出， $\zeta(s)$ 可以解析延拓到 $s = 0$。因此，我们可以用下面这个技巧来定义拉普拉斯算子的行列式。

假设 A是一个具有正特征值的自伴矩阵。那么

$$\zeta(s) = \mathrm{tr}(\exp(-s \ln A))$$

求导可得

$$\zeta'(s) = -\operatorname{tr}(\ln A \exp(-s \ln A))$$

并令 s为零，我们得到

$$\zeta'(0) = -\operatorname{tr}(\ln A).$$

不过，有一个简洁的公式说明

$$\det(A) = \exp(\operatorname{tr}(\ln A))$$

于是我们得到

$$\det(A) = \exp(-\zeta'(0)).$$

现在我们可以用这个公式来定义紧流形上的拉普拉斯算子的行列式！有时这被称为“正则化行列式”。

那么——我们讲到哪里了？我们用 Polyakov技巧将环面形弦的配分函数写成

$$Z = \int (\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX) dg,$$

接着我们计算了内部的原函数，得到了这个：

$$Z = \int (\det \Delta)^{-\frac{1}{2}} dg$$

然后我们弄清楚了这里的行列式该如何理解。

接下来呢？由于作用在 $\mathbb{R}^n$ 值函数上的拉普拉斯算子，是作用在实值函数上的拉普拉斯算子的 n 个副本的直和，我们预期

$$(\det \Delta)^{-\frac{1}{2}} = (\det \text{laplacian})^{-\frac{n}{2}}$$

其中，“拉普拉斯算子”指环面上普通实值函数的拉普拉斯算子。实际上，我们可以根据 ζ函数的定义，严格验证这一点。这令人安心：至少我们的计算中有一个步骤是严谨的！因此我们得到

$$Z = \int (\det \text{laplacian})^{-\frac{n}{2}} dg$$

很好。但我们还没有脱离险境。我们还得对度量空间上的度量进行积分——这是另一个棘手的无穷维积分。

该再来一次按摩了！

再来看一下这个公式：

$$Z = \int (\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX) dg$$

拉普拉斯算子取决于度量 g，内积也是如此。不过，组合 $\langle X, \Delta X\rangle$ 只取决于“共形结构”——也就是说，如果我们将度量乘以一个依赖于位置的比例因子，它不会发生变化。它在微分同胚下也保持不变。

现在，环面上的共形结构模去微分同胚后所构成的空间是某个——
thi听起来很熟悉：它就是椭圆曲线模空间！我们弄清楚了这个空间

在“第125周”中的样子。它是有限维的，而且有一种很好的方法可以对其积分，称为魏尔-彼得森测度。因此，我们可以尝试用对这个模空间的积分，取代外层积分——也就是对度量的积分。

确实，我们可以希望

$$Z \overset{\text{we hope!}}{=} \int (\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX) d[g]$$

此时外层原函数是在模空间上积分，而 $d[g]$ 是魏尔-彼得森度量。当然，我们希望内层的内容能够良好定义为模空间上的一个函数。

其实，这种希望有些天真。尽管重新缩放度量不会改变 $\langle X, \Delta X\rangle$，但整个内层积分

$$\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX$$

确实会改变。这看起来可能很奇怪，但请记住，在让这个积分具有任何意义之前，我们做了许多令人胆战心惊的推导！基本上，我们最终把它定义为

$$(\det \Delta)^{-\frac{1}{2}},$$

而且可以验证，重新缩放度量时，这确实会改变。这个问题称为“共形反常”。

我们陷入困境了吗？没有！幸运的是，还有另一个 问题，在$n = 26$时它会抵消这个问题。人们常说，两个错误凑不成一个正确答案；但对于反常，往往只有这样才能让事情行得通。.....

那么这个另一个问题是什么呢？问题在于，我们不能像我在配分函数的朴素公式中所做的那样，只把测度 dg 替换为测度 $d[g]$ 。我们需要弄清楚它们之间的关系。当然，这很难做到，因为严格来说，测度 dg 并不存在！不过，如果再进行一大堆令人头疼的启发式推导（我就不在这里赘述了），我们就能得到一个关联 dg 和和 $d[g]$的公式，利用它便可得到

$$Z = \int (\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX) f(g) d[g]$$

其中， $f(g)$是度量的某个函数。这个函数有一个完全明确的公式，不过要是给你看，你的眼珠子恐怕都要掉出来了。无论如何，真正重要的是，在26维中，而且只有在26维中，被积函数

$$(\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX) f(g)$$

在度量缩放（以及微分同胚）下保持不变量。换句话说，共形反常在

$$\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX$$

恰好被 $f(g)$ 中一个类似的共形反常抵消，因此它们的乘积是在模空间上定义良好的函数，可以对它关于 $d[g]$ 积分。然后我们就可以继续相当明确地求出配分函数。

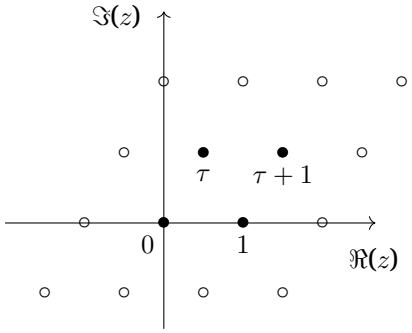
到这时，如果你是一位严谨的纯数学家，肯定已经对整个过程是否合理产生了严重怀疑。但物理学家认为，这一连串推理，尤其是最后反常的奇妙抵消，堪称一项真正的成就。事实上，这比量子场论中大多数情况都要好得多！

我听科普作品的出版商说，书中每多一个方程，读者人数就会减少一半。我不知道这是否也适用于 This Week's Finds，但通常我都会竭尽全力把方程数量降到极小值点。不过，本周我表现得很糟；如果我的计算正确的话，到这一步时，唯一还在读这篇文章的人就是我自己了。所以我不妨干脆放弃一切说明性散文的伪装，用一种只有我自己能看懂的方式来写！毕竟，我写这个的真正原因，是想看看自己是否理解了这些东西。

好了，现在我想看看自己是否明白如何显式地计算这个原函数：

$$\int \exp(-\langle X, \mathrm{laplacian} X\rangle) dX$$

既然我们最终要在模空间上对它（乘以某些东西）进行积分，不妨假设我们环面上的度量是通过将复平面中的下列平行四边形卷曲而得的：



至少有两种方法可以进行计算。一种是实际求出这个环面上拉普拉斯算子的特征值，然后进行 ζ函数正则化，以计算其行列式。Di Francesco、Mathieu 和 Senechal 在我在"第124周"中提到的那本教科书里采用了这种方法。他们得到

$$\int \exp(-\langle X, \mathrm{laplacian} X\rangle) dX = \frac{1}{\sqrt{\Im(\tau)}|\eta(\tau)|^2}$$

其中"η"是戴德金η函数，被视为 τ 的函数。不过，这个计算相当繁琐，而在我看来，应该有更简单的方法来得到答案。左边就是环面上无质量标量场的配分函数，而我们在"第126周"基本上已经做过这个计算了。更准确地说，我们只考虑了右移模，并得到了下面的配分函数：

$$\frac{1}{\eta(\tau)}$$

那么左移模呢？嗯，我猜它们的配分函数就是复共轭，

$$\frac{1}{\eta(\tau)^*}$$

因为在这个欧几里得图景中，右移模对应全纯函数，左移模对应反全纯函数。这纯粹是个猜测！最后，零频模该怎么办？我完全不知道。不过，我们大概应该把三个配分函数相乘，得到整个系统的配分函数——通常就是这么做的。正如你所看到的，我们几乎得到了 Di Francesco、Mathieu 和 Senechal 得出的答案。如果零频模的配分函数是 $1/\sqrt{\Im(\tau)}$，结果就会完全吻合。顺便说一下，$\Im(\tau)$ 就是环面的面积。

作为这类方法或许可行的证据，请看：零频模大概与拉普拉斯算子的零特征值有关。我们在定义拉普拉斯算子的正则化行列式时把它排除掉了，但正如我暗示过的，更仔细的计算

$$\int \exp(-\langle X, \mathrm{laplacian} X\rangle) dX$$

不要直接忽略零特征值。相反，他们不知怎的用它得到了一个额外的因子 $1/\sqrt{\Im(\tau)}$。诚然，这些计算并不怎么令人信服：更显而易见的猜测是，它会产生一个无穷因子。Di Francesco、Mathieu 和 Senechal 几乎承认，他们需要 这个因子只是为了得到模不变性，而且为了得到它他们什么都愿意做。Nash 则直接塞进因子 $1/\sqrt{\Im(\tau)}$，含糊地嘟囔几句，就匆匆转向下一个话题。

显然，人们想要这个因子的原因，在于 η函数在模变换下的变换方式。在“第125周”我说过，群$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 由两个元素生成： S 和 T。如果你看看那里的公式，就会发现它们对 τ的作用如下：

$$S\colon \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$$
$$T\colon \tau \mapsto \tau + 1$$

戴德金η函数满足

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau)$$
$$\eta(\tau+1) = \exp\left(\frac{2\pi i}{24}\right)\eta\tau$$

根据定义，第二个关系很容易看出；第一个则比较难。无论如何，利用这些事实很容易看出

$$\frac{1}{\sqrt{\Im(\tau)}|\eta(\tau)|^2}$$

在 PSL(2, ℤ) 作用下保持不变，因此它实际上是模空间上的一个函数——但前提是其中包含那个 $1/\sqrt{\Im(\tau)}$ 因子！

最后，我想谈谈为什么共形反常会在 26维中抵消。我开始思考这个问题时，希望能从 η函数的变换性质中一眼看出原因——毕竟其中出现了一个很有希望的数字“24”——但现在我并不觉得事情是这样。相反，情况似乎是这样的：在配分函数中

$$Z = \int (\int \exp(-\langle X, \Delta X\rangle) dX) f(g) d[g]$$

这个神秘的函数 f 基本上就是环面上向量场 的拉普拉斯算子的行列式。因此，忽略那些讨厌的零特征值后，这里的整个被积函数就是

$$\det(\text{laplacian})^{\frac{n}{2}} \det(\text{laplacian}')$$

其中，“拉普拉斯算子”指实值函数上的拉普拉斯算子，而“拉普拉斯算子”指向量场上的拉普拉斯算子。现在，这些行列式并不是定义在共形结构空间上的良定义函数；它们实际上是某些“行列式丛”的截面。不过在这种情况下，向量场的拉普拉斯算子的行列式丛恰好是函数的拉普拉斯算子的行列式丛的第13次张量幂——因此，上面的整个表达式在且仅在 $n = 26$!!! 时才是定义在共形结构空间上的良定义函数，进而也是定义在模空间上的良定义函数。

这个“恰好”绝不可能只是巧合。数学中没有 巧合。这就是为什么做数学家就得保持疑心：没有什么是随机的，一切都嵌入宏大的模式之中；只要你留心，就会发现这一切明明白白地摆在眼前。（Chaitin 借助 G¨odel 定理，有力地论证了事实并非如此；当然，数学中的某些模式似乎“纯属偶然”，但此刻我只是在抒发感慨，表达一种人们偶尔会有的感觉.....）

确实，看看 Nash 的书中关于其中一个行列式丛是另一个的 13 次张量幂的证明——我认为这个结果归功于 Mumford，不过 Nash 的证明读起来很容易。他是怎么做的? 他用族指标定理计算两个丛的第一陈类，得到一个涉及托德属的表达式——而众所周知，托德属是用我们在讨论过的同一个函数定义的

$$\frac{x}{1-e^x} = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \cdots$$

我们在 “第126周” 计算玻色弦的零点能时讨论过！而又一次，起关键作用的还是那个讨厌的 $-1/12$ 幂级数展开中的项。一切的答案都在这里！13就是这么来的！这一切都是一场精心策划的阴谋！

不过，当然，这场阴谋远比我刚才透露的要宏大得多。只要继续深挖，最终我们会发现，归根结底竟然是.....

魔群月光！！！

不过我现在没精力谈这个。想了解更多，可以看看：

7）Richard E. Borcherds，《什么是月光？》，荣获菲尔兹奖后发表的演讲，可在此获取 math.QA/9809110。

8) Peter Goddard，《R. E. Borcherds 的工作》，可在 math.QA/9808136 获取。

好了，如果你真的读到了这里，那就值得奖励一下。首先，看看这幅漫画，你会发现它相当切题：

9）J. F. Cartier 绘制的漫画，https://web.archive.org/web/19980701182649/http://www.physik.uni-frankfurt.de:80/~jr/gif/cartoon/cart0785.gif

其次，让我们计算一个算子 A 的行列式，它的特征值为数字 1，2，3，.....。你可以把这个算子看作圆上波动方程的哈密顿量，其中我们只保留右移模。正如我之前所说，这个算子的ζ函数就是黎曼ζ函数。这个函数满足 $\zeta'(0) = -\ln(2\pi)/2$，因此，利用那个联系行列式与ζ函数的巧妙公式，我们得到

$$\det(A) = \exp(-\zeta'(0)) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

只是图个乐子，如果我们假装 A 的行列式就像有限维情形那样，是其特征值的乘积，那么得到：

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$$

或者，如果你真想把它说得夸张点，

$$\infty! = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

很可爱，对吧？Dan Piponi 告诉了我这件事，以及我一直在谈论的其他一些内容。你也可以在 Bost的论文中找到它。

注释与题外话：

• 在上述所有内容中，我在拉普拉斯算子前加了一个负号，因此它的特征值都是非负的。这在博学的数理物理学家中很常见，他们喜欢“正椭圆算子”。

• 用ζ函数技巧定义拉普拉斯算子的行列式，适用于紧流形上的任意正椭圆算子。关于这一技巧，已经有大量论述。其基础在于：正椭圆算子的ζ函数可以解析延拓到 $s = 0$。这一事实由 Seeley 证明：

10) R. T. Seeley，《椭圆算子的复幂》，纯数学研讨会论文集**10**（1967），288–307。

• 为什么 Polyakov 作用量 $\langle X, \Delta X \rangle$ 具有共形不变性？因为拉普拉斯算子的维度是 1/长度^2，而用于定义内积的原函数的维度是长度^2，因为环面是二维的。这就是二维的魔力！高维“膜”的路径积分尚未被精确定义，因为这种魔力在高维中并不会出现。

• 关于 π那个奇妙而美丽的欧拉公式，Robin Chapman 写道：

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \ldots \tag{1}$$

使用 $\zeta(2)$的欧拉乘积可得

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{25}{24}\right)\cdots\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)\cdots$$

并去掉 $p = 2$ 项，再除以（1），我们看到（1）等价于

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\cdots\left(\frac{p}{p-\chi(p)}\right)\cdots \tag{2}$$

其中，分子是奇素数，分母是它们相邻的 4 的倍数。此外，χ 是模 4 狄利克雷特征。现在

$$\frac{p}{p-\chi(p)} = 1 + \frac{\chi(p)}{p} + \frac{\chi(p^2)}{p^2} + \ldots$$

如果我们形式上将这些相乘，（2）的右边就变为

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

也就是说，$\pi/4$的格雷戈里级数。诚然，这种形式上的操作是否成立并不显而易见。不过，对于狄利克雷 L函数，欧拉乘积在 $s = 1$处成立。这需要一些精细的分析：详情请参阅*Landau*关于素数的著作，或*Davenport*的乘法数论。

第128周

1999年1月4日

本周，我想为你介绍量子引力领域的最新进展。首先，推荐一本人人都能读得津津有味的书：

1）约翰·阿奇博尔德·惠勒和肯尼斯·福特，《引力子、黑洞与量子泡沫：物理学中的一生》，诺顿出版社，纽约，1998年。

这是约翰·惠勒的自传。如果说惠勒对物理学的唯一贡献就是成为玻尔的学生和费曼的论文导师，那么仅凭这一点就已经足够了。但他的成就远不止于此。他在曼哈顿计划以及随后氢弹的研制中发挥了关键作用。他从事核物理学、宇宙射线、μ子和其他基本粒子的研究。他也是较早真正对广义相对论那些更加离奇的含义感到兴奋的人之一。例如，他找到了爱因斯坦方程的一些解，这些解对应于仅靠自身引力维系的引力场区域；他把这种区域称为“引力子”。他并不是第一个研究黑洞的人，但他是最早认真对待黑洞的人之一，而且“黑洞”这一术语就是由他创造的。而他之所以是我的英雄，是因为他认真面对了调和广义相对论与量子理论这一挑战。此外，他还认识到，要实现这一目标，所需的思想将会多么激进——例如，时空在短距离尺度上可能并不是真正的连续体，而是某种“量子泡沫”。

任何对20世纪物理学惊人发展感兴趣的人都应该读读这本书！下面讲讲我初次见到费曼的故事：

> 迪克·费曼在麻省理工学院获得学士学位后，于*1939*年秋天来到我的办公室门口。当时他*21*岁，性格鲁莽却讨人喜欢；由于他是新生，并获得了助教职位，学校安排他为我的力学课程批改作业。我们坐下来谈论课程和他的职责时，我拿出一块怀表，放在我们之间的桌上。受父亲热衷于时间与动作研究的影响，我一直记录自己花在教学及相关活动上的时间、花在研究上的时间，以及处理系里事务或大学事务的时间。这次会面属于教学相关活动。费曼看到那块表，也许有些吃惊，但他可不是容易受人威慑的人。后来我才知道，他出去买了一块一美元的手表，这样下次见面时就有备无患了。我们再次碰面时，我拿出自己的表，放在我们之间的桌上。费曼面不改色地拿出他的表，放在桌上我的表旁边。他的戏剧感恰到好处。我忍不住放声大笑，很快他也和我一样笑得前仰后合，直到我们两人都泪眼汪汪。过了好一会儿，我们才平静下来，继续讨论。这为一段美好的友谊定下了基调，而这段友谊一直延续到他生命的尽头。

接下来看看稍微专业一些的内容：

2）Steven Carlip，量子引力（ 2+1维度），剑桥大学出版社，剑桥，1998年。

如果你想了解 2+1 维量子引力，这里是最好的起点，因为Carlip是世界上研究这一课题的专家，而且他很擅长解释相关内容。

（顺便说一句，物理学家写“2+1维”，并不是因为他们不会加法，而是为了强调他们讨论的是2维空间和1维时间。）

2+1 维量子引力只是物理学家真正感兴趣的内容—— 3+1 维量子引力——的热身。降低一个维度确实会让事情大为简化，因为 2+1 维中的爱因斯坦方程表明，流经时空某一点的能量和动量完全决定了该处的曲率，这与高维情况不同。特别是，在 2+1维中，真空中的时空是平坦的，因此不存在引力辐射。尽管如此， 2+1 维量子引力仍然非常有趣，原因有很多。最重要的是，我们可以精确求解这些方程，因此可以将其作为一个很好的试验场，用来检验人们关于 3+1维量子引力的各种思想。

量子引力之所以困难，有种种原因，但最主要的是，与传统量子场论不同，它是一种“无背景”理论。我的意思是，它没有固定的时间和距离测量方式。相反，时间和距离必须借助时空几何来测量，而这种几何会发生量子涨落。这让我们惯常的大多数物理学研究方法都失去了用武之地！ 2+1维量子引力首次为我们提供了一个无背景理论的实例，让我们能够详尽地推导出其中的一切。

下面是 Carlip 著作的目录：

1. 为什么要研究（*2+1*）维引力？ *2. 2+1*维经典广义相对论 *3.* （*2+1*）维时空指南 *4.* 几何结构与陈–西蒙斯理论 *5.* 约化相空间中的正则量子化 *6.* 联络表象 *7.* 算子代数与回路 *8.* 惠勒-德威特方程 *9.* 洛伦兹路径积分 *10.* 欧几里得路径积分与量子宇宙学 *11.* 格点方法 *12.* （*2+1*）维黑洞 *13.* 后续步骤 *A.* 附录：流形的拓扑学 *B.* 附录：洛伦兹度规与因果结构 *C.* 附录：微分几何与纤维丛

接下来介绍一些网上可以找到的内容。首先，所有想要跟进引力研究的人都应该记得阅读《引力之事》。我以前谈过它，下面是最新一期：

3）Jorge Pullin，编者，《引力之事》，第12卷，可见于gr-qc/9809031。

这里有不少精彩内容。量子引力爱好者尤其会对 Gary Horowitz 的文章《弦理论的非微扰公式？》以及 Lee Smolin 的《量子引力的新历史方法》感兴趣。Smolin 这篇文章颇为奇特的标题，指的是关于量子引力的新研究，其中涉及对历史求和——换句话说，就是自旋泡沫模型。

即使你无法参加物理学讲座，如今有时也能在万维网上找到讲座内容。下面是 John Barrett 的一场讲座：

4）John W. Barrett，《量子引力的态求和模型》，宾夕法尼亚州立大学相对论研讨会，1998年8月27日，音频和演示文稿文本可见于 https://web.archive.org/web/20010818150205/http://vishnu.nirvana.phys.psu.edu/online/Html/Seminars/Fall1998/Barrett/

Barrett 和 Crane 提出了一种量子引力理论，我也曾研究过；我上次在“第113周”和“第120周”中讨论过它。在介绍这套理论之前，我应该提醒专家们：这套理论讨论的是黎曼量子引力，而非洛伦兹量子引力（不过 Barrett 和 Crane 正在研究其洛伦兹版本，我听说 Friedel 和 Krasnov 也在研究这个）。此外，它只涉及真空量子引力——空无一物的时空，没有物质。

在这个理论中，时空被切分为 4-单形。4-单形是四面体在四维中的对应物。要理解我接下来要说的内容，你确实需要先了解 4-单形，所以我们就从它们开始。

画一个 4-单形很容易。只要大致沿着圆形画 5 个点，再把它们两两相连就行了！你会得到一个内接五角星的五边形。这是一幅将 4-单形投影到二维纸面上的透视图。仔细观察这幅图，你会发现 4-单形包含 5 个四面体、10 个三角形、10 条边和 5 个顶点。

一个 4-单形的形状由 10 个数决定。你可以把这些数取作它各条边的长度；不过，若想耍点小聪明，也可以用各个三角形的面积。当然，要让一个具有这些面积的 4-单形存在，可选的面积必须满足一些约束。此外，有些面积取值无法让形状唯一确定：对于其中一种不理想的取值，4-单形可以在保持所有三角形面积不变的情况下自由变形。不过，一般而言，这种不唯一性并不会发生。

在 Barrett 和 Crane 的理论中，我们将时空切分为 4-单形，并通过指定每个三角形的面积来描述时空几何。但这种几何是“量子化”的，这意味着面积只能取一组离散谱中的可能值，其形式为

$$\sqrt{j(j+1)}$$

其中，“自旋” j 是形如 0，$1/2$、1，$3/2$、……的数。如果你学过角动量的量子力学，就会对这个公式感到熟悉。这并非巧合！这个量子引力理论的妙处在于，只要你同时假设时空被切分为 4-单形，就可以通过长时间思考广义相对论和角动量的量子力学，发现这个理论。

因此，在 Barrett 和 Crane 的理论中，时空几何是通过将时空切分为 4-单形，并为每个三角形标注一个自旋来描述的。我们把这样的标注称为“量子4-几何”。类似地，空间几何是通过将空间切分为四面体，并为每个三角形标注一个自旋来描述的。我们把这称为“量子3-几何”。

理论的核心是一条公式，用来计算任意量子4-几何对应的一个复数，这个复数称为“振幅”。这个数在量子理论中发挥着振幅通常具有的作用。在量子理论中，如果你想计算世界从某个态 ψ 开始并最终到达某个态 ψ'的概率，只需考察世界从 ψ 到 ψ'可能经过的所有路径，分别计算每条路径的振幅，将它们相加，再取结果绝对值的平方。在量子引力这一特殊情形中，这些态是量子三维几何，而从一个态到另一个态的路径则是量子四维几何。

那么，量子4-几何的振幅公式是什么？解释起来需要费些功夫，所以我只大致说明一下。首先，我们计算每个4-单形的振幅，并将它们全部相乘。然后，我们计算每个三角形的振幅，并将它们全部相乘。最后，再将这两个数相乘。

（这类似于我们如何计算普通量子场论中费曼图的振幅。费曼图是一个图，其边带有特定的标记。要计算它的振幅，我们先计算每条边的振幅，并将它们全部相乘。然后计算每个顶点的振幅，并将它们全部相乘。最后将这两个数相乘。“自旋泡沫模型”研究的一个目标，就是更深入地理解这种与费曼图的类比。）

无论如何，要让人相信这个公式“不错”，我们希望将它与其他同样涉及4-单纯形的量子引力研究方法联系起来。例如，Regge微积分就是一种离散化的经典广义相对论。在这种方法中，我们将时空切分成4-单纯形，并通过指定其边的长度来描述每个4-单纯形的形状。Regge为这种几何构造发明了一个“作用量”公式；在连续极限下，它趋近于经典广义相对论的通常作用量。我在“第120周”中解释过这个“Regge作用量”公式。

现在，如果一切都运行得完美，Barrett– Crane模型中一个4-单形的振幅就会接近 $\exp(iS)$，其中 S 是该4-单形的Regge作用量。这意味着Barrett–Crane模型实际上很像量子引力中的路径积分。当然，在Barrett–Crane模型中，我们所知道的只是每个4-单形中三角形的面积，而在Regge微积分中，我们知道其边的长度。不过，至少在一般情况下，我们可以在两者之间进行转换，所以这并不是什么大问题。

最近，Barrett和Williams提出了一个巧妙的论证，指出在三角形面积很大的极限下，Barrett–Crane 理论中一个4-单形的振幅与其说正比于 $\exp(iS)$，不如说正比于 $\cos(S)$：

5) John W. Barrett和Ruth M. Williams，《4-单形振幅的渐近行为》4-单形》，可见 gr-qc/9809032。

这个论证并不严谨——它使用了还需要进一步论证的驻相近似。不过，Regge 和 Ponzano 曾用类似的论证，证明了三维量子引力中的同类结论；最近，Justin Roberts 在 Barrett 的大力协助下，使他们的论证变得严谨：

6) Justin Roberts, 《经典 $6j$符号与四面体》，可在 math-ph/9812013 获取。

所以人们预计，只要经过一番努力，就能使Barrett和Williams的论证变得严谨。 s.

但这意味着什么？为什么他得到的是 cos(S)，而不是 exp(iS)？嗯，正如我所说，同样的事情也会在低一个维度的所谓三维黎曼量子引力Ponzano–Regge模型中发生，几十年来，人们一直百思不得其解，试图弄清原因。如今他们已经知道答案，而同样的答案也适用于Barrett–Crane模型。

问题在于，如果你用三角形的面积来描述4-单形，就无法完全知道它的形状。（看，我之前骗了你——所以你得读完整篇文章。）你只能知道它在反射下的情况。仅凭三角形的面积，你无法区分一个4-单形和它的镜像孪生体！其中一个的Regge作用量为 S，另一个的作用量为 $-S$。Barrett–Crane模型并不知道这些，于是干脆对两者取平均，得到

$$\frac{1}{2}(\exp(iS) + \exp(-iS)) = \cos(S)$$

所以这其实没那么糟；它已经在现有条件下尽力而为了。这样是否足够好，还有待观察。

（其实我之前并没有真的骗 你；我只是没告诉你我对“形状”的定义，所以你无法判断镜像的4-单形是否应算作形状相同。说明性文字总是在细节繁多的斯库拉与含糊不清的卡律布狄斯之间摇摆。）

好，接下来谈一个相关的问题。在Barrett–Crane模型中，人们通过给所有三角形标注自旋来描述量子4-几何。如果你想想4-单形的形状几乎可以由其三角形的面积决定，这种做法听起来还算合理。但如果你真的仔细考察模型的推导过程，它就显得更古怪了。实际上，你所做的是取一个嵌入在 $\mathbb{R}^4$中的四面体 的几何空间，再运用一种称为几何量子化的技巧，得到所谓的“4维中量子四面体的希尔伯特空间”。然后，你用这些量子四面体构造出4-单形。

现在，量子四面体的希尔伯特空间有一个基，其标记为对应于四个三角形面的面积的算符的本征值。用物理学术语来说，要描述四维空间中的量子四面体的形状，需要 4 个“量子数”。

但在经典情形下，四面体的形状并非由其三角形面的面积决定：确定其形状需要 6 个数，而不只是 4 个。因此，这里有些蹊跷。

起初，有些人认为量子四面体的态可能比 Barrett 和 Crane 找到的更多。但 Barbieri 提出了一个巧妙的论证，表明 Barrett 和 Crane 实际上已经找到了所有这些态：

7）Andrea Barbieri, 《相对论自旋网络顶点空间》，可见于gr-qc/9709076。

这个论证虽然令人信服，却并非决定性的，因为它假设了一件虽合理但尚未证明的事——也就是说，“$6j$ 符号的异常零点不会太多”。后来，Mike Reisenberger 提出了一个完全严谨的论证：

8) Michael P. Reisenberger，《论相对论自旋网络顶点》，可见于gr-qc/9809067。

不过，虽然这解决了相关事实问题，却留下了一个“为什么”的问题——为什么描述四维经典四面体的形状需要*6* 个数，而描述量子四面体的形状却只需要*4* 个数？John Barrett和我快要完成一篇关于这个问题的论文了，所以我先揭晓答案。

这并不令人意外，关键在于量子力学中并非所有可观测量都彼此对易。只有用对易的可观测量的特征值，才能标记一个态基。量子四面体各个面的面积彼此对易，而且不存在其他独立的对易可观测量。这有点像在经典力学中，你可以同时指定一个粒子的位置和动量；但在量子力学中，你只能指定其中一个。

当然，这并不是什么新发现。事实上，人们早就很清楚，正因为这个原因，描述三维量子四面体的形状只需要*5* 个数。真正令人费解的是，为什么当量子四面体处于四维空间时，所需的数目还要更少！增加一个维度竟然会减少自由度，这看起来很奇怪！但事实确实如此，这只是由不确定性原理引出的一个结果。粗略地说，在四维空间中，知道四面体位于某个超平面内，就会使你无法充分了解它的形状。

以下是网上提供的其他一些讲座：

9) Abhay Ashtekar、Chris Beetle 和 Steve Fairhurst，《马萨特兰黑洞讲座》，幻灯片可在 http://vishnu.nirvana.phys.psu.edu/online/Html/ Conferences/Mazatlan/ 查看。

这些讲座介绍了“非旋转孤立视界”这一新概念，使人们能够表述并证明黑洞力学的热力学零定律和第一定律，而且只需涉及视界附近的时空几何。更多详情请参阅：

10) Abhay Ashtekar、Chris Beetle 和 S. Fairhurst，《孤立视界：黑洞力学的推广》，可见 gr-qc/9812065。

这一概念也构成了一篇即将发表的两部分论文的基础。在该论文中，Ashtekar、Corichi、Krasnov 和我将计算量子黑洞的熵（更多内容请见“第112周”）。

最后，再介绍另外两篇论文。我没时间详细介绍，但它们都相当有意思：

11) Matthias Arnsdorf 和 R. S. Garcia，《纯环路量子引力中旋量态的存在性》，可从以下地址获取：gr-qc/9812006。

我只引用摘要：

> 我们证明了无物质正则量子引力理论中旋量态的存在。这应被视为支持以下猜想的证据：具有粒子性质的束缚态会与具有非平凡拓扑的空间区域相关联。在渐近平凡的广义相对论中，动量约束仅生成空间微分同胚的一个子群。其余的微分同胚形成映射类群，

> 它在相空间上作为对称群起作用。此作用在阿什特卡形式体系的圈态空间上诱导出一个幺正表示。微分同胚群中的某些元素可视为空间相对于其周围环境的渐近旋转。我们构造了在一次 2π 旋转下发生非平凡变换的态：具有分数自旋的引力量子态。

14) Steve Carlip，《任意维数下共形场论中的黑洞熵》，可见于hep-th/9812013。

再来看看摘要：

> 将广义相对论中的曲面形变“规范”代数限制在黑洞视界上时，其中包含一个具有可计算中心荷、在物理上十分重要的 *Virasoro* 子代数。任何量子引力理论中的场都必须按照这个代数变换；也就是说，它们必须能够用共形场论来描述。借助共形场论中关于渐近态密度的 *Cardy* 公式，我利用这种描述推导出 *Bekenstein–Hawking* 熵。这种方法具有普适性——适用于任何维数下的任何黑洞，而且不需要量子引力的任何细节——但它也明确地基于统计力学，建立在对微观态的计数之上。

周四我将飞往奥地利施拉德明，参加由 Harald Grosse 和 Helmut Gausterer 组织的几何与物理学研讨会。届时会有一些很酷的物理学家参加，比如 Daniel Kastler 和 Julius Wess。如果我能听懂他们在讲什么，就会试着在这里解释。新年快乐！

补记：上文我写道：

> 最近，*Barrett*和*Williams*提出了一个巧妙的论证，指出当三角形的面积很大时，*Barrett–Crane* 理论中的一个4-单纯形的振幅与$\exp(iS)$成正比，而不是与$\cos(S)$成正比……
> 这个论证并不严谨——它使用了驻相近似，而这种近似还需要进一步论证。不过，也有人用类似的论证来证明三维量子引力中同类的结论。最近，*Justin Roberts*在*Barrett*的大力协助下，严格证明了他们的论证……
>
> 所以，人们预期只要付出一番努力，就能使*Barrett*和*Williams*的论证变得严谨。

事实上，这个论证不可能变得严谨：它是错的！在面积很大的极限下，4-单纯形在Barrett–Crane模型中的振幅与$\cos(S)$、$\exp(iS)$，或任何类似的形式都大相径庭。Dan Christensen、Greg Egan和我在几篇论文中证明了这一点；我在“第170周”和“第198周”中对此有所讨论。John Barrett、Chris Steel、Laurent Friedel和David Louapre证实了我们的结果。

到现在——我写下这段话时是2009年——大家普遍认为，Barrett–Crane模型是错误的，另一个模型更好。若想了解这个新模型，请参阅“第280周”。

第129周

1999年2月15日

过去38年来，奥地利人一直在一个名叫施拉德明的阿尔卑斯山小型滑雪度假镇举办核物理学和粒子物理学冬季研讨会。今年的研讨会由Helmut Gausterer和Hermann Grosse组织，主题是《几何与量子物理》：

1)《几何与量子物理》讲座，第38届国际核与粒子物理大学周，网址：¨atswochenf¨ur Kern- und Teilchenphysik，网址：
https://web.archive.org/web/19991114074855/http://physik.kfunigraz.ac.at/utp/iukt/iukt99/iukt99-lect.html

我受邀就自旋泡沫模型作几场报告，而其他报告听起来也很有意思，所以决定离开温暖晴朗的家，前往寒冷的北方。一月初，我飞抵萨尔茨堡，随后从那里乘火车前往施拉德明。我被时差折腾得疲惫不堪，差点睡过了下车站，但最终还是赶上了，很快便倒在酒店的床上。

第二天，我时而睡觉，时而准备报告。研讨会当晚开幕，先后有赫尔穆特·格罗斯的致辞和镇长的致辞，随后是招待会，现场由一支铜管乐队演奏助兴。后两项让我觉得有些不同寻常——一边喝啤酒，一边在响亮的奥姆帕音乐声中讨论量子引力，这颇有奥地利特色！这也是我参加过的首个设有滑雪和保龄球比赛的会议。

总之，这里有一些关于不同主题的4小时迷你课程，最终应该会以文章的形式收录于本书中：

2)《几何与量子物理》，第38届国际大学周核与粒子物理会议论文集，施拉德明，奥地利，1999年1月9日至16日，编者：H. Gausterer、H. Grosse 和 L. Pittner，《物理学讲义》**543**，施普林格，柏林，2000年。

目前它们以讲义的形式存在：

- Anton Alekseev：“具有对称性的系统的辛几何与非交换几何”
- John Baez：“量子引力的自旋泡沫模型”
- Cesar Gomez：“对偶性与D膜”
- Daniel Kastler：“非交换几何与基本物理相互作用”
- John Madore：“非交换几何导论”
- Rudi Seiler：“量子霍尔系统中输运的几何性质”
- Julius Wess：《非交换时空结构中的物理学》

这些演讲都探讨了量子理论与几何学的不同结合方式。量子理论十分奇异，自问世以来，人们便一直在各个层面努力理解它。它对纯数学产生全面影响花了些时间，但如今这种影响已随处可见：关于量子拓扑、量子几何、量子上同调、量子群、量子逻辑……甚至量子集合论的论文层出不穷！还有一些引人入胜的尝试，试图将量子力学应用于数论中的未解问题，例如黎曼猜想……这些尝试会有成果吗？如果有，这对我们所处的世界意味着什么？目前还没人真正知道；我们正处于一个实验探索的阶段——有些混乱。

我没精力概述所有这些演讲，所以我会重点谈谈 Alekseev 演讲的一部分——实际上，只是其中非常小的一点！不过首先，我先快速介绍一下每位演讲者的主题。

Alekseev 谈到了一些与驻相近似相关的想法。这是连接经典力学与量子力学的主要工具之一。它是一种近似计算形式为 $\exp(iS(x))$ 的函数的原函数的技巧，只需知道 $S(x)$，以及在其一阶导数为零的点处的二阶导数。在物理学中，人们用它在半经典极限下计算路径积分；在这种情况下，最重要的是经典轨迹附近的路径。Alekseev 讨论了一些驻相近似能够给出精确答案的问题。有一个很奇妙的结果叫作杜斯特马特-赫克曼公式，它指出在具有圆对称性的某些情形下，这种情况确实会发生。此外，还有针对更复杂对称群的推广。这些都与“等变上同调”有关——稍后再详细谈。

我谈到了量子引力的自旋泡沫方法。我已经在“第113周”、“第114周”、“第120周”和“第128周”中讨论过这个话题，所以这里不必再多说。

Cesar Gomez 对弦理论作了精彩的入门介绍，从零开始，迅速讲到 T对偶和 D膜。T对偶背后的想法非常简单优美。基本上，如果闭弦存在于一个有一个维度卷曲成半径为 R 的圆的空间中，就存在一种对称性：它涉及将 R 替换为 $1/R$，并交换弦的两种自由度，即它绕卷曲方向缠绕的圈数，以及它在卷曲方向上的动量。这两个数都是整数。考虑这种对称性对开弦的影响时，就会出现 D膜。

弦理论相当保守，至少直到最近，它通常都将时空视为具有固定几何结构的流形，只对弦在时空中振动的情况应用量子力学。相比之下，在自旋泡沫模型中，时空本身以量子力学方式建模，成为一种高维版本的费曼图。关于如何以量子力学方式处理时空，还有其他想法。其中一种是将时空坐标视为非交换变量。在这种称为非交换几何的方法中，不确定性原理限制了我们同时确定粒子位置所有坐标的能力，从而赋予时空某种量子“模糊性”。我个人认为，非交换几何作为物理时空理论并不令人信服，因为没有迹象表明时空实际上具有这种模糊性。不过，作为数学，我觉得它相当有趣。

Daniel Kastler 谈到了 Alain Connes 基于非交换几何的物理学理论。他讨论了原始的 Connes–Lott 版本的标准

模型，以及纳入引力的较新理论。Kastler 真是个妙人！和往常一样，他在演讲中把 Connes 赞颂得天花乱坠，还东拉西扯、话题满天飞，令人既恼火又觉得有趣。整个会议期间，他不断讲述轶事，让我们饱餐一顿，也让人仿佛重返英雄辈出的往昔。随便举个例子：Pauli 喜欢工作到深夜——有个学生问他："我能早上 9 点到您的办公室见您吗？"他回答："不行，我不可能待到那么晚。"

Kastler 提到的一个好点子，来自这篇论文：

3) Alain Connes，《非交换几何与实在》，《数学物理学杂志》**36** (1995年)，6194。

这个想法是给时空增添额外的卷曲维度，其形状类似量子群 SU$_q$(2)，其中 q 是一个三次单位根。量子群实际上是一种非交换代数，但借助 Connes 的思想，你可以把它看作一种"空间"。如果用它的幂零根对这个特定代数取商，就会得到代数 $M_1(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$，其中 $M_n(\mathbb{C})$ 是复矩阵代数。这与标准模型的规范群有着耐人寻味的关系，即 U(1) $\times$ SU(2) $\times$SU(3)。

John Madore 也谈到了非交换几何，但侧重于一般理论，而较少谈及其在物理学中的应用。他重点讲解了"微分演算"的概念——这是一种可以赋予代数的结构，使我们能够将代数视为一种"空间"，并对其进行微分几何研究。

Julius Wess 也谈到了非交换几何，重点讨论了量子力学的一个 q 变形版本。"q 变形"这一过程不仅可以应用于像 SU(2) 这样的群，也可以应用于其他空间。你会得到非交换代数，而这些代数往往具有很好的微分微积分，使你能够继续进行非交换几何。Wess 很擅长以幽默的方式化解紧张局面。当一位提问者尖锐地问他，他所介绍的材料在物理学中是否有用，还是仅仅是一种愉快的游戏时，他回答说："这是个非常好的问题。我稍后会尝试回答。现在你们就像在学微积分的学生：你们不知道自己为什么要学这些东西……"。而当 Kastler 和其他数学家不断就某个算子是自伴的还是仅仅厄米的这一问题与他争论不休时，他恳求饶命，说："我想成为一名物理学家。这从一开始就是我的梦想。"

总之，我希望这些笼统的描述能让你对当今数理物理领域正在发生的蓬勃发展有所了解。大家都认同，量子理论应当改变我们对几何的认识，但没人知道该如何改变。

现在来说说 Alekseev 的演讲。除了介绍他自己的研究，他还讲解了许多我以前听说过的内容。但他讲得实在太好了，我终于弄懂了！我来谈谈其中一项：等变德拉姆上同调。为此，我假设你了解德拉姆上同调、主丛、联络和曲率。我也假设你知道，给定一个流形 M，我们可以通过考察其上的微分形式，并找出闭 p形式对恰当形式取商后所得的空间，从而深入了解它的拓扑学——这就是所谓的 M的第 p 个德拉姆上同调。但现在，假设某个李群 G 以光滑的方式作用于 M。微分形式能告诉我们关于这种群作用的拓扑学什么呢?

各种各样的事情！首先，假设 G 在 M 上自由作用——这意味着，对于 M 中的任意点 x 以及 G 中除恒等态射之外的任意元素 g， gx 都不同于 x。

那么，商空间 M/G是一个流形。更妙的是，映射 $M \to M/G$ 给出了一个主 G-丛，其全空间为 M，底空间为 M/G。

我们能求出 M/G 的德拉姆上同调吗？当然，如果我们足够聪明，就可以先求出 M/G，然后再计算它的上同调。不过，还有一种更巧妙的方法：利用 M 上的微分形式。映射 $M \to M/G$ 让我们可以将 M/G 上的任意微分形式拉回，从而得到 M 上的微分形式。这样，我们就可以把 M/G 上的微分形式看作满足某些方程的 M 上的微分形式——人们称它们为“基本”微分形式，因为它们来自底空间 M/G。

这些方程是什么呢？请注意，G 的李代数中的每个元素 v 都会在 M 上给出一个向量场，我也将其称为 v。这会在 M 上的微分形式上定义两种运算：李导数 L_v 和内积 i_v。很容易看出，对于所有 v，任何基本微分形式都会被这些运算湮灭。逆命题也成立！因此，我们有一些漂亮的方程来描述基本微分形式。

现在，如果我们取闭的基本 p形式组成的空间，再对恰当的基本 p形式取商，就得到了 M/G 的德拉姆上同调！这样一来，我们就能利用 M上的微分形式研究 M/G的拓扑。这非常方便。

如果 G 对 M 的作用不是自由的，商空间 M/G可能就不是流形。这并不妨碍我们像之前那样在 M 上定义“基本”微分形式。我们还可以将闭的基本 p形式对恰当形式取商，从而定义一些上同调群。但拓扑学家从长期经验中得知，另一种方法往往更有用。非自由的群作用就像敏感而难以捉摸的生物——实在很难对付。幸运的是，当作用不是自由作用时，可以稍作调整使其变为自由作用。这需要把群作用所在的空间“膨胀”起来——用一个更大的空间取代原空间，使群在其上自由作用。

例如，假设有一个群 G 作用在一个单点空间上。除非 G 是平凡的，否则这个作用就不是自由的。事实上，它几乎可以说是最不自由的作用了！不过，我们可以把它“膨胀”起来，得到一个称为 EG的空间。和单点空间一样，EG是可缩的，但 G 在其上的作用是自由的。实际上，满足这两个性质的空间有好几种，用哪一种并不太重要——人们把它们统称为 EG。人们称商空间 EG/G为 G的“分类空间”，并用 BG表示它。

更一般地，假设 G 在流形 M上有任意 作用。我们如何把 M 膨胀起来，得到一个 G 在其上自由作用的空间呢？很简单：只需取它与 EG的乘积。由于 G 作用在 M 和 EG上，它便以显而易见的方式作用在乘积 $M \times EG$ 上。由于 G在 EG上的作用是自由的，它在 $M \times EG$ 上的作用也是自由的。而且由于 EG 是可缩的，从拓扑学的角度来看，空间 $M \times EG$ 与 M非常相似。更准确地说，它们具有相同的同伦型！

实际上，最后两段可以毫不增加额外成本地大幅推广。G 不必是李群，M 也不必是流形。G 可以是任意拓扑群，而 M 可以是任意拓扑空间！不过，由于我想讨论 德拉姆上同调，这里不需要这种额外的普遍性。

总之，现在我们知道了当 G 在 M 上的作用不是自由作用时，商空间 M/G 的正确替代物：它就是商空间（$M \times EG$）$/G$。

那么现在我们来看看如何计算 $(M \times EG)/G$ 的第 p 个德拉姆上同调。由于 G 在 $M \times EG$ 上自由作用，这应该就是 $M \times EG$ 上闭的基本 p-形式模去恰当形式，其中“基本”的定义与之前相同。事实上确实如此。我们将所得空间称为空间 M 的第 p 个“等变德拉姆上同调”。当 M/G

不是流形。

只有一个小问题：空间 EG 非常大，因此要处理 $M \times EG$上的微分形式并不容易！

你会注意到，我并没有详细说明 EG是什么样子。我只说它是某个可缩空间， G 在其上自由作用。我甚至没说它是一个流形，所以“ EG上的微分形式”是否有意义都不明显！如果你足够聪明，就可以选择空间 EG，使它成为一个流形。不过，通常你需要它是无限维的。

在无限维流形上讨论微分形式完全说得通，但在尝试进行具体计算时，它们可能会有些棘手。幸运的是， EG上的微分形式中有一个小的子代数，足以用于计算等变上同调！它称为“Weil 代数”， WG。

要猜出这个代数是什么，我们不妨把能想到的 EG上所有显而易见的微分形式都列出来。不过，除非我们多了解一些事实，否则我想没有什么是显而易见的！首先，由于 G 在 EG 上的作用是自由的，商映射 $EG \to BG$ 为我们提供了一个主 G-丛，其全空间为 EG ，底空间为 BG。这个丛非常有意思，称为“万有”主 G-丛。原因在于，任何其他主 G-丛都是这个丛的拉回。

（我想我又要提高这里的复杂程度了：我假设你知道如何拉回丛！）

更妙的是，如果我们选择空间 EG使其成为一个流形，那么丛 $EG \to BG$上就有一个自然给定的联络，而任何其他带联络的主 G-丛 都是这个丛的拉回。

（现在我又假设你知道如何拉回联络了！不过，下面的内容并不需要这种拉回操作，所以如果你愿意，完全可以忽略它。）

好，那么我们如何仅凭 EG 是一个配备了联络的 G-丛的总空间这一事实，就得到一大批微分形式呢?

嗯，每当我们有一个 G-丛 $E \to B$ 时，都可以把其上的联络看作 E 上取值于 G 的李代数的 1-形式。让我们看看这会在 E 上产生哪些微分形式！我们把这个联络记作 A。如果我们选取李代数的一组基，就可以取出 A 在这组基下的分量，从而得到 E 上的一批 1-形式 A_i 。我们还会得到一批 2-形式 dA_i。我们还会得到一批 2-形式 $A_i \wedge A_j$。依此类推。

一般来说，我们可以对所有可能的 A_i 和 dA_i 的外积取线性组合。这样就得到一个庞大的代数。当我们的丛是 $EG \to BG$，并配备了其与生俱来的联络时，我们就将这个代数定义为 Weil 代数，WG!

很好。不过，我们试着用纯代数的方式定义 WG ，这样就能更轻松地进行计算。我们从 1-形式 A_i 开始，取它们及其外微分的外积的所有线性组合。事实上，除了显而易见的关系之外，没有其他关系，所以 WG 就是“由变量 A_i 自由生成的超交换微分分次代数”。注意：所有关于超交换微分分次代数的繁琐说法，都是为了提及显而易见的关系。

警告：人们通常不会完全这样描述 Weil 代数。他们通常似乎会用联络1-形式和曲率2-形式来描述它。不过，曲率通过公式 $F = dA + A \wedge A$ 与联络相关；如果使用这个公式，你就可以从 Weil 代数的通常描述转到我的描述——我想是这样。

（实际上，人们常常把 Weil 代数描述为由一堆度为 1 的东西和一堆度为 2 的东西生成的代数，却不告诉你，那些度为 1 的东西其实是联络1-形式的分量，而那些度为 2 的东西其实是曲率2-形式的分量！这就是我告诉你这一切的原因——这样一来，如果你以后研究这类东西，就更有可能看清那一团迷雾背后究竟发生了什么。）

好，结论如下。假设我们要计算某个流形 M 上的等变德拉姆上同调，该流形上有 G 作用。换句话说，我们要计算 $(M \times EG)/G$的德拉姆上同调。一方面，我们可以从 $M \times EG$上的微分形式入手，找出“基本” p-形式，并取闭基本 p-形式空间对恰当形式取商。但请记住：除去分析学上的细节， $M \times EG$ 上的微分形式代数就是 M上的形式代数与 EG上的形式代数的张量积。而且，我们有一个方便的小型替代品，可代替 EG上的形式代数，即 Weil 代数 WG。因此，我们取 M 上的微分形式代数，并将它与 WG 作张量积。这样便得到一个带有李导数运算 L_v 和内积运算 i_v 的微分分次代数。接着我们像之前一样进行：取度为 p 的闭基本元素空间，对恰当元素取商。瞧！只要持之以恒，这确实是可以计算的。而且，在 G连通且单连通时，它给出的答案相同。

还有各种各样的其他内容可以讲。比如，如果我们考虑最简单的情况，也就是当 M 是一个点时，这就为计算 $EG/G = BG$ 的德拉姆上同调提供了一个巧妙的方法。这个上同调环中的元素称为“特征类”，它们在物理学中非常重要。由于任意主 G-丛都是 $EG \to BG$ 的拉回，而上同调类也可以进行拉回，因此这些特征类为任意主 G-丛的底空间提供了上同调类——从而帮助我们对 G-丛进行分类。不过，如果我现在开始解释这些内容，我们恐怕要讲到深夜。

另外，改天我应该多讲讲如何构造 EG。

第130周

1999年2月27日

物理学领域正在发生各种酷炫的事情——我指的不是数理物理，而是真实进行中的实验物理学！我因没有在 This Week's Finds 中提到这些而感到有些内疚。让我来弥补一下。

先用一句话概括重磅消息：我们对自然界四个基本常数的认识可能错了。我们原以为它们为零，但也许并非如此！我说的是中微子质量和宇宙学常数。

先从中微子说起。

中微子有三种：电子中微子、μ子中微子和 τ 中微子。它们与借用其名称的带电粒子——电子、μ子和 τ ——非常相似，但与那些粒子不同的是，它们不带电且质量极轻。它们相当难以捉摸，因为它们只通过弱力和引力相互作用。我相信大家都听说过，中微子可以轻而易举地穿过数百光年的铅而不被吸收。

但尽管中微子的本性如幽灵般难以捉摸，它们在物理学中却扮演着非常实际的角色，因为放射性衰变通常涉及中子转变为质子，同时释放出一个电子和一个电子反中微子。（事实上，Pauli 于1930年提出中微子的存在，是为了解释这一过程中消失的一点能量。直到1956年，人们才直接观测到中微子。）类似地，在核聚变中，质子可能转变为中子，同时释放出一个正电子和一个电子中微子。例如，II型超新星爆发时会释放出如此之多的中微子，以至于如果你就在附近，它们会比其他任何东西都更早要了你的命！事实上，1987年，大约10万光年外大麦哲伦云中的一颗超新星被四个独立的中微子探测器探测到。

我说中微子"很轻"，但究竟有多轻呢？迄今为止，大多数研究只能给出质量上限。20世纪80年代，俄罗斯的 ITEP 群声称发现了电子中微子的非零质量，但后来这一结果被归咎于他们的实验设备存在问题。到目前为止，实验室实验给出的电子中微子质量上限为4.4 eV，μ子中微子为0.17 兆电子伏，而 τ 中微子为18 兆电子伏。相比之下，电子的质量为0.511 兆电子伏，μ子的质量为106 兆电子伏，而 τ 的质量则高达1771 兆电子伏。

因此，过去的普遍看法是中微子没有质量。毕竟，电子中微子肯定比任何已知粒子都轻得多，光子除外——光子是无质量的。其他中微子质量的上限较高，主要是因为进行相关实验要困难得多。

认为中微子没有质量，也能很好地解释它们最令人惊叹的特征：它们只以左手性形式出现。我的意思是，从正面看着迎面而来的中微子时，它们是逆时针自旋的。事实证明，左-右对称性的这种破缺，对无质量粒子来说相当容易出现，但对有质量粒子来说则要困难得多。原因很简单：无质量粒子以光速运动，所以你无法超过它们。因此，无论速度如何，每个人对这类粒子迎面而来时究竟是朝哪个方向自旋，都有一致的判断。有质量粒子可不是这样！

然而，这其中也有美中不足之处。由于太阳由聚变提供能量，

它理应释放出大量中微子。事实上，标准太阳模型预测，地球上每平方厘米每秒会受到600亿个太阳中微子的轰击！因此，在20世纪60年代末，由 Ray Davis 领导的一支团队开始设法探测这些中微子：他们把一座装有10万加仑四氯乙烯的罐子，放进南达科他州 Homestake 的一座金矿深处。太阳中会发生许多不同的核反应，产生能量各异的中微子。Homestake 实验只能探测能量最高的那部分中微子——也就是硼-8衰变成铍-8时产生的中微子。这些中微子的能量足以将罐中的氯-37转变成氩-37。氩是一种稀有气体，可以将其分离出来并测量。这并非易事——预计每天只能得到约4个氩原子！因此，这项实验需要极其谨慎地进行，并持续了数十年。

他们观测到的中微子数量只有预期的四分之一左右。

当然，像这样的实验极其精密，误差的可能性总是很多，包括标准太阳模型本身的误差。因此，一个日本研究小组决定在神冈的一座矿井里，用一个装有2000吨水的水箱来寻找太阳中微子。这项“神冈实验”使用光电倍增管，探测被中微子击中的电子所产生的切伦科夫辐射。同样，它也只对高能中微子敏感。

5年后，他们开始发现太阳黑子活动与中微子计数之间似乎存在相关性。有意思。但更有意思的是，他们观测到的中微子数量也没有预期的那么多，实际上只有大约一半。

从1990年代开始，人们陆续建造能够探测低能中微子的探测器——包括能够探测太阳主要聚变反应产生的中微子的探测器。为此，使用镓-71是个不错的选择，因为它受到中微子轰击后会转变为锗-71。位于意大利的GALLEX探测器使用了30吨镓，以氯化镓的形式溶解在水中。位于高加索山脉一条隧道里的SAGE探测器，则使用了60吨熔融金属镓。这听起来没那么吓人，因为镓的熔点很低——放在手里就会融化！不过，这些实验当然还是非常困难。

这些实验同样未能探测到预期数量的中微子。

此时，理论学家们已经全力以赴，试图解释缺失的中微子。如今最流行的理论认为，部分电子中微子在到达地球时，已经转变成了μ子中微子和 τ 中微子。这些其他种类的中微子不会被我们的探测器探测到。

人们把这个假想的过程称为“中微子振荡”。要发生这种过程，中微子必须具有非零质量。毕竟，无质量粒子以光速运动，因此不会经历时间的流逝——这是相对论时间膨胀造成的。只有有质量的粒子，才能在一路飞驰、照常行进时转变成其他东西。

事实上，如果你假设中微子具有微小质量，那么只要“质量本征态”不同于“味本征态”，振荡就会自动发生。这里的“味”指的是中微子属于电子、μ子还是 τ 中微子。为简单起见，设静止中微子的态由一个向量表示，其 3 个分量是它属于三种不同味的振幅。如果这些分量中除一个以外都为零，那么我们就有一个味确定的中微子——一个“味本征态”。另一方面，静止粒子的能量基本上就是它的质量。因此，在当前语境下，中微子的能量由一个 3×3 自伴矩阵 H描述，

即“哈密顿量”，其特征向量称为“质量本征态”。它们可能与味本征态相同，也可能不同！薛定谔方程指出，中微子的任意态 ψ都按如下方式演化：

$$\frac{d\psi}{dt} = -iH\psi.$$

因此，如果 ψ 一开始是质量本征态，它就会一直保持为质量本征态。但如果它一开始是味本征态，就不会一直保持为味本征态——除非质量本征态与味本征态重合！相反，它会发生振荡。

我猜你一直想知道数学内容什么时候才会开始。别担心，这次不会讲太多。

无论如何，对于夸克等其他粒子，质量本征态与味本征态并不 重合，这是众所周知的。因此，只要中微子确实具有非零质量，我们就不应该对中微子振荡感到惊讶。

实际上，事情比我所说的要复杂一些。除了在真空中振荡之外，中微子在穿过太阳时也可能振荡得更 剧烈，这要归功于一种称为MSW效应的现象——该名称取自Mikheyev、Smirnov和Wolfenstein。此外，中微子具有质量的方式有两种，具体取决于它们是狄拉克旋量还是马约拉纳旋量（参见“第93周”）。

不过，我不想在这里纠缠于理论上的细枝末节！我想谈谈实验，而且还没说到那些新进展——那些让所有人都大为 困惑的新进展！

首先，现在有一些来自洛斯阿拉莫斯液体闪烁体中微子探测器的实验室证据，支持中微子振荡。这些研究人员让正带电π介子衰变成反μ子和μ子中微子，然后检查是否有μ子中微子变成电子中微子。他们声称确实观测到了这种现象！他们还声称发现了μ反中微子变成电子反中微子的证据。

其次，更令人感兴趣的是，有一系列涉及大气中微子的实验：超级神冈探测器、Soudan 2、IMB 和 MACRO。宇宙射线撞击高层大气时，会产生各种各样的粒子，其中包括电子中微子、μ子中微子以及相应的反中微子。宇宙射线专家认为，他们知道各种中微子的产量应该是多少。但地面上的实验人员测出的数量却不一样！

同样，这可能是由中微子振荡造成的。但真正酷的是，这些数字似乎取决于中微子的来源方向：它们可能来自探测器正上方的天空，也可能来自探测器正下方——在这种情况下，它们必定一路穿过了地球——或者来自其他方向。来自不同方向的中微子，从高层大气到达探测器所需的时间各不相同。因此，对实验结果一个显而易见的解释是：我们实际上正在看到振荡过程**发生的过程**。

如果这是真的，我们就可以根据这些实验测量出的数字，尝试获取有关中微子质量矩阵的详细信息！

而这正是人们一直在做的事。但他们发现了一个非常奇怪的现象。如果所有实验都没有问题，也没有人犯错，那么似乎没有任何一种中微子质量矩阵能够真正符合所有数据！要解释所有数据，人们就得采取一些激进做法——比如假设存在第四种中微子！

不过，假设还存在另一种中微子可不是小事。已知的中微子与弱力的耦合方式几乎完全相同。让Z玻色子衰变——Z玻色子是弱力的中性载体——便可以产生数量相等的三种味的中微子-反中微子对。当Z玻色子看似衰变成“什么也没有”时，我们完全可以断定它衰变成了一对中微子-反中微子。1989年，欧洲核子研究中心的一项著名而精巧的实验表明，Z玻色子衰变成“什么也没有”的速率，恰好符合存在三种中微子味时的预期。因此，只有当额外的中微子味质量非常大、与弱力的耦合方式截然不同，或者存在某些其他古怪情况时，它们才有可能存在。

现在，电子或缪子中微子不太可能振荡成一种质量非常大的中微子——基本上是因为能量守恒。因此，如果我们想用额外的中微子来解释实验结果，就只能接受这样一种中微子：它与弱力的耦合方式和我们已知的中微子大不相同。一个简单但激进的可能性是：它根本不通过弱力发生相互作用！人们称这种中微子为“惰性”中微子。

现在，惰性中微子会给标准模型捅出一个大窟窿，其影响远大于普通的有质量中微子。所以事情变得非常有趣。

Wilczek最近写了一篇通俗易懂的论文，阐述了这样的论点：有质量的中微子与这样一种可能性非常契合：标准模型只是一个更大、更完善的理论——“大统一理论”——的一部分。我在SU(5) 和 SO(10)大统一理论中概述了基本思想，见“第119周”。回想一下，在SU(5) 理论中，某一代所有费米子的左手性部分可归入SU(5) 的两个不可约表示——一个5维表示和一个10维表示。例如，对于第一代，5维表示由左手下反夸克（具有3种色荷）、左手电子和左手电子中微子组成。10维表示由左手上夸克、下夸克和上反夸克（每种都具有3种色荷）以及左手正电子组成。

在 SO(10) 理论中，所有这些粒子再加上一种粒子，都能纳入 SO(10) 的一个 16 维不可约表示。这个额外的粒子可能是什么?

既然这个额外的粒子在 SU(5) 下作平凡变换，它就不会感受到电磁力、弱力或强力！因此，很容易想到，这个缺失的粒子可能是左手电子反中微子。当然，我们看不到这样的粒子——我们只能看到自旋方向为顺时针的反中微子。但如果中微子是有质量的狄拉克旋量，就必定存在这样的粒子；而它不感受电磁力、弱力或强力，恰好可以解释我们为什么 看不到它。

Grotz 和 Klapdor 在他们关于弱相互作用的书中讨论了这种可能性（见下文），但遗憾的是，这个理论似乎会使电子中微子的质量达到约 5 兆电子伏——实在太大了！唉。因此，Wilczek 遵循传统观点，假设缺失的粒子质量极大——他称之为“N”。他还概述了一些论据，说明这种大质量粒子可能通过某种称为“跷跷板机制”的机制，帮助使中微子获得极小的质量。遗憾的是，我现在没有精力描述这一点；想了解更多，请参阅他的论文（下文提及）。

最后，我想再谈一件关于中微子宇宙学意义的事。有质量中微子或许可以解释宇宙学家所担忧的部分“失踪质量”。因此，中微子质量与宇宙学常数之间存在间接的联络！宇宙学常数本质上就是能量密度

真空的能量密度。人们长期以来都认为它为零，但如今已有一些微弱迹象表明，它并非为零。事实上，有些人对此深信不疑。宇宙的命运悬而未决。.....

很遗憾，我现在太累了，没法再多说些什么。所以，我就给你一个轻松的入门起点：

1) 特别报道：宇宙学革命，《科学美国人》，1999年1月。包括以下文章：“用超新星测绘时空”，作者为 Craig J. Horgan、Robert P. Kirschner 和 Nicholoas B. Suntzeff；“宇宙学反引力”，作者为 Lawrence M. Krauss；以及“低密度宇宙中的暴胀”，作者为 Martin A. Bucher 和 David N. Spergel。

怎样才能进一步了解中微子？从这里开始准没错：

2) Nikolas Solomey，《难以捉摸的中微子》，《科学美国人文库》，1997年。

如果你想深入探究，就需要了解弱力，因为我们只能通过中微子与其他粒子之间的弱相互作用，才观察到中微子。以下这本书是很好的入门读物：

3) K. Grotz 和 H. V. Klapdor，《核物理、粒子物理与天体物理学中的弱相互作用》，Adam Hilger，布里斯托尔，1990年。

接下来，你就可以阅读这本书了。它详细探讨了中微子的方方面面，还收录了历史文献的复制件：

4) Klaus Winter 编，《中微子物理学》，剑桥大学出版社，剑桥，1991年。

接下来，如果你想研究有质量的中微子物理学，可以看看这本书：

5) Felix Boehm 和 Petr Vogel，《有质量中微子的物理学》，剑桥大学出版社，剑桥，1987年。

不过，中微子物理学发展迅速，许多新进展还未收入书中，因此你也应该看看其他资料。要查找许多优秀的中微子网站链接，包括我提到的几乎所有实验的网站，请访问：

6）“中微子振荡领域”，https://www.hep.anl.gov/ndk/hypertext/

如需了解近期的一些概览，可以参考以下资料：

7）Paul Langacker，“中微子质量的影响”，https://www.physics.upenn.edu/~pgl/neutrino/jhu/jhu.html8）Boris Kayser，“中微子质量：我们目前处于什么阶段，又将走向何方？”，可在以下地址获取：hep-ph/9810513。

如需了解各种实验的信息，请参阅以下资料：

9) GALLEX合作组，“GALLEX太阳中微子观测：GALLEX II的完整结果”，《物理快报B》357（1995年），237–247。“GALLEX中CR-51中微子源实验的最终结果”，《物理快报B》420（1998年），114–126。“GALLEX太阳中微子观测：GALLEX IV的结果”，《物理快报B》447（1999年），127–133。10) SAGE合作组，“SAGE的结果”，《物理快报B》328（1994年），234–248。“俄美镓实验（SAGE）CR中微子源测量”，《物理评论快报》77（1996年），4708–4711。11) LSND合作组，“静止缪子衰变产生的中微子振荡证据”，《物理评论C》54（1996年），2685–2708。另见 nucl-ex/9605001。“LAMPF的LSND实验发现反缪中微子 → 反电子中微子振荡的证据”，《物理评论快报》77（1996年），3082–3085。另见 nucl-ex/9605003。“LSND发现缪中微子 → 电子中微子振荡的证据”，《物理评论快报》81（1998年），1774–1777。另见 nucl-ex/9709006。“飞行中的π介子衰变产生的缪中微子 → 电子中微子振荡结果”，《物理评论C》58（1998年），2489–2511。12) Super-Kamiokande合作组，“大气中微子发生振荡的证据”，《物理评论快报》81（1998年），1562–1567。另见 hep-ex/9807003。13) MACRO合作组，“大气中微子诱发的向上μ子通量测量”，《物理快报B》434（1998年），451–457。另见 hep-ex/9807005。14) IMB合作组，“使用IMB探测器搜寻缪中微子振荡”，《物理评论快报》69（1992年），1010–1013。若要了解如何基于最新一批实验，以相当少依赖模型的方式推断中微子质量，请参阅：16) V. Barger、T. J. Weiler和K. Whisnant，“推断得到的缪中微子和τ中微子质量4.4 eV上限”。另见 hep-ph/9808367。若要了解数据的精彩综述，以及认为这些数据证明惰性中微子存在的论证，请参阅：17) David O. Caldwell，“中微子质量的现状”。另见 hep-ph/9804367。若要阅读一篇通俗易懂的论证，说明有质量中微子是超对称SO(10)大统一理论的证据，请参阅18) Frank Wilczek，“超越标准模型：这一次来真的”。另见 hep-ph/9809509。

最后，标准模型中出现了这么多裂痕，重新回顾标准模型的兴起令人欣慰。下面这本书收录了许多理论学家和实验学家的回忆，他们曾参与发展这一关于粒子和力的精彩理论，其中包括 Bjorken、't Hooft、Veltman、Susskind、Polyakov、Richter、Iliopoulos、Gell-Mann、Weinberg、Lederman、Goldhaber、Cronin 和 Kobayashi：

19) Lilian Hoddeson、Laurie Brown、Michael Riordan 和 Max Dresden 编，《标准模型的兴起：20世纪60至70年代的粒子物理学》，剑桥大学出版社，剑桥，1997年。

任何对物理学史感兴趣的人都不容错过！

第131周

1999年3月7日

我一直在进一步思考中微子，以及它们对于大统一理论的重要意义。“大统一理论”这个术语听起来相当浮夸，但从技术层面来说，它指的是一种目标有限的理论：试图统一所有力的量子场论，引力除外。这一限制让你可以假设时空是平坦的。

大统一理论的鼎盛时期始于20世纪70年代中期，也就是标准模型取得成功后不久。你可能知道，标准模型是一种量子场论，描述了所有已知粒子和除引力以外的所有已知力：电磁力、弱力和强力。标准模型以统一的方式处理电磁力和弱力——因此人们称之为“电弱相互作用”——但它单独处理强力。

1975年，Georgi 和 Glashow 提出了一种理论，将每一代所有已知粒子归入 $\mathrm{SU}(5)$的两个不可约表示中。他们的理论有一些很出色的特点：例如，它将强力与电弱相互作用统一起来，并解释了为什么夸克电荷是 $1/3$的整数倍。它还做出了一些新的预测，最引人注目的是，质子的半衰期大约为 10^{29} 或 10^{30}年。当然，需要两个不可约表示 $\mathrm{SU}(5)$ 来容纳每一代的所有粒子，多少有些不够优雅。幸运的是，$\mathrm{SU}(5)$ 以一种很巧妙的方式包含在$\mathrm{SO}(10)$之中，Georgi 借此构造出一种略为宏大的理论：每一代的全部15种粒子，外加一种粒子，都可以归入$\mathrm{SO}(10)$的单个不可约表示中。我在“第119周”中介绍过这一切的数学，因此这里就不再赘述了。

额外的粒子是什么？嗯，观察数学结构时，一个显而易见的可能性是右手中微子。正如我上周解释的那样，右手中微子的存在会让中微子更容易具有质量。而这又会允许不同代的中微子之间发生“振荡”——或许能解释我们从太阳观测到的电子中微子数量为何神秘地偏少。

这种“太阳中微子亏损”在1975年就已被发现，因此大统一理论令所有人都兴奋不已。当时的头等大事是：寻找中微子振荡和质子衰变！

从Glashow在1980年所作的一场演讲中，可以很好地看出当时的气氛：

1) Sheldon Lee Glashow，《新前沿》，载于第一届大统一研讨会，Paul H. Frampton、Sheldon L. Glashow和Asim Yildiz编，Math Sci Press，马萨诸塞州布鲁克莱恩，1980年，第3–8页。

我想引用他的一些话，因为回想这期间发生的事情很有意思：

> π介子、μ子、正电子、中子和奇异粒子都是在没有使用加速器的情况下发现的。近来，基本粒子物理学的大多数发展都依赖于这些昂贵的人造设备。科学变化迅速。或许有一天，加速器不再主导我们的领域：现在还没有，但可能比某些人想象的更快到来。

下一代加速器将带来重要发现。量子色动力学和电弱理论需要进一步验证。我们需要了解底夸克如何衰变。只有看到弱相互作用媒介粒子，人们才会相信它们的存在。顶夸克（或者无顶夸克理论所需的种种变态）就潜伏在探测范围之外。希格斯可能还在等待被发现。很可能还存在第四族夸克和轻子。甚至可能出现无法预料的惊喜。我们需要新的机器。

当然，我们现在已经知道 b（或“底”）夸克如何衰变，也见过 t（或“顶”）夸克和弱相互作用媒介粒子，并且相当确信不存在第四代夸克和轻子。此前从未出现过意料之外的惊喜。加速器的成本越来越高，直到美国国会于1993年撤回了对超导超大型对撞机的资助。希格斯仍有待发现，或证明其并不存在。欧洲核子研究中心的实验应能在2003年左右解决这个问题。

另一方面，我们首次拥有了一种看似正确的基本粒子物理学理论。从某种意义上说，它或许在现象学上已臻完备。这表明，在更高能量下可能不会再有惊喜，至少在实际可及的能量范围内如此。事实上，*PETRA* 和 *ISR* 并未带来惊喜。*PEP*、*ISABELLE* 和 *TEVA-TRON* 也可能如此。理论家确实预期在更高能量下会出现新现象，但那只会发生在极其难以企及的能量下。如果发现质子衰变，将进一步强化这样一种看法：从100 吉电子伏特到 10^{14} 吉电子伏特的大统一质量之间，存在一片广阔的“大沙漠”。也许这片沙漠反倒是因祸得福。规模越来越大、成本越来越高的机器，与日益减少的资金和能源储备相冲突。所有前沿终将走到尽头。

你可能喜欢这种设想，也可能不喜欢；它可能是真的，也可能是假的。但它并非不可能、不合情理或不大可能发生。而且，不要绝望，也不要过早哀叹粒子物理学的消亡。我们距离抵达沙漠还有一段路，沿途有异类动物；即使沙漠的荒凉，也可能别有趣味。高能前沿的终结绝不意味着粒子物理学的终结。办法总比困难多。在这场演讲中，我将介绍几条令人振奋、远离高能前沿的研究方向。重要成果，甚至非同寻常的惊喜，都在等待着我们。不过，前路也有危险。

我将要谈到的被动前沿，多年来一直受到善意的忽视。它需要资金和人力，而这些资源必须与加速器界竞争。虽然没有一个代表在加速器工作的物理学家的工会，但有时看起来就像存在这样一个工会。有人主张，加速器建造计划必须取决于这支工作队伍的“需求”：数千名敬业的高能实验物理学家。这简直荒谬。未来的加速器必须依据科学优先事项，而非人口统计数据来建造。新机器并非劳动密集型，因此绝不能被迫变成劳动密集型。并非所有高能物理学家都能在新机器上找到位置。高能物理学家并没有在加速器上工作的保障权利，也不享有那种工作保障。他必须回应被动前沿的挑战。

当然，高能物理学就业市场的崩溃以及.....的消亡
S超导超级对撞机让这些单词带上了几分伤感。但这

Glashow 提到的“被动前沿”是什么？它指的是不依赖超高能粒子加速器的粒子物理学。他列出了几种选择：

A）CP现象学。标准模型在粒子与其反粒子互换时并不对称——这称为“电荷共轭”，或“C”。在左右互换时，它也不对称——这称为“宇称”，或“P”。而在这两种运算组合起来时，它几乎对称，却并非完全对称，这称为“CP”。中性K介子的行为清楚地表明，CP对称性遭到破坏。Glashow建议寻找CP破坏的一种表现形式：中子具有非零磁偶极矩。据我所知，这种现象至今仍未被观测到。

B）新型稳定物质。Glashow提议寻找新的稳定粒子，并称之为“一项雄心勃勃且风险很高的科学探索”。人们一直在寻找，却一无所获。

C）中微子质量与中微子振荡。Glashow声称：“中微子应该具有质量，并且应该发生混合。”如今看来，他是对的。实验结果从涓涓细流汇成我们今天看到的汹涌洪流，几乎花了20年，但最终还是发生了。他敦促道：“让我们别错过下一次近邻超新星！”幸好我们没有错过。

D）天体物理中微子物理。除了太阳中微子和来自超新星的中微子之外，中微子与天体物理之间还有其他有趣的联系。大爆炸产生的背景辐射中应当包含中微子，也包含更容易观测到的光子。更确切地说，由于这一效应，每立方厘米空间中每一代中微子的数量都应约为100个。这些“遗迹中微子”尚未被观测到，但这没关系：如今它们的能量已经太低，很难探测到。Glashow指出，如果中微子具有非零质量，遗迹中微子就可能对宇宙的总密度作出重大贡献。质量约为30 eV的最重一代中微子，或许足以使宇宙最终重新坍缩！另一方面，要使中微子受引力束缚于星系，其质量至少需要约20 eV。

E）磁单极子。大多数大统一理论都预言，由于希格斯场中的“拓扑缺陷”，磁单极子将会存在。Glashow敦促人们寻找它们。人们已经进行了搜寻，但至今仍未发现。

F）质子衰变。正如 Glashow 所指出的，质子衰变将是“新前沿之王”。反映出1980年的乐观情绪，他指出：“对一些人来说，质子衰变即将被目前正在建造的实验观测到，这是一个不容置疑的结论。”但遗憾的是，人们进行了非常深入的寻找，却没有发现它！这使 SU(5) 理论宣告失败。许多人转而研究超对称理论，因为这类理论与极其缓慢的质子衰变更加相容。但由于始终缺乏能够给出解释的新实验，人们对大统一理论的热情逐渐消退，而理论粒子物理学则躲进了弦理论优美而抽象的世界。

不过，20年后，人们对大统一理论的兴趣似乎又回来了。关于中微子振荡，我们积累了大量神秘的实验结果。真该有人解释一下！

换个稍有不同的话题，我的一项小小的业余爱好是研究八元数，并畅想它们如何能应用于物理学。它们出现的一个地方是E_6大统一理论——比$SO(10)$理论更进一步的理论。我在“第119周”里稍微谈过这个话题，不过我刚刚在 Glashow 的论文所收录的同一份会议论文集中，又发现了另一篇相关论文：

2) Feza Gursey，《E_6中的对称性破缺模式》，载于《大统一第一次研讨会》，Paul H. Frampton、Sheldon L. Glashow 和 Asim Yildiz 编，Math Sci Press，马萨诸塞州布鲁克莱恩，1980年，第39–55页。

他说了一件很有意思的事，我希望有朝一日能弄明白——也许有人能解释一下为什么这是真的。他说 E_6 是一个“复”群，E_7 是一个“伪实”群，而 E_8 是一个“实”群。这种术语用法可能并不标准，但他的意思是，E_6 有不与自身共轭的复表示，E_7 有与自身共轭的复表示，而 E_8 的所有复表示都是实表示的复化（因此也都与自身共轭）。这应该与 E_6 的 Dynkin图的对称性有关。

八元数在弦理论以及我的朋友 Geoffrey Dixon 和 Tony Smith 提出的大统一理论中也很重要——参见 “第59周”、“第91周”和“第104周”。改天我大概会再多谈谈这个……

我对中微子感兴趣，是因为我想了解有哪些证据表明，物理定律超出了标准模型和广义相对论的范畴。这也是我试着学习一些天体物理学的原因。有关非零宇宙学常数的新证据迹象、失踪质量问题、宇宙大尺度结构，甚至令人费解的 γ射线暴——这些都值得沿着这条思路深入思考。

下面这本书引起了我的注意，因为它看起来正是我需要的——一本介绍宇宙学最新进展的简明教程：

3) Greg Bothun，《现代宇宙学观测与问题》，Taylor & Francis，伦敦，1998年。

读了这本书后，其中一些关于粒子物理学的评论让我不太满意。例如，博图恩说：“观测到的宇宙熵 S，以重子与光子的比值衡量，为 $\sim 5 \times 10^{-10}$。”但正如 Ted Bunn 向我解释的，熵实际上与光子和重子的比值相关——也就是这个数的倒数。博图恩还把暴胀宇宙学中假设的场的动能密度称为“本质上是一个熵场，目前正驱动着宇宙的均匀膨胀和冷却”。这在我看来毫无道理。此外，书中还有大量拼写错误，其中最令人尴尬的是把“维里化”误写成了“virilizing”。

不过，这本书里有很多精彩内容！作者专长于大尺度结构，我从中学到了很多相关知识。先简单介绍一下背景：银河系的盘面直径约为 30 千秒差距，包含大约一千亿至两千亿颗恒星。不过，我们的星系是一个约由 20 个星系组成的星系团的一员，这个星系团称为本星系群。除了我们的星系以及环绕它运行的大、小麦哲伦云之外，本星系群还包含仙女座星系（也称为 M31）、另一个名为 M33 的旋涡星系，以及一大批矮不规则星系。本星系群的半径约为一百万秒差距。

这是很典型的情况。星系通常位于星系团中，这些星系团的半径为几百万秒差距，其中包含从少数几个到数百个大型星系。一些著名的邻近星系团包括室女座星系团（距离约 20 百万秒差距）和后发座星系团（距离约 120 百万秒差距）。阿贝尔及其合作者已经编录了数千个星系团。

再往上还有超星系团，每个通常由3至10个星系团组成，形成一条细长的“纤维状结构”，直径约为50百万秒差距。我并不是想把实际情况说得比它更规整，因为星系际距离没有人能确定，而且这些结构本身相当杂乱。不过，还是能辨认出一些模式。例如，超星系团往往出现在较大的、近似圆形的“空洞”边缘，这些空洞里的星系很少。空洞非常巨大，直径约为100或200百万秒差距。总体来说，星系往往会落向密度较高的区域，并远离空洞。例如，银河系正以每秒约300千米的速度落向本超星系团的中心，而本超星系团也正以每秒约300千米的速度落向距离最近的下一个超星系团——长蛇-半人马座超星系团。

现在，如果大爆炸理论是正确的，那么所有这些东西曾经都非常微小，而宇宙也更加均匀。显然，引力会使非均匀性加剧。问题在于，要定量地理解随着宇宙膨胀，这些非均匀性是如何形成的。

下面还有几本我觉得很有用的书——它们的数学性比博图恩的书稍强一些。由于这个领域发展得非常迅速，我尽量选读新书：

4) 贾扬特·V·纳利卡，《宇宙学导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。5) 彼得·科尔斯和弗朗切斯科·卢钦，《宇宙学：宇宙结构的起源与演化》，威利，纽约，1995年。

我四处查找时，还偶然发现了下面这本关于黑洞的书：

6) 桑迪普·K·查克拉巴蒂，编，《宇宙中黑洞的观测证据》，Kluwer，多德雷赫特，1998年。

里面提到了一些我以前从未听说过的对象。我想跟你说说它们，只因为它们实在太酷了！

- *X*射线新星：首先，什么是新星？记住，白矮星是一种体积小、密度高、几乎已经耗尽燃料的恒星。当双星中的一颗是白矮星，而另一颗将部分气体倾泻到这颗白矮星上时，这些气体可能发生聚变并释放出巨大的能量——最多可达太阳一年所释放能量的 10,000 倍。在天文学家看来，这可能像是一颗新恒星突然诞生了，因此得名“新星”。但并非所有新星主要发射可见光——有些会发射X射线，甚至是 γ 射线。“X射线新星”是一种会在几天内突然出现、随后在一年或更短时间内逐渐变暗的X射线源。其中许多可能是中子星，而非白矮星。不过，也有不少可能是黑洞！

• 耀变体：耀变体是一种星系核，会几乎直接朝我们喷射热等离子体喷流，其功率变化迅速。与类星体和其他活动星系核一样，它们可能是不断吞噬恒星及其他物质的黑洞，并形成巨大的吸积盘，从两极喷出等离子体喷流。

• 超脉泽：激光器是一种产生相干光的源点，由受激发射引起——这是一种非常具有量子力学特性的装置。脉泽原理相同，但使用的是微波。事实上，脉泽的发明早于激光器——由于波长较长，脉泽更容易制造。在星系中，水蒸气、羟基、一氧化硅、甲醇和其他分子云可以形成巨大的天然脉泽。在我们的星系中，功率最大的这类脉泽是 W49N，其功率相当于太阳的功率。但最近，人们在其他星系中发现了功率更大的脉泽，它们通常与活动星系核有关。这些被称为“超脉泽”，很可能由黑洞提供能量。第一个超脉泽于1982年发现；它是星系 IC4553 中的一个羟基离子脉泽，光度约为太阳的1000倍。此后，人们又发现了许多水超脉泽。目前已知功率最大的位于 TXFS2226-184，其光度约为太阳的6100倍！

补遗： 以下是 Allen Knutson 针对我所说的 E_6具有不是自身共轭表示的复表示这一评论所作的回应。我希望这与 E_6, 的 Dynkin图对称性有关，Allen 回复道：

> 确实有关。将表示与其对偶表示互换的自同构 $G \to G$，即嘉当对合，可能是内自同构，也可能不是。G （G 为有限单）外自同构群同构于图表自同构群。因此，没有图表自同构，就意味着嘉当对合是内自同构；这又意味着所有表示都同构于其对偶表示，即具有不变双线性型。
>
> （遗憾的是，这并非充要条件—— D_n在嘉当对合是否为内自同构这一点上交替变化，就像它们的中心在 $\mathbb{Z}_4$ 和 $\mathbb{Z}_2^2$之间交替一样。）
>
> 任意表示有时具有复迹，或者具有实结构，或者具有四元数的结构；从某种意义上说，这是因为将 *Artin-Wedderburn* 定理应用于G的实群代数。给定一个表示，可以通过考察在 G 上的原函数$\mathrm{Tr}(g^2)$来判断它属于哪一种，其结果分别为0、1 或 -1 。这就是“舒尔指标”，可在 *Serre*的《有限群线性表示》中找到。
>
> *Allen K.*

第132周

1999年4月2日

今天我想再次谈谈 n-范畴和量子引力。首先，请允许我引用自己一篇关于这些内容的论文：

1）John Baez，《高维代数与普朗克尺度物理》，收录于《普朗克尺度上的物理学与哲学》，Craig Callender 和 Nick Huggett 编，剑桥大学出版社，剑桥，2001年，第177–195页。另见gr-qc/9902017。

顺便说一句，这本书读起来应该很有意思——书中将收录哲学家和物理学家的论文，其中不少人曾在《This Week's Finds》中露面，比如 Barbour、Isham、Rovelli、Unruh 和 Witten。等书出版时，我会再多谈谈它。

好了，下面是这篇论文的一些片段。开篇谈到了普朗克长度的含义、它为何可能对量子引力很重要，以及量子引力理论应该是什么样子：

> 广义相对论中始终会出现两个常数：光速 c 和牛顿引力常数 G。这不足为奇，因为爱因斯坦创立广义相对论，是为了调和牛顿引力理论的成功与他提出的狭义相对论新理论之间的矛盾。牛顿引力理论以超距瞬时作用为基础，而狭义相对论认为，任何影响都不会比光传播得更快。常数 c 也出现在量子场论中，不过它搭配的是另一个常数：普朗克常数 $\hbar$。这是因为量子场论兼顾了狭义相对论和量子理论，而在量子理论中，$\hbar$ 决定了不确定性原理开始变得重要的尺度。
>
> 我们有理由推测，任何调和广义相对论与量子理论的理论，都会涉及这三个常数：c、G和 $\hbar$。普朗克指出，除去数值因子，用这些常数定义长度、时间和质量单位的方式是唯一的。举例来说，我们可以如下定义如今称为“普朗克长度”的长度单位：
>
> $$L = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$
>
> 这个长度极其微小：约为 1.6×10^{-35} 米。物理学家长期以来一直怀疑，量子引力对于理解这一尺度附近的物理学将变得至关重要。原因很简单：任何仅利用常数 c、G 和 $\hbar$ 来预测长度的计算，结果都必定是普朗克长度，至多相差一个像 2π这样无关紧要的数值因子。
>
> 例如，量子场论指出，对于任意质量 m，都对应一个称为康普顿波长的长度 L_C；要将质量为 m 的粒子的位置确定到小于一个康普顿波长的范围内，所需能量足以产生另一个具有相同质量的粒子。粒子产生是量子场论的典型现象。因此，我们可以说，康普顿

波长确定了这样一个距离尺度：在该尺度上，量子场论对于理解给定质量粒子的行为变得至关重要。另一方面，广义相对论指出，对于任意质量 m，都对应一个称为史瓦西半径的长度 L_S；将质量为 m 的对象压缩到小于这一尺度，就会形成黑洞。史瓦西半径大致确定了这样一个距离尺度：在该尺度上，广义相对论对于理解给定质量对象的行为变得至关重要。现在，忽略一些数值因子，我们有

$$L_C = \frac{\hbar}{mc}$$

and

$$L_S = \frac{Gm}{c^2}.$$

当 m 是普朗克质量时，这两个长度相等。而这时，它们都等于普朗克长度!

至少从直观上看，我们因此预期，要理解一个质量约为普朗克质量、半径约为普朗克长度的对象的行为，广义相对论和量子场论都必不可少。这不仅说明了普朗克尺度为何如此重要，也解释了为何难以获得有关这一尺度下物理学的实验依据。我们有关广义相对论的大部分信息，来自对行星、恒星等重物体的观测；对于这些对象，$L_S \gg L_C$。我们有关量子场论的大部分信息，则来自对电子和质子等轻物体的观测；对于这些对象，$L_C \gg L_S$。普朗克质量介于两者之间，大约相当于一个较大的细胞的质量。但普朗克长度约为质子半径的 10^{-20}倍！要研究广义相对论和量子场论都发挥重要作用的情形，我们可以尝试把一个细胞压缩到质子大小的 10^{-20} 倍。我们没有理由认为这在原理上不可能，但完全不知道如何真正做到这一点。

上述论证中有一些众所周知的漏洞。我前面提到的“无关紧要的数值因子”实际上可能非常大，也可能非常小。量子引力理论或许能对无量纲量作出可检验的预测，例如 μ子与电子质量之比。此外，量子引力理论涉及的物理常数也可能不止 c、 G 和 $\hbar$。如果我们把量子引力作为描述其他力和粒子的更大理论的一部分来研究，那么后两种可能性尤其合理。不过，尽管我们无法证明普朗克长度对量子引力具有重要意义，我认为，思考常数 c、 G 和 $\hbar$，以及更重要的、使我们认为这些常数至关重要的物理洞见，或许能让我们获得一些启发。

常数 c有什么重要性？在狭义相对论中，关键在于这个常数出现在闵可夫斯基度规中。

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

它定义了时空几何，尤其是穿过每个点的光锥。撇开这里所采用的具体形式体系，我们可以看到有几个

理念在发挥作用。首先，空间和时间构成一个统一整体，可以从几何角度来理解。其次，我们试图预测其数值的量是局域化的。也就是说，我们可以在时空的小区域内（有时将其理想化为点）测量这些量。物理学家将这类量称为“局域自由度”。第三，要预测在某个区域 R 中可测量的量的值，我们只需使用那些在几何上与 R 存在某种关系的区域中测得的量的值。这种关系称为时空的“因果结构”。例如，在相对论性场论中，要预测某个区域 R 内的场的值，只需使用另一个与穿过 R 的每条类时路径都相交的区域内的场值。这一思想通常概括为：没有任何物体的传播速度能超过光速。我更愿意说，一个好的物理学理论应当具有以因果方式传播的局域自由度。

在牛顿引力中，G 只是引力场的强度。在广义相对论中，它则具有更深层的意义：引力场是用时空度规的曲率来描述的。狭义相对论中的闵可夫斯基度规是先验给定的“背景结构”，而在广义相对论中，度规被视为一种场，它不仅会影响其他存在的场，也会受到这些场的影响。换言之，时空几何成了该理论的一种局域自由度。从定量角度看，度规与其他场之间的相互作用由爱因斯坦方程描述

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

其中，爱因斯坦张量 G_{ab} 取决于度规的曲率，而应力-能量张量 T_{ab} 则描述所有其他场所产生的能量和动量流。因此，常数 G 的作用只是量化时空几何受到其他场影响的程度。多年来，人们逐渐认识到，广义相对论给我们的重要启示是：一个好的物理学理论不应包含这样的几何结构——它们会影响局域自由度，却不受这些自由度的影响。相反，所有几何结构——尤其是因果结构——本身都应是局域自由度。简而言之，这种理论应当是无背景的。

摆脱背景结构的努力，早在爱因斯坦创立广义相对论之前就已开始，至今仍未完成。托勒密宇宙体系与哥白尼宇宙体系之间的斗争、牛顿与莱布尼茨关于绝对运动和相对运动的争论，以及现代关于量子引力中“时间问题”的论辩——都只是这场努力的篇章。我在这里没有篇幅勾勒这段历史，甚至无法进一步阐明“几何结构”这一至关重要的概念。我只能为读者指引相关文献，或许可以从 *Barbour* 和 *Earman* 的著作、*Rovelli* 的多篇论文以及其中列举的众多参考文献开始。

最后，$\hbar$又是什么呢？在量子理论中，它最显著地体现在粒子的动量 p 与位置 q 之间的对易关系中：

$$pq - qp = -i\hbar,$$

以及其他成对可测量量之间类似的对易关系。由于两个量无法对易，我们不能同时以完全的精度测量它们，因此 $\hbar$ 量化了我们无法同时知晓关于这个世界的一切可能想知道之事的程度。但量子理论远不止不确定性原理。实际上，$\hbar$ 还伴随着复希尔伯特空间和线性算子构成的整套形式体系。

人们普遍认为，与广义相对论背后的原理相比，量子理论背后的原理还没有得到充分理解。这引发了许多关于诠释问题的讨论。然而，我不认为量子理论会因此类讨论而失去它的神秘性。我认为，真正的挑战在于更好地理解：量子理论的数学形式体系为何恰好是现在这个样子。量子逻辑的研究出色地阐明了我们所用的特定形式体系是从哪些候选体系中选出的。但这种特定选择究竟有何特别之处？例如，我们为何采用复希尔伯特空间，而非实希尔伯特空间或四元数希尔伯特空间？这一决定是否仅仅是为了符合实验数据，还是另有更深层的原因？鉴于这类问题目前尚无明确答案，我将用一句话概括 $\hbar$ 背后的物理洞见：物理宇宙的良好理论应当是一种量子理论——同时也不排除将来能提出更有启发性的说法。

在尝试提炼出隐藏在常数 c、 G 和 $\hbar$ 背后的思想之后，我们便能更好地理解构建量子引力理论这一任务。广义相对论承认 c 和 G 的重要性，但它通过将 $\hbar$ 视为微不足道而对现实作了理想化处理。从上文的讨论可以看出，这是因为广义相对论是一种无背景的经典理论，其中局域自由度以因果方式传播。另一方面，通常所采用的量子场论承认 c 和 $\hbar$，但将 G 视为微不足道，因为它是一种依赖背景的量子理论，其中局域自由度以因果方式传播。

构建量子引力理论最保守的途径，是寻找一种兼具广义相对论和量子场论优点的理论。为此，我们必须尝试找到一种无背景、局域自由度以因果方式传播的量子理论。尽管这种方法未必会成功，但绝对值得探索。鉴于目前缺乏能够指引我们走向根本性新原理的实验依据，我们应尽力理解现有原理的全部含义！

从我对这一目标的描述中，或许可以看出其中的一些困难。由于量子引力应当是无背景的，定义时空因果结构的几何结构本身就应当是以因果方式传播的局域自由度。这一点在广义相对论中已经成立。但由于量子引力应当是一种量子理论，这些自由度也应当以量子力学的方式加以处理。因此，至少我们应该发展一种关于某类几何结构的量子理论，使其能够在时空上定义因果结构。

接下来我会谈到拓扑量子场论——它们是没有 局域自由度的无背景量子理论——以及我们从中学到的东西。基本而言，我们所学到的是，时空的数学（例如微分拓扑）与量子理论的数学之间存在深刻的类比。这一点很有趣，因为在无背景量子理论中，我们预期时空并不是一个供事件上演的“舞台”，而实际上会成为事件演出的组成部分本身——并且时空本身也必须用量子理论来描述。因此，尝试将时空与量子理论的概念联系起来是非常有趣的。这种类比如下：

微分拓扑	量子理论
$(n-1)$维流形（空间）	希尔伯特空间（态）
$(n-1)$维之间的协边	算子（过程）
流形（时空）	
协边的复合	算子的复合
恒等协边	恒等算子

如果你对范畴论略知一二，就会看出这里有两个范畴：配边范畴和希尔伯特空间范畴。拓扑量子场论是从前者到后者的一个函子。.....

好，现在来看看其他一些论文：

2) Geraldine Brady 和 Todd H. Trimble，《谓词逻辑的弦图演算》以及 C. S. Peirce 的 Beta 系统，网址为 http://people.cs.uchicago.edu/~brady

Geraldine Brady 和 Todd H. Trimble，《皮尔士命题逻辑 Alpha 的范畴论诠释》，《纯粹与应用代数杂志》**149**(2000年), 213–239。

Geraldine Brady 和 Todd H. Trimble，《关系演算的拓扑学》。

查尔斯·皮尔士是美国哲学家，生于 19 世纪后期，才华卓著却长期未受重视。除了是实用主义之父等身份外，他也是高维代数的奠基人之一。你若常读我的文章，想必知道高维代数的部分意义在于摆脱“线性思维”。我所说的“线性思维”，是指倾向于用容易表达为一维符号弦的方式进行数学研究。皮尔士研究逻辑时，突破了线性思维的束缚，进入高维领域。他发展出一种借助图示进行推理的方法，并称之为“存在图”。遗憾的是，皮尔士的这项工作从未发表！原因之一是存在图难以印刷，成本也很高。因此，他的思想长期湮没无闻。

如今，高维代数在物理学中的用途已十分明了：例如费曼图和彭罗斯的自旋网络。n-范畴理论正开始为这些技术提供一种系统化的语言。因此，值得重新审视皮尔士的工作，看看它如何融入这一图景。Brady 和 Trimble 的论文正是这样做的！

3) J. Scott Carter、Louis H. Kauffman 和 Masahico Saito，《四维拓扑格场论的结构与图示学》，《*Adv. Math.*》**146** (1999年)，39–100。亦可参见 math.GT/9806023。

我们可以从某些霍普夫代数得到3维拓扑量子场论。正如我在"第38周"中所述，Crane 和 Frenkel 提出，通过将这一构造范畴化，我们应当可以从某些霍普夫范畴得到4维拓扑量子场论。本文在某一类例子中使这一设想变得严谨！基本上，这些是 Dijkgraaf–Witten理论的范畴化版本。

4) J. Scott Carter、Daniel Jelsovsky、Selichi Kamada、Laurel Langford 和 Masahico Saito，《打结曲线及其曲面的拟群上同调与态和不变量》，可见于math.GT/9903135。

又一种研究高维问题的方法！这一次，他们从"拟群"的上同调群中得到 2-链环——嵌入于 $\mathbb{R}^4$ 中的曲面——的不变量。我还不太明白这究竟如何融入高维代数的整体框架。他们证明了，他们的不变量能够区分二重扭转纺结三叶结（嵌入于 $\mathbb{R}^4$ 中的某个打结球面）与同一球面反转定向后的情形。

5) TomLeinster，《高维范畴论中的结构》，可在 hfill 获取math/0109021。

这是一篇介绍高维代数思想的精彩综述。目前这个领域面临的一个主要问题是，研究方法繁多，却尚未形成足够清晰的整体图景，难以看出它们如何相互关联。Leinster 的论文试图开启对这些关联的探索。

6) Claudio Hermida，《高维多重范畴》，1997年一场讲座的幻灯片。

这场报告介绍了 Makkai、Power 和 Hermida 关于其定义的部分研究：n-范畴。有关他们研究的更多信息，请参见"第107周"。

7) CarlosSimpson，《关于 Tamsamani 弱 n-范畴的 Breen–Baez–Dolan稳定化猜想》，可在 math.CT/9810058获取。

James Dolan 和我讨论我们称之为"稳定化假设"的某件事，已经有相当长一段时间了。我在 "第121周"中对此作过解释，但简而言之，它说的是，下方图表的第 n 列（向两个方向都延伸至无穷）在 $2n+2$ 行之后趋于稳定：

k-重幺半 n-范畴

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$k=0$	sets	范畴	2-范畴
$k=1$	幺半群	幺半 范畴	幺半 2-范畴
$k=2$	交换 幺半群	带状单oidal 范畴	带状单oidal 2-范畴
$k=3$	“ ”	对称的 幺半 范畴	弱对合的 幺半 2-范畴
$k=4$	“ ”	“ ”	强 对合的 幺半 2-范畴
$k=5$	“ ”	“ ”	“ ”

Carlos Simpson 现在已经明确表述了这一假设，并使用 Tamsamani 对 n-范畴的定义证明了它！而且，他采用的正是 Graeme Segal 用于研究 k 重环空间的相同技术……利用了 n-范畴与同伦论之间的关系。这让我非常高兴。

8）Mark Hovey，模型范畴，美国数学会数学调查与专著丛书，第**63**卷，罗德岛州普罗维登斯，1999年。亦可见http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0278/index.html

说到这类话题，模型范畴技术对同伦论和 n-范畴非常重要，而这本书是学习这方面知识的绝佳读物。

9）Frank Quinn，《群范畴及其场论》，几何与拓扑学专著**第2卷**（1999年），407–453页。亦可见math.GT/9811047。

这篇文章探讨的是某些拓扑量子场论背后的代数。我直接引用摘要：

> 群范畴是一种加法半单范畴，具有幺半积结构，其中单对象都是可逆的。例如，在群的表示范畴中，1维表示就是可逆单对象。本文详细探讨了群范畴的“拓扑量子场论”，希望从中找到线索，以便更好地理解一般情形。本文以多种方式对群范畴进行分类，推广了 *Fr¨ohlich* 和 *Kerler* 的结果。本文构造了基于同调和上同调的拓扑场论，并证明这些理论包括

> 通过 *Reshetikhin–Turaev* 构造从群范畴得到的理论。带编织结构的交换范畴最自然地定义在 *2*-复形的四维流形加厚上；通常的 *3*维流形理论则可通过对这些理论进行归一化（运用 *Kirby* 的结果），使其主要依赖于加厚的边界而得到。本文针对群范畴具体展开了这一工作，并特别确定了何时可以归一化、何时不可以。

10) Sjoerd Crans，《Gray范畴的张量积》，《范畴理论及其应用》，第**5**卷，1999年，第2期，第12–69页，参见http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/1999/n2/abstract.html

Gray范畴就是有些人所说的半严格3-范畴：它不如弱3-范畴一般，却已足够一般。严格来说，Gray范畴被定义为由2-范畴构成的富化范畴，而2-范畴配备了由John Gray发明的张量积。要定义半严格4-范畴，可以类似地尝试为Gray范畴配备一种合适的张量积。Crans研究的正是这个问题。下面引述摘要：

> 本文将 *Gray* 对2-范畴的张量积推广为一种新的 *Gray* 范畴张量积。我用生成元和关系对其进行描述，其中一条关系是“交换”关系；这种描述也类似于 *Gray* 对其2-范畴张量积的描述。我证明，这种 *Gray* 范畴张量积满足关于二元准函子的泛性质，而二元准函子是用 *Gray* 范畴之间的松自然变换定义的。主要结果是，这种张量积构成 *Gray-Cat* 上一种幺半结构的一部分；证明的关键在于交换关系。然而，恰恰由于交换关系，这并不能给出幺半 {*(*双*)*闭} 结构。虽然我定义了松自然变换的复合，但复合后未必仍是松自然变换，因此 *Gray-Cat* 只能算是一个部分 *Gray-Cat*-范畴。

第133周

1999年4月23日

我想先引用一段 Ashtekar 论文中的长篇引文:

1) Abhay Ashtekar, 《几何的量子力学》, 可从 gr-qc/9901023 获取。

> *1854*年，黎曼在其哥廷根就职演讲中提出，空间几何或许不只是一个作为物理现象被动舞台的基准性数学实体，事实上可能本身就具有直接的物理意义。广义相对论对这一构想作出了精彩的证实：空间曲率如今编码着物理引力场。这一转变意义深远。为了突出这种差异，让我回顾一下牛顿物理学中的情形。在那里，空间构成一个不变的竞技场，物理系统——如太阳系——的动力学在其中展开。它就像一个舞台，是整个物理学不变的背景。相比之下，在广义相对论中，情况截然不同。爱因斯坦方程告诉我们，物质会使空间弯曲。几何不再不受变化影响。它会对物质作出反应。它是动力性的，并且本身拥有“物理自由度”。在广义相对论中，舞台消失了，并加入了演员的行列！几何是一种物理实体，与物质非常相似。
>
> 如今，本世纪的物理学向我们揭示，物质有其组成部分，而我们感知为固体的3维对象，实际上由原子构成。物质的连续介质描述是一种近似，在宏观尺度下极为成功，但在原子尺度上却彻底失效。因此，自然会产生这样的疑问：几何是否也如此？如果是，那么与“原子尺度”相对应的是什么？我们知道，几何的量子理论应包含三个自然界基本常数： c、 G、 $\hbar$，即光速、牛顿引力常数和普朗克常数。正如普朗克在那篇标志着量子力学开端的著名论文中指出的，这些常数有一种独特的组合，
>
> $$L = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},$$
>
> 其维数为长度。（$L \sim 10^{-33}$厘米。）如今它被称为普朗克长度。经验告诉我们，物理理论中出现一个特殊尺度，往往预示着可能发生跃迁；该尺度以下的物理规律可能与尺度以上的截然不同。如今，我们所有经过充分验证的物理学都发生在远大于 L的长度尺度上。在这个范围内，连续体图景运作良好。于是，一个关键问题是：这种图景会在普朗克长度处失效吗？几何在这个尺度上是否有组成部分？如果有，它的原子是什么？它的基本激发又是什么？时空连续体是否仅仅是一种“粗粒化”近似？几何是否被量子化？如果是，那么它的量子具有怎样的性质？
>
> 为了探究这些问题，自然可以从成功描述物质的那些方法中寻找线索。让我们先来问问，所谓

物理量的量子化究竟是什么意思。以氢原子为一个简单的例子。在这种情况下，答案很明确：经典力学中，基本可观测量——能量和角动量——可以取连续范围内的值；而在量子力学中，它们的特征值是离散的，也就是说它们被量子化了。那么，我们可以问，几何是否也如此。广义相对论的相空间中，长度、面积和体积等经典几何量可以取连续值。相应量子算符的特征值是否离散？如果是，我们就会说几何被量子化了，而几何算符的精确特征值和本征矢量将揭示其详细的微观性质。

因此，以精确的方式提出这些基本问题相当容易。事实上，早在量子力学诞生后不久，人们就可以将它们表述出来。然而，回答这些问题却被证明出奇地困难。我认为，主要原因在于标准技术的不足。更确切地说，要研究几何的微观结构，我们必须以量子力学的方式处理爱因斯坦引力，也就是说，至少要构建引力场量子理论的基本框架。如今，在量子场论的传统方法中，人们通常从连续体和背景几何开始。另一方面，要探究量子几何的本质，我们不应以假定这一图景有效为出发点。我们必须让量子引力决定这一图景是否足够恰当；理论本身应当引导我们找到正确的几何微观模型。

秉持这一总体哲学，在本文中，我将概述一种特定量子引力方法所形成的量子几何图景。这种方法是非微扰的。在微扰方法中，人们通常首先假定时空几何是平坦的，然后通过逐步累加小修正来引入引力——因而也引入曲率。这样一来，离散性就很难揭示出来。

*[*脚注：可以用谐振子来说明这种情况：虽然谐振子的精确能级是离散的，但如果从能级连续的自由粒子出发，再尝试通过微扰理论逐步纳入振子势的影响，就很难“看出”这种离散性。*]*

相比之下，在非微扰方法中，根本不存在背景度规。我们起初拥有的只是一张裸流形。所有场——无论是物质还是引力／几何——从一开始就都被视为动力学的。因此，这种描述不能参照背景度规。从技术上说，这意味着流形的完整微分同胚群都得到保留；该理论具有广义协变性。

正如我们将看到的，这一事实使我们得以构建量子态的希尔伯特空间，而它们与粒子物理学中熟悉的福克空间截然不同。如今，引力子——平坦度量上的三维波状起伏——并不代表基本激发。相反，基本激发是一维的。从微观层面看，几何颇像聚合物。请记住，尽管聚合物本质上是一维的，但当它们在合适的结构中密集排列时，

便能呈现三维系统的性质。同样，熟悉的连续体几何图景是一种近似：我们可以把基本激发看作“量子线”，并用它们“编织”出连续体几何。也就是说，连续体图景是在对半经典“编织态”进行粗粒化后呈现的。引力子不再是引力相互作用的基本媒介，它们如今只作为近似概念出现。它们代表编织态的微扰，只有在半经典近似下才传递引力。由于非微扰态具有类聚合物特征，几何可观测量最终呈现离散谱。它们为量子几何提供了相当细致的图景，并据此可以作出物理预测。

本文分为两部分。第一部分将说明如何重新表述广义相对论，使其呈现出规范理论的形式。这种表述为量子理论提供了出发点。特别是，几何的一维激发可视为“威尔逊环”的对应物，而威尔逊环本身又是电磁学线积分$\exp(i\int A\cdot dl)$的对应物。第二部分将说明这种描述如何引导我们建立几何的量子理论。我将重点讨论面积算符，并展示这些算符特征值的详细信息如何带来有趣的物理后果，例如黑洞霍金蒸发的过程。

我真想再多引用一些，但还是忍住了。这是一篇很不错的半技术性圈量子引力入门文章——如果你了解一些数学和物理学，但刚开始接触量子引力，这是个很好的起点。

接下来，介绍几篇年轻学者关于圈量子引力的论文：

2) Fotini Markopoulou，《因果集的内部描述：从内部看宇宙是什么样子》，《数学物理通讯》**211** (2000年)，559–583。也可通过gr-qc/9811053获取。

Fotini Markopoulou，《量子因果历史》，《经典与量子引力》**17** (2000年)，2059–2072。也可通过hep-th/9904009获取。

Fotini Markopoulou 或许是第一位在圈量子引力中真正认真对待因果性问题的人。在她早先与 Lee Smolin 合作的研究中（参见“第99周”和“第114周”），她提出了一种方法，为不断演化的自旋网络（或者说我所称的自旋泡沫）的顶点赋予偏序，以表示因果结构。在这些论文中，她进一步发展了这些想法。第一篇论文运用了拓扑斯理论！看到勇敢的年轻物理学家不惧在此处或彼处运用一点范畴论来使自己的想法更加精确，真令人欣慰。我个人对圈量子引力中的因果性问题感到困惑——我认为我们得折腾一番、尝试不同的方法，才能弄清什么行得通。不过，Markopoulou 的工作正是让我甚至敢于思考这些问题的主要原因……敢于思考这些问题……

3）Seth A. Major，《陈–西蒙斯理论中的嵌入图不变量》，《核物理*B*》**550**(1999年)，531–560。亦可参见 hep-th/9810071。

在 This Week's Finds 中，我已经提到 Seth Major 曾与 Lee Smolin 合作研究q-变形的量子引力自旋网络（见"第72周"）。有相当多的证据表明，尽管尚无确凿证明，对自旋网络进行 q-变形相当于引入一个非零的宇宙学常数。 q-变形自旋网络的主要技术难题在于，它们需要对底层图进行"框架化"。Major 在此处理了这个问题。.....

现在来说点完全不同的内容，起因是 Garrett Lisi 在 sci.physics.research 上发起的一条讨论串。标准模型的规范群是什么？大家都会告诉你它是 U(1) ×SU(2) ×SU(3)，但正如 Marc Bellon 指出的，这或许不是最准确的答案。让我解释一下原因，并找出一个更好的答案。

标准模型中的每个粒子都按照 U(1) ×SU(2) ×SU(3) 的某种表示进行变换，但这个群中的某些元素在所有这些表示上的作用都是平凡的。因此，我们可以找到一个同样适合作为标准模型规范群的较小群：将 U(1) × SU(2) × SU(3) 除以那些作用平凡的元素所构成的子群。

让我们找出这个子群！为此，我们需要逐一考察所有粒子，找出 U(1) × SU(2) × SU(3) 中哪些元素对它们的作用都是平凡的。

先来看规范玻色子。在任何规范理论中，规范玻色子都按伴随表示变换，因此，作用平凡的规范群元素恰好就是群的中心 中的元素。U(1)是阿贝尔群，所以它的中心就是整个 U(1)。SU(n)中属于中心的元素必须是对角态射。行列式为1的 $n \times n$ 对角酉矩阵都具有 exp($2\pi i/n$) 的形式，它们构成一个与$\mathbb{Z}/n$同构的子群。因此，U(1) × SU(2) ×SU(3) 的中心是 U(1) $\times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$。

接下来看看其他粒子。如果你不记得它们的性质，请参阅"第119周"。对于费米子，只需考察第一代，因为另外两代的变换方式完全相同。首先，我们有左手电子和中微子：

$$(\nu_L, \mathrm{e}_L)$$

这些构成一个二维表示。这个表示是 U(1) 的超荷为 -1 的不可约表示、SU(2) 的同位旋-$1/2$ 表示，以及 SU(3) 的平凡表示的张量积。

关于记号，说明一下！人们通常用整数来描述 U(1) 的不可约表示。出于历史原因，超荷是 $1/3$ 的整数倍。因此，要得到相应的整数，我们需要将超荷乘以 3。另外，这里的 SU(2) 群对应的并非角动量意义上的自旋，而是所谓的"弱同位旋"。这就是为什么上面称之为"同位旋-$1/2$ 表示"。不过从数学上说，这只是 SU(2) 的通常自旋-$1/2$ 表示。

接下来是左手性上夸克和下夸克，它们各有 3 种色荷：

$$(\mathrm{u}_L, \mathrm{u}_L, \mathrm{u}_L, \mathrm{d}_L, \mathrm{d}_L, \mathrm{d}_L)$$

这个六维表示是 U(1) 的超荷为 $1/3$ 的不可约表示、SU(2) 的同位旋-$1/2$ 表示，以及 SU(3) 的基本表示的张量积。

这就是所有左手费子。注意，它们都按照 SU(2) 的同位旋-$1/2$ 表示进行变换——我们称它们为"同位旋双态"。右手费子都按照 SU(2) 的同位旋-0 表示进行变换——它们是"同位旋单态

”。首先是右手电子：

$$\mathrm{e}_R$$

这是 U(1) 的超荷为 -2 的不可约表示、SU(2) 的同位旋为 0 的表示，以及 SU(3) 的平凡表示的张量积。接下来是右手上夸克：

$$(\mathrm{u}_R, \mathrm{u}_R, \mathrm{u}_R)$$

它们构成 U(1) 的超荷为 $4/3$ 的不可约表示、SU(2) 的同位旋为 0 的表示，以及 SU(3) 的基本表示的张量积。然后是右手下夸克：

$$(\mathrm{d}_R, \mathrm{d}_R, \mathrm{d}_R)$$

它们构成 U(1) 的超荷为 $2/3$ 的不可约表示、SU(2) 的同位旋为 0 的表示，以及 SU(3) 的三维基本表示的张量积。

最后，除了费米子之外，还有希格斯玻色子——迄今尚未被发现：

$$(\mathrm{H}_+, \mathrm{H}_0)$$

它按照 U(1) 的超荷为 1 的不可约表示、SU(2) 的同位旋为 $1/2$ 的表示，以及 SU(3) 的一维平凡表示的张量积变换。

好，我们来看看 $\mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$ 中哪些元素对所有这些表示的作用都是平凡的！首先注意，$\mathbb{Z}/2$ 的生成元对同位旋单态的作用是乘以 1，而对同位旋双态的作用是乘以 -1。同样，$\mathbb{Z}/3$ 的生成元对轻子的作用是乘以 1，而对夸克的作用是乘以 $\exp(2\pi i/3)$。因此，$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$ 中的所有元素的作用都是乘以某个六次单位根。要找出 $\mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$ 中作用平凡的元素，我们只需考虑 U(1) 中那些六次单位根。

为了弄清楚其中的情况，我们根据前面介绍的信息做了一个小表：

	$\exp(\pi i/3)$ 在……中的作用	-1 在……中的作用	$\exp(2\pi i/3)$ 在……中的作用
	$\mathrm{U}(1)$	SU(2)	SU(3)
e_L	-1	-1	1
ν_L	-1	-1	1
u_L	$\exp(\pi i/3)$	-1	$\exp(2\pi i/3)$
d_L	$\exp(\pi i/3)$	-1	$\exp(2\pi i/3)$
e_R	1	1	1
u_R	$\exp(4\pi i/3)$	1	$\exp(2\pi i/3)$
d_R	$\exp(4\pi i/3)$	1	$\exp(2\pi i/3)$
H	-1	-1	1

我们来找找规律！

看出什么了吗?

对我们来说，最重要的规律是：每一行的三个数相乘，结果都是 1。

这意味着，元素 $(\exp(\pi i/3)\ -1,\ \exp(2\pi i/3))$ 在 $\mathrm{U}(1)\ \times$ SU(2) $\times$ SU(3) 中对所有粒子的作用都是平凡的。这个元素生成了一个与 $\mathbb{Z}/6$ 同构的子群。如果

如果你再仔细想一想，就会发现不存在其他模式，能让 U(1)×SU(2)×SU(3) 中更多的元素产生平凡作用。再想想电荷与超荷之间的关系，你就会发现，这种模式与夸克电荷都是 $1/3$ 的整数倍，而轻子的电荷是整数这一事实密切相关。不过，事情还不止于此……

总之，标准模型的“真正”规范群——也就是可能的最小规范群——并不是 U(1)×SU(2)×SU(3)，而是这个群除以我们刚刚找到的那个特定 $\mathbb{Z}/6$ 子群所得的商。我们把这个群称为 G。

这可能很重要，原因有两个。首先，Marc Bellon 指出了一个理解 G 的好方法：它是 U(2) × U(3) 的子群，由满足以下条件的元素 (g, h) 组成：

$$(\det g)(\det h) = 1.$$

如果我们以显而易见的方式将 $\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(3)$ 嵌入 $\mathrm{U}(5)$ 中，那么这个子群 G 实际上包含在 $\mathrm{SU}(5)$中，这要归功于上面的等式。这正是人们在$\mathrm{SU}(5)$ 大统一理论中所做的。他们并没有把整个 $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$ 塞进 $\mathrm{SU}(5)$里，而只嵌入群 G！更多详情请参阅“第119周”。更好的办法是看看 Brett McInnes 推荐给我的这本书：

4) Lochlainn O’Raifeartaigh，《规范理论的群结构》，剑桥大学出版社，剑桥，1986年。

其次，这个神奇的群 G 在一个7维流形上有一种很好的作用，我们可以将其用作11维卡鲁扎–克莱因理论的纤维，该理论在低能极限下模拟标准模型。构造这个流形的方法是取包含在 $C^2 \times C^3$ 中的 $S^3 \times S^5$，再对 U(1) 的作用取商，其中 U(1) 通过乘以相位起作用。群 G 以显而易见的方式作用于 $C^2 \times C^3$，利用这一点，很容易看出它也作用于 $(C^2 \times C^3)$/U(1)。

我不确定该去哪里了解更多相关内容，不过你可以试试：

5) Edward Witten，《寻找现实的卡鲁扎–克莱因理论》，*Nucl. Phys.* **B186**(1981年)，412–428。Edward Witten，《卡鲁扎–克莱因理论中的费米子量子数》，载于《*Shelter Is- land II*》会议论文集：量子场论与物理学的基本问题，T. Appelquist 等编，麻省理工学院出版社，1985，页码 227–277。6) Thomas Appelquist、Alan Chodos 和 Peter G.O. Freund 编，《现代卡鲁扎–克莱因理论》，Addison-Wesley，门洛帕克，加利福尼亚州，1987年。

第134周

1999年6月8日

我编写《This Week's Finds》的速度已经慢得几乎停滞，因为我一直在努力整理一批论文。截止日期，截止日期！我讨厌截止日期，但当你为别人写东西，或与别人合作写东西时，就难免会遇上它们。今后我会尽力避开它们。现在我已经忙完了手头的杂事，想好好玩一玩。

上周末，我和一群人在纽约州明诺布鲁克一座湖畔狩猎小屋里讨论量子引力：

1) 明诺布鲁克时空结构研讨会，演讲日程和投影片可见于
https://web.archive.org/web/19991008165301/http://www.phy.syr.edu/research/he
theory/minnowbrook/ -

这次聚会由Kameshwar Wali和雪城大学的其他几位物理学家组织，旨在汇聚从事弦理论、环量子引力、非交换几何以及各种时空离散方法研究的人员。来自这些不同思想流派的人彼此交流得不够多，而本应更加频繁地交流，所以这次聚会是个好主意。大家做了许多报告，提出了许多尖锐的问题，展开争论，并了解彼此正在进行的工作。但我离开时的感受是，我们距离理解量子引力还相当遥远：每一种方法都有明显的缺陷。

弦理论的一大难题是，人们只知道如何在具有固定背景度规的时空上研究它。更糟的是，除了度规静态的情况，人们对它的理解都很有限——粗略地说，也就是空间几何不随时间流逝而改变。

例如，人们对定义为闵可夫斯基时空与固定卡拉比–丘流形之乘积的时空上的弦理论，已经有了不少了解。卡拉比–丘流形有很多种，它们组成连续的多参数族，称为模空间。这让人想到，卡拉比–丘流形的几何可能会随时间改变。许多有趣的研究都隐含着这一想法。例如，Brian Greene 曾做过一场关于"镜像对称"的精彩演讲。不同的卡拉比–丘流形有时会给出相同的物理学；这样的流形称为"镜像流形"。因此，一个卡拉比–丘流形模空间中的曲线，在物理上可能等价于另一个模空间中的某条曲线；有时，这就能让你把曲线延伸到第一个模空间的奇点之外。物理学家喜欢把这些曲线看作代表这样的时空几何：卡拉比–丘流形随时间改变。问题在于，目前还没有一个完整建立起来的弦理论版本，能够容许含时卡拉比–丘流形！

这是有充分理由的：我们不应指望如此简单的情形也能成立，除非是在事物随时间极缓慢变化的"绝热近似"下。闵可夫斯基时空与一个固定的卡拉比–丘流形的乘积，是十维爱因斯坦方程的一个解；这也是这类时空适合作为弦理论背景的原因之一。但是，如果卡拉比–丘流形的几何随闵可夫斯基时空中的点而变化，我们就得不到一个解——除非是在绝热近似下。

弦理论中的"幺正性"也存在问题，涉及空间的几何。
c会随时间变化。这在弯曲时空上的普通量子场论中早已为人熟知

。在量子场论中，人们通常喜欢用希尔伯特态空间上的酉算子来描述时间演化。但当空间几何随时间变化时，这种方法就行不通了。人们对此问题进行了详细研究，但似乎没有完全令人满意的解决办法。除了一项激进举措之外，别无他法：不再把时空几何视为固定的“背景”。换言之：停止在具有预设度量的时空上进行量子场论，并发明一种无背景量子引力理论！但这并不容易——关于其所涉及的内容，请参见 “第132周” 。

如今弦论学家试图在非静态背景度规（例如反德西特时空）上研究弦理论，这个问题显然已经引起了他们的关注。事实上，会议上有人说，最近一批顶尖弦理论家聚在一起，想敲定弦理论下一步的发展策略，却完全被这个问题难住了。我认为这是好事：这说明弦论学家开始更加认真地看待量子引力的基础问题。这些问题深奥而艰难。

不过，为免显得我对弦理论过于苛责，我应该马上补充说，其他所有研究路径也都有同样严重的缺陷。例如，圈量子引力具有极好的无背景特性，但迄今为止，它几乎完全是一种运动学理论，而非动力学理论。换句话说，它描述了量子层次的空间几何，却很少谈及时空。近来，人们开始借助“自旋泡沫”研究动力学，但我们仍无法足够准确地进行计算，以确定自己是否走在正确的道路上。因此，悲观地说，圈量子引力的无背景特性或许只是通过简化假设才得以实现，而这些假设日后可能会妨碍我们理解动力学。

Alain Connes 在 Abhay Ashtekar 的演讲中表达了这种担忧，随后阿瑟·贾菲也表达了同样的看法。从技术层面来说，主要问题在于，圈量子引力假定未经过涂抹的威尔逊环在运动学层面是合理的可观测量；而在其他理论中，例如杨–米尔斯理论，总是需要对威尔逊环进行涂抹。当然，这些其他理论并非无背景的，因此圈量子引力应该 有所不同。但在我们知道圈量子引力确实能在大尺度极限下给出引力（或超引力之类更复杂的理论）之前，我们无法确定它在这一点上就应该有所不同。这种担忧不无道理.....但只有时间才能给出答案！

我本可以继续列举各种方法及其缺陷，包括 Connes 运用非交换性几何的方法，但还是就此打住吧。唯一真正的好消息是，不同的方法有不同 的缺陷。因此，通过比较它们，人们或许能有所收获！

最近又有一些论文发表，深入探讨了这一混乱局面的哲学层面：

2) Carlo Rovelli，《量子时空：我们知道些什么？》，载于《普朗克尺度上的物理学与哲学》，Craig Callender 和 Nick Huggett 编，剑桥大学出版社，剑桥，2001。另可参见 gr-qc/9903045。

3) J. Butterfield 和 C. J. Isham，“时空与量子引力带来的哲学挑战”，载于《普朗克尺度上的物理学与哲学》，Craig Callender 和 Nick Huggett 编，剑桥大学出版社，剑桥，2001。预印本见gr-qc/9903072。

Rovelli 的论文有些粗略，但勾勒出了一些我颇为赞赏的想法——我总觉得他对量子引力的概念问题思路十分清晰。后一篇论文让我有些沮丧，因为它罗列了关于量子引力的各种可能立场，却没有明确支持其中任何一种。不过，面向哲学家读者写作时，这样做或许是好事：应该解释问题，而不是试图推销某个声称可行的特定解，因为提出的解来来去去都很快，而问题却始终存在。让我引用一下摘要：

> 我们概述了探寻量子引力理论的一些哲学层面，着重说明量子引力如何使人们对两种“基础理论”（量子理论和广义相对论）共同采用的时空处理方式产生疑问，即将时空视为配备了洛伦兹度规的4维流形。引言之后，我们简要回顾基础理论中的概念问题，并介绍量子引力这一研究事业。接着，我们描述量子引力的三个主要研究纲领如何处理四个尤为重要的主题：标准量子理论的适用范围；时空的本质；时空微分同胚；以及所谓的时间问题。总体而言，这些研究纲领接受了基础理论对时空的大部分处理方式，尽管其中的度量具有某种量子性质；但它们也指出，这种处理方式存在根本局限。这促使人们提出更进一步的设想：要么量子化度量以外的结构，例如拓扑学；要么将这些结构视为现象性的。我们将在第*5*节讨论这一点。

现在让我再提几篇过去几
m个月发表的技术性论文：

4) John Baez和JohnW. Barrett，“3维和4维中的量子四面体”，《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**3** （1999年），815–850。另见gr-qc/9903060。

这里的想法是构造一个经典相空间，其点表示三维或四维中四面体的几何结构，然后应用几何量子化，得到一个态空间。这些希尔伯特空间在量子引力的自旋泡沫模型中发挥着重要作用。本文的主要目标是解释为什么量子四面体在四维中的自由度比在三维中更少。下面引用引言中的一段话：

> 量子场论的态和模型是通过为三角剖分流形中的单纯形赋予振幅来构造的。单纯形用某个离散集合中的数据标记，而振幅取决于这些标记。随后对这组标记求和，从而得到路径积分的离散版本。当这个离散集合是有限集时，这个和总是存在的，因此这一过程为路径积分提供了一个真正严谨的定义。
>
> 量子引力的态求和模型已基于李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 及其 q-变形提出。标记方案的一部分是将该李代数的不可约表示赋予相应维数的单纯形。采用 q-变形后，不可约表示的集合变为

有限。不过，此处我们将考虑未变形情形，因为其几何更为初等。

$\mathfrak{so}$（3）的不可约表示由非负半整数j标记，称为自旋。在不同模型中，自旋有不同的诠释。在三维量子引力的 *Ponzano–Regge*模型中，自旋标记三角剖分的三维流形的边，并被诠释为这些边的量子化长度。在 *Ooguri–Crane–Yetter*态求和模型中，自旋标记三角剖分的四维流形中的三角形，而自旋被诠释为 *BF*拉格朗日量中 *B*场某个分量的范数。此外，还有一种四维量子引力的态和模型，其中自旋标记三角形。在该模型中，自旋被诠释为面积。

许多这类构造都有拓扑对偶表述。三角剖分的曲面的对偶*1*-骨架是一个三价图，其中每条边恰好与原三角剖分中的一条边相交。自旋标记可以看作标记该图的边，从而定义一个自旋网络。在 *Ponzano–Regge*模型中，可以通过对三角剖分的三维流形的对偶*2*-骨架的面进行标记求和，计算自旋网络之间的跃迁振幅。以这种方式表述时，我们将该理论称为“自旋泡沫模型”。

四维量子引力也存在类似的对偶图景。三角剖分的三维流形的对偶 *1*-骨架是一个四价图，其每条边都与原三角剖分中的一个三角形相交。因此，三维流形中三角形上的标记可以看作是对该图的边进行标记。这个图便称为“相对论自旋网络”。相对论自旋网络之间的跃迁振幅可以用自旋泡沫模型计算。路径积分于是成为对一个在两个相对论自旋网络之间插值的 *2*-复形的面进行标记的求和。

本文探讨一些此类模型中出现的四面体量子化几何的性质，以及它与三维或四维中经典四面体几何空间的相空间之间的关系。我们的主要目标是解开以下谜题：为什么四维中的量子四面体比三维中的自由度更少？这个看似矛盾的现象，最终可以用几何量子化来简单解释。我们提出的图景是：四维中量子四面体的四个面面积可以任意指定，但由于不确定性原理，其余参数无法任意指定。

直观上，人们会认为，三维和四维中的量子四面体具有相同数量的自由度（因为考虑的是模旋转的四面体）。然而，量子力学在这些问题上可没那么简单！例如，两个自旋为 $1/2$ 、角动量方向相反的粒子的希尔伯特空间，比单个自旋为 $1/2$ 的粒子的希尔伯特空间更小，尽管从经典角度看，你可能会认为这两个系统具有相同数量的自由度。事实上，三维和四维中的量子四面体也会出现非常相似的情况。

5) Abhay Ashtekar、Alejandro Corichi 和 Kirill Krasnov，“孤立视界：经典相空间”，《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**3** （1999年），419–478。另可参阅

gr-qc/9905089。

本文更详细地阐述了圈量子引力中黑洞熵计算的经典方面（关于这项计算的介绍，请参见 “第112周”）。下面引用摘要：

> 本文引入了一个哈密顿框架，以涵盖在未来类时无穷远附近或在一个有限时间区间内“孤立”的非旋转（但可能带电）黑洞。即使在视界附近，所涉及的时空也不必存在平稳的基灵矢量场；相反，物理假设是，物质场和引力辐射都不会穿过所考察的那部分视界。我们给出了非旋转孤立视界的精确定义，以刻画这些思想。在这些边界条件下，除非在视界处加入一个边界项，否则引力作用量不可微。所需的项恰好是自对偶联络的陈–*Simons*作用量。除通常的体积部分外，由此得到的辛结构还获得了一个曲面项，即陈–*Simons*辛结构。我们表明，这些修改以微妙但重要的方式影响了对约束、规范和动力学的标准讨论。在配套论文中，这一框架作为量子化、黑洞熵的统计力学计算以及推广到孤立视界的黑洞力学定律推导的出发点。它还可能应用于经典广义相对论，尤其是研究黑洞碰撞数值研究中出现的解析问题。

以下是一些关于自旋网络、自旋泡沫及相关主题的综述文章：

6) Roberto De Pietri，《正则“环路”量子引力与自旋泡沫模型》，载于《广义相对论近期进展》，施普林格，柏林，2000年，第43–61页。亦可见gr-qc/9903076。7) Seth Major，《自旋网络入门》，《美国物理学杂志》**67** （1999年），972–980。可见gr-qc/9905020。8) Seth Major，《量子化方向的算子》，《经典与量子引力》**16** （1999年），3859–3877。亦可见gr-qc/9905019。9) John Baez，《自旋泡沫模型导论：关于 BF 理论与量子引力》，载于《几何与量子物理》，Helmut Gausterer 和 Harald Grosse 编，《物理学讲义》，施普林格，柏林，2000年，第25–93页。预印本可见gr-qc/9905087。

顺便提一下，Barrett 和 Crane 发表了一篇论文，概述了一种洛伦兹（而非黎曼）量子引力自旋泡沫模型：

10) John Barrett 和 Louis Crane，《量子广义相对论的洛伦兹符号模型》，《经典与量子引力》**17** （2000年），3101–3118。亦可参阅gr-qc/9904025。

不过，到目前为止，这个模型还纯属形式上的，因为它涉及可能发散的无穷和。我们需要继续努力！现在我有了一些空闲时间，想着手解决这个问题。与此同时，Iwasaki 提出了一种黎曼量子引力的替代性自旋泡沫模型：

11) Junichi Iwasaki，《量子引力的曲面理论模型》，可见于gr-qc/9903112。

唉，我还不太理解这个模型。最后，为了收尾，来点完全不同的内容：

12) Richard E. Borcherds，《量子顶点代数》，可见于 math.QA/990303 8.

我喜欢这篇论文摘要的开头：“本文旨在让顶点代数理论变得平凡”。很好！平凡并不坏，而是好事。凡是人能理解的东西，自然就不再难懂。

第135周

1999年7月31日

唉，糟了，我现在忙着四处参加会议，没空写 This Week's Finds 了！我先去了温哥华，然后去了圣巴巴拉，而近一个月来，我一直待在葡萄牙，在里斯本和科英布拉之间奔波。不过，让我试着补上进度……

6月16日至19日，来自不列颠哥伦比亚大学的 Steve Savitt 和 Steve Weinstein 举办了一场研讨会，旨在让哲学家和物理学家围绕量子引力的概念问题展开交流：

1) 迈向对空间、时间和物质的新理解，研讨会主页：
http://axion.physics.ubc.ca/Workshop/

在 Chris Isham、John Earman、Lee Smolin 和我进行了一天的讲座之后，我们在研讨会余下的时间里一直围坐在一间宽敞的屋子里，欣赏温哥华湾的美景，并以相当有条理的方式讨论各种议题。例如，Chris Isham 主持了一场关于"什么是量子理论？"的讨论，引导大家质疑量子物理背后的假设；Simon Saunders 则主持了另一场关于"量子引力：物理学、形而上学还是数学？"的讨论，我们思索了一个事实在科学和社会学层面的影响：量子引力研究的动力更多来自对一致性、清晰性和数学优雅的追求，而非满足新实验数据的需要。

显然，理解量子引力会让我们重新思考一些基本概念——问题是，哪些概念？会议结束时，几乎所有与物理学相关的基本信念或概念都经过了仔细审视，并被发现值得怀疑。空间、时间、因果性、实数、集合论——凡是你能想到的，都在其中！这多少让人有些不安——不过，时不时做做这类事是有好处的，可以防止思想动脉硬化；而和一大群物理学家、哲学家一起探讨，尤其有趣。不过，我得承认，我离开时只想做一大堆繁琐的计算，好让自己重新脚踏实地——当然，这只是相对而言。

我尤其喜欢 Chris Isham 关于拓扑斯理论的演讲，因为它帮助我理解了拓扑斯理论应用于量子理论的一种方式。我过去一直觉得拓扑斯对于量子理论来说"过于经典"，因为虽然拓扑斯的内部逻辑是直觉主义的（排中律可能不成立），但它仍然不够量子化。举例来说，在拓扑斯中，"与"运算仍然对"或"运算满足分配律，反过来也一样；而这种分配律失效正是量子逻辑的标志。如果你不明白我的意思，可以看看下面这些书，按难度从低到高大致排列：

2) David W. Cohen，《希尔伯特空间与量子逻辑导论》，施普林格，柏林，1989。3) C.Piron，《量子物理基础》，W. A. Benjamin，马萨诸塞州雷丁，1976年。4) C. A. Hooker，编，《量子力学的逻辑代数方法》，两卷，D. Reidel，波士顿，1975年至1979年。

或许更重要的是，拓扑斯是笛卡尔的！这是什么意思？也就是说，我们可以定义拓扑斯中任意两个对象的“乘积”。具体来说，给定对象a和b，存在一个对象$a \times b$，它配备了态射

$$p\colon a \times b \to a$$

and

$$q\colon a \times b \to b$$

称为“投影”，满足以下性质：给定从某个对象 c到 a 和 b的态射，例如

$$f\colon c \to a$$

and

$$g\colon c \to b$$

存在唯一的态射 $f \times g\colon c \to a \times b$，使得先复合它再接 p便得到 f，而先复合它再接 q 便得到 g。这只是对集合的通常笛卡尔积性质的一种抽象，因此，如果一个范畴中任意一对对象都有乘积，我们就称它为“笛卡尔”范畴。

现在，不妨做一个有趣的练习，验证在笛卡尔范畴中，每个对象都有一个态射

$$\Delta\colon a \to a \times a$$

称为“对角态射”；它与从$a \times a$到 a 的两个投影中的任意一个复合后，都会得到恒等态射。例如，在集合范畴这个托扑斯中，对角态射定义为

$$\Delta(x) = (x, x)$$

我们可以把对角态射看作允许“复制信息”。这在量子力学中通常是不可能的：

5) William Wooters 和 Wocjciech Zurek，《单个量子不可克隆》，*Na-ture* **299**(1982年)，802–803。

原因在于，在希尔伯特空间范畴中，张量积并不是上述意义上的乘积！具体来说，给定一个希尔伯特空间 H，就不存在自然的对角算子

$$\Delta\colon H \to Htensor H$$

甚至也不存在从 $H \otimes H$ 到 H 的自然投影算子。正如 James Dolan 所指出的，张量积的这种非笛卡尔性赋予了量子理论许多独特的味道。除了使“克隆一个量子”成为不可能之外，它还与量子理论如何违反贝尔不等式密切相关，因为这意味着我们无法将一个由两部分组成的量子系统的任意态视为由两部分各自的态通过张量积构成。

总之，这让我一度觉得，拓扑斯理论的“量子性”还不够，因此不足以帮助我们理解量子物理那些独特的特殊性质。不过，在我和 Isham 做完报告后，有人指出，我们可以把拓扑量子场论看作定义在范畴 nCob 上的希尔伯特空间预层，其态射是 n 维协边。现在，任意

范畴上的预层都构成一个拓扑斯，因此这意味着，我们应该能够把拓扑量子场论看作 nCob 上预层拓扑斯中的一个“希尔伯特空间对象”。从这个角度看，拓扑量子场论独特的“量子性”源于它是一个希尔伯特空间对象，而它独特的“可变性”——也就是说，它会为每个代表空间的 $(n-1)$ 维流形赋予一个不同的希尔伯特空间——则源于它是拓扑斯中的一个对象。（众所周知，拓扑斯非常擅长处理诸如“可变集合”之类的事物。）我不确定这有多大用处，但值得记在心里。

既然我正在谈论量子逻辑，就来提出一个关于 Kochen-Specker 定理的谜题。请记住，该定理说的是：如果你有一个维数大于 2 的希尔伯特空间 H，那么就不存在从 H 上的自伴算子到实数的映射 F，使其具有以下性质：

a) 对任意自伴算子 A，$F(A)$都属于 A的谱，

and

b) For any continuous $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(F(A)) = F(f(A))$.

这意味着，不可能以一种合理且自洽的方式，将所有可观测量都视为在量子系统中同时具有确定值同时取值于一个量子系统中！

好，谜题是：如果 H 的维数等于 2，会怎么样？我其实并不知道答案的话，如果有人能想明白，我很乐意听听！

顺便说一下，我曾经想和 Kochen 做一个关于数理物理的本科研究项目。他问我是否知道谱定理，我回答“不知道”，他说既然如此，我就没必要尝试和他一起研究了。接下来的那个夏季，我读了 Reed and Simon 的《泛函分析》，学习了许多不同版本的谱定理。想到这或许就是我花了多年学习分析学，后来最终转向拓扑学和代数的原因，我就不寒而栗。不过不对：现在想来，我当时已经对分析学感兴趣了，因为我上过 Robin Graham 教授的一门精彩的实分析课。

好吧，现在来说说我参加的下一场会议。6月22日至26日，加利福尼亚大学圣巴巴拉分校理论物理研究所举办了一场主题为“强引力场”的会议。这场会议为 Abhay Ashtekar、Gary Horowitz 和 Jim Isenberg 筹划的精彩的、为期一学期的项目画上了句号：

6) 强引力场的经典与量子物理，项目主页，包含报告幻灯片和音频文件，网址为 https://online.kitp.ucsb.edu/online/gravity99/

和整个项目一样，这场会议涵盖了与引力相关的广泛主题：弦理论和圈量子引力、观测与计算黑洞物理学，以及 γ 射线暴源。我无法总结这一切；既然我通常会在这里花很多篇幅谈论量子引力，那就让我改为谈谈其他一些内容。

John Friedman 做了一场有趣的报告，主题是来自不稳定中子星的引力波。脉冲星还很年轻时——比如大约 5000 年——通常每 16 毫秒左右绕自身轴旋转一周。一个很好的例子是 N157B，它是大麦哲伦云中的一颗脉冲星。利用目前的自转减慢率可以进行外推，并推测

脉冲星出生时的周期约为 5 毫秒。想想是什么使一颗新形成的中子星减速，这很有意思。理论学家最近提出了一种新的可能机制：一种新型的引力波驱动的不稳定性，可能会迫使新形成的相对论性恒星减速到 10 毫秒的周期。这一想法非常巧妙：其基本观点是，如果一颗恒星旋转得非常快，那么一个旋转速度低于该恒星的旋转模态会辐射出正定角动量，但由于这些模态的旋转速度低于恒星，它们携带的是负角动量。仔细想想就会发现，这意味着引力辐射应当会倾向于放大这些模态！我曾要求举一个通俗易懂的类比，结果发现，风形成水波时也存在类似的机制——只是由线动量取代了角动量。总之，目前还不清楚这一过程是否真的有机会发生，因为它只有在中子星既不太热也不太冷时才有效，不过这个想法确实很酷。

Richard Price 做了一场精彩的报告，介绍黑洞碰撞的计算机模拟。如今，定量理解黑洞和中子星碰撞所释放的引力辐射是一项大工程——这是美国国家科学基金会（NSF）“重大挑战”问题之一。原因在于，人们正投入大量资金建造 LIGO 这样的引力波探测器：

7）LIGO 项目主页，https://www.ligo.caltech.edu/

他们需要确切知道该寻找什么。正面碰撞最容易理解，因为利用轴对称性可以简化计算。遗憾的是，两个黑洞不太可能正面撞上。人们真正想了解的是两个黑洞彼此螺旋接近时会发生什么。这里有两种极端情况：等质量黑洞的情形，以及一个质量很小的黑洞落入一个质量很大的黑洞的情形。

后一种情况已有 95% 得到理解，因为我们可以把较轻的黑洞视为“试探粒子”——忽略它对较重黑洞的影响。较轻的黑洞缓慢地螺旋着靠近较重的黑洞，直到抵达最内稳定轨道，然后坠入其中。我们可以利用相对论试探粒子坠入黑洞的理论来理解这一过程的早期阶段，并利用黑洞微扰理论研究这一过程后期形成的单个黑洞的“振铃”。（我所说的“振铃”，是指振荡的黑洞在发出引力辐射的同时逐渐稳定下来的过程。）即使是中间阶段也可以处理，因为小黑洞的辐射对大黑洞影响不大。

相比之下，两个等质量黑洞的情形则不太容易理解。我们可以用后牛顿近似处理相对论效应较小的早期阶段，也可以再次利用黑洞微扰理论处理后期阶段。但中间阶段就变得复杂了，因为每个黑洞的辐射都会对另一个黑洞产生很大影响，而且在这种情况下，实际上并不存在“最内稳定轨道”的概念。更糟的是，我们真正想要理解的恰恰是这一过程的中间阶段，因为大多数引力波很可能是在这时发出的！

人们投入了大量精力，试图通过大量计算来理解黑洞碰撞，但这并不容易：归根结底，广义相对论由一些极其棘手的非线性偏微分方程组构成——

当前的研究深受数值不稳定性困扰，同时还面临着一个问题：要模拟足够大的时空区域，才能理解所发出的引力辐射。数理物理爱好者也会意识到，规范固定是一个重大难题。人们很想通过“黑洞挖除”来简化计算：事件视界内部发生的任何事情都不会影响外部，因此只要能让计算机找到视界，就可以不再模拟内部发生的事情！但目前还没人特别擅长这一做法……即便采用更简单、可以在局部定义的“表观视界”概念也是如此。因此，还有不少重要工作有待完成！

（想了解这两场演讲的更多详情，请访问会议网站并查看演示文稿。）

我还和一些人就黑洞熵进行了有趣的交谈，其中有些讨论涉及 Steve Carlip 的一篇新论文。我不太能充分阐述其中的细节，但这似乎很重要……

9) Steve Carlip，《Killing 视界上的共形场论熵》，《经典与量子引力》**16**（1999年），3327–3348。另见gr-qc/9906126。

我就引用一下摘要：

> 在带边界流形上，广义相对论的约束代数可能会产生中心扩张，这种扩张可以用协变相空间技术计算。当边界是一个（局部）*Killing* 视界时，一组自然的边界条件会导出一个中心荷可计算的 *Virasoro*子代数。随后可以利用共形场论方法确定边界处的态密度。我考察了若干情形——黑洞、*Rindler*空间、*de Sitter*空间、*Taub–NUT*和*Taub–Bolt*空间，以及膨胀子引力——并证明由此得到的态密度给出了预期的 *Bekenstein–Hawking*熵。因此，黑洞熵的统计力学可以通过对称性论证确定，而无需依赖量子引力的具体细节。

此外，人们还热烈讨论了“孤立视界”这一概念，它在某些环路量子引力黑洞处理方法中发挥着基础性作用：

10) Abhay Ashtekar、Christopher Beetle 和 Stephen Fairhurst，《孤立视界力学》，《经典与量子引力》**17**（2000年），253–298。另见 gr-qc/9907068。

11) Jerzy Lewandowski，《允许孤立视界存在的时空》，《经典与量子引力》**17**（2000年），L53–L59。另见 gr-qc/9907058。

想进一步了解孤立视界，请参阅“第128周”。

最后，说点完全不同的话，我最近看到了一些与 McKay对应相关的新论文——如果你不知道“第65周” 里它指的是什么，就去看看吧！我还没读这些论文，只是想提醒自己应该读读，所以把它们列在这里：

12）John McKay，《半仿射 Coxeter–Dynkin 图与 $G \subseteq \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$》，可见于 math.QA/9907089。

13）Igor Frenkel、Naihuan Jing 和 Weiqiang Wang，《有限群与 McKay 对应的顶点表示》，《国际数学研究通知》**第4期**（2000年），195–222页。另见math.QA/9907166。

Igor Frenkel、Naihuan Jing 和 Weiqiang Wang，《通过有限群和 McKay对应实现的量子顶点表示》，*Comm* 数学物理**第211卷**（2000年），365–393。也可参见math.QA/9907175。

下次我想聊聊为庆祝 Mac Lane 90岁生日而举办的大型范畴论会议！到那时，我就差不多把那些会议都补上了……

Robert Israel 对我提出的关于 Kochen–Specker定理的谜题的回答：

这在维数2时并不成立。注意，对于自伴 2×2 矩阵 A，任意$f(A)$ 都可写成 $aA + bI$，其中 a 和 b 是实标量（将 A对角化后很容易看出这一点）。不是 I 的倍数的自伴矩阵可分成若干等价类；若对某些标量 a、 b （$a \neq 0$），有 $B = aA + bI$，则 A和 B等价。从每个等价类中选取一个代表元 A，选取$F(A)$ 作为 A 的一个特征值，然后 $F(aA + bI) = aF(A) + b$. 当然， $F(bI) = b$。那么 F 满足这两个条件。

之所以在高维中行不通，是因为在高维中，可能存在两个不满足交换律的自伴矩阵 A 和 B，对于某些函数 F 和 G， $F(A) = G(B)$，而 $F(A)$ 并不是 I 的倍数。

Robert Israel 不列颠哥伦比亚大学数学系 加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华 *V6T 1Z2*

第136周

1999年8月21日

上个月的大部分时间我都在葡萄牙，在里斯本的 Instituto Superior Tecnico 与 Roger Picken 共度时光，并参加了在科英布拉举行的范畴论暑期学校和会议，该活动由 ManuelaSobral 组织：

1）范畴论99网站，附有演讲摘要，http://www.mat.uc.pt/~ct99 /

今年这场会议意义非凡，因为它庆祝了 Saun- ders Mac Lane 的90岁生日。他与 Samuel Eilenberg 于1945年共同创立了范畴论。Mac Lane 亲临现场，精神矍铄。他作了一场精彩的演讲，谈到与 Eilenberg 共事的经历；在为他举办的宴会后，他甚至披着黑斗篷，唱了一首关于黎曼的歌！

（你可能会好奇，这件斗篷是几位音乐家提供的。在科英布拉，演奏法朵音乐的人通常穿黑斗篷。几天前，我们看到他们为一位含泪的老人唱小夜曲，然后给他披上斗篷，于是我们中有人建议他们对 Mac Lane 也试试这一招。他非但没有哭起来，反而放声高歌。）

这次会议组织得极为出色，汇聚了顶尖的范畴论学者，演讲也精彩纷呈，多得让我几乎不知该从何说起……下次我大概会随机挑选一些，稍微介绍一下。会议论文集将刊登在《纯粹与应用代数杂志》的一期专刊中，以纪念 Mac Lane 的 90 岁生日；感兴趣的话，敬请留意。暑期学校设有 Cristina Pedicchio、Vaughan Pratt 的课程，还有一位古怪的数学物理学家开设的课程，他认为物理定律建立在 n-范畴之上。课程讲义收录于以下书籍：

2) 范畴论与应用暑期学校，科英布拉，199年7月13日至17日，《数学文本》B辑第**21**号，科英布拉大学数学系。书中包括 John Baez 的《n-范畴》、M. Cristina Pedicchio 的《代数理论》，以及 Vaughan Pratt 的《Chu空间：对偶性作为计算与数学的共同基础》。

Pedicchio 的课程探讨了 Lawvere 的代数理论这一精妙概念的各种推广。回想一下“第53 周”，我们可以将具有额外性质或结构的范畴 $\mathcal{C}$ 视为一种“理论”，并将保持这种结构的函子 $F\colon \mathcal{C} \to$ 集合范畴 视为该理论的“模型”。例如，“有限积理论” $\mathcal{C}$ 就是一个具有有限积的范畴。在这种情况下，模型是一个保持有限积的函子 $F\colon \mathcal{C} \to$ 集合范畴，而模型态射则是此类函子之间的自然变换。这就得到一个范畴$\mathsf{Mod}(\mathcal{C})$，由 $\mathcal{C}$的模型构成。

为了理解这究竟意味着什么，让我们把注意力限制在最简单的情形： $\mathcal{C}$ 中的所有对象都是某个给定对象的乘积。在这种情况下，Pedicchio 将 $\mathcal{C}$ 称为“代数理论”。于是，一个模型 F 实际上就是一个集合 $F(x)$，以及一系列由 $\mathcal{C}$中的态射产生的n-元运算；这些运算满足由 $\mathcal{C}$ 中态射之间的方程所产生的等式律。任何仅由一个集合和一系列满足方程的 n-元运算构成的代数构件，都可以用这类理论来描述。例如：幺半群、群、阿贝尔群、环……等等。我们可以

使用适当的代数理论来描述其中任何一种，而在每种情况下，范畴 Mod($\mathcal{C}$)都将是这些代数构件所组成的范畴。

上次讨论这个话题时，我没有解释理论-模型对偶性的概念。所有形式的“对偶性”的爱好者一定会喜欢这个！这里有一个函子

$$R\colon \mathsf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Set}$$

它将每个模型 F 映射到集合 $F(x)$。我们可以把它看作一个函子，它忘掉代数构件的所有运算，只保留底层集合。现在，如果你了解伴随函子（参见“第77周”–“第79周”），这应该会让你立刻想为 R寻找一个左伴随，也就是一个函子

$$L\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Mod}(\mathcal{C})$$

它把每个集合映射到该集合上的“自由”代数构件。确实，这样一个左伴随是存在的！

给定这对伴随函子，我们可以做各种有趣的事。特别是，我们可以讨论该理论的“有限生成自由模型”范畴。这里的对象是 Mod($\mathcal{C}$) 中形如 $L(S)$ 的对象，其中 S 是有限集；态射则是 Mod($\mathcal{C}$) 中通常的态射。我把这个范畴称为 fgFree-Mod($\mathcal{C}$)。

现在来谈谈这个精彩的对偶定理：fgFree-Mod($\mathcal{C}$) 等价于范畴 $\mathcal{C}$ 的对偶范畴。换句话说，你可以用最简单的方式，从一个代数理论的有限生成自由代数范畴中重构出该理论：只需反转所有态射的方向！这实在太妙了，我就不解释它为什么成立了……我不想剥夺你亲自看看一些简单例子、观察它如何运作的乐趣。比如，选取群论，想一想“群”的定义中出现的每一种运算，分别对应有限生成自由群之间的哪个同态。

还有许多其他与理论-模型对偶相关的有趣问题。例如：哪些类型的范畴会作为代数理论的模型范畴出现？Pedicchio 称之为“代数范畴”，并告诉我们一些用于刻画它们的漂亮定理。又如：给定一个代数理论的自由模型范畴，能否扩充它，从而得到所有 模型构成的范畴？Pedicchio 提到了一种称为“精确完备化”的过程，可以解决这个问题。又如：如果只知道某个理论的模型范畴，能否判断哪些模型是自由模型？遗憾的是，我不知道答案……但我相信有人知道。

更妙的是，这一切都可以大幅推广到比我迄今讨论的“代数理论”更灵活的一类理论。例如，我们可以研究“本质代数理论”，它们不过是具有有限极限的范畴。给定这样一个范畴，比如 $\mathcal{C}$，我们将模型定义为一个保持有限极限的函子 $F\colon\ \mathcal{C} \to$ 集合范畴 。这使我们能够研究具有部分定义运算的代数结构。我在“第 53 周”已经举过一个例子——有一个具有有限极限的范畴称为“范畴论”，其模型就是范畴！在这个更广阔的背景下，可以推导出理论-模型对偶，它在这里称为 Gabriel-Ulmer对偶：

3) P. Gabriel 和 F. Ulmer，《局部可呈示范畴》，数学讲义 **221**，施普林格，柏林，1971。

不过，这些内容远不止于此，Pedicchio 还带领我们快速了解了最新成果。这里的许多基本思想都源自 Lawvere 关于代数语义学的著名论文，因此很高兴看到他来听这些讲座；更令人高兴的是，听说这篇论文在写成 26 年后即将出版：

4) William Lawvere，代数理论的函子语义学，哥伦比亚大学博士论文，1963年。发表于5 (2004)，第1–121页。可访问http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/5/tr5abs.html

得知 Lawvere 和 Schanuel 正在合写一本关于“客观数论”的书，也很令人高兴……这本书想必会比他们那本为懂得一点高深数学的人编写的精彩范畴论入门更难，但希望不会因此而逊色：

5) William Lawvere 和 Steve Schanuel，《概念数学：范畴初步》，剑桥大学出版社，剑桥，1997年。

这本书适合送给所有想知道范畴论是怎么回事、又想不太费力地学一点范畴论的朋友。如果你已经读到这里，并且理解了我所说的内容，那你一定有这样的朋友！如果你没有理解我所说的内容，那就读读这本书吧！

顺便说一句，Lawvere 告诉我，他最初想学物理，后来在开始尝试将物理理论形式化时，最终以代数语义学为题完成了论文。有趣的是，现代“拓扑量子场论”的概念在很大程度上以 Lawvere 的思想为蓝本，只不过用带对偶的对称幺半范畴取代了 Lawvere 所考虑的具有有限积的范畴！我想，他只是走在了时代前面。事实上，近些年来他又重返物理学领域了——不过那是另一个故事。

好吧，现在让我换个话题……

一些 n范畴八卦。Ross Street 有一位学生定义了一个半严格 n范畴的概念，其上限为 $n = 5$；Sjoerd Crans 则定义了半严格 n范畴（他称之为“teisi”），适用于 n 直到 6。不过，对于一般的 n，这个概念似乎仍然难以定义，这促使我的朋友 Lisa Raphals 创作了下面这首打油诗：

一位“n”理论家探讨了某些数
学家何时能够找到大于十的 n
的定义。

有趣的是，弱 n-范畴的研究似乎进展得稍快一些——现在已经发展到 $n = \infty$ 了。事实上，在会议期间，Michael Batanin 走到我跟前，说有位名叫 Penon 的人发表了一个非常简洁的弱 ω-范畴定义，看来与 Batanin 自己的定义等价（见 “第103周”）——至少经过一些小小的调整之后是这样。Batanin 对此相当热衷，并表示打算写篇论文谈谈这些内容。

后来我去了英格兰剑桥，Tom Leinster 做了一场报告，总结了 Penon 的定义：

6) Jacques Penon，《Approache polygraphiquedes ∞-categoriesnon strictes》，载于*CahiersTop. Geom. Diff.* **40**（1999年），31–79。

这看起来相当不错，所以我想告诉你 Leinster 的说法——采用他的术语，而不是 Penon 的术语（当然，后者是法语）。为了简短起见，我先假设你对范畴论已有相当程度的了解。

首先，“自反 globular 集”是由一些集合和函数组成的结构，如下所示：

$$X_0 \underset{\leftarrow t -}{\overset{\leftarrow s -}{-i\rightarrow}} X_1 \underset{\leftarrow t -}{\overset{\leftarrow s -}{-i\rightarrow}} X_2 \underset{\leftarrow t -}{\overset{\leftarrow s -}{-i\rightarrow}} \dots$$

一直延伸到无穷，并满足这些方程：

$$\begin{aligned} s(s(x)) &= s(t(x)) \\ t(s(x)) &= t(t(x)) \\ s(i(x)) &= t(i(x)) = x. \end{aligned}$$

我们把 X_n 的元素称为“n-细胞”，并分别把 $s(x)$ 和 $t(x)$ 称为 n-细胞 x 的“源点”和“目标”。 $If s(x) = a$ 与 $t(x) = b$，我们把 x 看作从 a 到 b 的对象，并记作 $x\colon\ a \to b$。

如果省去关于映射的所有内容 i，我们就只有一个“球状集”。它们在 n-范畴论中很重要，因为严格的 ω-范畴，以及 Batanin 的弱 ω-范畴，都是带有额外结构的球状集。Penon 的定义也是如此，不过他一开始就采用“自反”球状集，这类球状集带有这些映射 i，它们有点像单纯集合定义中的退化映射（见 “ 第 115 周 ”）。在 Penon 的定义中 $i(x)$ 扮演“恒等态射 n”的角色，因此我们也把$i(x)$ 记作 $1_x\colon\ x \to x$。

设 RGlob 为自反球状集合的范畴，其中态射以显然的方式定义。（换句话说，RGlob 是一个预层范畴——请参见“第115周”，其中解释了这一概念。）

在这一框架下，通常意义上的严格 ω-范畴可以定义为一个自反球状集合 X，并配备各种“复合”运算，使我们能够在 $t^j(x) = s^j(x)$ 时将 n-细胞 x与 y 复合，从而得到一个 n-细胞

$$x \circ_j y$$

对于满足 $1 \leqslant j \leqslant n$ 的每个 n 和每个 j，我们各得到一个这样的复合运算。我们施加两类显然的公理：

A）确定复合对象的源点和目标的公理；以及

B）严格结合律、单位律和交换律。

我假定你了解这些公理，或者能够假装了解。（如果你读过 2-范畴的定义，见 “第80周”，或许可以大致了解我所说的是哪类公理。）

严格 ω-范畴固然很好，但我们需要放宽这个概念。因此，首先介绍 Penon d将“ω-幺半群胚”定义为一种与严格 ω-范畴完全相同、但不满足

B型公理的结构。你可能还记得，布尔巴基将“幺半群胚”定义为一个带有二元运算、却不满足任何定律的集合——原始的代数对象！ω-幺半群胚同样毫无法则可言，而且规模大得多，也更难对付。

严格的 ω-范畴过于严格：所有定律都作为方程成立。 ω-幺半群胚又过于宽松：完全没有任何定律成立！我们怎样才能得到想要的结果?

我们定义一个范畴 Q，其对象是四元组（M， p， $\mathcal{C}$， $[\cdot,\cdot]$），其中：

- M 是一个 ω-幺半群胚
- $\mathcal{C}$ 是一个严格的 ω-范畴
- p： $M \to \mathcal{C}$ 是 ω-幺半群胚之间的一个态射（即自反球状集合之间的一个态射，严格保持所有 ω-幺半群胚运算）
- $[\cdot,\cdot]$ 是一种将投影 p 的像中 n-态射之间的方程提升为 M中 $(n+1)$-态射之间方程的方法。更确切地说，给定 n-细胞

$$f, g \colon a \to b$$

在 M 中，使得 $p(f) = p(g)$，我们有一个 $(n+1)$-细胞

$$[f, g] \colon f \to g$$

在 M中，使得 $p([f,g]) = 1_{p(f)} = 1_{p(g)}$。我们要求 $[f,f] = 1_f$。

Q 中的态射定义为显而易见的对象：一个 ω-幺半群胚的态射 f： $M \to M'$，以及一个严格 ω-范畴的态射 f: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$，并且严格保留所有可见的结构。

好，现在我们定义一个函子

$$U \colon Q \to \mathsf{RGlob}$$

by

$$\mathrm{U}(M, p, C, [\cdot,\cdot]) = M$$

其中我们将 M 视为一个自反 globular 集。Penon 证明 U 有一个左伴随

$$F \colon \mathsf{RGlob} \to Q$$

这个伴随定义了一个单子

$$T \colon \mathsf{RGlob} \to \mathsf{RGlob}$$

而 Penon 将“弱 ω-范畴”定义为这个单子的代数。

（参见 “第92周”和“第118周”，了解如何从伴随得到单子。唉，我想我还没来得及解释单子代数这个概念！要解释的东西太多，时间却太少！）

现在，如果你了解一些范畴论，并对此思考片刻，就会发现，按照这种方式定义的弱 ω-范畴中，结合律之类的所有定律都在等价的意义下成立，而这些等价又满足必要的相容律，同样是在等价的意义下，如此以至无穷。粗略地说，提升 $[\cdot,\cdot]$ 就是把方程变成n-态射的东西。要体会这一过程是如何运作的，你得弄清楚左伴随 F 是什么样子。Penon 在论文的后半部分详细推导了这一点。

第137周

1999年9月4日

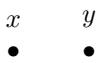
现在我在英格兰剑桥，和范畴论学者们一起悠闲度日，所以继续聊范畴论也就顺理成章了。我会先谈谈人们在科英布拉会议上讨论的一些内容（见上周的文章）。

1) Michael M¨uger，“编织张量范畴的伽罗瓦理论与模闭包”，《*Adv. Math.*》**150** (2000年)，151–201。另见math.CT/9812040。

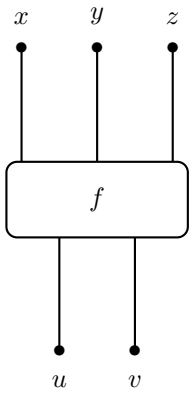
编织幺半范畴是一种简单的代数构件，以最原始的形式捕捉了三维性的一部分本质。它包含一系列“对象”，我们可以像这样将它们画成带标签的点：



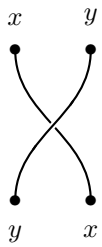
到目前为止，这还只是零维的。接下来，给定一系列对象，我们可以得到一个新对象，即它们的“张量积”；我们可以把这些点并排放置来表示它。例如，我们可以把 $x \otimes y$ 画成这样：



这是 1 维的。不过除此之外，对于任意一对对象 x 和 y，我们还有一系列“态射” f: $x \to y$。我们可以用如下图示来表示从对象的张量积到另一组对象的张量积的态射：

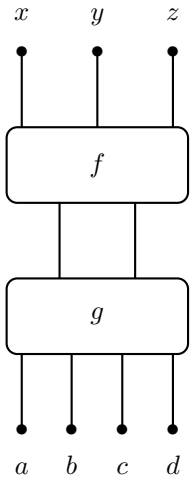


这幅图是二维的。此外，我们要求对于任意一对对象 x 和y，都存在一个“编织”，即从 $x \otimes y$到 $y \otimes x$的特殊态射。我们这样画：



经过这次线束交叉，图形变成了三维的！

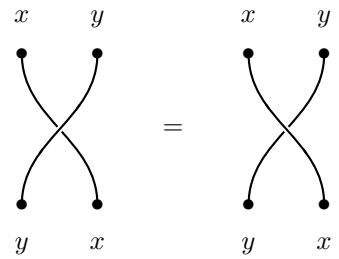
我们还要求可以将一个态射 $f\colon x \to y$和一个态射 $g\colon y \to z$复合，得到一个态射 $fg\colon x \to z$。我们用把一幅图叠在另一幅图上来表示这一操作。下面我会画一个复杂的例子，其中涉及的所有对象本身都是其他对象的张量积：



最后，我们要求张量积、编织和复合满足一系列公理。我不打算把它们写下来，因为我已经在 “第121周”中写过了。关键在于，从几何角度来看——或者更准确地说，从拓扑意义上来看——这些公理都能通过上面的图形直观地体现出来。

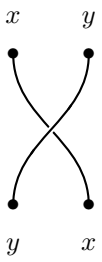
我画的这些图应该会让你想到纽结、缠结、电路图、费曼图以及各种类似的东西——确实，你可以用辫状幺半范畴，以非常优雅的方式理解所有这些东西！

有时，加入另一条规则也不错：

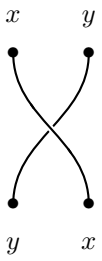


在这里，我们使用编织的逆构造出第二幅图。若不在意上交叉与下交叉之间的区别，这条规则便适用。若这条规则成立，我们就称我们的编织幺半范畴是“对称的”。从拓扑学角度看，在研究四维或更高维的情形时，这条规则是合理的，因为我们有足够的空间解开所有纽结。例如，传统的费曼图理论以对称幺半范畴为基础（比如庞加莱群的表示范畴），并且在四维时空中运作得十分顺畅。

但三维时空有些不同。例如，当我们交换两个相同粒子时，采用下面这种方式确实会产生差异：



或者像这样：



因此，在三维时空中，除了玻色子和费米子之外，还有其他粒子在交换时表现不同——有时人们称它们为“任意子”，有时则称之为“奇异统计”。

现在让我深入探讨一下这一图景中更具技术性的几个方面。

从 Reshetikhin 和 Turaev 开始，人们逐渐弄清楚了如何使用辫状 m幺半范畴来构造三维时空中的拓扑量子场论

但他们不能从任意一个普通的编织幺半范畴开始，因为量子场论与希尔伯特空间有很大关系。因此，他们通常从一种称为“模张量范畴”的特殊类型开始。这是一种编织幺半范畴与希尔伯特空间的混合体。

事实上，除了一个技术条件——这是 M¨uger 工作的核心——我们可以通过取“希尔伯特空间”的定义，将其范畴化一次以得到“2-希尔伯特空间”的定义，再加入与这一结构相容的张量积和编织，从而得到模张量范畴的定义。

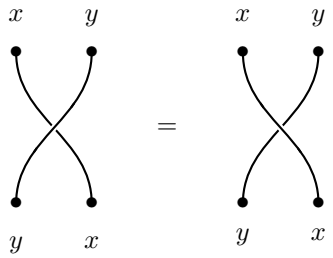
令人惊叹的是，通过如此抽象的概念方法，我们几乎精确地得到了构造三维拓扑量子场论所需的东西！这充分展现了范畴论的力量。简直就像不费吹灰之力便得到了成果！不过，我还是忍住不告诉你详情，因为 “第99周”已经解释了其中不少内容，其余内容则见这里：

2）John Baez，《高维代数 II：2-希尔伯特空间》，《*Adv. Math.*》**127**（1997年），125–189。也可通过 q-alg/9609018 获取。

在本文中，我把带有相容张量积的 2-希尔伯特空间称为“2-H*-代数”；如果它还带有相容的编织，我就称它为“编织 2-H*-代数”。这个术语有点拗口，但为了保持一致，我在这里仍会使用它。

好，太好了：我们几乎就能用优雅的概念性方法得到模张量范畴的定义了。但还剩下一个令人烦恼却至关重要的技术条件！表述这个条件有很多不同的方式，但 M¨uger 证明了它们都等价于下面这个非常优雅的表述。

我们把编织幺半范畴的“中心”定义为由所有满足以下条件的对象 x 构成的范畴：



对于所有 y，以及这些对象之间的所有态射。编织幺半范畴的中心显然是一个对称幺半范畴。“中心”这个术语旨在让你联想到幺半群的通常意义上的中心——那些与所有其他元素都可交换的元素。事实上，这两种中心都是一种一般构造的特例，它沿着“周期表”的列向下延伸：

k重幺半 n范畴

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$k=0$	sets	范畴	2-范畴
$k=1$	幺半群	幺半 范畴	幺半 2-范畴
$k=2$	交换 幺半群	带状单oidal 范畴	带状单oidal 2-范畴
$k=3$	“ ”	对称的 幺半 范畴	弱对合的 幺半 2-范畴
$k=4$	“ ”	“ ”	强 对合的 幺半 2-范畴
$k=5$	“ ”	“ ”	“ ”

我在“第74周” 和“第121周”中介绍过这一点，所以就不再赘述了。我在这里真正想说的是，许多这类3维内容都属于一个更大的图景，而这个图景适用于各种不同的维度。若想了解更多详情，包括中心构造的说明，请看：

3) John Baez 和 James Dolan，《范畴化》，载于高阶范畴论，编者 Ezra Getzler 和 MikhailKapranov，《当代数学》**230**，美国数学学会，普罗维登斯，1998年，第 1– 36 页。另见 math.QA/9802029。

总之，M¨uger 对模张量范畴的优雅刻画可以概括为：它是一个编织 2-H*-代数，其中心是“平凡的”。这意味着中心中的每个对象都是对象 1 的若干个副本的直和——对象 1 是张量积的单位元。

M¨uger 在论文中还做了许多我不打算在此介绍的工作，而且他在关于中心这一一般概念的演讲中也谈了许多有趣的内容。例如，幺半范畴的中心是一个编织幺半范畴。特别是，如果取一个 2-H*-代数的中心，就会得到一个编织 2-H*-代数。但如果接着对这个编织 2-H*-代数取它的中心呢？结果发现，按照上文的含义，它是“平凡的”！

M¨uger 的论文和这篇论文有些内容重叠：

4) A. Bruguieres，《预模范畴、模化与3维流形的不变量》，可通过 https://imag.umontpellier.fr/~bruguieres/docs/modular.pdf

On它们都涉及的一个特别重要的问题是：如果你有一个编织的2-H*-代数，有没有什么办法稍微调整一下，让它成为模张量范畴？

答案是肯定的。因此，我们确实可以从任意编织 2-H*-代数得到一个拓扑量子场论。但这又引出了另一个问题：能否不借助模张量范畴，直接描述这个拓扑量子场论？答案同样是肯定的！详情请见：

5) Stephen Sawin，《非单连通李群的琼斯–维滕不变量与魏尔 alcove 的几何》，可见 math.QA/9905010。

这篇论文运用这套方法，构造出与陈–西蒙斯理论相关的拓扑量子场论。自 Reshetikhin 和 Turaev 以来，人们一直在深入研究这个问题，但这篇论文真正了不起之处，在于它处理了规范群非单连通的情形。这带来了许多微妙之处，而此前的论文对此往往只是浅尝辄止。Sawin 通过分析在张量积下封闭的魏尔 alcove 子集，更全面地解决了这些问题。这篇论文非常精彩；如果你想进一步了解量子群的表示理论，读一读它会是很好的练习。

我刚才说过，这些内容有不少属于一幅适用于高维情形的更大图景。不过，许多高维内容仍然十分神秘。下面介绍两篇很棒的论文，它们在揭开这些谜团方面取得了一些进展：

6) Marco Mackaay，《有限群、球面 2-范畴与四维流形不变量》，可见于 math.QA/9903003。7) Mikhail Khovanov，《琼斯多项式的范畴化》，可见于math.QA/9908171。

Marco Mackaay 曾在科英布拉谈到他的工作，而我之前在里斯本也曾就此向他详细追问，所以我觉得自己对此理解得相当透彻。基本上，他所做的是将 Dijkgraaf 和 Witten 研究的3维拓扑量子场论进行范畴化，从而得到4维理论。这与他早先在“第121周”中介绍的工作非常契合。

人们一直在尝试将量子群的奇妙之处范畴化，而 Khovanov 似乎通过将链环的琼斯多项式描述为分次向量空间链复形的“分次欧拉示性数”，在这个方向上迈出了坚实的一步。由于分次欧拉示性数是向量空间维数的推广，而取维数是一个去范畴化过程（也就是说，向量空间同构当且仅当它们具有相同的维数），因此可以将 Khovanov 的链复形视为琼斯多项式的一个范畴化版本。

我想更好地理解 Khovanov 的工作与 Crane 和 Frenkel 关于量子群范畴化的工作之间的关系（参见 “第 58 周”）。为此，我想我应该读读以下论文：

8) J. Bernstein、I. Frenkel 和 M. Khovanov，《Temperley– Lieb 代数及 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 的 Schur 商的范畴化：通过投射函子和 Zuckerman 函子》，*Selecta Mathematica*，新系列 **5** (1999年)，199–241。亦可从 math/0002087 获取。

9) Mikhail Khovanov, 图形演算、典范基与 *Kazhdan–Lusztig* 理论，博士论文，耶鲁大学数学系，1997年。可在以下网址获取：https://www.math.columbia.edu/khovanov/research/thesis.pdf

第138周

1999年9月12日

我在剑桥逗留期间很少去牛顿研究所，尽管它离我住的地方只有一箭之遥。牛顿研究所总是有有趣的数学和物理学活动，今年夏季他们还举办了一些宇宙学会议，但我一直想暂时远离这一切。不过，我还是没能抵挡住参加詹姆斯·哈特尔60岁生日派对的机会；派对于9月2日在那里举行。

Hartle以研究量子引力和量子力学的基础而闻名，因此一些物理学界的大人物前来发表演讲。首先，Chris Isham谈到了拓扑斯理论在量子力学中的应用，尤其是与Hartle的研究相关的部分：他与默里·盖尔曼共同发展了所谓的量子力学“退相干历史”方法。接着，罗杰·彭罗斯介绍了他关于引力诱导波函数坍缩的想法。然后，加里·吉本斯谈了量子力学的几何。所有演讲都很精彩！

最后，斯蒂芬·霍金谈了他与Hartle合作的研究。这场演讲最具个人色彩：霍金在介绍两人共同撰写论文的技术内容时，穿插讲述了他们在圣巴巴拉及其他地方聚会的趣闻轶事，其中包括一次长途旅行：他们乘坐一辆大众甲壳虫，霍金的轮椅则塞在后座上。

我想霍金说过，他和 Hartle 合写了 4 篇论文。第一篇真正重要的论文是这篇：

1) 詹姆斯·哈特尔和斯蒂芬·霍金，《黑洞辐射的路径积分推导》，《物理评论》**D13**（1976年），2188。

正如我在《第111周》中所解释的，霍金在1975年发表了一篇论文，确立了黑洞物理学与热力学之间一个非凡的联系。他表明，黑洞会发出辐射，就像它具有与质量成反比的温度一样。然而，当时人们对这篇论文颇有怀疑，不仅因为这一结果实在惊人，还因为计算涉及事件视界附近波长极短的电磁场模式——其波长远短于普朗克长度。

因此，Hartle 和 Hawking 决定使用路径积分重新进行计算——这是一种在粒子物理学中广受认可的技术。霍金的研究背景是广义相对论，因此他不太擅长路径积分；Hartle 在粒子物理学方面经验更丰富，也知道如何处理这类问题。

（当然，如今霍金做路径积分的速度，比大多数人核对账簿还快。这已经是很久以前的事了。）

这并非易事。在粒子物理学中，人们通常在假设时空是平直的情况下进行计算，因此 Hartle 和 Hawking 需要调整常用的路径积分技术，以适用于时空中存在黑洞的情形。路径积分中常用的技巧是把时间变量 t 替换为一个虚数，然后进行计算，最后再通过解析延拓将答案还原到实时间。不过，周围存在黑洞时，这就没那么容易了！

首先，你必须将史瓦西解（非旋转黑洞的常用度量）解析延拓到时间变量的虚数值。这样做时，会出现一个奇妙的现象：你会发现，史瓦西解在虚时间方向上具有周期性。而且，这个周期与黑洞的质量成正比。

现在，如果你擅长物理学，就会知道，在虚时间以 $1/T$ 为周期的情况下进行量子场论计算，与在温度为 T的情况下进行统计力学计算是一样的。所以你马上就能看出，黑洞就像具有一种与其质量成反比的温度！

（如果你担心的话，我使用的单位制中，$\hbar$、c、G和 k 都等于1。）

总之，如今人们就是这样看待哈特尔-霍金论文的。我其实并没有读过它，所以我的描述可能有些时代错置。事后回看，事情通常显得更简单、更清晰。

Hartle 和 Hawking 的另一篇非常重要的论文是这篇：

2) 詹姆斯·哈特尔和斯蒂芬·霍金，《宇宙波函数》，物理学评论**D28**（1983年），2960。

在量子力学中，我们常用一个波函数来描述物理系统的态——它是定义在经典构型空间上的复值函数。如果量子力学适用于整个宇宙，自然会引出这样一个问题：宇宙的波函数是什么？在上面提到的论文中，Hartle 和 Hawking 提出了一个答案。

现在，猜测整个宇宙的波函数似乎有些过于雄心勃勃，毕竟我们甚至还没见过整个宇宙。的确，如果有人声称自己知道整个宇宙的波函数，你可能会以为他是在声称自己知道过去发生过或未来将要发生的一切。这自然让 Gell-Mann 问 Hartle：“如果你知道宇宙的波函数，怎么还没发财呢？”

不过，量子理论有趣之处在于，多亏了不确定性原理，你可以知道宇宙的波函数，却仍然完全不知道明天赛马场上哪匹马会赢，甚至不知道有多少行星绕着太阳运行。

这对你来说要么有意义，要么没有意义；如果你本来就不懂，我也不确定我写的任何简短 内容能否帮你理解。要完整解释这件事，我就得走进一些此刻不想涉足的领域——直奔他们所谓的“量子力学诠释”那片泥潭。

所以，与其过分纠结了解宇宙波函数意味着 什么，不如让我直接解释 Hartle 和 Hawking 给出的公式。请注意，这个公式可能正确，也可能不正确，甚至可能并没有严格定义——物理学文献中对此有过许多争论。不过，它相当巧妙，也确实值得了解。

这里的内容会稍微技术一些。假设空间是一个三维球面，比如 X。广义相对论的经典构型空间是 X 上度量构成的空间。宇宙波函数应当是定义在这个经典构型空间上的某个复值函数。下面就是 Hartle 和 Hawking 给出的公式：

$$\psi(q) = \int_{g|X=q} \exp(-S(g)/\hbar) dg.$$

N现在，你可以写下这个公式，然后说“看，这就是
w宇宙的波函数！”

但这是什么意思?

嗯，积分是对四维球上的黎曼度量 g 进行的，该四维球的边界为X，但我们只对限制到给定度量 q 上的度量进行积分，其中 X ——这就是我写成 $g|X = q$的意思。量 $S(g)$是度量 g 的爱因斯坦-希尔伯特作用量——换句话说，就是对 g 的里奇标量曲率在四维球上积分。最后，当然， $\hbar$ 是普朗克常数。

这个想法是，至少在形式上，这个波函数是惠勒-德维特方程的解，而该方程是量子引力的基本方程（参见“第43周”）。

遗憾的是，测度“dg”并没有明确定义！换句话说，要从这个公式中提取物理学内容，就像处理路径积分时通常那样，需要运用许多巧妙的技巧。但这是可以做到的；自1983年以来，霍金等人一直花费大量时间做这件事。这催生了一门名为“量子宇宙学”的学科。

我还应该补充一点：有很多方法可以扩展基本的哈特尔-霍金公式。如果除了引力之外还有其他场，我们只需以显而易见的方式把它们加入作用量中，再对它们也进行积分。如果代表空间的流形 X 不是三维球面，我们可以选取另一个以它为边界的四维流形。如果我们拿不定主意该用哪个四维流形，可以尝试“对拓扑求和”，也就是对所有以 X 为边界的四维流形求和。实际上，即使 X 是三维球面，我们也可以这样做——不过是否应该这么做，以及这个和是否收敛，都颇有争议。

嗯，还有很多内容值得一说，比如哈特尔-霍金公式的物理解释是什么，以及它能预测什么。它其实相当酷——从某种意义上说，它表明宇宙是从虚无中隧穿而来的！但这听起来简直一派胡言——就像那些科学杂志为了卖得更多而写在封面上的花哨噱头。要真正解释清楚，还得费不少功夫。可惜，现在差不多该吃晚饭了，所以我想先讲到这里。

总之，那是一场有趣的生日派对。

第139周

1999年9月19日

上次我介绍了在牛顿研究所举办的詹姆斯·哈特尔60岁生日庆典上的一些演讲。不过，我在派对上还遇到了一些一直想找机会交谈的人。这件事说来话长，所以如果你不介意的话，我就从头讲起……

前些时候，sci.physics.research 两位从事天体物理学的版主之一 Phillip Helbig 提请我注意一篇有趣的论文：

1）Vipul Periwal，《量子引力的宇宙学与天体物理学检验》，可从 astro-ph/9906253 获取。

其基本思想是，量子引力效应可能会导致引力在大距离尺度上偏离牛顿反平方定律，而这些偏差或许能解释天体物理学中的各种谜题，例如“失踪质量问题”，以及宇宙可能正在加速膨胀这一现象。

这会非常好，因为它或许不仅能帮助我们理解这些天体物理学谜题，还能帮助解决量子引力面临的一大难题：相关实验数据匮乏。

不过，当然，在对这类想法过于兴奋之前，还是得先仔细看看其中的细节！

要理解 Periwal 论文中的论证，需要对重整化群有所了解，因为人们正是用它来研究“常数”（例如电子电荷或牛顿引力常数）如何随着测量尺度的距离变化而改变——这是量子效应造成的。读这篇论文时，我立刻因自己对重整化群理解不足而感到沮丧。它确实非常重要，所以我决定进一步阅读相关内容，并在 sci.physics.research 上尽可能用简单的语言解释它——因为我喜欢通过尝试解释来理解事物。

在这个过程中，我发现这本书很有帮助：

1) Michael E. Peskin 和 Daniel V. Schroeder，《量子场论导论》，Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁，1995年。

我最初学习量子场论时用的那些书，没有纳入肯尼斯·威尔逊提出的现代重整化观点——也就是，量子场论在极短距离尺度下最终或许并不成立，但这没关系，因为只要假设它在相当短的距离尺度下是个不错的近似，那么到了更好的较大距离尺度下，它就会变得更准确。这一点在思考量子引力时尤其重要，因为在普朗克长度尺度上，可能会发生极其诡异的事情。Peskin 和 Schroeder 对这个观点解释得相当清楚。想看我自己那份粗略的概述，可以试试这个：

2）John Baez，《重整化变得简单》，见 http://math.ucr.edu/home/baez/renormalization.html

我有意尽可能少谈数学，以便专注于基本直觉。

有了这番准备，我重新读起 Periwal 的论文，理解起来也稍微容易了些。让我来介绍一下其中的主要观点：我们可以预期牛顿引力常数会如何随距离变化。

那么，假设我们有一个包含耦合常数 G 的任意量子场论。事实上， G 会随着我们测量它时所采用的长度尺度而变化。不过，借助普朗克常数和光速，我们可以把长度换算成 $1/$动量。这样一来，我们就可以把 G 看作动量的函数。粗略地说，当你以更高的动量让粒子彼此碰撞时，它们在弹开之前会靠得更近，因此，在更高动量下测量耦合常数，就相当于在更短的距离尺度上测量。

描述 G 如何依赖动量 p 的方程称为“卡伦–Sy曼齐克方程”。一般来说，它的形式如下：

$$\frac{dG}{d(\ln p)} = \beta(G)$$

不过，真正有趣的部分始于我们用量子场论计算右边的表达式——猜猜它叫什么！——我们理论的“贝塔函数”。通常我们会得到类似这样的结果：

$$\frac{dG}{d(\ln p)} = (n-d)G + aG_2 + bG_3 + \ldots$$

这里， n 是时空的维数， d 是一个称为“上临界维数”的数。你看，如果可能的话，把量子场论看作定义在任意维数的时空中，再针对当前情形加以专门化，是很有趣的。我马上就会告诉你如何求出 d 。而要算出 a、 b等数值则更难——为此，你需要运用相关的量子场论进行一些计算。

Callan–Symanzik 方程究竟是什么意思？首先，我们先忽略高阶项，并假设

$$\frac{dG(p)}{d(\ln p)} = (n-d)G$$

这说明 G 与 p^{n-d} 成正比。共有 3 种情况：

A）当 $n < d$ 时，我们的耦合常数会在更高的动量尺度下变得更小，因此我们称该理论为“超可重整化”理论。粗略地说，这意味着在越来越大的动量尺度下，我们的理论会越来越像一种“自由场论”——其中粒子完全不相互作用。这使得超可重整化理论很容易研究：只需将其视为自由场论加上一个很小的微扰即可。B）当 $n > d$ 时，我们的耦合常数会在更高的动量尺度下变得更大，因此我们称该理论为“不可重整化”理论。使用自由场论中的微扰计算来研究这类理论十分困难。C）当 $n = d$ 时，我们正好处于上述两种情况之间的临界点。我们称该理论为“可重整化”理论，但实际上必须求出贝塔函数中的下一项，才能判断耦合常数会随着动量增加而增大还是减小。

以广义相对论为例。我们可以通过一些量纲分析和略带臆测的推理，求出上临界维数。设定普朗克常数和光速均为 1。拉格朗日量是里奇标量曲率除以 $8\pi G$，其中 G 是牛顿引力常数。将拉格朗日量在时空上积分以得到作用量时，结果必须是无量纲的，因为在量子场论中进行路径积分时，我们要对作用量求指数。曲率的维度为 $1/$长度^2, ，因此当时空的维数为 n 时， G 的维度必须是长度$^{n-2}$。

这意味着，如果你是个拿着比我的 X 小倍的尺子的小小人，牛顿常数在你看来就会大 X^{n-2} 倍。不过，在比某个长度尺度小 X 倍的长度尺度上测量牛顿常数，等同于在大 X 倍的动量尺度上测量它。我们已经求解了卡伦–辛津方程，并发现，当我们在动量尺度 p上测量 G 时，得到的结果与 p^{n-d}成正比。因此我们得出结论： $d = 2$。

（如果你是物理学家，也许会喜欢找出上述论证中的漏洞，然后把它们补上。）

这意味着，量子引力在四维中是不可重整化的。显然，引力在越来越短的距离尺度上看起来只会越来越强。这就是为什么量子引力传统上被认为很难——几乎令人绝望。

然而，这里有个微妙之处。我们一直忽略了贝塔函数中的高阶项，而实际上不应该这么做!

这对于可重整化理论显而易见，因为当 $n = d$ 时，贝塔函数的形式如下:

$$\frac{dG}{d(\ln p)} = aG_2 + bG_3 + \dots$$

所以，如果我们忽略高阶项，就等于忽略了整个右端！为了了解这些高阶项的影响，我们只考虑一个简单的情形:

$$\frac{dG}{d(\ln p)} = aG_2$$

解出这个方程可得

$$G = \frac{c}{1 - ac \ln p}$$

其中 c 是一个正定常数。这意味着什么？ 如果 $a < 0$，那么甚至不用解方程也显而易见: G 会随着动量增加而缓慢减小。在这种情况下，我们称这个理论为“渐近自由”。例如，标准模型中的强力就具有这一性质，因此在高动量碰撞中，夸克和胶子的行为很像自由粒子。（想进一步了解，可以参阅“第94周”。）

另一方面，如果 $a > 0$，耦合常数 G 会随着动量增加而增大。更糟糕的是，当动量足够高时，它会变得无限大！在这种情况下，我们说我们的理论存在一个“朗道极点”，并且会不以为然地啧啧摇头，因为这可不是什么好事。例如，不考虑弱力时，量子电动力学中就会发生这种情况。当然，妄下结论之前，确实应该考察贝塔函数中更高阶项的影响。不过，粒子物理学家通常认为，在可重整化场论中，具有 $a < 0$ 的理论是好的，而具有 $a > 0$ 的理论是不好的。

好，现在进入真正有趣的部分。二维中的微扰量子引力不仅是可重整化的（因为二维是上临界维数），而且还是渐近自由的！因此，在 n维中，我们有

$$\frac{dG}{d(\ln p) = (n-2)G + aG_2 + \dots}$$

其中 $a < 0$。如果忽略我用“...”表示的高阶项，那么这对四维量子引力意味着一件非常有趣的事。假设在低动量下 G 很小。那么右侧主要由第一项决定，而这一项是正的。这意味着，随着我们不断提高动量尺度， G 会持续增大。这正是我们对不可重整化理论已经看到的情形。但过了一段时间，当 G 变大时，第二项的影响便开始增大——而它是负的。因此，G 的增长开始放缓！

事实上，很容易看出，随着我们不断提高动量， G 将趋近于满足以下条件的值

$$\frac{dG}{d(\ln p)} = 0.$$

我们把这个值称为引力常数的“紫外稳定不动点”。从数学上说，我们得到的是耦合常数空间中的流；紫外稳定不动点是指当我们沿着动量增大的方向流动时，会吸引附近各点的不动点。这种特殊的紫外稳定不动点——它来自一个定义在高于其上临界维数的维度中的渐近自由理论——称为“Wilson–Fisher不动点”。

所以：也许量子引力能够借助 Wilson–Fisher不动点，避免牛顿常数在小距离尺度下不断增大！不过，先别急着开香槟；要注意的是，我们在上一段推理中忽略了贝塔函数的高阶项。它们仍然可能造成麻烦。比如，如果

$$\frac{dG}{d(\ln p)} = (n-2)G + aG_2 + bG_3$$

并且 b 是正定的，那么当维数 n远远超过 2 时，就不会有 Wilson–Fisher不动点。4 是否远远超过 2? 没人能确定。我们确实无法精确求出贝塔函数。因此，和量子引力领域的通常情况一样，事情多少有些不确定。

不过，Periwal 引用了下面这篇论文，称其为量子引力中存在 Wilson–Fisher不动点的数值证据：

3) Herbert W. Hamber 和 Ruth M. Williams，《量子Regge引力中的牛顿势》，*Nucl. Phys.* **B435** （1995年），361–397。

他还从这个不动点的存在得出了一些惊人的结论。他说，这应该会对失踪质量问题和宇宙学常数的数值产生影响！不过，我发现他的推理很难理解，于是决定追查一些参考文献——从上面这篇论文开始。

如今，Ruth Williams 在剑桥大学工作，所以我在 Hartle 的派对上见到她时并不意外。她正忙着和 John Barrett 交谈，他也在诺丁汉大学研究量子引力。我约好去她的办公室拜访，拿一份她的论文，

并请她给我讲解。我还约好去诺丁汉拜访 John，请他讲讲他与 Louis Crane 合作研究洛伦兹自旋泡沫模型的工作——下周再详细说！

总之，下面非常粗略地介绍一下Hamber–Williams论文的内容。他们将一个4维环面切分成 $16\times16\times16\times16$ 个超立方体，再按照显而易见的方式将每个超立方体切分成244个单形，然后使用Regge微积分对路径积分进行蒙特卡罗计算。Regge微积分是广义相对论的一种离散化版本，适用于三角剖分流形（详情见"第119周"）。他们的目标是弄清牛顿常数如何随距离变化。他们通过计算环绕环面的威尔逊环之间的关联来实现这一点。他们解释了如何根据这些信息推导出牛顿常数，但我没精力在这里描述。总之，他们声称，牛顿常数随距离的变化符合存在Wilson–Fisher不动点时的预期！

（实际情况比这更复杂，因为他们的理论中除了牛顿常数，还有另一个耦合常数：宇宙学常数。当然，这对天体物理学中的潜在应用非常重要。）

遗憾的是，还有很多事情让我困惑。我只提两点。首先，Hamber 和 Williams 考察的 G 值大于Wilson– Fisher不动点。由于这是一个紫外稳定不动点，当我们不断提高动量尺度时，这些 G 会流向该不动点。换句话说，在这个范围内，随着距离增加，牛顿常数会增大。至少以我浅薄的理解，这听起来似乎有助于解释失踪质量问题。但奇怪的是，这个范围与 G 接近零的范围截然不同——也就是小于Wilson–Fisher不动点的范围。我以为，所有常见的微扰量子引力计算都基于这样的假设：在宏观距离尺度下，G很小，并且随着我们不断提高动量尺度，它会流向不动点！这些人是在声称这种图景完全错误吗？我很困惑。

另一个谜题是，Periwal 认为，牛顿常数将在大致与宇宙半径（或者更准确地说，哈勃长度）相当的距离尺度上开始增大。但看起来，Hamber 和 Williams 表示，他们关于 G 作为动量函数的公式适用于短距离尺度。

看来我得多读些资料，也许可以从 Weinberg 关于量子引力和重整化群的那篇旧论文开始：

4) Steven Weinberg，《量子引力理论中的紫外发散》，载于《广义相对论：爱因斯坦百年纪念文集》，Stephen Hawking 和 Werner Israel 编，剑桥大学出版社，剑桥，1979年。

然后也许可以读读他关于宇宙学常数的论文：

5) Steven Weinberg，《宇宙学常数问题》，《现代物理学评论》**61**(1989)，1。

以及一些关于重整化群和量子引力的书：

6）克劳德·伊齐克森和让-米歇尔·德鲁夫，《统计场论》，两卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989。

7）Jean Zinn-Justin，《量子场论与临界现象》，牛津大学出版社，牛津，1993年。

8) Jan Ambjørn、Bergfinnur Durhuus 和 Thordur Jonsson，《量子几何：统计场论方法》，剑桥大学出版社，剑桥，1997年。

我也应该多花些时间思考这篇近期论文。论文声称，在一个量子引力玩具模型中发现了相变；在这个模型里，人们对一类特殊的度量——也就是具有两个 Killing 向量场的度量——进行路径积分。

9) Viqar Husain 和 Sebastian Jaimungal，《量子引力中的相变》，*AIP*会议论文集 **493**，美国物理学会，伍德伯里，纽约，1999年，第238–242页。另见 gr-qc/9908056。

不过，如果有人能帮我理清这些问题，请告诉我！

好了，说得够多了。我在聚会上还遇到了另一位朋友：罗杰·彭罗斯！后来我去牛津拜访了他。虽然他最近退休了，但仍然每月在乡间的家中举行聚会，参加者是一群年轻的数学家和物理学家。我参加的那次聚会，讨论的中心是彭罗斯即将出版的新书。这本书旨在向只懂一点数学、但愿意进一步学习的人解释现代物理学。它有个可贵之处：谈到现代物理学的各种时髦观点时，并未像许多科普作品那样不加批判地大加赞颂。具体来说，我拜访他时，他正忙着撰写一章关于暴胀宇宙学的内容，因此谈到了这一理论以及宇宙学整体面临的一系列问题。

我一直不太认可暴胀理论，因为它依赖于大统一理论（或 GUTs）中相当具有推测性的内容，所以这些问题大多只是让我觉得有趣。理论学家看到别人的理论陷入困境时，往往会暗自感到一阵恶趣味。不过，其中一个问题涉及标准模型，这就让我感到切身相关了。彭罗斯指出了一个标准事实：位于相反方向、距离最远的可见星系之间，还没有足够的时间交换信息——至少自复合时期以来一直如此；那时，最初的高温火球冷却到足够透明的程度。但如果电磁力与弱力之间的对称性，正如标准模型所暗示的那样，只有在希格斯场冷却到足以排列整齐时才会自发破缺，那么就会产生这样的危险：希格斯场最终可能在可见宇宙的不同区域中指向不同的方向！——因为这些不同的“区域”尚未有足够的时间扩展到一个区域充满整个可见宇宙的程度。然而，我们并没有看到这样的区域——更准确地说，我们没有看到预期会出现在它们边界上的“畴壁”。

当然，暴胀理论试图解决类似的问题，但人们认为暴胀发生在大统一理论尺度能量下，这似乎太早了，无法解决这个问题；该问题发生在事物冷却到电弱对称性破缺的点时。

再说一次，如果有人了解这方面的任何信息，我很想听听。

第140周

1999年10月16日

让我们从一些有趣的内容开始：传记！

1) Norman Macrae，约翰·冯·诺伊曼：开创现代计算机、博弈论、核威慑等领域的科学天才，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年。

2) Steve Batterson，*Stephen Smale*：打破维数壁垒的数学家，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2000年。

冯·诺伊曼可能是我心目中20世纪最优秀的数学物理学家。他的研究横跨极其纯粹与极其应用的领域。一端是他在公理化集合论方面的工作；另一端则是设计并制造一些最早的计算机，以协助设计氢弹——这项工作实在太过应用，以至于给他惹来了麻烦，甚至惊动了高等研究院！但两端之间还有许多内容：量子力学的数学基础（冯·诺伊曼代数、斯通–冯·诺伊曼定理等等）、遍历理论、他在希尔伯特第五问题上的研究、曼哈顿计划、博弈论、自复制元胞自动机理论……你可能喜欢他，也可能不喜欢，但总会为他折服。汉斯·贝特本人也绝非等闲之辈，他曾这样评价冯·诺伊曼："我一直觉得，他的大脑表明他属于一个新物种，是一种超越人类的进化。"数学家波利亚说："Johnny是我唯一曾让我感到害怕的学生。"毫无疑问，他是个有趣的人。

冯·诺伊曼是主宰20世纪上半叶的巨擘之一，而斯梅尔则更具20世纪下半叶人物的典型特征——他曾抗议越南战争，如今甚至还有自己的网页！

3）Stephen Smale 的网页：http://www.math.berkeley.edu/~smale/

他因在微分拓扑方面的工作，于1966年获得菲尔兹奖。他的一些工作可谓"纯粹"：例如，研究如何将球面翻转过来而不产生任何褶皱，以及证明维数在5及以上的庞加莱猜想，等等。但他的许多工作都与动力系统有关：利用马蹄映射构造奇异吸引子、证明结构稳定性并非普遍成立，等等——这些都远早于近来混沌理论兴起的热潮！近来，他也开始研究经济学、博弈论，以及计算复杂性与代数几何之间的关系。

下面介绍一些关于自旋网络和自旋泡沫的论文：

4) Roberto De Pietri、Laurent Freidel、Kirill Krasnov 和 Carlo Rovelli，《齐性空间上的 Boulatov–Ooguri场论中的 Barrett–Crane模型》，《核物理*B*》**574**(2000年)，785–806。另见hep-th/9907154。

Barrett–Crane模型是一种非常有趣的量子引力理论。我已经在《第113周》、《第120周》和《第128周》中介绍过它，所以这里就不多谈细节了——直接开始吧……

最初的Barrett–Crane模型涉及对时空的一种固定三角剖分。我们也可以构造一些版本，在其中对三角剖分求和。在某些方面，最自然的做法是对所有这样的方式求和：取一堆4-单形，沿着面不断粘合，直到不再有任何自由面为止。有些粘合方式会得到流形，另一些则不会。在这篇论文中，作者表明，这种“对三角剖分求和”的Barrett–Crane模型版本，可以看作定义在三维球面的4重乘积上的量子场论。很奇怪吧?

但其实这并没有那么奇怪。$(n-1)$-球面上的复值函数空间自然构成 SO(n) 的一个表示。不过，我们还可以用另一种方式来理解这个表示。考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的一个三角形。我们可以为它的两条边（比如 v 和 w）关联向量，并取这些向量的外积，得到一个双向量 $v \wedge w$。这个双向量描述了与该三角形相关的面积元。如果我们为三角形选定一个定向，这个双向量便是唯一确定的。现在，形如 $v \wedge w$ 的双向量称为“简单”双向量。简单双向量的空间自然是一个泊松流形——也就是说，我们可以定义这个空间上函数的泊松括号——因此可以把它看作一个“经典相空间”。通过几何量子化，我们可以将这个经典相空间量子化，得到一个希尔伯特空间。由于旋转作用于经典相空间，它们也作用于这个希尔伯特空间，因此该空间成为 SO(n) 的一个表示。而这个表示与 $(n-1)$-球面上的复值函数空间同构!

因此，只要我们确实只关心与三角形相关的面积元，就可以把$(n-1)$-球面上的复函数看作 $\mathbb{R}^n$中的“量子三角形”。我们可以详细发展这一类比，使其变得真正严谨。具体而言，可以将 $\mathbb{R}^n$ 中的“量子四面体”描述为4个量子三角形的集合，并满足一些约束，表明它们能够拼合成一个四面体。这些量子四面体在尺度较大时的表现几乎与普通四面体一样；但当其各个面的面积相对于普朗克长度的平方变得很小时，不确定性原理就会变得至关重要：你不可能同时以完美的精度了解它们几何结构的一切。

让我暂且离题片刻，简要介绍一下这方面的历史。三维中的量子四面体由Barbieri提出——参见“第110周”。它很快就在自旋泡沫模型的研究中变得十分重要。随后，Barrett和我系统地研究了如何利用几何量子化构造三维和四维中的量子四面体——参见“第134周”。后来，Freidel和Krasnov设法将这套理论推广到了高维：

5) Laurent Freidel、Kirill Krasnov 和 Raymond Puzio，《高维引力的 BF 描述》，《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**3**（1999年），1289–1324。亦可参见 hep-th/9901069。6) Laurent Freidel 和 Kirill Krasnov，《作为费曼图的简单自旋网络》，《数学物理杂志》**41**（2000年），1681–1690。可参见hep-th/9903192。

历史就说到这里——现在言归正传。到目前为止，我告诉过你，四维中“量子三角形”的态由三维球面上的复值函数给出。我还告诉过你，“量子四面体”是由 4 个满足某些约束的量子三角形组成的。更准确地说，设

$$H = L^2(S^3)$$

为四维中量子三角形的希尔伯特空间。那么，量子四面体的希尔伯特空间是 T $H \otimes H \otimes H \otimes H$中的一个特定子空间，其中“$\otimes$”表示希尔伯特空间的张量积。具体来说，我们可以把 T 中的态看作定义在 4 个 S^3副本的乘积上的复值函数。这些复值函数需要满足一些约束，不过我们暂且不必操心这些……

现在，让我们对希尔伯特空间 T进行“二次量子化”。这是物理学术语，意思是由 T 上的多项式代数构造一个希尔伯特空间——通常称为 T上的“福克空间”。像往常一样，这个福克空间中的态有两种图像：“场”图像和“粒子”图像。一方面，它们是定义在 S^3的4个副本之乘积上的量子场论的态。但另一方面，它们是四维中任意一组量子四面体的态。换句话说，我们得到了一个量子场论，其中的“基本粒子”是量子四面体！

de Pietri-Freidel-Krasnov-Rovelli论文的想法，是让这两种图像相互配合，并发展出一种思考Barrett–Crane模型的新方式。这些人主要做的事情，是写下一个具有一些优良性质的拉格朗日量。在整个量子场论中，一个重要思想是从一个拉格朗日量出发，并用它计算费曼图的振幅。费曼图是一个图，其中边对应于“粒子”，而顶点对应于“相互作用”，在这些相互作用中，一群粒子转化为另一群粒子。

不过在当前语境中，所谓的“粒子”其实是量子四面体！因此，诀窍在于写出一个拉格朗日量，使其产生带有五价顶点的费曼图。做得恰当的话，这些五价顶点恰好对应于五个量子四面体拼合在一起、构成一个4-单形的五个面的一种方式！我们把这样的东西称为“量子4-单形”。这样一来，你的费曼图就恰好对应于将一批量子4-单形面与面拼接起来的各种方式。更妙的是，如果设置得当，这种费曼图的振幅就恰好与使用Barrett–Crane模型计算三角剖分流形所得的振幅相符！

简而言之，我们在这里得到的是一种量子场论，其费曼图描述了“时空量子几何”——时空不再只是一个固定的三角剖分流形，而是将任意一批4-单形面与面拼接起来的各种可能方式。

听起来很棒，对吧？那么问题是什么？我就列出三个。第一，我们不知道这个理论中的“对费曼图求和”是否收敛。事实上，它很可能并不收敛——但大概有办法处理这个问题。第二，这个模型是黎曼的，而不是洛伦兹的：我们使用的是旋转群，而本应使用洛伦兹群。幸运的是，Barrett 和 Crane 的一篇新论文解决了这个问题。第三，除了进行大规模的计算机模拟之外，我们不太擅长用这类模型进行计算——要看清它关于物理学究竟表达了什么并不容易。在我看来，这是最严重的问题：我们要么开始对自旋泡沫模型进行计算机模拟，要么开发新的解析方法来处理它们——或者两者都做！

现在，这篇“Barrett 和 Crane 的新论文”其实并不是全新的。它是他们已经发布到网上的一篇文章的修订版：

7) John Barrett 和 Louis Crane，《量子广义相对论的洛伦兹符号模型》，《经典与量子引力》**17** （2000年），3101–3118。也可通过以下网址获取：gr-qc/9904025。

不过，它已经有了很大改进。学期末我去诺丁汉时 er,

我请 Barrett 给我讲解了一番。我学到了关于洛伦兹群表示的各种有趣知识。遗憾的是，我现在没有精力解释这些内容了。我只说一点：我上面说的一切都可以推广到洛伦兹情形。主要区别在于，我们使用三维双曲面

$$H^3 = \{t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$$

无论何处我们曾使用三维球面

$$S^3 = \{t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

事后看来，这多少有些显而易见，但结果如此简洁漂亮，真是令人欣喜！

好了，这里还有几篇关于自旋网络和自旋泡沫的论文。既然我越来越懒了，就直接引用摘要吧：

8) Sameer Gupta，《自旋泡沫模型中的因果性》，《物理评论*D*》**61** (2000年), 064014。另见gr-qc/9908018。

> 我们在正则圈量子引力的框架下计算了*Teitelboim*因果传播子。对于洛伦兹号差，我们发现所得幂级数可以表示为具有内禀因果结构的分支着色二维曲面的和。这使我们得以定义一种一般结构，并称之为“因果自旋泡沫”。我们还证明，自旋网络的因果演化模型属于因果自旋泡沫这一一般类别。

9) Matthias Arnsdorf 和 Sameer Gupta，《非紧空间上的圈量子引力》，《核物理*B*》**577** （2000年，529–546页）。另见gr-qc/9909053。

> 我们提出了一种通用方法，用于在非紧空间流形上为圈量子引力构造新的希尔伯特空间。给定一个表示非紧空间几何的固定背景态，我们使用 *Gel'fand-Naimark-Segal* 构造，得到可观测量代数的一个表示。所得希尔伯特空间可解释为描述围绕该背景态的紧支撑涨落。我们还给出一个态的示例，该态近似于经典平直空间，可用作我们构造中的背景态。

10) Seth A. Major，《自旋网络引力的准局域能量》，《经典与量子引力》**17**（2000年，1467–1487页）。另见gr-qc/9906052。

> 对定义在带边界区域内的引力系统，其哈密顿量被量子化。经典哈密顿量是正则化的出发点，而其定义要求哈密顿约束具有泛函可微性。边界项就是该系统的准局域能量，在渐近平坦区域中则成为*ADM*质量。量子化是在使用自旋网络的正则量子化框架内进行的。所得结果是在由整个空间流形上的态空间诱导出的希尔伯特空间上定义的规范不变且良定义的算子。文中计算了其谱。文中还定义了该算子的另一种形式，它具有正确的朴素经典极限，但要求对希尔伯特空间施加限制。最后，简要探讨了与早期工作的比较及若干推论。

11) C. Di Bartolo、R. Gambini、J. Griego、J. Pullin，《在Vassiliev纽结不变量空间中对广义相对论进行一致的正则量子化》，《物理评论快报》**84**(200), 2314–2317。另见 gr-qc/9909063。

> 我们在自旋网络表示中给出了正则量子引力的哈密顿量和微分同胚约束的量子化。其新颖之处在于考虑了一个基于*Vassiliev*纽结不变量的波函数空间。这些约束是有限且定义良好的，并且在量子对易子的层次上重现了经典理论中约束的泊松代数。类似的构造也可以在 $2+1$ 维中进行，从而得到正确的量子理论。

12) John Baez，《自旋泡沫微扰理论》，载于 图示态射与应用，David Radford、Fernando Souza 和 David Yetter 编，《当代数学》**318**，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2003年，第9–21页。亦可参见 gr-qc/9910050。

> 我们研究三角剖分流形上自旋泡沫模型的微扰理论。对于任意此类模型，我们考虑对顶点振幅作任意微扰，并将微扰后模型的演化算符写成由控制该微扰的耦合常数展开的收敛幂级数。当未微扰模型是拓扑量子场论时，幂级数中的各项可以高效计算。此外，在这种情况下，当最高维单形的数量趋于无穷且耦合常数经过适当重整化时，我们可以显式求出整个幂级数的和。这种“稀气体极限”给出了与三角剖分无关、但并非拓扑量子场论的自旋泡沫模型。不过，我们证明，这类模型相当平凡，二维情形除外。

第141周

1999年10月26日

面对一本名为《不一致数学》的书，你怎么可能忍得住不读呢?

1) Chris Mortensen，《不一致数学》，Kluwer，多德雷赫特，1995年。

自从 G¨odel 证明，所有用谓词演算表述的足够强的系统必定要么不一致，要么不完备以来，大多数人都选择了他们认为两害相权取其轻的做法：接受不完备性，以使数学免于不一致。但另一种选择又如何呢?

这本书以一句令人震惊的话开篇："近来，以下观点渐渐得到支持：世界是不一致的，或者可能是不一致的。"在我们震惊之余，Mortensen 接着说道：

> 我们先来考察集合论。无疑，最自然的集合论是采用无限制集合抽象（也称为朴素概括）的理论。这一自然原则宣称，对于每一种性质，都存在唯一一个由具有该性质的事物组成的集合。但是，正如罗素所指出的，这会迅速导致矛盾：*[由所有不以自身为成员的集合组成的集合]* 既是又不是自身的成员。绝大多数逻辑学家都认为，这一矛盾要求削弱无限制集合抽象，以确保集合论的一致性；而一致性又被视为提供一致的数学基础所必需的。然而，此后所有削弱集合抽象的尝试，都被证明在种种方面显得颇为权宜。*Da Costa* 和 *Routley* 则都提出，不如以更自然的方式，在一种不一致但非平凡的集合论中处理罗素集合（这里的平凡性是指每个句子都可证）。

不一致但非平凡的逻辑系统称为次协调的。但要构造这样的系统并不容易。为了防止不一致性蔓延到整个系统并使其变得平凡，我们需要舍弃经典逻辑中的一条规则：对于所有命题 A 和 B，"A 且非(A)蕴含 B"。遗憾的是，这条规则从一开始就内置在命题演算中!

因此，我们需要修订命题演算。

一种做法是放弃"实质蕴涵"——也就是可以根据 P 和 Q 的真值，通过下表计算"P 蕴涵 Q"真值的那种蕴涵形式：

P	Q	$P \implies Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

在实质蕴涵中，一个假命题会蕴涵所有 命题，因此任何不一致都是致命的。但在现实生活中，即使我们发现自己有一个不一致的信念，也不会因此断定自己会飞，然后从楼上跳下去！实质蕴涵其实只是我们试图用只有两种真值（真和假）的真值表来定义蕴涵的最佳尝试。因此，逻辑学家研究其他形式的蕴涵也就不足为奇了。

一个显而易见的方法是采用更多真值，例如“真”、“假”和“不知道”。关于这种多值逻辑的研究由来已久。

另一种由 Anderson 和 Belnap 开创的方法，称为“相关逻辑”。在相关逻辑中，只有当 P 与 Q 之间存在概念上的联系时，“P 蕴含 Q”才可能为真。因此，如果 B 与 A 毫无关系，我们就不会得到“A 且非(A)蕴含B”。

这本书介绍了一种称为“RQ”的逻辑系统——带量词的相关逻辑。书中还介绍了一种称为“R#”的系统，它是以 RQ 而非通常的谓词演算为基础的算术皮亚诺公理版本。按照 Robert Meyer 的研究成果，书中证明了 R# 按照上述意义是非平凡的。此外，这个证明本身可以在 R# 中进行！然而，你可以在 R# 中证明哥德尔第二不完备性定理，因此 R# 无法证明自身的一致性。

借用 Mortensen 的话：“但这其实并不是一个谜题。原因在于，相关逻辑和其他次协调逻辑都以区分不一致性与平凡性为基础，前者弱于后者；而经典逻辑则无法作出这种区分。就本文作者的直觉而言，这两者确实是不同的概念。因此，对于 R#，根据哥德尔第二不完备定理，无法通过有限主义方法证明其一致性，但可以证明其非平凡性。由于皮亚诺算术抹去了这一区分，两种一致性都会受到同一种不可证性的影响。”

Mortensen 还提到了另一种方法：在不舍弃实质蕴涵的情况下，去掉“A 且非(A)蕴涵 B”。方法是舍弃“A 且非(A)”为假的规则！他称之为“巴西逻辑”。想必这并不是因为一般巴西人都这么想，而是因为这一方法的发明者 Da Costa 是巴西人。

巴西逻辑乍听起来十分古怪，但事实上，它只是直觉主义逻辑的对偶：在这种逻辑中，我们舍弃了“A 或非(A)”为真的规则。直觉主义逻辑可以很好地用拓扑空间中的开集来建模：“且”对应交集，“或”对应并集，而“非”对应补集的内部。同样，巴西逻辑可以用闭集来建模。在直觉主义逻辑中，我们允许 A 与非(A) 之间略有间隙；在巴西逻辑中，我们则允许它们略有重叠。

简而言之，这本书妙趣横生。其中许多段落一开始读来着实令人发笑，比如这段：

> *[.....]* 最近有人呼吁发展不一致微积分，理由是微积分的发展史上充斥着不一致的论断，尤其是关于无穷小的论断（牛顿、莱布尼茨、伯努利、洛必达，甚至柯西）。然而，不一致微积分始终未能发展起来。

不过，你始终要记住，作者感兴趣的是那些虽然不一致、却仍然是次协调的理论。我认为，他确实很好地论证了不一致数学值得研究——即使我们的最终目标是避免不一致性！

好，现在让我大幅转换话题，谈谈“奇异球面”——它们是与具有通常光滑结构的 n-球面同胚、但不同胚的光滑流形。最近，sci.physics.research 上的人们一直在谈论这个话题，所以现在似乎正适合就此写一篇短文。另外，我的同事 Fred Wilhelm 从事奇异球面的几何研究，他最近刚在加州大学河滨分校做了相关演讲，所以趁我还记得，应该把他的一些见解分享出来。

首先，回顾一下“Hopf丛”。从复数出发，很容易描述它。$\mathbb{C}^2$ 中的单位向量构成球面 S^3。单位复数在乘法运算下构成一个群。作为流形，它就是圆 S^1；但作为群，它更广为人知的名称是 U(1)。将一个单位向量乘以一个单位复数，就能得到一个新的单位向量，因此 S^1 作用于 S^3。商空间是复射影空间 $\mathbb{CP}^1$，它就是球面 S^2。因此，我们得到的是一个纤维丛：

$$S^1 \to S^3 \to S^2 = \mathbb{CP}^1$$

其纤维为 S^1，全空间为 S^3 ，底空间为 S^2。这就是 Hopf丛。它之所以著名，是因为从全空间到底空间的映射，是第一个从球面到较低维球面的拓扑非平凡映射实例。用同伦论的术语来说，我们称它为群 $\pi_3(S^2)$的生成元。

现在，在“第106周” 我谈到了如何通过将复数替换为任意其他除法代数来仿照这一构造。如果使用实数，就会得到一个纤维丛

$$S^0 \to S^1 \to \mathbb{RP}^1 = S^1$$

其中 S^0 是单位实数构成的群，也就是 $\mathbb{Z}/2$。这个丛看起来像莫比乌斯带的边。如果使用四元数，就会得到一个更有趣的纤维丛：

$$S^3 \to S^7 \to \mathbb{HP}^1 = S^4$$

其中 S^3 是单位四元数构成的群，也就是 SU(2)。我们甚至可以用八元数做类似的事情，从而得到一个纤维丛

$$S^7 \to S^{15} \to \mathbb{OP}^1 = S^8$$

但现在， S^7——单位八元数——并不构成一个群，因为八元数不满足结合律。

无论如何，正是 Hopf丛的四元数版本启发了 Milnor 构造奇异7维球面。这些奇异7维球面实际上是纤维为 S^3 、底空间为 S^4的其他丛的全空间。要构造这些丛，最简单的方法是取 S^4，沿赤道将其切成两半，在每个半球上放置一个平凡的S^3丛，然后将它们粘合起来。要把这些丛粘合起来，我们需要一种方法，将赤道上每个点 x 处的纤维连接起来。换句话说，对于 S^4 赤道上的每个点 x，我们都需要一个映射

$$f_x \colon S^3 \to S^3$$

它应随 x平滑变化。但 S^4 的赤道就是 S^3，而 S^3 是一个群——单位四元数——因此我们可以取

$$f_x(y) = x^n y x^m$$

对于任意一对整数（n，m）。

这就为我们提供了一大批 S^3 丛，它们以 S^4 为底空间。任何一个这样的丛的全空间 $X(n, m)$ 显然都是光滑7维流形。但它什么时候与7维球面同胚？什么时候又与具有通常光滑结构的7维球面微分同胚呢？

首先，我们来运用一些莫尔斯理论。如果一个光滑流形上有一个“莫尔斯函数”——一个取实数值且所有临界点都非退化的光滑函数——那么你就能深入了解这个流形的拓扑学。不信的话，就读读这本书：

2) 约翰·米尔诺，《莫尔斯理论》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1960年。

当 $n+m=1$ $X(n, m)$ 上存在一个只有两个临界点——一个极大值点和一个极小值点——的莫尔斯函数时，这就意味着 $X(n, m)$ 与一个球面同胚！

一旦我们知道 $X(n, m)$ 与 S^7 同胚，就必须判断它何时与带有通常光滑结构的 S^7 微分同胚。这是难点所在。注意，$X(n, m)$ 是一个向量丛的单位球面丛，该向量丛定义在 S^4 上，纤维为四元数。我们可以利用这个向量丛的特征类，了解许多关于 $X(n, m)$ 的性质。特别是，我们可以计算这个向量丛的欧拉数和庞特里亚金数。利用欧拉数，我们可以证明，只有当 $n+m=1$ 时，$X(n, m)$ 才与一个球面同胚——用莫尔斯理论实际上无法做到这一点。但更重要的是，利用庞特里亚金数，我们可以证明，在这种情况下，$X(n, m)$ 与带有通常光滑结构的 S^7 微分同胚，当且仅当 $(n-m)^2=1$ 模 7。否则，它就是“异类”的。

关于上述论证的细节，可以参考下面这本书：

3) B. A. 杜布罗温、A. T. 福缅科和 S. P. 诺维科夫，《现代几何——方法与应用》第三部分：同调理论导论，施普林格研究生教材**125**，施普林格，柏林，1990年。

或者参考原始论文：

4) 约翰·米尔诺，《关于与7维球面同胚的流形》，《数学年刊》**64**（1956年），399–405。

现在，再多做一些工作，就可以证明，n球面上的光滑结构在连通和——即从两个球面上各挖去一个小洞，再将它们粘合起来这一运算——下构成一个群，而且这个群对于 $n=7$而言是$\mathbb{Z}/28$。这意味着，如果我们把通过保定向微分同胚相关联的7维球面上的两个光滑结构视为相同，那么恰好有28种。不幸的是，通过上述显式构造无法得到所有这些结构。更多细节请参阅：

5) M. Kervaire 和 J. Milnor，《同伦球面群 I》，《数学年刊》**77**（1963年），504–537。

顺便说一句，上述论文并不存在第二部分！相反，你应该阅读这篇：

6) J. Levine，《同伦球面群讲义》，载于代数与几何拓扑，《施普林格数学讲义》**1126**，施普林格，柏林，1985年，第62–95页。

总之，如果你想知道我为什么如此大谈异乎寻常的 7 维球面，而不是那些更容易想象的低维例子，不妨看看这张关于 n 维球面光滑结构群的表格：

n	n 维球面的光滑结构群
0	1
1	1
2	1
3	1
4	?
5	1
6	1
7	$\mathbb{Z}/28$
8	$\mathbb{Z}/2$
9	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$
10	$\mathbb{Z}/6$
11	$\mathbb{Z}/992$
12	1
13	$\mathbb{Z}/3$
14	$\mathbb{Z}/2$
15	$\mathbb{Z}/8128 \times \mathbb{Z}/2$
16	$\mathbb{Z}/2$
17	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$
18	$\mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/2$

7 维是最简单的有趣情形——除 4 维或许另当别论，因为那里的答案尚不明确！“光滑庞加莱猜想”声称 4 维球面上只有一种光滑结构，但这至今仍是一个猜想……

正如你所见，奇异11维球面有很多。事实上，这与弦理论有关！只要取两个 n 维球，并沿着它们的边界，通过某个保定向微分同胚将它们粘合起来，就能得到具有任意可能光滑结构的 n 维球面。

$$f\colon S^{n-1} \to S^{n-1}.$$

像这样的保定向微分同胚构成一个群，称为 Diff+(S^{n-1})。使用上面的技巧，可以证明 n 维球面的光滑结构群与 Diff+(S^{n-1}) 的连通分支群同构。因此，奇异11维球面的存在意味着 10 维球面上有许多“异乎寻常的微分同胚”！

如今，弦理论存在于10维时空中，而人们希望某些量在时空的保定向微分同胚下保持不变——否则就会说该理论存在“引力反常”。首先，你必须检查这一点是否适用于时空的“小

微分同胚”，也就是说，那些可通过连续路径与恒等映射相连的微分同胚。但你还必须检查这一点是否适用于“大微分同胚”——它们位于微分同胚群的不同连通分支中。当时空是10 维球面时，这意味着你需要检查 Diff+(S^{n-1}) 除了包含恒等态射的连通分支之外的全部991个分支上的微分同胚不变性。这些分支对应着奇异11维球面！

Witten 在以下论文中完成了这项工作：

7) Edward Witten，《全局引力反常》，《数学物理通讯》**100**（1985），197–229。

这可能是第一篇关于物理学中奇异球面的论文。

奇异球面还有其他有趣的研究方向。其中之一是在其上赋予一个度量，并研究它的曲率。配备通常“圆形”度量的球面具有高度对称性，并且处处具有正曲率。“正曲率”有多种含义，但圆球面在所有可能的意义下都具有正曲率！其中一种曲率是“截面曲率”。一般来说，除了带有通常光滑结构的球面之外，很难找到具有处处正截面曲率度量的紧流形。Gromoll 和 Meyer 找到了一个带有非负截面曲率度量的奇异7维球面：

8) Detlef Gromoll 和 Wolfgang Meyer，《具有非负截面曲率的奇异球面》，《数学年刊》**100**（1974年），401–406。

这个构造并不太难，所以让我来描述一下。首先，从群$\mathrm{Sp}(2)$开始，它由 2×2 酉四元数矩阵组成（参见“第64周”）。和所有紧李群一样，它带有一个在右平移和左平移下不变的度量，而且这个度量在相差一个常数比例因子的意义下是唯一的。单位四元数组成的群以如下方式作用为$\mathrm{Sp}(2)$上的保度量映射（也称“等距变换”）：令四元数 q 映射

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

to

$$\begin{pmatrix} qaq^{-1} & qb \\ qcq^{-1} & qd \end{pmatrix}$$

这个商空间是一个奇异7维球面，并且继承了一个具有非负截面曲率的度量。

现在，既然很难找到具有正截面曲率的紧流形，你或许会想知道，能否给这个奇异7维球面赋予正截面曲率的度量。答案是：几乎可以！可以给它赋予一种度量，除了一个零测集之外，其余各处的截面曲率都为正。这一结果最近由Wilhelm证明：

9) Frederick Wilhelm，《几乎处处具有正曲率的奇异球面》，《几何分析杂志》**11**（2001），519–560。

此外，Hitchin 证明的一个有趣定理指出，对于任意 $n > 0$，都存在维数为 $8n + 1$ 和 $8n + 2$ 的奇异球面，它们不具有正标量曲率度量：

8) Nigel Hitchin，《调和旋量》，《*Adv. Math.* **14**(1974年), 1–55.

所以，有些奇异球面并不像你想象的那样“圆”！事实上，在10维的奇异球面中，有3个无法赋予这样一种度量：使得等距变换群的连通分支大于U(1) × U(1)，因此它们相当“崎岖”。这源于Reinhard Schultz的结果，他恰好是这里的系主任：

9) Reinhard Schultz，“界定管道流形的同伦球面上的圆群作用”，《*Proc. A.M.S.*》**36** (1972)，297–300。

关于奇异球面，还有很多可说的，不过我只简要提两点。首先，奇异球面与高维纽结理论之间存在很酷的联络。如果你想稍微领略一下这方面的内容，不妨试试：

10) Louis Kauffman，《结与物理》，世界科学出版社，新加坡，1991年。

请查阅索引中的“奇异球面”。

其次，人们已经计算了奇异7维球面对7维量子引力路径积分的影响：

11) Kristin Schleich 和 Donald Witt，《量子引力中的异空间》，《经典与量子引力》**16**（1999年），2447–2469。另可参阅gr-qc/9903086。

我不确定奇异球面真的与物理学有关，但这想法挺酷的，所以我很高兴有人在尝试建立联系。

好了，关于奇异球面就说到这里，至少暂时如此！我这里还有几件事想提一提……

最近我一直在了解一些卡拉比–丘流形以及弦理论中的镜像对称。基本想法是，在不同的时空流形上建立的弦理论可能在物理上等价。我还不够了解这些内容，暂时不想尝试解释，不过这里列出了一些可供查阅的资料，以备你感兴趣：

12) Claire Voisin，《镜像对称》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年。13) David A. Cox 和 Sheldon Katz，《镜像对称与代数几何》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年。14) 丘成桐，编，《镜像对称 I》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1998年。Brian Green 和丘成桐，编，《镜像对称 II》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1997年。Duong H. Phong、Luc Vinet 和丘成桐，编，《镜像对称 III》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年。

到目前为止，我主要是在尝试学习一些非常基础的内容，而下面这些讲座对此很有帮助：

16) P. Candelas，《复流形讲义》，载于超弦 ’87，L. Alvarez-Gaume 等编，世界科学出版社，新加坡，1988年，第1–88页。

说点别的，美国数学会出版了一些关于手术理论的精美书籍——手术理论是通过切割和粘贴，从旧流形构造新流形的过程。我已经把这些书列入阅读清单，所以如果有人想送我一份圣诞礼物，可以买下面这些：

17) Robert E. Gompf 和 Andras I Stipsicz，《4-流形与基尔比演算》，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1999年。

18) C. T. C. Wall 和 A. A. Ranicki，《紧流形上的手术》，第2版，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1999年。

最后，运算子方面也有一些很有意思的进展，但我一直没能跟上。下面引用几则摘要：

19) Alexander A. Voronov，《"同伦Gerstenhaber代数"，载于 *InConf´erenceMosh´e Flato 1999*年：量子化、变形与对称性，第II卷，施普林格，柏林，2000年，307–331页。另见 math.QA/9908040。

> 本文旨在补全 *Getzler–Jones* 对德利涅猜想的证明，从而确立平面上点的构形的几何与结合代数的 *Hochschild*复形之间的明确关系。更具体地说，本文证明，B_∞-运算子是某个与紧化构形空间相关的运算子的商；它由已知作用于 *Hochschild*复形上的多线性运算生成。文中讨论了同伦 *Gerstenhaber*代数的不同概念：其中一种是 B_∞-代数，另一种称为同伦 G-代数，是一种特殊的 B_∞-代数；其余的 G_∞-代数、 E^1-*bar*-代数和弱 G_∞-代数，则源自构形空间的几何。本文还对 *Kimura*、*Zuckerman* 和作者在论文 *math.QA/9602009* 中所作的修正进行说明；这些修正与他们使用了一种并不存在的同伦*Gerstenhaber*代数概念有关。

20) Maxim Kontsevich，《变形量子化中的遗传子与动机》，《数学物理通讯》**48** (1999年)，35–72。另见math.QA/9904055。

> 过去五六年间，人们逐渐认识到，结合代数（阿贝尔范畴、三角范畴等）的代数世界与二维曲面的几何世界有着许多深刻联系。其中一种体现是德利涅猜想（*1993*年）：任意结合代数的上同调 *Hochschild* 复形上，都自然作用着小圆盘遗传子的奇异链运算子。最近，*D. Tamarkin* 发现，小圆盘遗传子的链运算子具有形式性，也就是说，它与其上同调同伦等价。由此以及德利涅猜想，几乎可以直接推出我在变形量子化方面的形式性结果。我将回顾目前的进展。此外，我猜想动机伽罗瓦群作用于变形量子化，并推测高维代数以及动机与量子场论之间可能存在的关系。

21) James E. McClure 和 Jeffrey H. Smith，《Deligne猜想的一个解》，可通过以下地址获取：math.QA/9910126

德利涅在1993年提出一个问题：结合环的霍赫希尔德上链复形是否具有小二立方体运算子系的奇异链所给出的自然作用量。本文对这个问题给出了肯定的答案。我们还证明，结合环谱的拓扑霍赫希尔德上同调谱具有一个与小二立方体运算子系等价的运算子的作用量。

我最初整理的球面上的光滑结构群表格中有一些错误，后来由 Linus Kramer、Marco Mackaay、Tony Smith 和 Frederick Wilhelm 更正。事实上，Dubrovin、Fomenko 和 Novikov 合著的书中的表格与 Kervaire 和 Milnor 论文中的表格并不相同！上面的表格取自 Kervaire 和 Milnor 的论文，并纳入了后来关于3维的研究，以及 Brumfield 的一些工作；后者确定了9维和17维中的群——更多信息见下文。

Kervaire 和 Milnor 的论文给出了一个很酷的公式，用来计算 $n > 1$ 时 $(4n-1)$-球面上的光滑结构群的阶 。公式如下：

$$\frac{2^{2n-4}(2^{2n-1}-1)P(4n-1)B(n)a(n)}{n}$$

其中：

- $P(k)$ 是球面的第 k 个稳定同伦群的阶
- $B(k)$ 是第 k 个伯努利数，数列为 $1/6,\ 1/30,\ 1/42,\ 1/30,\ 5/66,\ 691/2730,\ 7/6,$ .....
- $a(k)$取1或2，分别对应于k为偶数或奇数。

以下是 Linus Kramer 对9维和17维奇异球面的一些评论；他在 sci.math.research 上发帖回应了我的一个问题。Kervaire 和 Milnor 指出，9维奇异球面的群是$(\mathbb{Z}/2)^3$ 或 $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/4$，而17维的群是$(\mathbb{Z}/2)^4$ 或$(\mathbb{Z}/2)^2\times\mathbb{Z}/4$。Linus 写道：

> *Kervaire* 和 *Milnor* 列出的结果似乎是正确的；在9维中，该群为$(\mathbb{Z}/2)^3$，，而在17维中则为$(\mathbb{Z}/2)^4$。这可由 *Brumfield* [《密歇根数学杂志》 **17]** <*style id='17'*>论文第一页所述的结果、球面前几个稳定同伦群的列表，以及 *Adams* 的 *J*- 同态的性质推出 J： $\pi_n(SO) \to \pi^s_n$。
>
> **存在一个正合列**
>
> $$0 \to bP_k \to \Gamma_{k-1} \to \pi^s_{k-1}/\operatorname{im}(J) \to 0$$
>
> **前提是 $k+3$ 不是 2 的幂（Γ_{k-1} 是我们要找的群）。现在对于 $k-1=8$、9、10、17，我们有 $k+3=12$、13、14、21，而这些都不是 2 的幂。现在 $bP_k=0$、$\mathbb{Z}/2$、0、$\mathbb{Z}/\theta_{16}$ 对于 $k=9$、10、11、16。因此对于 $k=9$、11，群 Γ_{k-1} 与 $\pi^s_{k-1}/\operatorname{im}(J)$ 相同；而对于 $k=10$、16，则使用 Brumfield 的结果，此时该群为 $\Gamma_{k-1}=\mathbb{Z}/2+(\pi^s_{k-1}/\operatorname{im}(J))$。**

希望我在梳理这些正合序列时没有出错……当然，这一结果还依赖于一些表格，即球面的最初几个稳定同伦群。

Linus Kramer

第142周

1999年12月5日

我最近被一种迷因感染了——一种能够自我传播的人类行为模式。现在我想把它传给你！我喜欢这个特别的迷因，因为它非常简单。它甚至比我网页上描述的寄生体还要简单：

1) John Baez，《亚细胞生命形式》，见http://math.ucr.edu/home/baez/subcellular.html

我编写这个网页时，正试图了解一些最简单的自我复制实体：病毒、类病毒、拟病毒、质粒、朊病毒，以及各种形式的垃圾DNA。类病毒尤其简单。与病毒不同，类病毒甚至没有蛋白质外壳：它只是一条裸露的RNA分子！因此，它无法主动闯入宿主细胞，只能被动等待吸收。随后，它不知通过什么方式劫持细胞核的机制来复制自身。Theodore Diener于1971年发现了第一个类病毒：马铃薯纺锤块茎类病毒，它会使马铃薯异常细长，有时还会开裂。起初，人们怀疑是否存在比病毒更小的生命形式。但如今，这种类病毒的完整分子结构已经被解析出来。它仅由359个核苷酸组成——换句话说，大约有12,000个原子！

不过，由于迷因依赖人类文化这一复杂机制来复制自身，它甚至可以比类病毒更简单。它甚至可以是最简单的一类事物：由一小列公理定义的抽象数学结构！

井字棋就是一个很好的例子。它不怎么有趣，但又足够有趣，能让自己在人类儿童中不断传播——孩子们很容易被简单游戏的魅力吸引。大多数孩子很快就会对井字棋产生免疫力，就像对麻疹和腮腺炎一样——但那是在他们把它传给其他孩子之后。

不幸的是，感染我的那个迷因要难摆脱得多，因为它有趣得多。我说的是围棋。

这种游戏在一张 19×19 方格棋盘上进行。每位玩家一开始都有大量棋子——先手执黑，后手执白。双方轮流将一枚棋子放在一个网格点上。当一群同色棋子被另一种颜色的棋子包围时，它们就会“死去”，并从棋盘上移除。更准确地说，当一枚棋子同色的最近邻没有同色最近邻，而这些最近邻又没有同色最近邻，如此反复……直到最近邻中仍有空着的网格点时，我们就说这枚棋子“死了”。

另外还有两条辅助规则，旨在避免荒谬情况的发生。

首先，不得将一枚棋子放在会立即死去的位置，除非这样做会立即杀死对手的一枚或多枚其他棋子——在这种情况下，对手的棋子会死去，而你的棋子存活。

其次，如果你落下棋子吃掉了对方的一枚棋子，但对方可以立即将那枚棋子放回并吃掉你的棋子，从而导致无限循环，我们就说出现了“劫”。在这种情况下，禁止对方立即放回棋子。

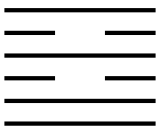
如何获胜？简单来说，目标是最终获得尽可能多的“地盘”。地盘包括被己方棋子占据的网格点，也包括对方无法占据、否则其棋子最终会被吃掉的空网格点。（实际上，围棋棋手不会厮杀到最后，因此地盘还包括那些“注定会死”的对方棋子。）

基本上就是这样！

妙处在于，从这些简单规则出发，一个策略的世界便徐徐展开，其中既有各种具体技巧，也蕴含着关于“力量”“地盘”和“威胁”的普遍哲理。在一盘好棋中，双方一开始都会高效地圈出一些地盘，把棋子间隔较远地落下；初学者看起来会觉得这像是随意摆放，但实际上，这种布局在过于保守和过于冒进之间取得了微妙的平衡。中盘阶段始于双方开始试图包围对方，并威胁要吃掉对方的棋子。不过要注意：威胁吃掉棋子有时比真的吃掉它们更有利，而“包围”与“被包围”之间的区别也相当微妙！到了收官阶段，地盘几乎都已划定，只剩下边上的一些小争夺。对初学者来说，收官出乎意料地难，因为即使到了这个阶段，也可能眼看胜利在望，却最终功亏一篑。

据说，一盘下得精妙的围棋就像一件艺术品，所有对立的力量都在和谐的格局中得到了巧妙的平衡。作为一名数学物理学家，它让我想起处于相变时的伊辛模型：此时黑色网格点和白色网格点一样多，而且两种色荷的星系团都可以任意大。或许，这与“自组织临界性”理论确实存在联系；在这一理论中，系统会自发演化到相变的边缘。

据说，围棋是在四千至六千年前于中国发展起来的。它的早期历史晦暗不明，但据说它最初并非一种游戏，而是用于占卜和教授军事战略的工具。我不是专家，但在我看来，围棋很好地体现了阴阳哲学——宇宙的动态复杂性源自二元对立面的辩证互动这一思想。想了解我所说的内容，没有什么比《易经》——《周易》更好的入门读物了。这部中国占卜文献编纂于公元前9世纪，但其中的材料很可能至少早几百年就已出现。此书阐述了64种“卦象”的含义，每种卦象都是由6比特信息构成的图案，例如：



莱布尼茨从中国人那里借鉴了用比特描述复杂模式这一思想。他发明了二进制算术的概念，并梦想以简单规则为基础，用纯机械的方法处理逻辑。当然，如今这些思想主导着现代技术！因此，围棋至今仍吸引着许多数学家和物理学家，或许并不令人意外。

事实上，我敢打赌，你们中的一些人正暗自发笑，想知道我为什么没早点学围棋！原因是，我一直避免玩游戏，除了数理物理这场“伟大的游戏”。直到上上个周末，我在圣拉斐尔拜访朋友 Bruce Smith 时，才第一次尝试玩围棋；此前我刚在

斯坦福做了一场关于量子四面体的演讲。Bruce 向我讲解了围棋，还告诉我围棋在哲学上颇为有趣。但最重要的是，他向我展示了一个会下围棋的计算机程序。计算机不太擅长围棋，但足以击败像我这样的业余棋手，所以刚开始时，它们很适合用来学习；而且不知为何，比起和另一个人下棋，我更喜欢和计算机下棋——或许是因为计算机不会炫耀。

我对弈的计算机程序名为“GNU Go”。感谢自由软件基金会，你可以从互联网免费下载它：

2）GNU Go, http://www.gnu.org/software/gnugo/

你可以调整棋盘的大小，也可以调整让子数——也就是开局时你立即获得的棋子数。要在 UNIX 环境中使用这个程序，你需要一个名为“cgoban”的界面程序，它也是免费的：

3）CGoban, http://www.inetarena.com/~wms/comp/cgoban/

在 Windows 上，你可以使用 GNU Go 网页提供的界面程序。想了解更多有关围棋的信息，请从这里开始：

4）美国围棋协会，http://www.usgo.org/

你可以在这个网站上找到许多围棋书籍。我个人觉得这些书是了解这项游戏的不错入门读物，但它们可能不太容易找到：

5）日本棋院，《围棋：世界上最迷人的游戏》，两卷，Sokosha 印刷公司，东京，1973年。

等你棋力更进一步后，还有许多书可读，书名也很有趣，比如《增强侵入能力》《削减地域框架》和《利用外势》。学习“定式”，也就是布局，颇有裨益：

6）石田芳夫，《基本定式辞典》，3卷，Ishi Press International，圣何塞，加利福尼亚州，1977年。

学习“死活题”也很有好处，你需要判断在各种棋形下哪一方能够获胜。数学家会把这称为围棋的“局部”分析：

7）赵治勋，《关于死活的一切》，共两卷，Ishi Press International，加利福尼亚州圣何塞，1993年。

Ishi Press 还出版了许多其他围棋书籍，但我还没能找到它们。我对其中一本书颇感兴趣，它讲的是一个名为“厚势”的抽象难题，因为我怀疑这是一个全局性而非局部性的概念：

8）石田芳夫，《关于厚势的一切：理解模样与影响力》，Ishi Press International，加利福尼亚州圣何塞。

如果你想用数学的方式研究围棋官子，可以看看这本书：

9）Elwyn Berlekamp 和 David Wolfe，《数学围棋：*Chilling Gets the Last Point*》，A. K. Peters，马萨诸塞州韦尔斯利，1994年。

如果你想动手计算，不妨试试这个：

10) Markus Enzenberger，将先验知识融入围棋对弈神经网络，
http://www.cgl.ucsf.edu/go/Programs/neurogo-html/NeuroGo.html

如果你更喜欢蜷在舒适处，读一本以围棋为题材的好小说，不妨试试这本：

11) 川端康成，《名人》，Edward G. Seidensticker 译，Knopf，纽约，1972。

换个话题，下面是两种不错的《易经》版本：

12)《易经》，译者：卫礼贤和 Cary F. Baynes，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1969年。

《周易》：《易经》新译，以王弼的诠释为依据，译者：Richard John Lynn，哥伦比亚大学出版社，1994年。

好了。文化聊够了——该来点数学了！

David Carlton 邀请我去了斯坦福大学。他从事模形式研究，我从他和他的朋友那里得知，志村–谷山–韦伊猜想已经得到证明！这本来可以成为 This Week's Finds 的一条独家新闻，但如今这一消息已经刊登在《美国数学会通报》上，因此大家都知道了：

13) Henri Darmon，《完整的志村–谷山–韦伊猜想证明已公布》，《美国数学会通报》，**46** 第11期（1999年12月），1397–1401页。另可见
https://www.ams.org/notices/199911/comm-darmon.pdf

Andrew Wiles 为证明费马大定理，证明了这个猜想的一部分；但这个猜想实际上比费马大定理有趣得多，而 Breuil、Conrad、Diamond 和 Taylor 在今年夏季宣布，已经证明了整个猜想。

这个猜想说了什么？

首先，你得了解一些关于椭圆曲线的知识。“椭圆曲线”是形如下面这个方程的解所构成的空间：

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

它们自然地出现在弦理论中，我已经在“第13周”和“第124周”–“第127周”中谈过它们。如果所有变量都是复数，那么椭圆曲线看起来像一个环面，但数论学家喜欢考虑系数 a 和 b 为有理数的情形。通过简单地变换变量，可以将系数化为整数。这样一来，对素数 p取模就有意义了：换句话说，可以把所有变量都看作属于整数模 p构成的场，也就是 $\mathbb{Z}/p$。如果足够聪明，就能判断一条椭圆曲线在模 p 意义下是“奇异”还是

非奇异：这就像是光滑流形。人们说，如果一条椭圆曲线模 p 非奇异，那么它在 p 处有“良好降维”。对于任意给定的椭圆曲线，除有限多个素数外，这一性质都成立。

任何椭圆曲线 E 模 p 都只有有限多个点。我们把这些点的数目称为$N(E,\ p)$，并设

$$a(E,p) = p - N(E,p).$$

如果这个数列满足某个条件——我马上就会说明——我们就说这条椭圆曲线是“模的”。志村–谷山–韦伊猜想断言，所有椭圆曲线都是模的。

好，那么“模的”是什么意思呢？为此，我们需要稍微岔开一下，谈谈模形式。在“第125周”中，我描述了椭圆曲线模空间，也就是椭圆曲线可能具有的所有不同形状所构成的空间。我说明了这个空间是$H/\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$，其中 H 是复平面的上半部分，而$\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$ 是由2×2 行列式为1的整数矩阵组成的群。模形式基本上就是椭圆曲线模空间上某个线丛的一个全纯截面。不过，如果这听起来太高深，也别害怕！我们也可以把它看作上半平面上的一个解析函数，它在$\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z})$的作用下以一种良好的方式变换。记住，任何矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 中的作用于上半平面如下：

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

对于解析函数 $f\colon\ H \to \mathbb{C}$，若要成为“权重为 k 的模形式”，它必须按如下方式变换：

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

其中 k 是某个整数。我们还要求 f 在 $\tau \to \infty$ 时满足某些增长条件，这样就可以将其展开为 Taylor 级数

$$f(\tau) = \sum a_n q^n$$

其中

$$q = \exp(2\pi i \tau)$$

是一个变量；当 $\tau = \infty$ 时它等于 0。最优美的模形式是“尖点形式”，它们具有 $a_0 = 0$，因此在 $\tau = \infty$ 处消失。

接下来，如果我们用各种子群替换 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，就可以直接推广我刚才说的一切。（这相当于研究某个带有额外结构的椭圆曲线模空间上，线丛的全纯截面。）例如，我们可以使用子群 $\Gamma_0(N)$，它由 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 中左下角元素可被 N 整除的矩阵构成。若使用这个群代替 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，就会得到所谓的“层数为 N”的模形式。我们像之前一样定义这类模形式的“权重”，尖点形式也同样如此。

现在我们可以说明椭圆曲线是模的究竟是什么意思了！如果对于某个 N，存在一个权重为 2、层数为 N 的尖点形式，那么我们就称椭圆曲线 E 是“模的”。

$$f(\tau) = \sum a_n q^n$$

归一化，使得 $a_1 = 1$，且具有如下性质：

$$a_p = a(E, p)$$

对于所有使 E 具有良约化的素数 p。

现在你知道志村–谷山–韦伊猜想的内容了：所有椭圆曲线都是模的！这显然并不能直接推出费马大定理，但借助 Gerhard Frey 发明的一个技巧，确实可以推出。

事实证明，志村–谷山–韦伊猜想、一个名为朗兰兹纲领的理论，以及拓扑量子场论之间存在着令人着迷却又神秘的联系：

14) Mikhail Kapranov，《朗兰兹对应与拓扑量子场论之间的类比》，载于《*21*世纪前夕的泛函分析》，第一卷，Birkhauser，波士顿，1995年，第119–151页。

正因如此——还有其他原因——David Carlton 和他的一些朋友对 n-范畴感兴趣，也就不足为奇了。事实上，Carlton 发现了我和 James Dolan 所给出的 n-范畴定义中的一个小错误——原来定义中某个特定位置的数字“1”应该是数字“2”！能发现这类问题的人，就是我的朋友。

更妙的是，Carlton 现在对理解所有 n-范畴构成的 $(n+1)$-范畴感兴趣；这对于真正开展任何有关 n-范畴的工作都至关重要。Makkai 就这个主题写了一篇新论文，我现在才意识到自己从未在 This Week's Finds 中提过这篇论文，所以最后让我引用一下摘要。摘要相当长，也很详细，大概只有 n-范畴迷才会感兴趣……

15) M. Makkai，《所有多主题 ω-范畴构成的多主题 ω-范畴》，可在以下网址获取：
www.math.mcgill.ca/makkai/mltomcat04/mltomcat04.pdf

> “本文给出了两个定义：一是“多主题 ω-范畴”的定义，二是“所有（小）多主题 ω-范畴组成的（大）多主题集合”的定义。本文还宣布了这样一个定理：后者是一个多主题 ω-范畴。（该定理的证明将收录在本文的后续论文中。）
>
> 这项工作的直接来源有两个。其一是论文 *[H/M/P]*（参考文献见本摘要末尾），该文介绍了“多主题集合”这一概念。其二是本文作者关于 *FOLDS*（依赖类型的一阶逻辑）的研究。后一项工作曾在 *[M2]*中作过报告。关于 *FOLDS* 的研究详述于 *[M3]*。要理解本文，*[M2]* 中的内容就足够了。事实上，本文第*1*节给出了本文所需的一切定义；因此，或许甚至无需查阅 *[M2]*。

多主题集合这一概念是 *[H/M/P],* 的主要贡献，而它又受到 *J. Baez* 和 *J. Dolan* 的工作的启发 *[B/D]*。多主题集合是上述文献中 *opetopic* 集的一种变体。*“*多主题集合*”*这一名称指的是多范畴；这一概念最初由 *J. Lambek* 提出 *[L],* ，并在 *[H/M/P]*中给出了仅作适度推广的表述。 *[B/D]* 中较早提出的*“opetopic* 集*”*则基于运算子这一概念。我想说明的是，这两个概念（*“*多主题集合*”*和*“opetopic* 集*”*）之间确切的关系仍未厘清。多主题集合理论比 *opetopic* 集理论更为成熟，主要体现在： *[H/M/P],* 中明确地定义了一个多主题形范畴 Mlt ，且多主题集合范畴等价于从Mlt到Set的函子范畴；这一结果在 *[H/M/P]*中给出了详细证明。 *[B/D],* 中也断言了关于 *opetopic* 集和 *opetopes* 的相应结论，但并未描述 *opetopes* 范畴。本文中，多主题形范畴起着基础性作用。

本文第*2*节介绍了多主题集合和多主题形；如需完整论述，请参阅论文 *[H/M/P]* 。

本工作的研究在很大程度上承袭了 *Baez* 和 *Dolan* 的成果，甚至超过了 *[H/M/P]*。*Baez/Dolan* 定义的第二个要素（排在*“opetopic* 集*”*之后）是*“*泛胞腔*”*这一概念。*Baez/Dolan* 对弱 n范畴的定义，实现了一项非凡的成就：通过 *opetopic* 集中成立的泛性质来规定复合结构。具体而言，一个（弱） *opetopic*（高维）范畴是一个具有附加性质（但没有附加数据）的 *opetopic* 集；其中最主要的附加性质是存在足够多的泛胞腔。这与通过泛性质来规定*“*初等拓扑斯*”*等概念的方式十分相似：在我们的情形中，*“*多主题集合*”*扮演了*“*基础*”*的角色，而在*“*初等拓扑斯*”*的定义中，这一角色由*“*范畴*”*承担。在 *[H/M/P],* 中没有定义泛胞腔，不过文中提到，可以通过模仿 *[B/D],* 毫不费力地补上其定义。本文则通过使用 *[M2]*的 *FOLDS*-等价概念，给出了*“*泛（复合）结构*”*。

在 *[M2],* 中，介绍了*“FOLDS*-签名*”*和*“FOLDS*-等价*”*的概念。一个（ *FOLDS*-）签名是具有某些特殊性质的范畴。对于签名 L， *L*-结构是从 L到集合范畴的函子。对于每个签名 L，定义了两个变量 L-结构之间的一种特殊关系，称为 L-等价。两个 L-结构 M、N 是 L-等价的，当且仅当它们之间存在所谓的 L-等价跨度 $M \leftarrow P \rightarrow N$ ；其中的箭头是普通的自然变换，并且要求满足一种称为*“*纤维逐点满射性*”*的特定性质。

这项关于 *FOLDS* 的工作 *[M2], [M3]* 的口号是：所有有意义的 L-结构的性质，在 L-等价下都是不变量。和所有口号一样，它既是一种规范性陈述（*“*不应考察在 L-等价下不具不变性的 L-结构性质*”*），也是一种事实陈述，即 L-结构的*“*有趣*”*性质实际上在 L-等价下都是不变量。（有些口号的*“*事实陈述*”*可能是错误的。）范畴论中通常所说的*“*等价*”*概念，包括更高维的概念

例如“双等价”，在对签名 L 作出适当且自然的选择后，都是 L-等价的特例；*[M3]* 给出了若干这样的例子。因此，在这些情况下，上述口号便成为范畴论学者普遍认同的一条准则。我主张，它在上述一般性表述下同样成立。

M 的主要工作是指定一种语言——依赖类型的一阶逻辑，并证明在L-等价下保持不变的一阶性质，恰好就是能够用 *FOLDS* 定义的性质。本文中，*FOLDS* 语言并不起作用。*“FOLDS*-签名”和*“FOLDS*-等价”的概念在本文第*1*节中有完整描述。

多主题范畴 ω的定义大致如下。对于一个任意的、维数为 $\geqslant 2$的多主题形 Σ，对于一个多主题集合 S，对于 S 中形状为 Σ 的一个粘贴图 α，以及 S 中形状为 Σ的一个细胞 a，若 a 和 α 平行，我们定义 a 是 α的一个复合意味着什么。首先，我们定义一个辅助的 *FOLDS* 签名 $L\langle\Sigma\rangle$，它扩展了Mlt（多主题集合的签名）。接着，我们定义结构 $S\langle a\rangle$和 $S\langle\alpha\rangle$，二者的签名均为 $L\langle\Sigma\rangle$；前者由数据 S 和a 构造，后者由 S 和 α构造，并且这两个结构都扩展了 S 本身。如果存在一个 *FOLDS*- 等价跨度 E，连接 $S\langle a\rangle$ 与 $S\langle\alpha\rangle$，且其限制是从 S 到 S 的恒等等价跨度，我们就称 a 是 α 的复合。下文中，我会把 E称为使 a 成为 α的复合的设备。一个多主题集合是多主题范畴ω，当且仅当其中的每个粘贴图 α 至少有一个复合。

Baez/Dolan 风格定义中的泛箭头，其对应版本如下。泛箭头定义为形如 b: $\alpha \to a$ 的箭头，其中a 是通过设备 E 对 b 进行的 α 复合，该设备将其与 a 上的恒等箭头联系起来：反过来，a 上的恒等箭头是基于 a的、维数为 $\dim(a)+1$ 的空粘贴图的任意复合。注意，主要定义并没有先通过定义“泛箭头”来展开。

本书处理方式的一个新特点是，它直接着眼于弱 ω-范畴；有限维的范畴则作为完整概念的截断版本得到。*[B/D]* 中的处理涉及有限维弱范畴。需要强调的是，多主题 ω-范畴仍然只是具有附加性质的多主题集合，并没有额外的数据。

“多主题 ω-范畴”的定义见第*5*节；它用到了第*1*、*2*和*4*节，但没有用到第*3*节。

本文完成的第二项主要工作是定义MltOmegaCat。它是一个特定的大型多主题集合。其定义直到论文结尾才完成。MltOmegaCat 的*0*-胞腔是小型多主题 ω-范畴，在第*5*节中定义。它的*1*-胞腔，我们称之为*1*-传子（借用了 *Sjoerd Crans [Cr]* 使用的一个术语，并改变了其含义），代表多主题 ω-范畴的“态射”或“函子”。例如，在2维情形下，多主题2-范畴通过某种“裂分”过程对应于普通双范畴，而*1*-传子则对应于双范畴的同态 *[Be]*。对于 $\mathbb{N}$中的每个 n，都有 n维传子。对于每个多胞体（即“高维胞腔的形状”） PI，我们都有 PI-传子，它们是<*MltOmegaCat*>中形状为 PI 的细胞。

对于每个固定的多胞体 PI，一个 PI-传子是一个具有附加性质的 PI-带色荷的多主题集合。“PI-带色荷的多主题集合”在第3节中定义；当 PI 是唯一的零维多胞体时， PI-带色荷的多主题集合与普通多主题集合相同。因此，任意维数和形状的传子的定义，是对“多主题 ω-范畴”定义的推广；其附加性质也类似，都是通过基于 *FOLDS* 的泛性质来定义。不过这里有一个新的元素。对于$\dim(PI) \geqslant 2$， PI-传子的概念涉及一个泛性质，它是右 *Kan* 扩张概念的一种 ω维、*FOLDS* 风格的推广（按照 *Ross Street* 使用的术语，即右提升）。这是“右伴随”类型的泛性质，与复合概念中涉及的“左伴随”类型相对（复合是模中通常张量积的一种推广）。

这里陈述但未证明的主要定理是：MItOmegaCat 是一个多主题的 ω-范畴。

本文中的材料已被用于构造同伦论中各种概念的 ω维版本；详情将另文发表。

参考文献：

[B/D] J. C. Baez 和 *J. Dolan*，《高维代数 *III.* n-范畴与 *opetopes* 代数》。《*style id='4'*>《数学进展》**135** （*1998*年），*145–206*。

[Be] J. Benabou，《双范畴导论》。载于：《数学讲义》**47**，施普林格，柏林，*1967*年，第*1–77*页。

[Cr] S. Crans，《变换子的局部化》。麦考瑞数学报告第**98/237**号。

[H/M/P] C. Hermida、*M. Makkai* 和 *J. Power*，《论弱高维范畴 *I*》，《纯粹与应用代数杂志》，**154** （*2000*年），*221–246*。

[L] J. Lambek，《演绎系统与范畴 *II*》。《数学讲义》 **86**施普林格，柏林，*1969*年，第*76–122*页

[M2] M. Makkai，《迈向数学的范畴论基础》。载于：逻辑学术研讨会 '95 （*J. A. Makowski* 和 *E. V. Ravve* 编）《逻辑讲义》**11**，施普林格，柏林，*1998*年。

[M3] M. Makkai，《依赖类型的一阶逻辑》，可在以下网址获取：
https://www.math.mcgill.ca/makkai/folds/foldsinpdf/FOLDS.pdf

第143周

1999年12月29日

既然这是千年中的最后一周，我会确保内容充实，刊载许多回顾与展望。不过，我想先更新一下之前谈过的一件事。

顺便说一句，请不要因为千年从2001年开始这件事而责怪我。我使用的是公元纪年或公元纪年制，它从零年开始计数，而不是公元纪年制，因为公元纪年制由矮小的丹尼斯于公元526年发明，当时零这个数字还远未普及。在我看来，真正的“千年虫”是居然还有人使用过时的公元纪年制！

无论如何……

在“第73周”中，我提到过一个理论，用来解释为什么对生物学很重要的分子往往具有一致的手性，或称左右手性。例如，自然界中有大量右旋糖——它是蔗糖的右手性形式——但其左手性对应物左旋糖却不多。左右两者中有一个占主导地位并不令人意外，但你可能会猜想，究竟哪一个占主导地位，只是历史上的偶然。毕竟，右和左之间并不存在根本差异，对吧？

还是没有区别吗？其实是有的：弱核力能区分二者！因此，有些人提出理论认为，弱力造成的能级微小差异，会促使左手性氨基酸和右手性糖类形成——而这正是我们在自然界中看到的现象。

最近，人们发现了证据，支持这一理论的一个略有不同的版本：

1) Robert F. Service，《生命的左右手性源自内部吗？》，《科学》**第286卷**（1999年11月12日），1282–1283。

放射性原子通过弱力衰变时，释放出的电子往往具有左手性自旋。这会不会影响附近正在形成的分子或晶体的左右手性？氯酸钠是一种能形成左手性和右手性晶体的化学物质，因此研究人员取了一些氯酸钠溶液，让其在受到放射性锶衰变产生的电子轰击时结晶。果然，这使晶体的左右手性出现了偏向！用右手性正电子轰击氯酸钠，则有利于形成具有对偶范畴手性的晶体。最奇怪的是，这种效应甚至比预期的还要大。

我仍然觉得整件事相当可疑——毕竟，这次实验中的辐射通量比我们通常在地球上观测到的要大得多。不过，如果生物学中手性的起源与粒子物理学中更深层的手性之谜有关，那确实会很有意思。

好了，现在来稍作回顾。别担心——我不会列出过去一个千年里数理物理领域的十大进展！我只是想推荐两篇论文。首先，是庞加莱的一篇旧论文：

2）亨利·庞加莱′，《数学物理学的现在与未来》，《美国数学会通报》**12**（1906年），240–260。后来作为《美国数学会通报》回顾专刊的一部分重新刊载，《美国数学会通报》，**37**（2000年），25–38。另见 https://www.ams.org/bull/2000-37-01/S0273-0979-99-00801-0/S0273-0979-99-00801-0.pdf

本文基于他在1904年发表的一篇演讲。在精彩回顾数理物理的发展历程后，他对量子力学和狭义相对论作出了一些准确的预言——但最后以保守的观点收尾：

> 我们无法预见将朝哪个方向发展。或许气体动理论会率先取得进展，并成为其他理论的模型。倘若如此，那么起初在我们看来简单的事实，便不过是大量基本事实的合成结果，而只有概率定律才能促使这些事实朝着同一目标发挥作用。这样一来，物理定律将呈现出全新的面貌；它不再仅仅是一条微分方程，而会具有统计定律的性质。
>
> 或许我们还得构建一套全新的力学，而我们目前只能略窥其端倪：在这套力学中，惯性会随着速度的增加而增大，光速将成为一道不可逾越的极限。普通而简单的力学则会作为第一近似继续存在，因为它适用于速度不太大的情况；因此，旧的动力学也会包含在新的动力学之中。我们没有理由后悔曾经相信旧的原理；事实上，由于那些对旧公式而言过大的速度始终是例外，实践中最稳妥的做法仍是假定我们继续相信它们。它们如此有用，理应为其保留一席之地。若想将它们彻底摒弃，无异于放弃一件宝贵的武器。最后我赶紧补充一句：我们还没有走到那一步，目前也没有任何证据表明它们不会在这场争斗中完好无损地胜出。

同一期《美国数学会通报》还刊载了许多其他有趣的论文和书评，作者包括上世纪的Birkhoff、爱因斯坦和 Weyl。

我推荐的第二篇论文是 Rovelli 的一篇新作：

3）Carlo Rovelli，《不完整革命的世纪：探寻广义相对论量子场论》，《数学物理学杂志》**41** （2000年），3776–3800。也可见hep-th/9910131。

我来引用一下摘要：

> 在基础物理学领域，这是量子力学与广义相对论的世纪。这也是人们长期探寻一种概念框架的世纪，期望它能够包容这两场“概念革命的先声”所揭示的世界令人惊叹的特性。我将讨论对数学的一般要求，以及构建这种框架的一些具体进展。协变地构造（简单的）广义相对论量子场论，已有若干实例：拓扑量子场论、非微扰零维弦理论及其更高维推广，以及自旋泡沫模型。圈量子引力则提供了一种广义相对论量子场论的正则构造。值得注意的是，这些迥然不同的方法最终都显示出彼此关联，指向一幅引人入胜的广义相对论量子物理学总体图景。

现在来谈谈预测。我们不应忘记，数理物理那些高耸入云的抽象理论，最终都要接受实验的检验；因此，我想谈谈新千年即将开展的一些有趣的物理实验 。如今，越来越多关于物理学的有趣信息来自天文学，因此我将重点关注处于这两个领域交界处的研究。

在“第80周”中，我谈到了引力探针B将如何尝试探测一种由地球旋转引起、名为“参考系拖曳”的广义相对论效应。我还谈到了LIGO——激光干涉引力波天文台——将如何尝试探测引力波：

4）LIGO主页，http://www.ligo.caltech.edu/

如果一切按计划进行，LIGO将非常适合研究双黑洞和／或中子星的最终死亡螺旋。当它大约在2002年开始采集数据时，应该能够探测到室女座星系团中一对彼此螺旋靠近的中子星产生的引力辐射最终“啁啾信号”。室女座星系团是一个距离约15百万秒差距的星系团。这样的事件只会使这里的时空度规产生约 10^{21}分之一的畸变。这就是为什么LIGO需要以 10^{-16} 厘米的精度比较干涉仪两条臂的长度振荡；每条臂长4公里：这一精度约为氢原子直径的一亿分之一。要做到这一点，需要运用一些非常巧妙的技巧来降低噪声。

随着实验继续进行，他们打算提高灵敏度，直到能够探测到度量中仅为 10^{22}, 分之一的畸变；第二代探测器则应能达到 10^{23}分之一。在那时，我们应该能够探测到距离为200百万秒差距的中子星“啁啾信号”。这类事件应该每年发生一到两次。

由于排除虚假信号至关重要，LIGO将设有两台探测器，一台位于路易斯安那州利文斯顿，另一台位于华盛顿州汉福德。这也应能让我们判断引力波来自哪里。此外，还有其他引力波探测项目正在进行！法国和德国正合作建造一台名为VIRGO的激光干涉仪，其臂长为3公里，计划建于意大利卡希纳：

5）VIRGO主页，https://www.virgo-gw.eu/

德国和大不列颠正合作建造一台名为GEO 600的探测器，臂长为600米，计划建于汉诺威以南：

6) GEO 600 主页，https://www.geo600.org/

Th日本人正在建造一台名为 TAMA 300 的设备，它是一台长 300 米的预备型
for 一台规划中的、长达一公里的干涉仪：

7) TAMA 300 主页，http://gwpo.nao.ac.jp/en/

此外，巴西 GRAVITON 项目正在建造一种名为爱因斯坦天线的装置，它利用机械共振，而非干涉测量。其基本原理可以追溯到约瑟夫·韦伯最初设计的棒状探测器：这些探测器试图感测引力波引起的、长达 2 米的铝圆柱体的振动。不过，这种设计采用了许多前沿技术：超导量子干涉器件、巴基球等等：

8）GRAVITON 主页，
https://web.archive.org/web/19991108211006/http://www.das.inpe.br/graviton/project.html

此外，还有其他引力波探测器正在建造.....但归根结底，最好的探测器很可能会建在外层空间。这有两个充分的理由。首先，外层空间很广阔：当你试图探测时空几何的微小畸变时，测量相距很远的点之间的距离会有所帮助。其次，外层空间没有地震噪声，也几乎没有其他振动源。这就是人们正在推进 LISA项目——激光干涉空间天线的原因：

9）美国国家航空航天局 LISA项目主页，http://lisa.nasa.gov/
维基百科，激光干涉空间天线，
https://en.wikipedia.org/wiki/LaserInterferometer Space Antenna

设想让3颗卫星沿等边三角形轨道运行，边长为500万千米，并持续使用激光干涉测量它们之间的距离，精度达到十分之一埃—— 10^{-11} 米。（该计划的一个修改版本将使用6颗卫星。）如此巨大的距离将使探测频率为0.0001至0.1赫兹的引力波成为可能，远低于地面探测器所针对的频率。该计划还采用了一项相当酷的技术方案，防止卫星受到太阳风等因素的推动而偏离轨道：每颗卫星内部都悬浮着一个自由下落金属立方体；如果卫星相对于这个立方体被推向一侧，传感器就会检测到这一情况，推进器则会将卫星推回轨道。

我认为 LISA 还没有获得资金支持，但如果一切顺利，它或许会在大约 10 年内发射。最终，一个名为 LISA 2 的项目或许能灵敏到足以探测早期宇宙遗留下来的引力波——这相当于宇宙微波背景辐射的引力版本！

微波背景辐射告诉我们宇宙大约在10^5 岁时的情况，因为那时宇宙冷却到足以让大部分氢不再电离，从而使电磁辐射能够穿过。在物理学术语中，这就是电磁辐射“脱耦”的时刻。而引力背景辐射则会告诉我们宇宙大约在 10^{-38} 秒时的情况，因为那时引力辐射发生了脱耦。由于我们尚不了解的物理学，这个数字可能会相差很大，但无论如何，我们谈论的是一扇窥见真正早期宇宙的窗口。

实际上，加州理工学院的 Mark Kamionkowski 曾提出理论，认为欧洲空间局的“普朗克”卫星或许能通过其使微波背景辐射偏振的倾向，探测到引力背景辐射的细微迹象。你可能听说过，COBE（宇宙背景探测者）探测到了微波背景辐射中细微的各向异性。如今，人们将以高得多的精度重新进行这项观测：COBE 的角分辨率为 7 度，而普朗克的分辨率将达到 4 角分。人们希望能在 2007年发射它：

10) 维基百科，普朗克（航天器），
https://en.wikipedia.org/wiki/Planck(spacecraft)

接下来还有什么？嗯，引力领域的人应该会对新型卫星X射线望远镜感到高兴，因为它们非常适合观测黑洞。1999年7月，美国国家航空航天局发射了一台名为“钱德拉”的望远镜。（这是苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡的昵称；他因在恒星演化、中子星、黑洞和广义相对论闭式解方面的研究，于1983年获得诺贝尔奖。）钱德拉拍摄的首批图像已经陆续发布——看看这个网站：

11）钱德拉主页，http://chandra.harvard.edu/

12月10日，欧洲人发射了XMM“X射线多镜任务”：

12）XMM主页，https://en.wikipedia.org/wiki/XMM-Newton

这是由三台X射线望远镜组成的系统，其角分辨率低于钱德拉，但灵敏度高出5至15倍。它还能够研究X射线光谱，这要归功于一种衍射光栅，它能按波长将X射线分散开来。而在1月，日本人计划发射ASTRO-E，旨在观测波长更短的X射线：

13）维基百科，朱雀：ASTRO-E，
https://en.wikipedia.org/wiki/Suzaku(satellite)#ASTRO-E

总的来说，这一代新型X射线望远镜应该能让我们深入了解黑洞中快速变化的吸积盘的动力学。在那里，内落气体和尘埃盘旋着落入其中，并不断升温，直至发出X射线。它们也可能帮助我们更好地理解 γ射线暴的X射线余辉。你大概听说过，这些家伙让普通超新星看起来就像湿掉的鞭炮！有些人认为，它们是超新星形成黑洞时产生的。但谁也不能确定。

展望更遥远的未来，这里有篇不错的文章，介绍了人们构想中的一些利用天文学研究物理学的新项目：

14) Robert Irion，《空间变成物理实验室》，《科学》**第286卷**(1999年)，2060–2062。

人们计划于2005年发射GLAST，即伽马射线大面积空间望远镜，用于研究 γ射线暴等现象；还计划发射阿尔法磁谱仪，用来搜寻空间中的反物质。不过，还有一大批有趣的项目，目前基本上还只是某人脑海中的一个念头……

例如：OWL，即轨道宽视场光收集器，由一对卫星组成，用来追踪超高能宇宙射线穿过地球大气层的路径。正如我在“第81周”中解释的那样，人们已经观测到了能量高得惊人的宇宙射线，比如 320 EeV——相当于一块 1 千克的岩石以每秒 10 米的速度运动所具有的能量，却全都集中在一个粒子中。OWL 会绕地球运行，观测这些射线，并弄清楚它们究竟来自哪里。

或者这个怎么样：暗物质望远镜！它将利用引力透镜绘制“暗物质”分布图；这种物质似乎占据了宇宙总质量的相当大一部分——当然，前提是暗物质确实存在。

15）维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Vera_C._Rubin_Observatory

总之，未来应该会有许多令人兴奋的实验。不过，和往常一样，
re真正令人兴奋的，将是那些我们无法预测的事情。

第144周

2000年1月21日

由于这是新千年的第一个周，我想先窥探一下未来。不只是未来一百年或一千年——我已经厌倦了短期规划。不，我想谈谈未来几个<style id='1'>十亿年。

你们大概都听说过，如果我们对此无所作为，大约50亿年后太阳就会变成一颗红巨星。只要我们能把事情安排妥当，就应该有充足的时间来解决这个问题。但在规划遥远的未来时，眼光过于狭隘是很危险的！太阳系之外发生的事情也可能影响我们。比如，一颗附近的超新星就可能带来严重后果。这并非史无前例：似乎大约34万年前，距我们仅180光年的地方就发生过一次超新星爆发。如此近的距离下，它会亮得如同满月，其X射线和 γ射线还会在一段时间内严重破坏地球臭氧层。距离更近的超新星可能造成更严重的后果。

我们怎么知道这次超新星爆发的事呢？这背后的故事很有趣。我们恰好生活在一个名为本地泡的空间区域中，它的跨度约为300光年；其中的星际气体温度更高，密度只有周围区域的五分之一到十分之一。人们一直想弄清这个气泡的起源，直到他们研究了距离我们约300光年的一颗名为Geminga的脉冲星。脉冲星是由超新星形成、快速自旋的中子星；通过研究它们的自转速率以及自旋减慢的速率，就能推测它们形成的时间。结果发现，Geminga大约有34万年历史。它正以已知的速率远离我们，因此在那时，它距离我们约180光年——恰好处在一个超新星可能产生冲击波、形成本地泡的位置。

我不知道关于本地泡的最佳读物是什么，但这本听起来很不错：

1) M. J. Freyberg 和 J. Trumper 编，《本地泡及其之外》，施普林格《物理学讲义》第506卷，施普林格，柏林，1998年。

放眼更远，我们也应该关注整个银河系的健康状况：

2) Robert Irion，《银河系的毁灭性结局》，《科学》287（2000年），62–64。

3) Roland Buser，《银河系的形成与早期演化》，《科学》287（2000年），69–74。

现在看来，银河系和大多数大型螺旋星系一样，是由较小的恒星与气体云逐渐合并而形成的。看来这一过程尚未结束。1994年，人们发现有一个小星系绕银河系运行，它几乎完全隐没在银河系中心浓密的尘埃云后面。这个星系名为人马座矮星系，其质量只有银河系的约 1/1000分之一。它绕银河系运行的偏心轨道上散布着被潮汐力拉离它的恒星，而且它可能已经数次穿过银河系盘的外围区域。它或许无法挺过下一次掠过；那次掠过将在约7.5亿年后发生。

但这还不是全部。肉眼可见的大麦哲伦云和小麦哲伦云，
th南半球的……也是围绕我们的星系运行的矮星系。它们大得多，

比人马座矮星系大得多。它们也不只是围绕银河系运行：它们正逐渐螺旋内旋，并被撕裂。如果这个过程没有受到干扰，它们将在大约100亿年后撞上我们的星系。等到这一切发生时，气体相撞产生的冲击波应该会形成足够多的新恒星，让我们的星系在接下来的几亿年里亮度提高约25%！这对我们这一带来说，恐怕会相当令人头疼。

不过，我们还是不应犯地方主义的错误：远方的危险可能比近在咫尺的危险更为紧迫。我们附近的矮星系与仙女座星系相比根本不值一提。这个螺旋星系的大小是我们所在星系的两倍，距离我们约250万光年，从北半球清晰可见。遗憾的是，它正以每秒140公里的速度朝我们飞来！随着它越来越近，引力会使它加速，因此它可能会在短短30亿年内撞上我们的星系——或者至少从近处掠过。如果真是这样，这两个星系起初会彼此飞掠而过，甚至穿行其中，但随后它们的引力会把彼此拉回，经过再多10亿或20亿年，它们应该会合并成一个巨大的椭圆星系。恒星彼此直接撞击的可能性不大，但许多现有恒星会被抛入星系际空间，而气体云碰撞时也会诞生许多新恒星。

你也许会觉得，我说要为这类事件提前做规划是在开玩笑，但我不是。我们有充足的时间，所以并不十分紧迫——但现在开始考虑这些事情也不算太早。如果你觉得应对星系碰撞远远超出了我们的能力，请记住，30亿年前，我们还是单细胞生物。幸运的话，30亿年后的我们的能力，与现在相比，应该会像现在的我们的能力与微生物的能力相比一样悬殊！而且，如果地球上的生命搞砸了，最终灭绝了，那也没关系，宇宙中还有许多其他行星。

顺便说一下，既然我们在讨论星系方面的事情，还记得我上周说过，钱德拉X射线望远镜最近开始采集数据吗？有趣的消息已经传来了！长期以来，人们一直想弄清“X射线背景辐射”的源头：一种弥漫的X射线辉光，覆盖着整个天空。周四，使用钱德拉的天文学家发现，这种辐射实际上大多来自约7000万个独立点源！显然，其中许多是位于星系中心的超大质量黑洞。关于这类黑洞，我们已经有大量证据——它们似乎为类星体及其他活动星系核提供能量——但能发现数量如此庞大的黑洞，着实令人欣喜。这甚至可以被视为支持斯莫林假说的证据：宇宙通过达尔文进化的过程，优化了黑洞生成（详情请参见“第31周”和“第33周”）。

更多内容，请看这里：

4)“钱德拉解析宇宙X射线辉光并发现神秘的新源点”，见
http://chandra.harvard.edu/press/00 releases/press 011400bg.html
你还应该去钱德拉网站看看银河系和仙女座星系中心黑洞的新照片。

好吧……过去几周我有点偷懒，不过现在我想重拾一些硬核数学。特别是，我想聊聊 n-范畴与同伦论，所以我打算从大致上次停下的地方继续讲《 n-范畴的故事》，也就是《第100周》，并开始将它与我在《第115周》到《第119周》期间所作的同伦论简短介绍联系起来。

正如我多次说过的，n-范畴论的目标是从数学中消除方程，或者至少让我们能够随心所欲地推迟把同构当作方程来处理。我已经反复讲过这样做的实际好处，所以就不再赘述了——我就当你已经信服了！

为了实现这一目标，n-范畴应当是某种代数结构，包含对象、对象之间的态射、态射之间的 2-态射，依此类推，直至包括 n-态射，并且这些元素之间有各种复合方式。这样一来，我们就不应断言两个 j-态射**相等**，除非它们是 $j = n$。相反，我们只需指定它们之间的**等价**。“等价”有点像同构，但它是自上而下递归定义的。n-态射是等价，当且仅当它是同构，也就是说，当且仅当它可逆。而对于 $j < n$，j-态射是等价，当它在等价意义下可逆时。

目前关于 n-范畴有多种相互竞争的定义，但所有弱 n-范畴定义背后的核心思想是，j-态射的复合方式只需在等价意义下满足结合律及其他所有通常的定律。例如，假设我们在一个 1-范畴中有一些态射 $a\colon w \to x$, $b\colon w \to y$以及 $c\colon y \to z$。那么结合律是“严格成立”的，即满足如下等式：

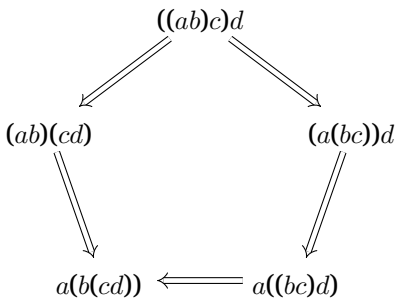
$$a(bc) = (ab)c.$$

在 1-范畴中，没有办法将这条定律“弱化”。但在弱 2-范畴中，结合律只在等价意义下成立。换句话说，我们有一个称为“结合子”的可逆 2-态射

$$A_{a,b,c} : (ab)c \Rightarrow a(bc)$$

它取代了上面的方程。

但这里有个问题：当我们以这种方式用等价取代等式律时，这些等价本身也必须满足一些定律，否则我们就无法对它们进行运算。这些定律称为“相干律”。对于结合子，必要的相干律称为五边形方程。它表示这个图表交换：



我没有在这里标出双箭头，但它们都是以显而易见的方式由结合子构成的 2-态射……至少，对了解 2-范畴的人来说是显而易见的。五边形方程说明，从 $((ab)c)d$ 到 $a(b(cd))$，通过重新加括号实现转换的两种基本方式彼此相等。事实上，Mac Lane 的“相干定理”指出，只要满足五边形方程，你就可以随心所欲地反复使用结合子，给任意多个态射的复合重新加括号，而不会出问题：从一种加括号方式转换到另一种的所有方法都彼此相等。

在弱3-范畴中，五边形方程被一个称为“五边形子”的 3-态射取代。它本身又满足一条新的相干律。我不太容易为你画出这条相干律，因为这需要一个具有14个顶点、形状称为“结合多面体”的三维图表。

正如你可能担心的，这个过程永无止境：关于结合律，有一份无穷的“高阶相容律”清单，可以用高维结合多面体来表示。这些相容律是 James Stasheff 大约在1963年发现的。以下是最初的论文：

5) James Stasheff，《H-空间的同伦结合性 I》，美国数学会汇刊**108** (1963年)，275–292。James Stasheff，《H-空间的同伦结合性 II》，美国数学会汇刊**108** (1963年)，293–312。

我个人觉得他的书读起来容易得多：

6) James Stasheff，《从同伦观点看*H*-空间》，施普林格数学讲义**161**，施普林格，柏林，1970年。

结合多面体中蕴藏着丰富有趣的组合学。令我惭愧的是，我意识到自己从未谈过这些内容，所以最好简单介绍一下。下周我会回到真正的目标上来，也就是解释如何运用同伦论来理解相容律。若一切顺利，我会接着告诉你各种关于 Postnikov塔、Eilenberg–Mac Lane空间的上同调等精彩内容。走着瞧吧。数学内容如此之多，时间却如此之少。.....

好，下面介绍如何构造一个结合多面体。

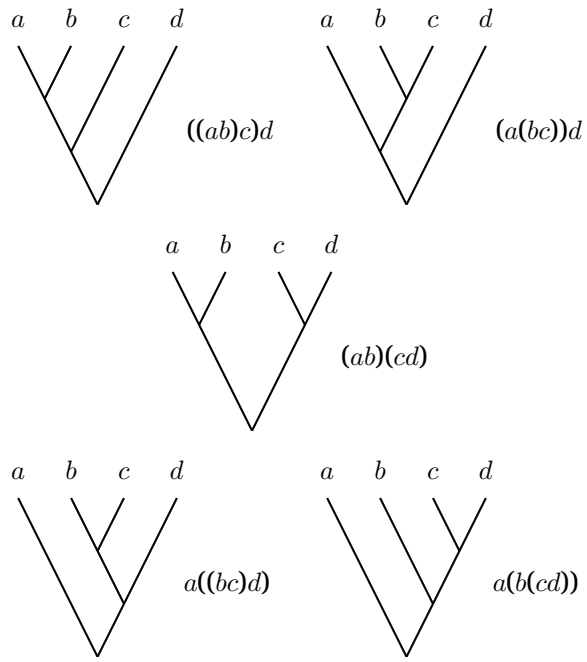
首先介绍顶点，因为它们非常简单：它们对应于给定 n 字母串的所有加括号方式。不过，这个说法有些模糊，所以举个例子。假设 $n = 4$。那么我们得到 5 种括号化方式：

- $((ab)c)d$
- $(a(bc))d$
- $(ab)(cd)$
- $a((bc)d)$
- $a(b(cd))$

这些正是我之前画出的五边形的顶点！事情总是这样： n 字母的括号化是（$n-2$）维结合多胞体的顶点。这并不令人惊讶，因为结合律讲的正是加括号方式。

更准确地说，我们感兴趣的是与以下对象对应的 n 个字母的括号化：

具有 n 个叶的二叉平面树。例如，当 $n = 4$ 时：



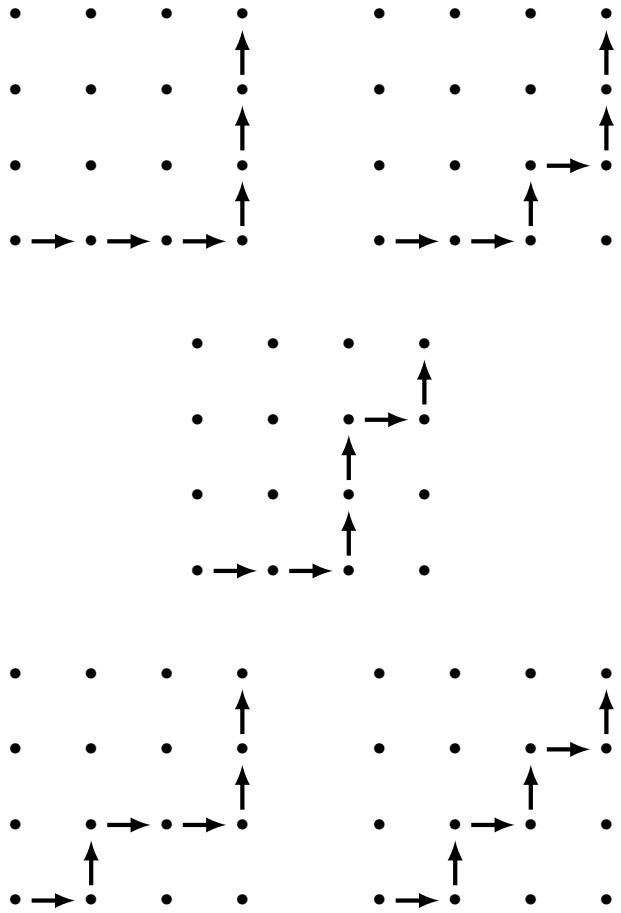
我们可以把这些树看作记录了乘以 n 个物体的过程，时间则沿着页面向下推进。

那么，有 n 个叶的二叉平面树有多少棵呢？答案叫作第（$n-1$）个卡塔兰数。这些数最早由欧拉发现，但它们以欧仁·卡特兰的名字命名，因为他发现了它们与二叉树的关系。以下从第 0 个开始列出：

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, \ldots$$

第 n个卡塔兰数还表示这样一种方法的数量：将一个正（$n+2$）边形通过连接彼此不相交的顶点直线段切分成三角形。它也表示从曼哈顿的一个街角前往另一个街角的方法数量，后者位于出发点以北 n 个街区、以东 n 个街区，始终向北或向东行驶，但要确保在任何阶段，向北行驶的总距离都不超过

向东的总距离。明白了吗？不明白？也许图片会有所帮助！当 $n = 3$时，有5种方法：



至于为什么这些事物都由卡特兰数计数，就留作一道谜题让你来思考吧。如果你想看这些事物更精美的图片，请访问：

7) RobertM.Dickau，《卡特兰数》，https://www.robertdickau.com/catalan.html

想了解更多答案涉及卡特兰数的问题，请看这里：

8) Kevin Brown，《卡特兰数的含义》，
https://web.archive.org/20171109040813/http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=22219

要推导卡特兰数的公式，我们可以使用生成函数这一技巧：

9) Herbert Wilf，生成函数学，Academic Press，纽约，1994年。也可在
http://www.cis.upenn.edu/~wilf/

简而言之，这个想法是构造一个幂级数 $T(x)$，其中 x^n 的系数就是含有 n 片叶子的二叉树的数量。由于历史上一些令人恼火的偶然因素，人们把它称为第（$n-1$）个卡塔兰数，因此我们有：

$$T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_{n-1}x^n$$

每当我们要计算如何在一个含有 n 个元素的集合上赋予某种结构时，都可以用这个技巧。对结构进行巧妙的运算，对应着对形式幂级数进行巧妙的运算。利用这种对应关系，我们可以求出函数 T，再通过泰勒展开确定卡特兰数。与其解释这一切背后的理论，我不如直接把它演示成一个魔术。

那么，什么是二叉树？它要么是一棵只有一个叶子的二叉树（退化情形），要么是由两棵二叉树拼在一起组成的。现在我们把这个事实转化为一个方程：

$$T = x + T^2$$

什么？嗯，在这个游戏中，“加”对应“或”，“乘”对应“与”，而幂级数“x”是只有一个叶子的二叉树的生成函数。所以，这个方程实际上只是在说：“一棵二叉树等于一棵只有一个叶子的二叉树，或者一棵二叉树和另一棵二叉树。”

接下来，我们来求解这个关于 T 的方程。这只是一个二次方程，所以任何高中st生都能解：

$$T = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

现在，如果我们进行泰勒展开，就会得到

$$T = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + \ldots$$

瞧！卡特兰数！如果我们稍微聪明一点，运用二项式定理，再稍作变换，就能得到卡特兰数的闭式公式：

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

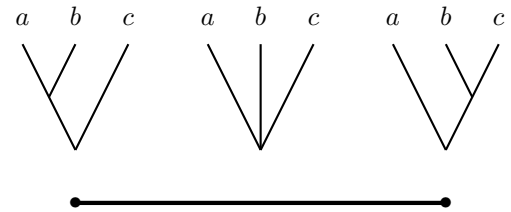
不错吧？如果你想了解这个技巧的范畴论基础，可以阅读有关 Joyal的“物种”概念的介绍。它精确地阐明了“可以赋予有限集的结构”这一概念。更多详情请参阅：

10) Andre Joyal，《形式幂级数的组合理论》，*Adv. Math.* **42**（1981年），1–82。

11) F. Bergeron、G. Labelle 和 P. Leroux，组合物种与树状结构，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。

总之，现在我们知道结合多面体有多少个顶点了。但结合多面体的所有高维面又是什么样的呢？关于这个问题有很多可说，不过基本上很简单：($n-2$)维结合多面体的所有面，都对应于有 n 片叶的平面树。用 ASCII 绘图稍微有点棘手，所以

我就只讲 $n = 3$的情况。一维结合多面体就是单位区间，用树来表示的话，它看起来是这样的：



在区间的左端，我们有一棵二叉树，它对应于先将 a 和 b 进行复合，再将所得结果与 c 复合。在右端，我们有一棵二叉树，它对应于先将 b 和 c 进行复合，再将所得结果与 a 复合。在中间，我们有一棵三叉树，对应于同时将 a、b 和 c 进行复合。

事实上，我们可以把（$n - 2$）维结合多面体中的任意一点看作一棵有n个叶子的树，其边具有特定的长度。因此，当你用手指划过上方的一维结合多面体时，可以想象左边的树连续地“变形”为右边的树。按照这种思路，结合多面体上的每一点都对应一种特定的 n元运算：一种组合 n 事物的方式。要精确说明这一点，必须运用“拟运算子”理论。拟运算子理论确实是理解 n范畴、相干律及其与同伦论之间关系的康庄大道……但遗憾的是，我必须就此打住。

脚注——如果你想进一步了解卡特兰数深层的内在含义，可以试试这个：

12) Richard P. Stanley，《计数组合学》，第2卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999年，第219–229页。

其中列出了这些数的66种不同的组合解释！作为练习，它鼓励你证明这些解释都成立，理想情况下，还要在所计数的各种集合之间找出4290个“简单而优雅”的双射。

（感谢我的朋友 Bill Schmitt 提及这一参考资料。）

第145周

2000年2月9日

我知道我答应过要谈同伦论和 n范畴，但我思绪偏到了射影平面上，所以这周就谈谈它，其他内容以后再说。抱歉，不过如果我不谈此刻写这些东西时令我着迷的内容，就提不起劲来写。

So:

几何学有许多种。继欧几里得几何之后，最早流行起来的几何学之一是射影几何。射影几何是关于透视的几何学。如果你在一张纸上画一幅图，然后从倾斜的角度观看，图中的距离和角度都会变得不准确——但直线看起来仍然会是直线。这种变换称为“射影变换”。射影几何研究的是那些在射影变换下保持不变的几何性质。

有趣的是，二维射影几何具有一些高维中不会出现的奇特特征。为了解释这一点，我需要向你介绍射影平面。

我在“第106周”中简要谈到过射影平面。基本思想是，取普通平面并加入一些无穷远点，使任意一对不同直线恰好相交于一个点。在普通平面中彼此平行的直线会在某个无穷远点相交。这样可以简化射影几何的公理。

但我说的“普通平面”究竟是什么？嗯，自笛卡尔以来，大多数人都把平面看作 $\mathbb{R}^2$，它由实数的有序对组成。但代数学家也喜欢使用 $\mathbb{C}^2$，它由复数的有序对组成。再进一步，你可以取任意一个场 $\mathbb{F}$ ——比如有理数，或模素数的整数——并使用 $\mathbb{F}^2$。代数几何学家把这类对象称为“仿射平面”。

射影平面比仿射平面稍大一些。为此，先从 3 维向量空间 $\mathbb{F}^3$ 开始。然后将 $\mathbb{F}$ 上的射影平面记作 $\mathbb{FP}^2$，并定义为 $\mathbb{F}^3$ 中经过原点的直线所构成的空间。你可以证明，射影平面等同于仿射平面加上一些额外的点，这些点扮演着“无穷远点”的角色。

事实上，你可以稍作推广——只要 $\mathbb{F}$ 是一个除环，就可以定义其上的射影平面！$\mathbb{F}$ 除环类似于场，但乘法不一定交换。最好的例子就是四元数。在 “第106周” 中，我谈到了实数、复数和四元数射影平面、它们的对称群，以及它们与量子力学的关系。这里有一本介绍这些内容的好书，重点介绍其在物理学中的应用：

1) V. S. Varadarajan，量子力学几何，施普林格，柏林，1985。

到目前为止，一切顺利。但还有另一种关于射影平面的方法，而且更加一般。这种方法可以追溯到欧几里得几何：它以一组公理为基础。在这种方法中，一个射影平面由一个“点”的集合、一个“直线”的集合，以及一种关系组成；这种关系告诉我们某个给定的点是否“位于”某条给定的直线上。我给这些单词都加上引号，是因为在这种方法中，它们都是未定义项。我们能使用的只有以下公理：

A）给定两个不同的点，存在唯一一条直线同时经过这两个点。

B）给定两条不同的直线，存在唯一一个点同时位于这两条直线上。

C）存在四个点，其中任意三个都不在同一直线上。

D）存在四条直线，其中任意三条都没有同一个点在其上。

实际上，我们可以省略公理 C）或公理 D）中的任意一个——其余公理会推出被省略的那个。这是一个很有意思的小练习，你可以自己验证一下。我把两个公理都列出来，只是为了让这个射影平面的定义具有“自对偶性”这一点显而易见。换句话说，如果我们互换“点”和“直线”这两个词，并且互换谁在谁之上，这个定义仍然保持不变！

对偶性是射影平面理论最迷人的特征之一：每当你证明了一个定理，借助对偶性，只需互换点和直线的角色，就能免费得到另一个定理。数学中有许多不同种类的“对偶性”，但这或许是其中最根本的一种。

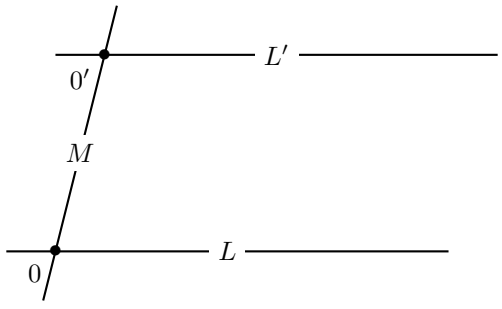
现在，很容易证明，从任意一个除环 $\mathbb{F}$ 出发，都能得到一个满足上述公理的射影平面 $\mathbb{FP}^2$ 。有趣的部分在于尝试反过来！从一个满足上述公理的结构出发，你能构造出一个它所源自的除环吗？

那么，从一个射影平面出发，可以试着按如下方式还原一个除环。选一条直线，去掉一个点——并称这个点为“无穷远点”。剩下的部分就是一条“仿射直线”——我们称它为 L。我们来试着让 L 成为一个除环。为此，首先需要在 L 中选取两个不同的点，称它们为 0 和 1。然后，我们需要想出在 L 上的点之间进行加法和乘法的规则。

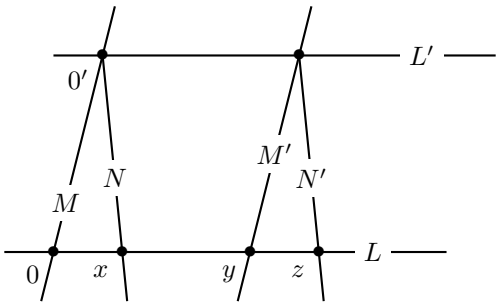
为此，我们要运用一些由古希腊人发明的技巧！

这并不奇怪。毕竟，那些家伙以非常几何化的方式思考算术。如何利用平面的几何在一条直线上对点进行相加？问问任何一位古希腊人就知道了，他们会这样回答：

首先选取一条直线 L'，使其与 L 平行——也就是说，L 和 L' 仅在无穷远点相交。然后选取一条直线 M，使其与 L 在点 0 相交，并与 L' 在某个我们称为 $0'$的点相交。我们得到如下图示：



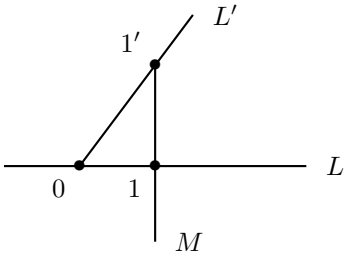
然后，要将 L上的两个点 x 和 y 相加，请绘制如下图示：



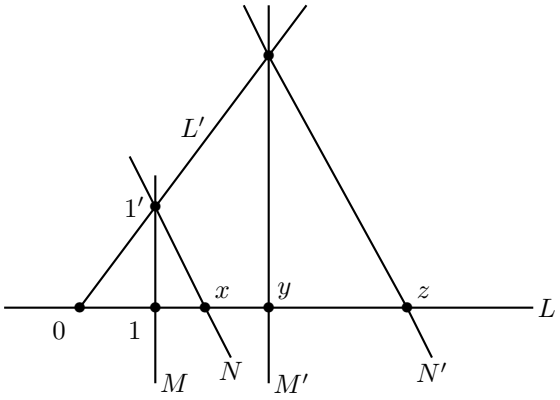
换句话说，画一条与 M 平行、经过点 y的直线 M'，再画一条经过x和 $0'$的直线 N，然后画一条与 N平行、经过 M'和L'相交处的直线 N'。 L和 N'相交于一点，称为 z.....我们就把这个点定义为$x+y$!

这显然是正确的做法，因为图中的两个三角形全等。

乘法又该怎么做呢? 首先，画一条直线 L'，它与我们的直线 L 只在点 0 相交。然后，从点 1 画一条直线 M，通向 L' 上但不在 L上的某个点 $1'$：



然后，要将 x 和 y相乘，画出这幅图：



换句话说，画一条经过 $1'$ 和 x的直线 N，再画一条经过点 y且平行于 M 的直线 M'，然后画一条经过 L' 与 M' 相交处的点且平行于 N 的直线 N'。L 与 N' 相交于名为 z 的点.....我们将这个点定义为 xy!

这显然是正确的做法，因为包含点 1 和 x 的三角形与包含 y 和 z 的三角形相似。

那么，既然我们已经巧妙地弄清楚了如何从射影平面出发定义加法和乘法，就可以问：我们能得到一个除环吗？

答案是：不一定。只有当我们的射影平面是“德萨格平面”时，这才成立。这是一种特殊性质，以德萨格证明的一个关于实射影平面的古老定理命名。如果德萨格定理在某个射影平面上成立，那么这个平面就是德萨格的。

不过等等——我们还忘了问一个更基本的问题！也就是说，我们古希腊式的加法和乘法定义方法，是否与我们所做的选择无关？我们需要选取一些点和直线来着手构造。仔细想想，这些选择归结为选取四个点，且其中任意三点都不共线——公理 C) 恰好保证了我们能做到这一点。

遗憾的是，事实证明，一般而言，我们定义加法和乘法的方法确实取决于如何选择这四个点。但如果我们的射影平面是德萨格的，就不会如此！

事实上，只要我们限定在德萨格射影平面中，一切都会变得非常顺畅。对于任意除环 $\mathbb{F}$，射影平面 $\mathbb{FP}^2$ 都是德萨格的。反过来，从一个德萨格射影平面出发，我们可以用古希腊的方法构造出一个除环 $\mathbb{F}$。最妙的是，这两种构造互为逆运算——至少在同构意义下如此。

此时，你应该正敲着桌子大喊：“太棒了——可‘德萨格的’是什么意思？我想知道所有细节！”

好吧……

给定一个射影平面，我们将三个不在同一条直线上的点定义为一个“三角形”。现在假设你有两个三角形 xyz 和 $x'y'z'$。每个三角形的边确定三条直线，分别记为 LMN 和 $L'M'N'$。如果运气真的很好，经过 x 和 x' 的直线、经过 y 和 y' 的直线，以及经过 z 和 z' 的直线会相交于同一个点。我们称这个射影平面为“德萨格的”，如果每当这种情况发生时，还会出现另一种情况：L 和 L' 的交点、M 和 M' 的交点，以及 N 和 N' 的交点都在同一条直线上。

如果你难以想象我刚才所说的内容，可以看看这个网页，其中还给出了德萨格定理在实射影平面上的证明：

2）Roger Mohr 和 Bill Trigs，《德萨格定理》，可见
https://web.archive.org/web/20010210185727/http://spigot.anu.edu.au/people/samer/Research/Doc/ECV Tut ProjGeom/node25.html

德萨格定理有点复杂，但有趣的一点是，它的逆命题就是它的对偶。仔细想想就很容易看出来：“三条直线交于同一点”与“三个点落在同一条直线上”互为对偶。更有意思的是，德萨格定理蕴含了它自身的逆命题！因此，具有德萨格性质这一特性是自对偶的。

关于笛沙格平面，还有一个有趣的事实与共线变换有关。“共线变换”是从一个射影平面到自身、且保持所有直线不变的映射。共线变换构成一个群，这个群作用于所有“完全四边形”的集合——完全四边形是由四个点组成的列表，其中任意三点都不在同一条直线上。公理 C) 表明，每个射影平面都至少有一个完全四边形。事实证明，如果一个射影平面是德萨格的，那么共线变换群

在完全四边形集合上的作用是传递的：给定任意两个完全四边形，都存在一个共线变换将其中一个变为另一个。这就是为什么当我们的射影平面是德萨格平面时，古希腊技巧中的加法和乘法不依赖于所选的完全四边形！

关于笛沙格平面，还有一个更美妙的事实，那就是它们与高维空间的关系。正如我们通过一系列公理定义射影平面一样，也可以定义任意维数 $n = 1$、2、3、.....的射影空间。最简单的例子是 $\mathbb{FP}^n$ —— $\mathbb{F}^{n+1}$中经过原点的直线所构成的空间，其中 $\mathbb{F}$ 是某个除环。巧妙之处在于，当 $n > 2$时，这就是唯一的例子。此外，位于这些高维射影空间之一中的任何射影平面，必然都是笛沙格平面！所以，非德萨格射影平面确实是二维中的异类。

这一切都很美妙。不过，还有一些显而易见的问题：实际上来自场的射影平面有什么特别之处？对于非德萨格射影平面，我们又能说些什么？

第一个问题的关键，在于一条古老的定理。这条定理由最后一位伟大的古希腊几何学家帕普斯于公元3世纪证明。事实证明，在任何来自场的射影平面中，帕普斯定理都成立。反过来，任何满足帕普斯定理的射影平面，都来自一个唯一的场。我们称这样的射影平面为“帕普斯型”。

如果我只用文字来解释帕普斯定理，听起来会太吓人，所以还是请你直接看图吧。这张图有趣的地方在于，你可以用鼠标移动各个点，看看情况会如何变化：

3）帕普斯定理，https://graemewilkin.github.io/Geometry/Pappus.html

那么，非笛沙格射影平面又是怎样的呢？如果我们试图从一个任意的射影平面中构造一个除环，就会彻底失败。不过，我们仍然可以用上文所述的技巧来定义加法和乘法。这些运算在很大程度上取决于我们所选的一个四边形。但如果我们列出这些运算满足的所有公理，就会得到一种名为“三元环”的代数构件的定义。

之所以称为“三元环”，是因为它们通常用一种推广了 $xy + z$的三元运算来描述。不过，我实在不忍心在这里给出精确定义。这是James Dolan所说的“蜈蚣数学”的典型例子：你拿一个数学概念，看看可以拔掉它多少条腿，它才会无法继续行走。三元环就像一个除环，只能靠最后几条腿勉强支撑着。

我不太喜欢蜈蚣数学，但有一个非常出色的例子，它是一个并非除环的三元环。那就是八元数！八元数几乎是一个除环，但它们的乘法不满足结合律。

我已经在“第59周”、“第61周”、“第104周”和“第105周”中谈过八元数。在“第106周”中，我解释了如何定义 $\mathbb{OP}^2$，即八元数上的射影平面。这是非笛沙格射影平面的最佳范例。它如此出色的原因之一，是它的共线变换群为E_6。E_6 是五个“例外单李群”之一——它们神秘而令人兴奋，值得尽可能深入地研究！

接下来我想谈谈射影几何与其他例外李群之间的关系，不过首先让我给你推荐几本参考书。首先，这是一本关于射影平面以及由其启发出的各种有趣数学内容的优秀著作：

4) Frederick W. Stevenson，《射影平面》，W. H. Freeman and Company，旧金山，1972。

你将了解到近域、拟域、穆方环、笛卡尔群等等。Hall 的这些讲义涵盖了许多相同的内容，可惜不太容易找到：

5) Marshall Hall，《射影平面及其他主题》，加利福尼亚州理工学院，帕萨迪纳，1954年。

若想以更精炼的方式了解相同内容，可以阅读 Hall 群论著作的最后一章：

6) Marshall Hall，《群论》，Macmillan，纽约，1959年。

如果你只对德萨格射影平面感兴趣，可以看这篇：

7) Robin Hartshorne，《射影几何基础》，Benjamin，纽约，1967年。

特别是，这本书对德萨格情形下的共线变换群作了精彩的介绍。结论很容易说清楚，我就直接告诉你吧。假设 $\mathbb{F}$ 是一个除环。那么 $\mathbb{FP}^2$ 的共线变换群由两个显而易见的子群生成：PGL(3，$\mathbb{F}$)和 $\mathbb{F}$的自同构群。这两个子群的交集是 $\mathbb{F}$的内自同构群。

如果上述参考资料读起来太吃力，可以先试试这本轻松而又通俗易懂的入门书：

8) Daniel Pedoe，《射影几何导论》，Macmillan，纽约，1963年。

如果你真正感兴趣的是有限射影平面，可以参考这本书，它假定读者对代数所知甚少：

9) A. Adrian Albert 和 Reuben Sandler，《有限射影平面导论》，Holt, Rinehart and Winston，纽约，1968年。

想了解实数上的射影几何及其在图像分析中的应用，可以试试这个不错的在线入门介绍：

10) Roger Mohr 和 Bill Triggs，《图像分析的射影几何》，可在以下网址获取：
https://hal.inria.fr/inria-00548361/

最后，想了解射影几何与例外李群之间有趣的关系，可以看看这个：

11) J. M. Landsberg 和 L. Manivel，《Freudenthal 魔方阵的射影几何》，*Jour. Alg.* **239**，477–512。另可参阅math.AG/9908039。

Freudenthal–Tits幻方是一种奇特的描述方式，用实数、复数、四元数和八元数来刻画大多数例外李群。按照通常的描述方式，先取其中两个除法代数，例如 $\mathbb{F}$和 $\mathbb{F}'$。接着令 $J(\mathbb{F})$ 表示系数取自 3×3 的自伴矩阵所构成的空间 $\mathbb{F}$。这是一个 Jordan代数，其乘积为 $xy+yx$。正如“第106周”中所提到的，Jordan代数与射影平面有很大关系。特别是，$J(\mathbb{F})$ 中的非平凡投影对应于1维和2维子空间 $\mathbb{F}^3$，因而对应于射影平面 $\mathbb{FP}^2$中的点和直线。

接下来，令 $J_0(\mathbb{F})$为 $J(\mathbb{F})$中由无迹 自伴矩阵构成的子空间。另令 $\Im(\mathbb{F}')$为 $\mathbb{F}'$中的纯虚元素空间。最后，定义幻李代数 $M(\mathbb{F},\ \mathbb{F}')$如下：

$$M(K,K') = \mathrm{Der}(J(K)) \oplus J_0(K)\otimes \Im(K') \oplus \mathrm{Der}(K')$$

这里，$\oplus$ 表示直和，$\otimes$ 表示张量积，而 Der 表示相关代数的导子空间。要说明如何将 $M(\mathbb{F},\ \mathbb{F}')$构造成李代数，实际上有点棘手，而且我也有点累了，所以就偷个懒，请你阅读以下资料：

12) Hans Freudenthal，《几何基础中的李群》，《*Adv. Math.*》**1**(1964) 143。
13) Jacques Tits，《Algebres alternatives, algebres de Jordan et algebres de Lie excep- tionelles》，乌得勒支学术讨论会论文集，第**135**卷，1962年。14) R. D. Schafer，《非结合代数导论》，Academic Press，纽约，1966年。

顺便一提，弗洛伊登塔尔的论文将李理论与公理化射影几何巧妙地融合在一起，读来十分令人费解，绝对值得一看。总之，如果处理得当，就会得到下面这个李代数方阵 $M(\mathbb{F},\ \mathbb{F}')$：

	$\mathbb{F}=\mathbb{R}$	$\mathbb{F}=\mathbb{C}$	$\mathbb{F}=\mathbb{H}$	$\mathbb{F}=\mathbb{O}$
$\mathbb{F}'=\mathbb{R}$	A_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{F}'=\mathbb{C}$	A_2	$\mathrm{A}_2\oplus\mathrm{A}_2$	A_5	E_6
$\mathbb{F}'=\mathbb{H}$	C_3	A_5	B_6	E_7
$\mathbb{F}'=\mathbb{O}$	F_4	E_6	E_7	E_8

这里 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{O}$ 分别表示实数、复数、四元数和八元数。如果你不清楚方阵中的这些李代数是什么，可以看看“第64周”。（我得承认，上面的方阵并不十分严谨，因为我没有说明其中涉及的李代数分别对应哪些实形式。）

这个方阵第一个有趣之处在于，F_4, E_6, E_7 和 E_8 是五个例外单李代数中的四个——第五个 G_2, 则只是 Der($\mathbb{O}$)。所以，所有例外李代数都与八元数有关！这个方阵第二个有趣之处在于，它沿着对角态射对称，尽管从定义来看，这一点一点也不明显。正是这一点让这个方阵真正称得上“魔法”。

我其实不太理解魔方阵，不过它已经列在我的待办清单上了。这也是我很高兴有一篇新论文问世的原因之一：它用一种能让魔方阵的对称性一目了然的方式对其进行了阐述：

15) C. H. Barton 和 A. Sudbery，《李代数的魔方阵》，可见math.RA/0001083。

它还从多个方面推广了魔方阵。但我真正希望的是，射影平面、除代数、例外李群和魔方阵之间的联系能对我变得真正显而易见。我离这一点还差得很远。

下面是 David Broadhurst 发来的一封有趣邮件，谈到了帕普斯定理在四元数射影空间中失效的情况：

> 日期：*2000*年*3*月*3*日星期五 *20:50:03* 格林尼治标准时间 发件人：*David Broadhurst* 主题：保罗·狄拉克与射影几何
>
> *John*：
>
> 在保罗·狄拉克去世前不久，我与他共度了一个愉快的下午。与他的名声相反，他非常健谈。
>
> 许多事情中，我记得这一件：狄拉克解释说，虽然他受过工程师训练，也以物理学家闻名，但他的审美观是数学的。他说（这是我近*20*年后尽力回忆的原话）：年轻时，我爱上了射影几何。我一直想在物理学中运用它，却始终找不到合适的地方。
>
> 后来有人告诉他，复数与四元数量子力学之间的差异，可以描述为经典射影几何中定理的失效。
>
> 狄拉克的脸上绽开了迷人的笑容："啊，"他说，"我希望做的正是这样的事。"
>
> 今天，回看你的"第*106*周"时，我想起了这件事。
>
> *Best,*
>
> *David*

读者不应试图在脑海中想象一条闭合的直线。— *Frank Ayres, Jr.*，射影几何

第146周

2000年3月11日

> 在房间地板上铺上白纸，并划分成一英尺见方的小格。俯身跪在地上，在第一个格子里写下一组方程，设想它们能够支配宇宙物理学。夜里再多加思考。第二天，把一组更好的方程写进第二个格子。邀请自己最敬重的同事为其他格子贡献方程。忙完这些后，人已经一步步挪到了门口。站起来，回头看看那些方程，其中一些或许比另一些更有希望，然后威严地举起手指，下令：“飞！”然而，没有任何一条方程会长出翅膀、腾空而起或飞起来。可是，宇宙却在“飞翔”。
>
> 某种原理必定是唯一正确且令人信服的；一旦人们认识到它，它也必定会极具说服力，让人清楚地看到宇宙是、也必然是以这样一种方式构建的，而不可能是别的样子。但人们要如何发现这一原理呢？

约翰·惠勒无疑是这段话的作者。它出现在米斯纳、索恩和惠勒于1972年出版的教科书《style id='1'>《引力》》的末尾附近。此后，世界历史上从未有过这么多人竭尽全力去寻找这个唯一且令人信服的原理。出现了许多有趣的想法，但至今仍未成功。

但如果惠勒错了呢？如果并不存在一个支配我们宇宙的并非唯一且令人信服的原理或一组方程呢？例如，如果所有方程都支配着某个宇宙呢？换句话说，如果所有数学结构都和描述我们宇宙的数学结构一样，拥有同等程度的“物理存在”（无论这是什么意思！）呢？其中许多结构不会包含我们可以称为意识或智能的模式，但有些会；对其中的居民而言，这些结构会从内部看来像是“宇宙”。在这种情我们境下，我们的宇宙并没有什么特别之处，只不过我们碰巧身处其中。

换句话说：如果数学上的可能性与物理存在最终并无区别，会怎样？这或许听起来很疯狂，但我个人认为，仔细思量后，大多数其他可能性反而会显得更 疯狂。

当然，思考这类想法很有趣，也很难从中得出什么结论。不过今晚我在网上闲逛时，发现已经有人提出并发表了这个想法：

1）马克斯·泰格马克，《“万有理论”仅仅是终极系综理论吗？》，《物理学年鉴》**270**（1998年），1–51。也可参阅 gr-qc/9704009。马克斯·泰格马克，《欢迎来到我的疯狂宇宙》，参见 https://space.mit.edu/home/tegmark/toe.html2）马库斯·乔恩，《一切皆有可能》，《新科学家》**158** （1998年），26–30。亦可参阅 https://space.mit.edu/home/tegmark/toe_press.html

据我所知，大多数时候，马克斯·泰格马克是宾夕法尼亚大学一位非常正派的物理学家；他的研究涉及宇宙微波背景辐射、宇宙大尺度结构（超星系团等），以及Ia型

超新星。不过，他曾就上述假说写过一篇引人入胜的论文，我强烈建议你读一读。它没有你想象的那么离奇。

好了，现在来谈谈量子引力。Jan Ambjørn 和 Renate Loll 携手研究时空几何的离散模型，尤其关注三角剖分流形的洛伦兹几何。黎曼几何方面已经有了更多研究成果，因此现在正是把更多精力投入到物理上更现实的洛伦兹情形的时候。当然，如果度量是固定的，通常可以借助一种称为“维克旋转”的技巧，将关于黎曼时空上量子场论的结果转化为洛伦兹时空上的结果。但几何若是变量——而且还要量子化——这种方法是否仍然有效，从来就不明确。因此，我们既需要在这一背景下进一步研究维克旋转，也需要直截了当地研究洛伦兹情形。

以下是他们的一些论文：

4) J. Ambjørn、J. Correia、C. Kristjansen 和 R. Loll，《欧几里得与洛伦兹二维量子引力之间的关系》，《物理快报*B*》**第75卷**(2000年)，24–32页。另见 hep-th/9912267。J. Ambjørn、J. Jurkiewicz 和 R. Loll，《洛伦兹与欧几里得量子引力——解析与数值结果》，载于 *M*理论与量子几何，L. Thorlacius 和 T. J onsson 编，北约科学丛书**556**，施普林格，柏林，381–450页。另见 hep-th/0001124。J. Ambjørn、J. Jurkiewicz 和 R. Loll，《引力的非微扰洛伦兹路径积分》，《物理评论快报》**85** (2000年) 924–927页。另见 hep-th/0002050。

最后这篇论文尤其令我感兴趣，因为它试图为 3+1 维洛伦兹量子引力定义路径积分。他们描述了一种路径积分：首先像切萨拉米香肠那样，用等时面把时空切成薄片，然后用单形填充每一片，并为单形的边指定长度——每个等时面内的边是类空的，而连接相邻等时面的边则是类时的。他们允许每一片中的单形数量有所不同。实际上，他们重点讨论的是 2+1 维情形，但他们说 3+1 维情形也类似。说实话，我相当相信他们的判断——尤其是他们的做法并不依赖于 2+1 维引力缺乏局域自由度这一事实。他们可以对这个图景进行维克旋转，得到一个自伴且正定的时间演化算符，正如你对 $\exp(-tH)$ 这种形式的算子所预期的那样。

说到量子引力中的维克旋转，这里还有另一篇值得一读的论文：

5) Abhay Ashtekar、DonaldMarolf、JoseMourao 和 Thomas Thiemann，《Osterwalder– Schrader 重构与微分同胚不变性》，《经典与量子引力》**17**（2000年），4919–4940。另见quant-ph/ 9904094。

Osterwalder–Shrader 定理是人们用来严格地证明维克旋转合理性的结果。这里，作者们将其推广，使之适用于一大类无背景场论——甚至可能适用于量子引力！事实证明，只要方法得当，这并不难。真令人惊讶。

我和 Ashtekar、Krasnov 合作计算已经有几年了
th利用圈量子引力研究黑洞的熵。我曾在“周

112”中提到过这件事，当时我们刚发表了一篇简短论文，概述了这一计算。现在，我们的详细论文也快完成了。与此同时，Ashtekar 写了几篇介绍性文章，阐释这一基本思路。我在“第120周”提到过他和 Krasnov 合写的一篇，下面是另一篇：

6) Abhay Ashtekar，《广义相对论、量子物理与统计力学的交汇：近期的一些进展》，《物理年鉴》**9** (2000年), 178–198。亦可见gr-qc/9910101。

我就引用一下摘要吧——在论文真正完成之前，我实在不想再谈这件事了：

> 黑洞热力学通常采用的研究框架，近期得到推广，从而涵盖了一大类具有物理意义的情形。关键思想是用“孤立视界”取代平稳事件视界的概念。与事件视界不同，孤立视界可以在时空中以准局域方式确定。此外，它们不必是 *Killing* 视界。特别是，描述一个自身处于平衡状态、但外部含有辐射的黑洞的时空，具有一个孤立视界。尽管这一概念具有如此广泛的适用性，黑洞力学第零定律和第一定律仍然适用于孤立视界。此外，通过进行系统的非微扰量子化，可以探索孤立视界的量子几何，并从统计力学的角度解释其熵。在对整体黑洞热力学作一般性介绍之后，本文简要概述了这些最新进展。

此外，还有一些论文详细阐述了“孤立视界”这一经典概念——我已经提到了一些，但还是在这里一并列出：

7) Abhay Ashtekar、Alejandro Corichi 和 Kirill Krasnov，《孤立视界：经典相空间》《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**3** （1999年），419–478。另见gr-qc/9905089。

Abhay Ashtekar、Christopher Beetle 和 StephenFairhurst，《孤立视界力学》《经典与量子引力》**17** （2000年）253–298。另见gr-qc/9907068。

Abhay Ashtekar 和 Alejandro Corichi，《孤立视界定律：纳入膨胀子耦合》《经典与量子引力》**17** （2000年），1317–1332。另见gr-qc/9910068。

Jerzy Lewandowski，《承认孤立视界的时空》，《经典与量子引力》**17**(2000年), L53–L59。另可见gr-qc/9907058。

Lewandowski的论文很重要，因为它认真研究了旋转孤立视界——这让我对我们最终能够把熵的计算推广到旋转黑洞更有信心（迄今为止，这项计算只针对非旋转情形）。

好，现在让我把注意力转向自旋泡沫。上个月，Reisenberger和Rovelli发表了几篇论文，推动了将自旋

泡沫视为费曼图这一总体构想的发展，推广了Boulatov和Ooguri的早期工作，以及De Pietri等人的较新研究。同样，我只引用摘要……

8) Michael Reisenberger 和 Carlo Rovelli，《将自旋泡沫作为费曼图》，载于《相对论时空奥德赛：广义相对论与量子引力的实验和理论观点》，Ignazio Ciufolini、Daniele Dominici 和 Luca Lusanna 编，世界科学出版社，新加坡，第431–448页。另见 gr-qc/0002083。

> 最近有人证明，可以从定义在一个群上的场论的费曼展开中得到某种非拓扑自旋泡沫模型。该场论定义了一个自然的“对三角剖分求和”，从而消除了对自由度数量的截断，并恢复了完全的协变性。由此得到的表述完全是背景无关的：时空如同早期二维矩阵模型中那样，以费曼图的形式涌现出来。我们将在这里证明，任何自旋泡沫模型都可以通过这种方式从一个场论中得到。我们给出任意自旋泡沫模型的场论作用量的明确形式。这样，任何模型都可以自然地扩展为对三角剖分求和。更准确地说，它被扩展为对*2*-复形求和。

9) Michael Reisenberger 和 Carlo Rovelli，《时空作为费曼图：联络表述》，可在 gr-qc/0002095 获取。

> 自旋泡沫模型是环路量子化正则理论的路径积分对应物。过去几年里，人们提出了若干引力自旋泡沫模型，其中大多数建立在有限的单纯形格点时空上。格点将推测为无限的引力自由度集合截断为有限集。通过对格点模型在所有格点时空上求和，可以得到能够容纳无限自由度，且不依赖任何背景单纯形结构，甚至不依赖任何先验时空拓扑的模型。本文展示，这个和可以实现为定义在适当群流形上的量子场论的费曼图之和，其中每个费曼图都定义一个特定的格点时空。我们给出一个明确公式，描述广泛一类自旋泡沫模型所对应的场论作用量，该类模型包括若干引力模型。最近，*De Pietri* 等人针对一种特定的引力模型发现了这样一个场论 *[hep-th/9907154]*。我们的工作将这一结果推广开来，也推广了 *Boulatov* 和 *Ooguri* 的三维、四维拓扑场论模型，最终还推广了描述具有动力学拓扑的二维系统的早期矩阵模型。我们结果的初步版本已发表于一篇配套论文 *[gr-qc/0002083]*：本文将基于自旋泡沫模型的联络表述，给出一种全新且更为详尽的推导。

我完全有失偏颇，不过我觉得这就是量子引力该走的路……我们需要更多地思考洛伦兹方面的问题，就像 Barrett 和 Crane 一直在做的那样；但这些自旋泡沫模型实在太简单、太优雅了，我不禁觉得其中必定有些道理——尤其是看到相关路径积分的费曼图展开自动导出对所有三角剖分求和时。

在正则量子引力与 Vassiliev不变量之间的关系方面，也有一些不错的研究。其思路是将这类纽结不变量用作微分同胚不变态的希尔伯特空间的一组基——这是一种颇具吸引力的替代方案，不必再采用以自旋网络为基的希尔伯特空间。或许等我们看清这两种选择如何结合，一切就会开始变得明朗。不过，这些论文采用 Vassiliev 方法探讨了哈密顿约束这一关键问题，得出的结果与 Thiemann 使用自旋网络方法所得的结果惊人地相似：

10) Cayetano Di Bartolo、Rodolfo Gambini、Jorge Griego 和 Jorge Pullin，《在Vassiliev不变量空间中对广义相对论进行一致的正则量子化》，可查阅 gr-qc/9909063。《Vassiliev不变量领域中的正则量子引力：I. 运动学结构》，可查阅 gr-qc/9911009。《Vassiliev不变量领域中的正则量子引力：II. 约束、环境及约束代数的一致性》，可查阅 gr-qc/9911010。

最后，Martin Bojowald 撰写了几篇将圈方法应用于量子宇宙学的论文。其想法是将圈量子化应用于一个“迷你超空间”——一种相空间，只描述广义相对论中具有某种大对称群的解。

11) Martin Bojowald，《圈量子宇宙学 I：运动学》，可在 gr-qc/9910103 获取。Martin Bojowald，《圈量子宇宙学 II：体积算符》，gr-qc/991010

4.

第147周

May 20日，2000年

各种纪念千年的书籍即将出版……这些书回顾了迄今为止数学领域的精彩成就，并为未来描绘了宏伟蓝图。美国数学会出版了这样一本书：

1) 《数学：前沿与展望》，由 VladimirArnold、迈克尔·阿蒂亚、彼得·拉克斯和巴里·马祖尔编，普罗维登斯：美国数学学会，2000年。

本书收录了30篇文章，作者包括陈、Connes、西蒙·唐纳森、沃恩·琼斯、皮埃尔-路易·利翁、尤里·马宁、Mumford、彭罗斯、斯梅尔、卡姆兰·瓦法、安德鲁·怀尔斯和 Witten 等知名学者。我还没读过这本书，不过很想弄到一本。

施普林格出版社也即将推出一本：

2) 《无限数学：*2001*年及以后》，比约恩·恩奎斯特和维尔弗里德·施密德编，施普林格出版社，纽约，2000年。

这本书预计在秋季出版。

我不知道物理学家在这些方面做了些什么。美国物理学会网站上有一份很棒的20世纪物理学大事年表：

3) 美国物理学会：《物理学百年》，可在以下网址查阅：
https://web.archive.org/web/19990508143827/http://timeline.aps.org/APS/home_HighRes.html

不过我没看到任何关于书籍的内容。

最近我没怎么写 This Week's Finds，其中一个原因是我一直在买房，随后搬进了新家。另一个原因是 James Dolan 和我一直忙着撰写我们自己的千年感想，这些文字将收录在施普林格出版社出版的这本书中：

4) John Baez 和 James Dolan，从有限集到费曼图。可在此获取：math.QA/0004133

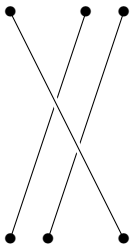
那么，让我稍微谈谈这些内容……

和往常一样，范畴化是本文的核心主题。我已经多次谈过这个话题——例如在 "第121周" 中——所以我就假定你还记得：范畴化时，我们会运用以下类比，把有趣的 方程 看作更有趣的 同构的简写：

集合论	范畴论
元素	对象
元素之间的等式	对象之间的同构
sets	范畴
集合之间的函数	范畴之间的函子
函数之间的等式	函子之间的自然同构

举个简单的例子，考虑基本算术定律，例如 $a+b=b+a$ or$a(b+c) = ab+ac$。我们通常将它们视为自然数集合中<身份 id='5'>元素</身份>之间的<身份 id='5'>方程</身份>。但实际上，它们源自有限集范畴中<身份 id='13'>对象</身份>之间的<身份 id='11'>同构</身份>。

例如，假设我们有有限集 a 和 b，并用 $a+b$ 表示它们的不交并，那么 $a+b$ 和 $b+a$ 之间存在一个自然同构。而且，这个同构甚至还挺有意思！例如，假设我们用 1 表示由一个点组成的集合，用 2 表示由两个点组成的集合。那么 $1+2$ 和 $2+1$ 之间的自然同构可以形象地表示为让一个点从两个点旁边经过的过程，就像这样：



这看起来或许像是一个过于详细的“图示证明”，用来说明 1+2确实等于 2+1，也许适合不太聪明的幼儿园儿童。但事实上，从这里到球面的同伦群这类高深内容，也不过是轻轻一跃。关于这一点，我在“第102周”中略作了说明，所以这里就不再重复了。关键在于，经过范畴化之后，初等数学会变得相当强大！

现在，让我把“自然数的范畴化”这个想法讲得更精确一些。令 FinSet 表示这样一个范畴：它的对象是有限集，态射是这些有限集之间的函数。如果我们通过构造对象的同构类集合来对这个范畴“去范畴化”，就会得到 $\mathbb{N}$，也就是自然数。

关于 $\mathbb{N}$ 的所有基本算术运算，都源自FinSet上的运算。我已经提到过，加法源自不交并。不交并是范畴论学者所说的“余乘法”的一种特殊情形；余乘法适用于许多范畴——一般定义见“第99周” 。类似地，乘法源自有限集的笛卡尔积，这是范畴论学者所说的“乘积”的一种特殊情形。要定义乘积，只需取余乘法的定义，并把所有箭头反向。此外，数字0 和1也有很漂亮的范畴论解释，加法和乘法的所有基本定律也是如此。乘方也一样！

组合学家喜欢思考如何取出 $\mathbb{N}$ 中的方程，并用 FinSet 中的显式同构来证明它们——他们把这样的证明称为“双射证明”。

要进一步了解相关内容，请参阅：

5) James Propp 和 David Feldman，《从已有双射构造新的双射》，《*Adv. Math.*》**113**(1995年)，1–44。另见 http://faculty.uml.edu/jpropp/cancel.pdf

6) 约翰·康威和 Peter Doyle，《除以三》。可在math/0605779查阅。

后面这篇文章探讨了这样一个问题：如果我给你一个 $3x$ 与$3y$之间的同构，你能否构造一个 x 与 y之间的同构？当然，这里的 x 和 y 是有限集，3 是任意一个三元素集，而乘法指笛卡尔积。当然，你可以证明同构存在，但你能否以自然的方式构造一个——也就是说，不作任何随机选择？这个谜题的历史原来非常有趣。不过我不想泄露答案！看看你能不能解出来。

无论如何，既然我们已经将自然数范畴化，或许会想进一步将整数范畴化。我们能做到吗？换句话说：我们能否找到某种类似有限集范畴的东西，其中包含“元素个数为负数的集合”？事实证明，关于这个主题有一些有趣的文献：

7) Daniel Loeb，《元素个数为负数的集合》，《*Adv. Math.*》**91** (1992年), 64–74。8) S. Schanuel，《负集具有欧拉示性数和维数》，载于《范畴论》，《数学讲义》**1488**，施普林格，柏林，1991年，第379–385页。9) James Propp，《乘方与欧拉测度》，可从math.CO/0204009获取。10) Andre Joyal，《组合代数中的符号法则》，《加拿大皇家学会数学学报》，**VII** (1985), 285–290.

另请参阅“第102周”了解更多.....

不过，我现在不想讨论负数集合！我想讨论的是分数集合。在减法之前先讨论除法，似乎有些奇怪，但从历史上看，负数是在非负有理数出现之后相当久才被发明出来的。显然，半个苹果比负苹果更容易理解！这说明，也许“具有分数基数的集合”比“具有负基数的集合”更简单。

关键在于仔细思考除法的含义。通常，要得到半个苹果，我们会把一个苹果切成“两个相等的部分”。当然，这些部分实际上并不相等——如果它们相等，就只会有一个部分了！它们只是同构。这说明范畴化会派上用场。

实际上，我们真正拥有的是一个作用在苹果上的 $\mathbb{Z}/2$ 对称群，它会互换这两个同构的部分。一般来说，如果一个群 G 作用在一个集合 S上，我们可以通过取商 S/G来用这个群“除”该集合，而这个商的点就是该作用的轨道。如果 S 和 G 都是有限的，并且 G 在 S上的作用是自由的，那么这种构造确实对应于除法，因为基数 $|S/G|$ 等于 $|S|/|G|$。不过，作用是自由的这一点至关重要。

例如，为什么是 $6/2 = 3$？我们可以取一个由六个点排成一行的集合 S：

• • • • • •

让 $G = \mathbb{Z}/2$ 通过反射自由作用，并将每个轨道中的所有元素视为同一个元素，从而得到一个含 3 个元素的集合 S/G。从图示上看，这相当于将集合 S 对折，因此在这种情况下，$|S/G| = |S|/|G|$ 也就不足为奇了。遗憾的是，如果我们尝试从一个含 5 个元素的集合开始，采用类似的技巧：

• • • • •

结果惨不忍睹！我们并没有得到一个具有2.5个元素的集合，因为群作用不是自由的：中间的点被映射到了自身。因此，要定义“具有分数基数的集合”，我们需要一种将中间的点计作“半个点”的方法。

为此，当作用不是自由作用时，我们首先应该找出一种更好的方式来定义 S 对 G 的商。按照用同构替代方程的方针，我们将“弱商” $S//G$ 定义为如下范畴：其对象是 S 的元素；每当 $g(s) = s'$时，就有一个态射 g：$s \to s'$；态射复合则按显然的方式定义。

接下来，让我们找出一种定义范畴“基数”的好方法。思考上面的例子会引出如下步骤：对于每个对象同构类，我们选取一个代表元 x，并计算该对象自同构的数量的倒数；然后对所有同构类求和。

很容易看出，按照这个定义，前一幅图中间的点会被计作“半个点”，因为它有两个自同构，所以我们得到一个基数为 2.5 的范畴。一般来说，

$$|S//G| = |S|/|G|$$

只要 G 是一个作用在有限集 S 上的有限群，这个公式就是如此。这个公式是“伯恩赛德引理”的简化版本；之所以这样称呼，是因为它归功于柯西和弗罗贝尼乌斯。伯恩赛德引理给出普通商的基数。不过，弱商更好，因此使用弱商时，伯恩赛德引理的公式会更简洁。

现在，范畴基数的公式甚至对某些拥有无限多个对象的范畴也有意义——我们只需确保这个和有意义即可。那么，让我们试着计算有限集范畴的基数！由于任何一个含有 n 个元素的集合都有 $n!$ 个自同构（也就是排列），我们就得到了下面这个绝妙的公式：

$$|\mathsf{FinSet}| = e$$

这原来可以解释关于数字 e 的许多事情。

现在，所有态射都是同构的范畴称为“群胚”。任何范畴 $\mathcal{C}$ 都有一个底层群胚 $\mathcal{C}_0$，它的对象相同，但态射只有同构。范畴 $\mathcal{C}$ 的基数总是等于其底层群胚 $\mathcal{C}_0$ 的基数。这说明，这个概念实际上应该称为“群胚基数”。如果你喜欢 n-范畴，这就意味着我们应该把基数的概念推广到 n-群胚，甚至是 ω-群胚。幸运的是，要尝试这样做，我们并不需要非常了解 ω-群胚！ ω-群胚被认为是一种从代数角度思考同伦意义下拓扑空间的方式。因此，我们只需为拓扑空间发明一个具有良好形式性质的“基数”概念，并使它在同伦 1-型的情形下与群胚基数一致。事实上，这并不难。我们只需使用空间 X 的同伦群 $\pi_k(X)$。

那么：我们将拓扑空间 X 的“同伦基数”定义为交错乘积

$$|X| = |\pi_1(X)|^{-1} \cdot |\pi_2(X)| \cdot |\pi_3(X)|^{-1} \cdot \ \ldots$$

当 X 连通且乘积收敛时；如果 X 不连通，我们就将其同伦基数定义为各连通分支的同伦基数之和，前提是这个和收敛。我们把同伦基数定义良好的空间称为“良性”空间。良性空间的不交并或笛卡尔积仍然是良性空间，并且有

$$|X + Y| = |X| + |Y|,$$
$$|X \times Y| = |X| \times |Y|$$

正如你所期待的那样。

更妙的是，同伦基数与纤维化相处得很好；我们可以把纤维化看作空间的 of “扭曲积”。具体来说，如果

$$F \to X \to B$$

是一个纤维化，且底空间 B 连通，那么我们有

$$|X| = |F| \times |B|$$

w只要所讨论的三个空间中有两个是良性的（这意味着第三个也 th是良性的）。

作为这一事实的一个有趣应用，回想一下，任何拓扑群 G 都有一个“分类 sp空间” BG，也就是说，有一个主 G-丛覆盖其上的空间

$$G \to EG \to BG$$

其全空间 EG是可缩的。我在“第 117 周”中介绍了如何构造分类空间，至少对于离散群 G是如此，但没有多谈它为何如此出色。它之所以出色，主要是因为任意 G-丛在任意空间上的拉回，都是丛 EG 在 BG上的拉回。不过此刻我想指出的是，由于 EG可缩，所以它是良性的，而 $|EG| = 1$。因此， G 是良性的，当且仅当 BG 是良性的，并且

$$|BG| = 1/|G|$$

所以我们可以把 BG 看作 G的“倒数”！

这个想法早已隐含在通常的“等变上同调”处理方法中。设 X 是一个空间，拓扑群 G 作用于其上。当 G 对X 的作用是自由的时，计算商空间 X/G的上同调群（以及其他不变量）会很有意思。当作用不是自由的，这个商空间可能会有非常病态的性质，因此人们通常用“同伦商” $X//G$来替代它，其定义为$(EG \times X)/G$。这就像普通的商，只不过将方程替换成了同伦。此外，还有一个纤维化

$$X \to X//G \to BG,$$

因此，当 X 和 G都良性时，我们有

$$|X//G| = |X| \times |BG| = |X|/|G|$$

正如你所希望的那样！

在论文中，Jim 和我接着讨论了如何运用这些想法，巧妙地解释费曼图的组合学。不过，我不想在这里解释所有这些内容——否则你就没必要读论文了！我只想指出同伦基数中一个神秘之处。

同伦基数在形式上与欧拉示性数非常相似。欧拉示性数 $\chi(X)$ 定义为交错和

$$\chi(X) = \dim(H_0(X)) - \dim(H_1(X)) + \dim(H_2(X)) - \dots$$

只要该和收敛，其中 $H_n(X)$ 是一个有理数上的向量空间，称为 X 的第 n 个有理同调群。与同伦基数的情形一样，我们有

$$\chi(X + Y) = \chi(X) + \chi(Y),$$
$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$$

更一般地，只要

$$F \to X \to B$$

是一个纤维化，且底空间 B 连通，我们就有

$$\chi(X) = \chi(F) \times \chi(B)$$

wh只要任意两个空间的欧拉示性数有定义，这就意味着
tha第三个也有定义（除非我弄错了）。

所以，欧拉示性数很像同伦基数。但很少有空间两者 都有定义：既有定义良好的同伦基数，又有 定义良好的欧拉示性数。所以它们就像杰基尔与海德——你几乎从未在同一时间、同一地点见到它们，因此无法判断它们是否真的是同一个人。

不过，有一些奇特的方法可以尝试强行计算某些空间的这两个量。比如，假设 G 是一个有限群。那么我们可以从一个单纯集合构造出 BG，其中有 1 个非退化 0-单形、$|G| - 1$ 个非退化 1-单形、$(|G| - 1)^2$ 个非退化 2-单形，依此类推。如果所有维度上的非退化单形总数有限，我们就可以把这些单形的数量作交错和，计算这个空间的欧拉示性数。那么就让我们试着在这里这么做吧！结果是：

$$\chi(BG) = 1 - (|G| - 1) + (|G| - 1)^2 - \dots$$

当然，这个和是发散的，但如果我们仍然继续使用几何级数公式，就会得到

$$\chi(BG) = 1/|G|$$

这与我们之前得出的（严格）结果一致：

$$|BG| = 1/|G|.$$

所以，也许它们终究是相同的！James Propp 在上文提到的论文《幂运算与欧拉示性数》中做了类似的计算.....不过，他使用的是一种略有不同的欧拉示性数概念，该概念由 Schanuel 提出。显然，这些“发散的欧拉示性数”背后有些耐人寻味的东西。关于这类现象在物理学中的例子，请参见：

11) Matthias Blau 和 George Thompson，《$N = 2$ 拓扑规范理论、模空间的欧拉示性数与卡松不变量》，《数学物理通讯》**152**（1993年），41–71。

以及其中的参考文献。（我在"第51周"中稍微讨论过这篇论文。）

然而，仍有一些具有挑战性的检验，可以用来验证同伦基数和欧拉示性数是否实际上是同一个东西。这里有一道 James Dolan 提出的谜题。考虑一条亏格为 $g > 1$ 的黎曼曲面。这样的曲面欧拉示性数为 $2-2g$，但它的第一阶以上同伦群也都消失了，这意味着它的 BG与 G 相等，且 BG是它的基本群。如果同伦基数和欧拉示性数相同，这就意味着

$$|G| = \frac{1}{|BG|} = \frac{1}{\chi(S)} = \frac{1}{2-2g}$$

但基本群 G 是无限的！这是怎么回事?

其实，我倒有点高兴 $1/(2-2g)$是负数。有时，可以巧妙地把一个由正整数构成的发散级数求和，得到一个负数。最简单的例子就是几何级数

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \frac{1}{1-2} = -1$$

但在"第126周"中，我讲过一个更复杂的例子，它在弦理论中非常重要：

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

所以，也许可以用某种类似的把戏来计算 G 的元素，并得到一个发散级数，再巧妙地求出 $1/(2-2g)$。当然，即使我们成功做到这一点，怀疑者也完全有理由质疑这种胡闹的意义。不过，这些奇怪的形式运算背后有时隐藏着许多深刻的真理；有时只要足够仔细地考察其中的奥妙，就能发现很酷的东西。

最后，我想提一篇关于范畴化基础的有趣论文：

12) Claudio Hermida，《从相干结构到泛性质》，《纯粹与应用代数杂志》**165**(2001年)，7–61。另见math/0006161。

另外还有两篇关于2-群胚和拓扑学的论文：

13) K. A. Hardie、K. H. Kamps、R. W. Kieboom，《豪斯多夫空间的同伦2-群胚》，《应用范畴结构》**8**，（2000年），209–234。K.A. Hardie、K. H. Kamps、R.W. Kieboom，《拓扑空间的同伦双群胚》，《应用范畴结构》**9**，（2001），311–327。

如果我还有精力，就会聊聊这些，不过现在已经过了我的就寝时间。晚安！

补遗： Toby Bartels 对这期 This Week's Finds 有些有趣的看法。这是我的回复，其中引用了他的一些评论……

3）美国物理学会：《物理学百年》，可在以下网址查阅：
https://web.archive.org/web/19990508143827/http://timeline.aps.org/APS/homeHighRes.html _

TB： 我喜欢他们把那张著名的巴兹·奥尔德林照片——大家都以为照片里是尼尔·阿姆斯特朗——最终说成是尼尔·阿姆斯特朗的照片："他倒映在巴兹·奥尔德林的面罩上。"。

JB： 哈。听起来像是溺爱孙辈的祖母会说的话！

5）约翰·康威和*Peter Doyle*，《除以三》。可在以下网址查阅：math/0605779。这篇文章研究了这样一个问题：如果我给你一个 $3x$ 与$3y$之间的同构，你能构造出一个 x 与 y之间的同构吗？

TB: 答案一定是：如果把 *3* 换成一个无限基数，就行不通。话虽如此，我甚至连怎么除以 *2* 都想不出来！如果把 X 或 Y 的 *3* 个副本叠在一起，就会得到一个有限的、双色的、*3*度的非简单无向图。我记得组合学里有个结论：度数固定的有限双色简单无向图，其两种颜色的顶点集等势，但我想不起那个双射证明了。（想必可以推广到非简单图。）

JB: 这事挺棘手的。我引用一下上面那篇文章：

历史
伯恩斯坦在 *1901* 年的博士就职论文中给出了可以除以二的证明，该论文于 *1905* 年刊登在《数学年刊》上；伯恩斯坦还指出了如何将他的结果推广到除以任意有限 n，但据我们所知，除了伯恩斯坦本人，再没有人声称理解这一论证。*1922* 年，*Sierpiński* 发表了一个更简单的除以二的证明，并努力将他的方法推广到除以三，但最终未能成功。

*1927*年，林登鲍姆和塔斯基在一篇臭名昭著的论文中宣布，林登鲍姆已经找到了除以三的证明。这篇论文列出了*144*条集合论定理的陈述，却没有给出证明。他们连一点证明的线索都不肯透露，想必令谢尔宾斯基十分沮丧；因为看来二十年后，他仍然不知道该如何除以三。最后，*1949*年，塔斯基在一篇"献给瓦茨瓦夫·谢尔宾斯基教授，以庆祝他从教和学术生涯四十周年"的论文中发表了一个证明。塔斯基在这篇论文中解释说，很遗憾，他已经记不起林登鲍姆的证明是怎样的，只记得

其中用到了一种类似谢尔宾斯基除以二时所用的论证，以及另一个由塔斯基提出的引理，我们将在下文介绍。塔斯基没有给出林登鲍姆的证明，而是给出了另一个证明。

我们开始进行本文所述的研究时，已经知道塔斯基的论文中有一个证明，而 *Conway* 也曾在某个时候仔细研读过它，却始终未能领会其中的奥妙。这个问题与 *John* 在其论文中探讨过的那类问题密切相关，也与 *Doyle* 在双射组合学领域所做的工作有关。因此，我们决定弄清楚这到底是怎么回事。我们没费多大劲就想出了如何除以二。我们得到的解实质上与 *Sierpiński* 的解等价，不过下面我们描述时所用的说法，与 *Sierpiński* 的说法并不太相似。我们一遍又一遍地尝试把这个方法改用于除以三的情形，却总是在论证的同一个地方卡住。于是最后我们决定去看看塔斯基的论文，发现塔斯基提到林登鲍姆用过的那个引理，恰好就是帮助我们越过障碍所需要的！这样一来，我们就得到了一个除以三的证明：它结合了类似于 *Sierpiński* 用来除以二的论证，以及对塔斯基引理的运用。我们想，自己一定是想出了一个与林登鲍姆的论证非常相似的论证。这就是我们将在此介绍的解：时隔62年，重述林登鲍姆的论证。

所以：我们将拓扑空间 X 的"同伦基数"定义为交错乘积 $|X| = \prod_{i>0} |\pi_i(X)|^{(-1)^i}$，其中 X 是连通的，且该乘积收敛。

TB： 如果发散到0呢？如果某个奇数 i 对应的 $\pi_i(X)$ 是无穷大，而没有偶数i，我们能说 $|X|$是0吗？

JB： 可以这么说，但我们以后可能会后悔。某种意义上，在进行乘积运算时，0 并不比∞ 好多少。因此，如果允许0 作为同伦基数的合法取值，就也应该允许 ∞；但如果两者都允许，那么试图将它们相乘时就会陷入麻烦。无穷和的情形中也有类似的两难（其中 $+\infty$ 和 $-\infty$ 就是罪魁祸首），解决办法似乎有两种：

- 不允许把0 和 ∞ 作为上述乘积的合法答案，

or

- 两者都允许，但陈述定理时要格外谨慎，以免遇到问题。

作为这一事实的一个有趣应用，回想一下，任意拓扑群 G 都有一个"分类空间" BG，也就是说，一个空间，其上有一个主 G 丛 $G \to$

$EG \to BG$ 其全空间 EG 是可缩的。我在"第 117 周"中介绍了如何构造分类空间，G至少对于离散群的情况是如此，但我没有多谈它为何如此出色。它之所以出色，主要是因为任意空间上的任意 G丛都是丛 EG在 BG上的拉回。不过现在我想指出，由于 EG是可缩的，因此它是良性的，而且$|EG| = 1$。因此 G 是良性的，当且仅当 BG 是良性的，并且 $|BG| = 1/|G|$，所以我们可以把 BG 看作 G的"倒数"!

TB： 另一方面，G 已经在某种意义上是自身的倒数。如果 G 是一个离散群，它就是一个带有 $|G|_{\text{homotopy}} = |G|_{\text{set}}$的拓扑空间。但 G 也是一个只有1个对象的群胚，而且 $|G|_{\text{groupoid}} = 1/|G|_{\text{set}}$。所以，$|G|_{\text{homotopy}}|G|_{\text{groupoid}} =1$。

JB： 信不信由你，你正在重新发明 BG！群胚可以重新解释为一个第一阶以上同伦群均消失的空间；如果对群胚 G这样做，就会得到 BG。

更一般地说：
回想一下，我们可以取一个带基点空间 X，并构造一个带基点空间 LX，其中包含 X 中以基点为起点和终点的回路。显然，这个空间有

$$\pi_{n+1}(X) = \pi_n(LX)$$

因此，如果 X 是连通且良性的，我们就有

$$|LX| = 1/|X|$$

现在稍加操作，就能把 LX （或与它同伦等价的空间！）变成一个拓扑群，其中乘法是环路的复合。
接下来会发现，当 X 连通时，BLX 与 X 同伦等价。反过来，给定一个拓扑群 G，LBG 与 G 同伦等价。

因此我们看到，拓扑群和连通带基点空间其实是同一种东西，至少从同伦论的角度来看是如此。在拓扑学中，很少有什么事实比这一点更重要。

但这里真正发生的是什么？要从拓扑群 G 得到一个连通带基点空间，就必须构造 BG；它的同伦群都相同，只是整体向上移了一阶：

$$\pi_{n+1}(BG) = \pi_n(G)$$

要从连通带基点空间 X 得到一个拓扑群，则必须构造 LX；它的同伦群都相同，只是整体向下移了一阶：

$$\pi_{n-1}(LX) = \pi_n(X)$$

这实际上就是你所施展的技巧，只是稍加伪装而已。

而关键在于，一个 *1*-对象 ω-群胚可以通过忽略对象，并将所有 j-态射重新命名为“$(j-1)$-态射”，从而重新解释为一个ω-群胚。

看到了吧？说到底，这个“BG”玩意儿不过是个愚蠢的重新编号游戏！！！当然，没有哪本教科书会公开承认这一点——部分原因是它们不谈 ω-群胚。

所以，欧拉示性数很像同伦基数。但既有定义良好的同伦基数、又有定义良好的欧拉示性数的空间并不多。因此，它们就像杰基尔与海德——你几乎从未在同一时间、同一地点看到它们，所以无法判断它们究竟是不是同一个人。

TB: 那么，有没有两者都定义良好却数值不同的情况？

JB: 我想不起有什么例子能让它们都有限却彼此不同。我知道的两者都有限的情况少之又少！点呢？圆呢？*2*-球面呢？这些情况就留给你思考了。

然而，对于同伦基数和欧拉示性数其实是同一个东西这一理论，仍然存在着一些颇具挑战性的检验。这里有一道 *James Dolan* 提出的谜题。考虑一个亏格为 $g>1$ 的黎曼曲面。这样的曲面的欧拉示性数为 $2-2g$，但它的第一阶以上同伦群也都为零，这意味着它与其基本群的 G 相等，且 BG。如果同伦基数和欧拉示性数相同，这就意味着

$$|G| = 1/|BG| = 1/\chi(S) = 1/(2-2g)$$

.

但是基本群 G是无限的！这是怎么回事？

TB： 这似乎并不太令人意外。 $1/(2-2g)$ 也是无限的。只要反向使用几何级数：

$$1/(2-2g) = (1/2)\sum_i g^i,$$

它会发散，因为 $g>1$。

JB： 嗯，我真正想要的是一种计算曲面 S 的基本群中元素的方法，它能给出一个发散的和，而我可以巧妙地将其求和，得到 $1/(2-2g)$。

后来，Laurent Bartholdi 和 Danny Ruberman 实现了我之前的愿望！人们已经找到了计算黎曼曲面基本群中元素个数的方法，并对结果重新求和，以一种漂亮的方式得到 $1/(2-2g)$。这里有两篇参考资料：

14) William J. Floyd 和 Steven P. Plotnick，《福克斯群上的增长函数与欧拉示性数》，《数学发明》**88**（1987年），1–29。

15) R. I. Grigorchuk，《增长函数、重写系统与欧拉示性数》，《数学札记》**58**(1995年), 653–668, 798.

你可以在这里进一步了解欧拉示性数和同伦基数：

16）John Baez，《欧拉示性数与同伦基数》，在菲尔兹研究所应用同伦论项目上的讲座，2003年9月20日。网址：http://www.math.ucr.edu/home/baez/cardinality/

> 虚数表达式 $\sqrt{-a}$ 和负数表达式 $-b$ 有一个相似之处：它们中的任何一个若作为某个问题的解出现，都表明其中存在某种不一致性或荒谬之处。就实际意义而言，二者都是虚妄的，因为 $0-a$ 和$\sqrt{-a}$一样难以想象。
>
> —— *Augustus De Morgan，1831*年

第148周

2000年6月5日

上周我谈到了一些千年相关书籍。本周则来聊聊一些千年数学问题！1900年，在第二届国际数学家大会上，希尔伯特提出了一份著名的23个问题清单。如今，似乎没有哪个人有勇气再次发起这类挑战。不过，位于马萨诸塞州剑桥、由阿瑟·贾菲主持的新成立的克雷数学研究所，刚刚列出了一份不错的7个问题清单：

1）克雷数学研究所，《千年大奖难题》：
http://www.claymath.org/millennium-problems

每道难题都有100万美元奖金！与希尔伯特的大多数问题不同，这些问题并非专为此目的而提出：它们早已证明了自身的价值，长期以来一直难以攻克。

如下：

1. P =NP?

这是列表中最新提出的问题，也是最容易解释的问题。如果某个算法的运行时间受输入数据长度的某个多项式所界定，那么这个算法就是“多项式时间”算法。这是一个粗略但易于理解的标准，用来判断一个算法是否足够快，值得我们费心去使用。“非确定性多项式时间”算法是指能够在受输入数据某个多项式所界定的时间内检验 某个问题的一个候选解的算法。P 中的所有算法都属于 NP，但逆命题呢？P = NP 吗？斯蒂芬·库克在 1971 年提出了这个问题，至今仍未解决。它似乎不太可能成立——整数分解问题就是一个很有力的反例候选——但还没有人证明 它不成立。这是其中最实际的问题，因为如果答案是“是”，那么我们就有可能利用这一结果，迅速破解目前所有最先进的加密方案。

2. 庞加莱猜想

球面是最基本的拓扑空间之一，但其中仍藏着许多奥秘。例如：每个与三维球面具有相同同伦型的三维流形，是否都与三维球面同胚？简而言之：同伦三维球面真的是三维球面吗？1904年，庞加莱提出了这个谜题；此前不久，他发现了一些三维流形，它们的同调群与三维球面相同，却并非真正的三维球面，从而推翻了自己一个较容易的猜想。庞加莱问题在更高维度的类似问题都已得到肯定的解答——斯梅尔、斯托林斯和华莱士解决了五维及更高维的情形，弗里德曼后来则解决了更微妙的四维情形——但三维情形至今仍未解决。这很好地说明了一个初看可能令人惊讶的事实：拓扑学中的许多问题，在相当低的维度上反而最棘手！这是因为“辗转腾挪的空间”更小。过去几十年里，低维拓扑学涌现出大量新思想——自 This Week’s Finds 创刊以来，这一直是其中的主题——但庞加莱猜想仍未被攻克。

3. Birch–Swinnerton-Dyer猜想

这是一个关于椭圆曲线，并间接涉及数论的猜想。关于椭圆曲线的精确定义，我请你参阅 “第13周”和“第125周”，不过简单来说，它是一种由如下代数方程描述的环面状曲面：

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

任何椭圆曲线天然都是一个阿贝尔群，而其上坐标为有理数的点构成一个有限生成子群。这样的有理点何时会有无限多个？1965年，Birch和Swinnerton-Dyer猜想提出了一个判定准则，其中涉及椭圆曲线的某种“L-函数”。 L-函数 $L(s)$ 巧妙地编码了上述方程模 p 的解的数量，其中 p 是任意素数。Birch–Swinnerton-Dyer猜想指出，当且仅当椭圆曲线有无限多个有理点时， $L(1) = 0$。更一般地说，它指出，$L(s)$ 在 $s = 1$处零点的阶数等于椭圆曲线上有理点群的秩（也就是该群中自由阿贝尔直和项的秩）。若能证明这一猜想，将有助于深入理解丢番图方程，其中一个问题至少可追溯到10世纪：找出哪些整数可以表示为直角三角形的面积，且其所有边长都是有理数。

4. 霍奇猜想

这个问题涉及代数几何和拓扑学。“射影非奇异复代数簇”基本上是由一组齐次复多项式方程描述的紧致光滑流形。这样的代数簇的维数总是偶数，记作 $2n$。我们可以对这样的代数簇取德拉姆上同调，并利用每个函数都可以分解为全纯部分和反全纯部分之和这一事实，将其分解为由整数对 (p, q) 标记的若干部分，其中这些整数介于 0 和 n 之间。德拉姆上同调中包含有理上同调，而其中的有理元素称为“霍奇形式”。根据庞加莱对偶性，我们的代数簇中的任何闭解析子空间都会定义一个霍奇形式——这种霍奇形式称为代数循环。1950 年提出的霍奇猜想指出：每个霍奇形式都是代数循环的有理线性组合。它的意思是，我们可以利用嵌在代数簇中的闭解析子空间，具体实现一组上同调类。

5. 杨–米尔斯理论的存在性与质量间隙

现代数理物理学中一个重大的未解问题是：粒子物理学的标准模型在数学上是否自洽。我们甚至还不知道，“纯”杨–米尔斯理论——即不与费米子或希格斯场耦合的理论——是否是一个性质良好的量子场论。为了把这个问题说清楚，人们为量子场论提出了各种公理，例如所谓的“Haag–Kastler公理”。构造性量子场论的任务，就是从数学上研究诸如此类的问题：我们能否构造杨–米尔斯理论，使其满足这些公理？但人们真正想知道的还不止于此：至少要证明，与费米子耦合的杨–米尔斯理论存在，并且具有“质量间隙”——也就是说，该理论中由束缚态形成的粒子（例如由夸克束缚形成的质子）具有非零的极小质量。

6. 纳维–斯托克斯方程的存在性与光滑性

纳维–斯托克斯方程是一组描述黏性不可压缩流体流动的偏微分方程。如果一开始用一个平滑良好的向量场来描述某种流体的流动，那么随着湍流的发展，这个向量场往往会变得复杂而扭曲。没人知道解是否能对所有时间都存在，还是会产生奇点，并在一段时间后变得无定义！事实上，数值证据反而暗示情况可能相反。因此，人们希望知道解是否能始终存在并保持平滑，或者至少找出这一点成立的条件。当然，纳维–斯托克斯方程只是对流体实际行为的近似，因为它把流体理想化为连续体，而流体实际上由分子构成。但随着湍流的发展，理解连续介质近似是否以及如何失效至关重要。

7. 黎曼猜想

对于 $\Re(s) > 1$，黎曼ζ函数定义为

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

但我们可以通过解析延拓将它扩展到复平面的大部分区域——它在 $s = 1$ 处有一个极点。ζ函数在“临界带”内有许多零点，其中 $\Re(s)$ 介于 0 和 1 之间。1859年，黎曼猜想所有这类零点的实部都等于 $1/2$。这个猜想对素数分布等问题有许多有趣的影响。迄今为止，已发现临界带中超过十亿个零点的实部为 $1/2$；研究还表明，这类零点中“大多数”都具有这一性质，但黎曼猜想仍未得到证明。

如果你解出了其中一个猜想，并因为在这里的 This Week's Finds 上读到它而赢得了百万美元，请在遗嘱中给我留一份。

好了，接下来聊点别的。

这周对我来说有两件好事。首先，Ashtekar、Krasnov 和我终于完成了一篇关于黑洞熵的论文，这篇论文我们已经艰苦奋战了三年多。我忍不住想详细谈谈这篇论文，因为终于完成它让我如释重负。其次，n-范畴论的权威 Ross Street 来到了 Riverside，向 James Dolan 和我讲解了一大堆很酷的内容。也许下次我会聊聊这件事。

2) Abhay Ashtekar、John Baez 和 Kirill Krasnov，《孤立视界的量子几何与黑洞熵》，《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**4** （2001），1–94。另见gr-qc/0005126。

我曾在“第112周”中讲解过这篇论文的早期版本，但现在我想给出更具技术性的说明。因此：

这篇论文旨在运用圈量子引力的技术，在考虑量子效应的情况下理解黑洞的几何。我们不考虑奇点附近的区域，因为那里尚未得到充分理解。相反，我们聚焦于事件视界的几何，因为我们希望通过计算视界的微观态来计算黑洞的熵。

或许我该简单说明一下我们为什么要这么做。正如“第111周”中所解释的，贝肯斯坦和霍金发现了一个公式，将黑洞的熵 S 与其

事件视界的面积 A 联系起来。它非常简单：

$$S = A/4$$

在光速、牛顿引力常数、玻尔兹曼常数和普朗克常数都等于 1 的单位制中。在量子统计力学中，处于热平衡的系统，其熵大致等于它能够占据的微观态数量 N 的对数：

$$S = \ln N.$$

当所有微观态的能量都相同时，这个关系恰好成立。因此，我们预计，面积为 A 的黑洞大约有

$$N = \exp(A/4)$$

个微观态。对于一个太阳质量的黑洞，这大约是 $\exp(10^{76})$ 个微观态！任何好的量子引力理论都必须解释这些微观态是什么。由于它们的数量与事件视界的面积有关，因此很自然会猜测它们与事件视界的几何有关。但具体如何关联呢？

显然，只要事件视界上每个面积为 4ln(2) 的小块恰好有 2 个态，一切就都能完美成立。我认为，惠勒最早认真对待这一想法，并提出了一种玩具模型：每个这样的区域存储一比特信息，从而使黑洞变得有点像一块巨大的硬盘：

3) 约翰·惠勒，《It from bit》，载于《萨哈罗夫物理学纪念讲座》，第2卷，L. Keldysh 和 V. Feinberg 编，Nova Science，纽约，1992年。

当然，这个想法听起来有点古怪。不过，旋量的量子态恰好包含一个比特的信息，而圈量子引力建立在旋量理论之上，所以它并不像看起来那么离谱……尽管如此，还是有一些，呃，细节 需要处理！

那么，我们就来把这些问题解决掉。

第一步是以一种能够让我们应用圈量子引力技术的方式，理解黑洞的经典力学。换句话说，我们要为黑洞描述一个经典相空间。这一步已在一篇配套论文中完成：

4) Abhay Ashtekar、Alejandro Corichi 和 Kirill Krasnov，《孤立视界：经典相空间》，《*Adv. Theor. Math. Phys.*》**3** (2000年)，418–471页。另可参见gr-qc/9905089。

我们考虑黑洞外部的时空区域，并假设其边界是如下形式的圆柱面 $\mathbb{R} \times S^2$。我们要求该边界是一个“孤立视界”——粗略地说，就是光无法逃逸、且在所考察的这段时间内没有物质或引力辐射落入其中的曲面。为了使这一概念更加严谨，我们需要对视界处的度量和其他场施加一些边界条件。正如“第109周”中所述，使用彭罗斯的广义相对论旋量形式体系可以最优雅地描述这些条件。借助这些边界条件，我们可以从通常的广义相对论拉格朗日量出发，按部就班地推导出孤立黑洞相空间的描述。

如果暂时忽略物质的存在，那么相空间中的一个点描述了某一时刻黑洞外部空间的度量和外曲率。具体而言，我们使用一个SU(2)联络 A 以及一个 $\mathfrak{su}(2)$值2-形式 E来实现这一点。你可以将它们类比为电磁学中的矢势和电场。与通常情况一样，它们必须满足广义相对论爱因斯坦方程所给出的某些约束。此外，它们还必须满足由孤立视界定义所给出的边界条件。

由于黑洞呈球状，边界条件适用于一个2-球面，我将其称为“视界二球面”。边界条件所说的一件事是，在视界二球面上，SU(2)联络 A 完全由一个U(1)联络决定，例如 W。这个U(1)联络极其重要，因为它描述了视界二球面的内蕴几何。可以这样理解：首先将时空度规限制在视界二球面上，然后求出这个度量在该2-球面上的Levi-Civita联络。最后，由于圈量子引力基于旋量的平行移动，你再求出2-球面上旋量对应的联络，它是一个U(1)联络。那就是 W！

边界条件还说明，在视界二球面上， E 场与 W的曲率成正比。因此，在视界二球面上，所有场都由 W决定。即使将物质的存在考虑在内，这一点依然成立。当我们进行量子化时，正是这个场 W 的微观态产生了黑洞熵。由于 W 只是描述视界二球面形状的一种技术性方式，这意味着黑洞熵源于视界可能具有的许多略有不同的形状。

不过我在这里有点操之过急了！我们还没有进行量子化；我们只是在讨论孤立黑洞的经典相空间。

这个相空间最不寻常的特征，是它的辛结构由两项相加而成。首先，是在给定时间对空间进行的通常积分，它使视界二球面之外的 E 场与 A 场正则共轭。但除此之外，还有一个边界项：对视界二球面的积分。这使视界的几何拥有了自身的生命，最终也解释了黑洞熵。这个边界项涉及 U(1)联络 W，并不令人意外。事实上，这个边界项正是 2-球面上 U(1) 陈–西蒙斯理论的辛结构！这是最简单的写法：

$$\omega(\delta W, \delta W') = \frac{k}{2\pi} \int \delta W \wedge \delta W'$$

这里的 ω 是 U(1) 陈–西蒙斯辛结构；我们在 U(1)联络空间中的两个切向量上对它求值，这两个切向量位于 2-球面上，记作 δW 和 $\delta W'$。它们与 1-形式相同，因此我们可以将它们作楔积，并对结果在 2-球面上积分。数值 k 是一个取决于黑洞面积的常数.....不过这一点我们稍后再谈！

我想，要充分领会陈–西蒙斯理论这套东西，得先了解一些背景。我在这里的 This Week's Finds 上已经谈论它很久了。陈–西蒙斯理论的量子版本是一种三维量子场论，因 Witten 将它与琼斯多项式联系起来的工作而声名大噪；琼斯多项式是纽结的不变量。至少从启发式的角度来看，我们可以通过在 SU(2) 陈–西蒙斯理论中做路径积分来计算琼斯多项式。结果还发现，陈–西蒙斯理论

与三维时空中的量子引力密切相关。很长一段时间以来，许多人都希望陈–西蒙斯理论对于四维时空中的量子引力也很重要——例如参见 “第56周”和 “第57周”。然而，大多数试图将陈–西蒙斯理论与四维量子引力中的现实物理问题联系起来的尝试，都遇到了严重的技术难题。我认为，我们或许终于要解决其中一些问题了！但讽刺的是，我们用的是 U(1) 陈–西蒙斯理论；与更引人注目的 SU(2) 版本相比，它其实非常简单。例如，U(1)陈–西蒙斯理论也给出了一个纽结不变量，但它基本上只是自链接数。而 U(1) 陈–西蒙斯理论的数学可以追溯到 19 世纪——说到底，它就是“theta函数”的数学。

作为一则历史补充，我还应该说明，关于孤立黑洞辛结构中陈-西蒙斯边界项的那个非常漂亮的推导，出自一篇发表于我上文提到的论文之后的论文：

5) Abhay Ashtekar、Chris Beetle 和 SteveFairhurst，《孤立视界的力学》《经典与量子引力》**17** (2000)，253–298。可见于 gr-qc/9907068。

起初，大家都认为，要使作用量作为场的函数可微，就必须在广义相对论的通常作用量中加入一个边界项，并且这个边界项正是辛结构中边界项的来源。这看起来有些随意。当然，要得到场方程，就需要对作用量求变分；因此，如果为了使作用量可微而需要增加一项，那么这样做完全合理，但你还是会想：这个额外的项究竟是从哪里来的?

幸运的是，Ashtekar 等人最终意识到，虽然你可以 在作用量中加入一个额外项，但实际上没必要 这么做。巧妙地利用“孤立视界”边界条件，就能证明广义相对论的通常作用量本身已经是可微的，无需添加任何额外项，而且它会在辛结构中产生陈–西蒙斯边界项。

好了：我们已经得到了孤立黑洞的相空间，也得到了这个相空间上的辛结构。接下来呢?

那么，现在我们应该量子化这个相空间！这有点复杂，不过多亏了辛结构的两部分形式，问题基本上可以拆成两个独立的问题：量子化视界外 2-球面上的 A 场及其正则共轭量 E，以及量子化这个 2-球面上的 W 场。第一个问题基本上就是圈量子引力中的常见问题——人们对此已经相当了解。第二个问题基本上就是量子化 U(1) 陈–西蒙斯理论——人们对此了解得更多！但之后还得把这两部分重新组合起来。为此，关键在于视界上，E 场与联络 W 的曲率成正比。

那么，在所得理论中，量子态是什么样的? 我来为你描述一种态基.....

在黑洞之外，它们由自旋网络描述。我在“第110周”及其他地方讨论过这些内容，但还是让我先简单回顾一下基础知识。自旋网络是一种图，其边标记为 SU(2) 的不可约表示，换句话说，就是自旋$j = 0,\ 1/2,\ 1,\ .....$。它的顶点也带有标记，不过在这里不太重要。更重要的是，自旋网络边可以穿过视界球面。而事实证明，每个穿孔都必须标记一个从集合中 m 选出的

中

$$\{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$$

这些数值 m 决定了视界二球面的几何态。

这些数值 j 和 m 究竟意味着什么？如果你学过角动量的量子力学，这些应该会让你觉得有些熟悉。这里运用的是同样的数学，但诠释却大不相同。自旋网络边代表引力 E 场的量子化通量线。当一条自旋网络边穿过视界二球面时，它会为这个2-球面贡献面积：一条自旋-j 边贡献的面积为

$$8\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}$$

其中 γ是某个常数。

但是，由于将 E 场与联络 W的曲率联系起来的边界条件，每条自旋网络边也会为视界二球面贡献曲率。事实上，除自旋网络边穿过之处外，这个2-球面是平坦的；在穿孔处则有锥形奇点。你可以从一张纸上剪下一块楔形区域，再把新形成的两条边重新粘合起来，从而做出一个圆锥；这个圆锥的形状由“亏角”描述，也就是你剪掉的楔形区域的角度。在黑洞问题中，标记为数值 m 的穿孔会产生一个圆锥奇点，其亏角等于

$$\frac{4\pi m}{k}$$

其中， k 是陈–西蒙斯辛结构公式中出现的同一个常数。

我想，现在该解释这些神秘的常数了！首先， γ 是一个未确定的无量纲常数，通常称为“Immirzi参数”，因为它最早由 Fernando Barbero 发现。这个参数决定了面积量子化的尺度！当然，自旋为 j 的边所贡献的面积公式：

$$8\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}$$

其中也暗含着一个普朗克面积因子，只是看不出来，因为我把 c、 G 和 $\hbar$ 都设为 1 了。这并不奇怪。令人惊讶的是，Barbero–Immirzi参数的出现。到目前为止，圈量子引力还无法从第一性原理预测这个参数的值。

其次，数值 k 在陈–西蒙斯理论中称为“层数”，其表达式为

$$k = \frac{A}{4\pi\gamma}$$

好了，以上就是我对量子化孤立黑洞相空间所得结果的简要介绍。我没有解释量子化程序究竟是如何运作的——其中涉及各种有趣的内容，比如 θ函数等等。我只是告诉了你最终结果。

现在来进行熵计算。我们要回答的问题是：“给定一个面积在 ε 范围内接近 A的黑洞，与这个面积相容的微观态数量的对数是多少？”这应该就是黑洞的熵——只要数字 ε 处于普朗克尺度，它就不会有太大变化。

要计算熵，首先我们要找出所有用自旋j 标记穿孔的方式，使总面积在 ε 范围内接近 A。对每种标记方式，我们再计算描述黑洞表面内蕴曲率的数字 m 有哪些允许的取值。然后把这些数加起来，再取对数。

答案是什么？好吧，我现在就用一种非常粗略的方式为你进行计算，只是勾勒一下思路。为了尽可能多地得到选取数字 m 的方式，我们应该关注这样一些态：标记穿孔的多数自旋 j 都等于 $1/2$。如果所有这些自旋都等于 $1/2$，那么每个穿孔对视界二球面的面积贡献为

$$8\pi\gamma\sqrt{j(j+1)} = 4\pi\gamma\sqrt{3}$$

。由于总面积接近 A，这意味着大约有$A/(4\pi\gamma\sqrt{3})$个穿孔。然后，对于每个穿孔，我们可以选择 $m = -1/2$ 或 $m = 1/2$。这就得到

$$N = 2^{A/4\ \pi\ \gamma\ \sqrt{3}}$$

种选择 m 值的方式。如果这完全正确，那么黑洞的熵将是

$$S = \ln N = \left(\frac{\ln 2}{4\pi\gamma\sqrt{3}}\right) A$$

信不信由你，当A 趋于无穷时，这个粗略估计渐近地趋近于正确答案。换句话说，当黑洞处于其最大熵态时，绝大多数穿过视界的自旋网络边都是自旋-$1/2$ 边。

那么，我们看到了什么？我们看到，黑洞熵（渐近地！）与面积成正比，正如贝肯斯坦和霍金所说。这很好。但我们还没有得到贝肯斯坦–霍金公式

$$S = A/4$$

因为我们的公式中有一个尚未确定的参数——Barbero-Immirzi 参数。这可不好。不过，如果我们取

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}}$$

如果这样做，圈量子引力中就不再有那个恼人的、悬而未决的常数了。事实上，我们可以说，已经确定了“面积量子”——可能的最小面积单位。这很好。这样一来，在我们的模型中，黑洞视界上每一小块面积为 4ln(2) 的区域几乎都包含一个比特的信息——因为自旋为 $1/2$ 的穿孔面积为 4ln(2)，而标记为自旋 $1/2$ 的穿孔处的角亏只能取 2 个值，分别对应于 $m = -1/2$ 和 $m = 1/2$。当然，也有标记为更高 j 值的穿孔，但$j = 1/2$ 穿孔在微观态计数中占主导地位。

当然，你可能会基于以下理由质疑这种做法：“到目前为止，你一直忽略了物质。如果把电磁场也纳入考虑呢？这会改变计算结果，而要匹配贝肯斯坦–霍金结果，你现在可能需要一个不同的 γ！”

然而，事实并非如此：我们可以在计算中纳入电磁学，而同一个 γ 仍然适用。这倒是挺不错的。

我们计算黑洞熵的方法与弦理论中的计算方法之间有许多有趣的比较，此外还有很多其他值得一说的内容；不过，想了解这些，你得去读那篇论文……我现在累坏了！

补遗：感谢 Herman Rubin 和 Lieven Marchand 指出了我在介绍黎曼猜想和 P = NP 猜想时犯的一些错误。我还要感谢 J. Maurice Rojas 指出，Steve Smale 正是一位确实有胆量在1998年提出一系列面向21世纪的数学问题的人。这些内容见：

6）Stephen Smale，《下一世纪的数学问题》，《数学情报员》**20**（1998年），7–15。维基百科“Smale的问题”，见https://en.wikipedia.org/wiki/Smale's_problems。

我相信，这也出现在开头提到的 Arnold 编写的那本书中《第147周》。

> ……对于刚开始从事研究的人来说，最难领会的一个特点是成果的质量——也就是说，问题的深度。有时，作者满怀勇气、耗费大量时间，才得出他们认为意义重大的结果，而专家却认为这些结果浅显。这可以用下国际象棋作类比。无论初学者多么努力，高手都能轻而易举地击败他。原因在于，尽管初学者可能已经谋划了不少步棋，但高手因经常对弈，遇到过许多类似而且更深奥的问题；他读过有关这项棋艺各个方面的标准著作，因此能够回想起许多经过深入分析的局面。数学研究也是如此。我们必须经常与高手过招（也就是说，尝试改进著名数学家的成果）；我们必须研读这项棋艺的标准著作（也就是说，那些“众所周知”的结果）。如果我们坚持这样做，进步就必然会到来。
>
> — 华罗庚，《数论导引》

第149周

2000年6月12日

椭圆上同调处于几条广为人知的数学道路的交汇处。它与同伦论、弦理论、椭圆曲线、模形式，以及数字 24 神秘而无处不在的现象，都有着引人入胜的联络。这使得它非常令人着迷，但对于尚未成为这些领域专家的人来说，也难免有些令人生畏。

真的有人能精通所有这些主题吗？也许 Graeme Segal 就是！毕竟，他凭借同伦论方面的研究而成名，创立了共形场论公理——当然，其中借鉴了弦理论的许多思想——而且我敢肯定，他还是个孩子时，就在一个周末掌握了椭圆曲线理论。要了解椭圆上同调，确实应该从这里开始：

1) Graeme Segal，“椭圆上同调”，*Asterisque* **161–162**（1988年），187–201。

另一篇很好的参考资料是这本会议论文集，收录了1986年在普林斯顿举行的一场会议的论文：

2) Peter S. Landweber，编，《代数拓扑中的椭圆曲线与模形式》，《施普普林格数学讲义》**1326**，施普林格，柏林，1988年。

这本书也很有帮助：

3) Charles B. Thomas，《椭圆上同调》，Kluwer，多德雷赫特，1999年。

不过，恐怕它过于注重细节，而对整体概貌和物理学直觉着墨不多。关于这一点，你或许可以试试这篇：

4) Edward Witten，“椭圆属与量子场论”，《数学物理通讯》**109**（1987年），525–536。

如果你能弄到这本书，也可以试试：

5) 弗里德里希·希策布鲁赫、托马斯·贝格尔和赖纳·荣格，《流形与模形式》，Peter S. Landweber 译，Vieweg，布伦瑞克（波恩马克斯·普朗克数学研究所出版），1992年。

要想对椭圆上同调有哪怕一丁点儿理解的机会，你就得先了解复定向上同调理论。所以我得先告诉你它们是什么。这算是一堂代数拓扑速成课。等讲完这些，我大概就累得没力气谈椭圆上同调了——但至少我已经打好了基础。

那么，什么是“广义上同调理论”？

这是一个小工具，它会接收一个拓扑空间 X，并输出一列阿贝尔群 $h^n(X)$。要成为广义上同调理论，这个小工具必须满足一系列称为埃伦伯格–斯廷罗德公理的公理。最基本的例子是所谓的普通上同调，因此初学这些内容时，学习埃伦伯格–斯廷罗德公理的主要动机，就是知道普通上同调满足所有这些公理。不过

还有许多其他例子：各种味的 K理论、配边理论等等。最终你会了解到，任何广义上同调理论背后都有一列空间 $E(n)$，使得

$$h^n(X) = [X, E(n)]$$

其中右侧是从 X 到 $E(n)$的映射的同伦类集合。我们称这列空间 $E(n)$“表示”广义上同调理论。此外，这些空间可以组合成一个“谱”，也就是说，$E(n)$中的基点环路空间是 $E(n-1)$。由此可知，每个空间 $E(n)$都是一个无限环空间：一个空间中的环路空间的环路空间的环路空间.....可以无限继续下去。

反过来，给定一个无限环空间 $E(0)$，我们可以用它构造一个谱，进而得到一个广义上同调理论。因此，广义上同调理论、谱和无限环空间几乎是一回事。

但它们为什么如此重要呢?

其实，无限环空间不过是同伦论学家眼中的阿贝尔群。更技术性地说，我们可以称它为“同伦相干阿贝尔群”。我的意思是，它是一个带有连续二元运算的空间，并且满足阿贝尔群的所有通常规律在同伦意义下；这些同伦又满足所有可以想象到的良好规律在同伦意义下，如此无穷递进。在同伦论的语境中，这几乎与阿贝尔群一样好用。普通数学家能用阿贝尔群做的事，同伦论学家差不多都能用无限环空间来做!

例如，普通数学家常常喜欢取一个阿贝尔群，并为它赋予一种称为“乘法”的额外运算，使其成为一个环。同伦论学家也喜欢对无限环空间做同样的事。当然，同伦论学家只要求环公理在同伦意义下成立，而这些同伦又满足一系列优美的规律在同伦意义下，如此等等。通常，他们是在谱的背景下，而不是无限环空间中进行这些操作——这个区别太过技术性，我就不在这里操心了！——所以他们把这类东西称为“环谱”。同样，与交换环相对应，同伦论学家还有一个称为“E_∞ 环谱”的概念。“E_∞”一词只是表达交换律在同伦意义下成立的一种有趣说法，而这些同伦又满足一系列同伦意义下的规律，等等。

如果从一个环谱出发，相应的上同调理论就会带有乘积。换句话说，任意空间 X 的上同调群 $h^n(X)$ 会结合起来构成一个分次环，称为 $h^*(X)$——星号代表一个小空位，你可以在其中填入任意数量的“n”。如果你的环谱是一个 E_∞ 环谱，那么 $h^*(X)$ 就是分次交换的。这正是大多数著名广义上同调理论的情形。例如，空间的普通上同调实际上是一个带有乘积的分次交换环，这种乘积称为“帽积”；对于最流行的 K理论和配边理论中的各种味，也有类似的情况。

当然，要把所有这些内容讲得严谨，需要花不少功夫：早在20世纪70年代，人们就为此投入了大量精力。不过这非常优美，所以人人都应该学一学。想了解详情，可以看：

6) J. Adams，无限循环空间，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1978年。

7) J. Adams，稳定同伦与广义同调，芝加哥大学出版社，芝加哥，1974年。

8) J. P. May，迭代环空间的几何，《数学讲义》**271**，施普林格，柏林，1972年。另见 http://www.math.uchicago.edu/~may/geom iter.pdf9) J. P. May、F. Quinn、N. Ray 和 J. Tornehave，E_∞ 环空间与 E_∞ 环谱，《数学讲义》**577**，施普林格，柏林，1977年。另见 http://www.math.uchicago.edu/~may/BOOKS/einfty.pdf10) G. Carlsson 和 R. Milgram，“稳定同伦与迭代环空间”，载于《代数拓扑手册》，Ioan M. James 编，North-Hollānd，阿姆斯特丹，1995年。

现在，有一类特别优美的广义上同调理论，称为“复定向上同调理论”。椭圆上同调就是其中之一，因此要理解椭圆上同调，首先得稍微研究一下这类理论。我不会直接给出定义，而是会循序渐进地引出它……

从整数集 $\mathbb{Z}$ 开始吧。它们在加法下构成一个阿贝尔群，因此根据我上面所说，它们是一个极其简单的无限环空间特例。所以存在一个带有基点的空间，记作 $K(\mathbb{Z},\ 1)$，使得 $K(\mathbb{Z},\ 1)$ 中所有基点环路构成的空间就是 $\mathbb{Z}$。

这里要小心：我现在使用“是”这个词的方式，和同伦论学者一样！我的意思是，$K(\mathbb{Z},\ 1)$ 中基点环路构成的空间与 $\mathbb{Z}$ 同伦等价 。不过既然我们研究的是同伦论，这样就足够了。

好：存在一个空间 $K(\mathbb{Z},\ 1)$，使得 $K(\mathbb{Z},\ 1)$ 中所有基点环路构成的空间就是$\mathbb{Z}$。类似地，存在一个空间 $K(\mathbb{Z},\ 2)$，使得 $K(\mathbb{Z},\ 2)$ 中所有基点环路构成的空间就是$K(\mathbb{Z},\ 1)$。依此类推……这就是称 $\mathbb{Z}$ 为无限环空间的含义。

这些空间 $K(\mathbb{Z},\ n)$ 称为“Eilenberg–Mac Lane空间”，它们组合在一起构成一个称为 Eilenberg–Mac Lane谱的谱。由于它只用整数构建而成，因此这是世界上最简单、最优美的谱。所以，它所表示的广义上同调理论必定简单而优美。事实也确实如此：它就是普通上同调！

不过，空间 $K(\mathbb{Z},\ n)$ 实际上是什么样的呢?

首先，根据定义，$K(\mathbb{Z},\ 0)$ 就是 $\mathbb{Z}$。

$K(\mathbb{Z},\ 1)$就是圆，S^1。你可以验证，S^1 中基点环路构成的空间与 $\mathbb{Z}$ 同伦等价——关键在于，这类环路在同伦意义下由一个整数分类，这个整数称为绕数。在量子物理中，$K(\mathbb{Z},\ 1)$通常称为 U(1)，即单位复数构成的群，也就是“物态”。

$K(\mathbb{Z},\ 2)$ 要复杂一些：它是无限维复射影空间，$\mathbb{CP}^\infty$！我在“第106周”中详细讲过射影空间。当时我只谈到了有限维的射影空间，比如 $\mathbb{CP}^n$，但可以将这些空间在 n趋近 ∞时的 $\mathbb{CP}^\infty$ 定义为它们的“直接极限”，依据是 $\mathbb{CP}^n$ 作为子空间包含在 $\mathbb{CP}^{n+1}$ 中。另一种方法是，取你最喜欢的一个复希尔伯特空间 H，它的维数可数无限，并构造其中所有1维子空间组成的空间 H。这会得到一个稍微“宽松”一些的 $\mathbb{CP}^\infty$版本，但它与之同伦等价；如果你是物理学家，这也是一个非常自然的研究对象：它就是希尔伯特空间为 H 的量子系统所有“纯态”组成的空间。

那么 $K(\mathbb{Z},\ 3)$ 呢？嗯，我不知道这个对象有什么优美的几何描述。

A而这真的让我火冒三丈！一定有某种巧妙的方式，可以把 $K(\mathbb{Z},3)$ 看作某种

无穷维流形。这是什么？有人知道吗？Jean-Luc Brylinski 在 1997年 举行的高阶范畴论与物理学会议上提出了这个问题，从那以后它就一直困扰着我。根据我在“第 25 周”总结的 Brylinski 的研究成果，显然，一个好的答案应该能阐明量子理论和弦理论之类的内容。基本上，关键在于整数、群U(1)以及无穷维复射影空间在量子理论中都极为重要。后两种空间的重要性或许更显而易见——整数是如此基础，以至于很难看出它们有什么“量子力学”特性。不过，由于这些空间中的每一个都是下一个空间的环空间，它们共同构成了一个紧密相连的序列……而我想知道接下来是什么！

不过我扯远了。我真正想关注的是 $K(\mathbb{Z},2)$，换句话说，是无限维复射影空间。请注意，这个空间上显然有一个复线丛。还记得吗，$\mathbb{CP}^\infty$ 中的每个点实际上都是某个希尔伯特空间 H中的一维子空间。因此，我们可以把这些一维子空间作为复线丛的纤维，这个复线丛以 $\mathbb{CP}^\infty$为底空间，称为“典范丛”。我把这个线丛记作 L。

复线丛 L 很重要，因为它具有“普适性”：其他所有复线丛都可以由它得到！更准确地说，假设我们有任意一个拓扑空间 X 和任意一个映射

$$f\colon X \to \mathbb{CP}^\infty$$

这样，我们就可以构造一个以 X 为底空间的复线丛，它在任意点 x 上的纤维，正是 L 在点 $f(x)$上的纤维。这个丛称为 L 沿映射 f的“拉回”。真正妙的是，任意空间 X 上的任意复线丛，都同构于某个映射拉回 L 所得的丛！更妙的是，当且仅当定义它们的映射 f 同伦时，这两个线丛才同构！这样一来，许多关于复线丛的问题就归结为研究这个对象 L。

例如，假设我们想要分类任意空间 X 上的复线丛。根据我刚才所说，这项任务等价于对映射的同伦类进行分类

$$f\colon X \to \mathbb{CP}^\infty.$$

但请记住，$\mathbb{CP}^\infty$ 是 Eilenberg-Maclane 空间 $K(\mathbb{Z},2)$，而 Eilenberg-Maclane 谱表示普通上同调！因此

$$[X, \mathbb{CP}^\infty] = [X, K(\mathbb{Z},2)] = H^2(X)$$

其中 H^2(X) 表示 X 的第二普通上同调群。因此，以下这些对象实际上是相同的：

- X 上复线丛的同构类
- 从 X 到 $\mathbb{CP}^\infty$ 的映射的同伦类
- 普通上同调群 $H^2(X)$ 的元素。

这很棒，因为它为我们提供了三种不同的视角。特别是，$H^2(X)$很容易计算——任何上过基础代数拓扑课程的人都能做到。但另外两种视角既美观又富有几何意味，因此能让我们用 $H^2(X)$做一些原本可能想不到的事情。

现在你知道了：如果你给我一个 X上的复线丛，我就能构造出 $H^2(X)$的一个元素。人们称之为该线丛的“第一陈类”。如果你给我两个复线丛，我可以通过判断它们的第一陈类是否相等，来确定它们是否同构。反过来，如果你给我 $H^2(X)$的任意一个元素，我就能构造出一个 X 上的复线丛，使其第一陈类就是那个元素。

当然，我还没有真正解释我是如何构思出这些东西的。想要了解这一点，你还需要再多研究一下这些内容。

不过，我们来考虑几个例子。假设 X 是2-球面 S^2。由于

$$H^2(S^2) = \mathbb{Z}$$

这意味着，线丛的第一陈类实际上就是一个整数。人们称之为该线丛的“第一陈数”。第一位对此感到兴奋的物理学家是狄拉克；他在思考磁单极子和电荷量子化时，偶然遇到了这个想法。狄拉克并不了解复线丛和陈类——他当时只是在研究带电粒子在磁单极子产生的磁场中移动时，其相位如何变化！后来，物理学家杨遇到了数学家陈，并将狄拉克的工作转化为线丛的语言。参见

11）C. N. 杨，《磁单极子、纤维丛与规范场》，载于《精选论文，1945年—1980年，附评论》，W. H. Freeman and Company，旧金山，1983年。

完整的故事。

接下来试试一个颇为自指的例子。分类 $\mathbb{CP}^\infty$ 上的复线丛应该很有趣，因为泛丛就在这里！所以我们取 $X = \mathbb{CP}^\infty$。由于 $\mathbb{CP}^\infty$ 是 $K(\mathbb{Z}, 2)$，一点抽象的形式主义就能说明，它的普通二阶上同调群是 $\mathbb{Z}$:

$$H^2(\mathbb{CP}^\infty) = [\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{CP}^\infty] = \mathbb{Z}.$$

这意味着， $\mathbb{CP}^\infty$ 上复线丛的第一陈类，实际上就是一个整数。那么，泛复线丛 L 的第一陈类是什么呢？这个丛是通过恒等态射 映射拉回自身得到的

$$1 \colon \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$$

而这个映射对应于 $[\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{CP}^\infty] = \mathbb{Z}$ 中的元素 1。因此， L 的第一陈类是 1。看出这个论证有多自明了吗？听起来像是在说什么深奥的道理，但理解之后就会发现，它其实只是在说 $1 = 1$。

泛丛 L 的第一陈类非常重要，所以我们把它称为 c。它之所以重要，是因为它具有泛性：它为我们提供了一种直观理解任意 复线丛第一陈类的好方法。直到同构为止，任意空间 X 上的复线丛都来自某个映射

$$f \colon X \to \mathbb{CP}^\infty$$

so 要计算这个线丛的第一陈类，我们只需算出 $f^*(c)$，其中

$$f^* \colon H^2(\mathbb{CP}^\infty) \to H^2(X)$$

是由 f 诱导的映射。如果你不明白为什么这是真的，不妨想一想——这简直是个再明显不过的同义反复！

我们一直在讨论的这些想法引出了几个显而易见的问题。例如， $H^2(X)$不只是一个集合：它还是一个阿贝尔群。我们在代数拓扑基础课程中就已经知道这一点，现在又知道了另一种解释： $\mathbb{CP}^\infty$ 是一个无限环空间，因此在同伦论中，它就像一个阿贝尔群。事实上，这个特殊的无限环空间本身就是一个阿贝尔群。从任意对象到阿贝尔群的映射构成一个阿贝尔群，这使得

$$H^2(X) = [X, \mathbb{CP}^\infty]$$

int一个阿贝尔群。但现在你一定迫不及待地想知道：乘积映射究竟

$$m\colon \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$$

和逆映射

$$i\colon \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$$

是什么样的？这一切对于 X上的复线丛同构类集合又意味着什么？它是一个阿贝尔群——但在这个阿贝尔群中，乘积和逆元是什么样的？

嗯，第一个问题我就不在这里回答了：这个问题有一个非常漂亮的显式答案，你可以用在黎曼球面上来回运动的粒子和反粒子来描述它，但在这里讨论这些会过于离题。想了解更多内容，请研究“托姆–多尔德定理”，以及一些关于拓扑学中“构形空间”的资料：

12) Dusa McDuff，《正负粒子的构形空间》，拓扑学**14**（1975年），91–107。

第二个问题要简单得多：空间 X 上复线丛的同构类集合构成一个阿贝尔群，其中线丛的张量积 是群乘法。对线丛取对偶 ，便得到这个群中的逆元。

把这些想法结合起来，我们就能用乘积来简洁地描述线丛的张量积：

$$m\colon \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$$

即使不说明乘积的具体形式，我也可以解释这一点。假设空间 X 上有两个线丛，我想将它们作张量积。不妨假设它们是通过某些映射拉回泛丛 L 得到的：

$$f\colon X \to \mathbb{CP}^\infty,$$

$$g\colon X \to \mathbb{CP}^\infty.$$

由我们已经看到的内容可知，要将这些丛作张量积，我只需构造映射：

$$fg : X \to \mathbb{CP}^\infty$$

它是以下映射的复合：

$$X \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \xrightarrow{m} \mathbb{CP}^\infty$$

然后取 L 沿 fg的拉回。

换句话说：由于 $\mathbb{CP}^\infty$ 上的典范线丛具有普遍性， $\mathbb{CP}^\infty$ 知晓关于复线丛的一切。尤其是，它知晓关于复线丛张量积 的一切：张量积运算由 $\mathbb{CP}^\infty$上的乘积 编码。类似地，对复线丛取对偶 的运算则由逆 运算编码

$$i\colon \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty.$$

现在，如果你已经理解了我刚才所说的一切——或者更好的是，你早就知道这些！——那么你就可以了解“复定向上同调理论”的定义了。简单来说，它是一种广义上同调理论，其中关于线丛和第一陈类的这一套内容，几乎和普通上同调中的情况一样。

假设我们有一种广义上同调理论；来看看它在什么条件下是“复定向”的。

首先，它必须来自一个环谱，这样对于任意空间 X，$h^*(X)$ 都是一个分次环。在这种情况下，取 X 为一个单点很有意思：我们得到一个环 R ，称为“点的上同调环”。其中有一个天赋的零度元素，即乘法单位元 1。在任何广义上同调理论中，我们都有一个同构

$$h^{n+k}(S^n) = h^k(\text{point})$$

取 h^0(点) 中上天赐予的元素 1，就得到了 S^n 的一个特殊元素，称为 S^n 的“定向”。现在注意到， S^2 与 $\mathbb{CP}^1$ 是同一回事，因此它包含在 $\mathbb{CP}^\infty$ 中：

$$S^2 \to \mathbb{CP}^\infty$$

这给出了一个映射

$$h^2(\mathbb{CP}^\infty) \to h^2(S^2)$$

如果存在一个元素 c ，属于 $h^2(\mathbb{CP}^\infty)$，它在上述映射下映为 S^2 的定向，并且在逆映射下变号，那么我们就称广义上同调是“复定向”的。

$$i^*\colon h^2(\mathbb{CP}^\infty) \to h^2(\mathbb{CP}^\infty).$$

例如，普通上同调是复定向的，我们取 c 为万有复线丛的第一陈类！这可以由我目前所说的一切推出。

不过，许多其他广义上同调理论也是复定向的。最著名的是复K理论和复配边理论。事实上，复配边理论是“万有”的复定向上同调理论——它包含了所有这类理论中最丰富的信息。其余理论都像是它的简化版本。普通上同调是其中最简化的。复K理论的简化程度稍低，而椭圆上同调的简化程度更低！

但椭圆上同调究竟是什么？

嗯，我不确定下周会不会有时间谈这个。我吃过苦头，知道不该承诺 在未来的期刊里讨论某些话题：我的思绪太过纷乱，无法以可预料的方式专注于某个主题。比如，上周我暗示过要谈谈 Ross Street 关于 n-范畴的工作，但现在我花了太多时间絮叨这些别的东西，恐怕没法谈到它了。我就列一下他给我的论文吧：

13）Ross H. Street，《球状集合的小托扑斯》，《纯粹与应用代数杂志》**154**（2000年），299–315。另可见https://core.ac.uk/display/82254278

14) Ross H. Street 和 Michael Batanin，《树的多重体的泛性质》，另可见于 https://core.ac.uk/display/8264566815) Michael Batanin，《洗牌多面体、合作博弈与高维范畴的 2维相干性》。据称暂无可用版本。

悉尼的研究者在从球状观点理解 n-范畴方面取得了很大进展，而范畴树的重要性也已变得十分明晰。你可以把树看作广义自然数，那么 Batanin的拟运算子就是对通常拟运算子的自然推广；通常的拟运算子所包含的运算，其参数数量相当于一个自然数。树描述了将一组球体拼合起来、构成一个新球体的方式。真希望我有时间把这件事解释得更清楚！但这需要一些时间，而且确实需要配上几张图。

脚注：

[1] 差一点，但还不完全对：如果我给你无限环空间 $E(0)$，你只能恢复无限环空间 $E(1)$ 的一个连通分支，也就是包含基点的那个分支。因此，谱所包含的信息比无限环空间更多。谱是由一列无限环空间构成的，其中 $E(n)$中的基点环路形成空间 $E(n-1)$；从单个无限环空间出发，我们可以构造一个谱，但它属于一种特殊类型，称为“连通”谱，其中空间 $E(n)$对于 $n > 0$ 都是连通的。

给定一个谱，即使 n为负数，我们也可以定义广义上同调群 $H^n(X)$，方法如下：

$$H^n(X) = \lim_{k\to\infty} [\Sigma^k(X), E(n+k)]$$

其中， $\Sigma^k(X)$表示 X的 k重悬挂。如果该谱是连通谱，那么当 n 为负数时，这些群将消失。连通谱的一个典型例子是普通上同调对应的谱（Eilenberg–Mac Lane谱）。非连通谱的一个典型例子是实K理论或复K理论对应的谱。

> 因此，这就是数学：她让你想起灵魂中不可见的形态；她照亮自己的发现；她唤醒心智，净化理智；她为我们内在的理念带来光明；她消除我们与生俱来的遗忘与无知。
>
> — *Proclus*，《欧几里得<款 id='3'>元素</款>第一卷评注》

第150周

2000年6月18日

首先，我想谈谈拉格朗日点。然后我会继续讨论复定向上同调理论。

欧拉和拉格朗日因研究月球轨道，于1722年获得巴黎科学院奖。拉格朗日为此奖提交的论文《三体问题论》包含了关于三体问题的一些有趣结果。除此之外，他还研究了一个较轻的物体绕较重的物体沿圆形轨道运行的情形，并找出了第三个轻得多的物体相对于另外两个物体能够“静止”停留的所有位置。这样的点共有5个，如今称为“拉格朗日点”，即L1至L5点。

例如，设想月球沿圆形轨道绕地球运行。那么，我们可以在5个拉格朗日点放置卫星。其中3个是不稳定平衡点，位于穿过地球和月球的直线上。L1点位于地球与月球之间；L2点位于与月球同一方向、但稍远一些的位置；L3点则位于月球的对面。其余2个拉格朗日点是稳定平衡点。L4点位于月球轨道上，领先月球60度；L5点则位于月球后方60度。

下面是一张很棒的拉格朗日点示意图：

1) NASA, “Lagrange points”, https://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory_l2.html

一般来说，只要重天体（例如上例中的地球）的质量超过中等大小天体（例如月球）的25倍，L4点和L5点就会是稳定平衡点。你可能会好奇，这个神奇的数字只是精确数值的近似值，而精确数值是

$$\frac{25}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{625}}\right) = 24.959935794377112278 87\ldots$$

下面的证明说明拉格朗日点确实如所述那样发挥作用，其中还推导了上面的数字：

2) Neil J. Cornish, 《拉格朗日点》, 可参见
https://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf

拉格朗日当时只是把这个计算当作数学练习，并不认为它与实际的太阳系有关。但他错了！稳定的拉格朗日点L4点和L5点相当有趣，因为物质往往会在那里聚集。

例如，人们已经在木星绕太阳运行的轨道上的稳定拉格朗日点发现了六百多颗被称为“特洛伊小行星”的小行星。最早发现的是588号阿基里斯，时间是1906年——这里的编号表示它是发现的第588颗小行星。一般来说，L4点的特洛伊小行星以特洛伊战争中的希腊士兵命名，而L5点的则以真正的特洛伊人——来自特洛伊城的士兵——命名！在这张小行星带的图片中，你可以清楚地看到这些特洛伊小行星：

3）太阳系内区地图，获取地址：
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:InnerSolarSystem-en.png

小行星5261 Eureka 是一颗“火星特洛伊小行星”，位于火星绕太阳运行轨道的 L5 点。1998年，人们在 L5 点发现了第二颗火星特洛伊小行星，但它还没有名字。更多信息请参阅：

4) 维基百科，特洛伊天体，https://en.wikipedia.org/wiki/Trojan(celestial_body)

金星和地球绕太阳运行的轨道上，拉格朗日点处可能也有几颗小型小行星。有人知道更多相关信息吗？我简单搜索了一下，只找到一些关于那颗奇特的小行星3753 Cruithne 的资料；它是地球的伴随小行星。不过，小行星3753 Cruithne 并不位于拉格朗日点！相反，相对于地球，它沿着一条非常复杂的螺旋状马蹄形轨道运行。若想阅读这一现象的发现者配有图片的精彩解释，请参阅：

5）PaulWiegert、KimmoInnanen 和 Seppo Mikkola，《近地小行星3753 Cruithne——地球奇特的伴侣》，http://www.astro.queensu.ca/~wiegert/

150多年来，天文学家一直在寻找地球的其他卫星，想看看除了此刻我从窗外看到的那颗大卫星之外，还有没有别的。期间出现过许多虚惊，甚至有人给他们以为发现的卫星取了名字，比如“Kleinchen”和“Lilith”。有关这些“第二颗卫星”和其他假设行星的精彩故事，请参阅：

6）Paul Schlyter，《假设行星》，
https://www.astro.auth.gr/ANTIKATOPTRISMOI/nineplanets/nineplanets/hypo.html

遗憾的是，这些第二颗卫星都不是真实存在的。不过，在20世纪60年代，人们发现月球绕地球运行的轨道上，稳定的拉格朗日点处有尘埃云！它们大约有月球的4倍大，但质量并不大。

拉格朗日点上还藏着什么？
嗯，土星有一颗名为 Dione 的卫星。在 Dione 前方 60 度、恰好位于 L4 点的拉格朗日点上，还有一颗名为 Helene 的小卫星。这是 Helene 的照片：

7）每日天文图片：“Dione 的拉格朗日卫星 Helene”，texttthttp://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap95
texttthttp://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap951010.html

她是不是很可爱？土星的卫星 Tethys 的 L4 点上还有一颗名叫 Telesto 的小卫星，而 Tethys 的 L5 点上则有一颗名叫 Calypso 的小卫星：

8) Bill Arnett，《九大行星简介》：忒堤斯、忒勒斯托和卡吕普索，
http:///astrolink.mclink.it/nineplanets/tethys.html

有人知道拉格朗日点上还有哪些天然天体吗？
长期以来，妄想家和科幻作家一直在谈论一颗“反地球”，它拥有自己的文明，位于地球绕太阳运行轨道的 L3 点——恰好就在我们永远无法看见它的地方！我认为，卫星探测已经

排除了这种可能性，不过由于 L3 是一个不稳定的拉格朗日点，这种情况从一开始就不太可能发生。

另一方面，太空探索爱好者长期以来一直梦想着在月球绕地球运行轨道上的稳定拉格朗日点建立殖民地——我猜，就在那些尘埃云中。不过，如今人们正在地球绕太阳运行轨道的拉格朗日点放置人造卫星！例如，L1就是“SOHO”的所在地：太阳和日球层观测台。SOHO位于地球和太阳之间，因此可以清晰地观测太阳黑子、太阳耀斑和太阳风。这个位置并不稳定，但它可以时不时地施加一点推力，以保持位置不变。有关更多信息和一些精美图片，请访问：

9）SOHO网站，https://soho.nascom.nasa.gov/

2001年4月，美国国家航空航天局计划将一颗名为“MAP”的卫星送至L2拉格朗日点。MAP是微波各向异性探测器，将研究宇宙微波背景中的各向异性。这些各向异性正逐渐成为了解宇宙早期历史的一扇非常有趣的窗口。更多信息请见：

10) MAP 网站，http://map.gsfc.nasa.gov/

最后，关于拉格朗日点的量子类比，请参阅：

11) T. Uzer、Ernestine A. Lee、David Farrelly 和 Andrea F. Brunello，《经典原子的合成：特洛伊小行星的波包类比》，*Contemp. Phys.* **41**（2000年），1–14。

好了，关于拉格朗日点就说这么多！现在我想再多谈一点复定向上同调理论。上次我讲到了定义。现在让我先简单回顾一下，然后继续深入。

广义上同调理论为每个空间 X 赋予一组群 $h^n(X)$，对每个整数 n各有一个。我们施加一些公理，使它们的作用方式与普通上同调非常相似。然而，当 X 是一个点时，我们不再要求对于非零 n， $h^n(X)$是平凡的。这看似变化不大，但事实证明影响非常显著！其中有各种各样非常有趣的例子。

比如什么?

嗯，有K理论，它让我们通过考察一个空间上的向量丛及其迭代悬挂来研究该空间。由不同种类的向量丛，我们得到各种不同的K理论：实K理论、复K理论、四元数K理论，等等。甚至还有一种由Atiyah发明、以克利福德代数为基础的K理论，称为“KR理论”。想进一步了解这些内容，可以试试：

12）Dale Husemoller，《纤维丛》，施普林格，柏林，1975年。

13）H. Blaine Lawson, Jr. 和 Marie-Louise Michelsohn，《旋量几何》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1989。

接下来是配边理论，它让我们通过考察映射到某个空间及其迭代悬挂中的流形来研究这个空间。坦白说，这实际上就是配边 理论的运作方式——它是一种广义同调 理论。不过，每种广义同调理论都与一种广义上同调理论相伴；至少原则上，理解其中一种就能理解另一种.....总之，配边理论有多种类型，分别对应于可以赋予流形的各种额外结构：分片线性配边理论、光滑配边理论、定向配边理论、自旋配边理论、复配边理论、辛配边理论、稳定同伦论等等。想进一步了解这些内容，可以看看：

只要理解其中一种，原则上就能理解另一种.....总之，配边理论有多种类型，分别对应于可以赋予流形的各种额外结构：分片线性配边理论、光滑配边理论、定向配边理论、自旋配边理论、复配边理论、辛配边理论、稳定同伦论等等。想进一步了解这些内容，可以看看：

14) Robert E. Stong，《配边理论札记》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1968年。

最后，还有一些受代数而非几何启发的广义上同调理论，似乎只有硬核同伦论学者才理解，比如 Morava K理论和Brown-Peterson理论。

最后，为这趟小小的巡览作个总结，我想应该补充一点：不同的广义上同调理论之间有许多映射！正如我在"第149周"中所解释的，每个广义上同调理论 h^n 都对应一个"谱"：一列空间，其中每个空间都是下一个空间的环空间。谱构成一个范畴；给定谱之间的一个映射，我们就能得到它们对应的广义上同调理论之间的映射。因此，我们不该一次只研究一个，而应同时探索许多种！想了解通过这种方式可以做些什么重要的例子，请看：

15) P. E. Conner 和 E. E. Floyd，《配边与K理论的关系》，《数学讲义》28，施普林格，柏林，1966年。

16) Douglas C. Ravenel，《复配边与球面的稳定同伦群》，Academic Press，纽约，1986年。

以及"第149周"中列出的广义上同调相关书籍。

总之，为了理清这个纷繁复杂的领域，不妨挑出普通上同调理论的一些特殊性质，并研究具有这些性质的广义上同调理论。

例如，在普通上同调中，一个空间的上同调群组合在一起构成一个分次环。如果一种广义上同调理论具有这种性质，我们就称它为"乘法型"。在这种情况下，我们会得到一个分次环 R，称为该理论的"系数环"，它就是单点空间的上同调环。对于普通上同调理论，系数环就是 $\mathbb{Z}$；而对于其他理论，系数环可能非常有趣且复杂。通过简单的抽象论证，任何空间的上同调环都是系数环上的代数。

普通上同调的另一个优点是第一陈类。对于空间 X 上的复直线丛，你总能得到一个称为其"第一陈类"的不变量，它属于 $H^2(X)$；这个不变量足够强大，能够完全分类这类线丛。上周我介绍了无限维复射影空间上的泛 线丛：

$$L \to \mathbb{CP}^\infty$$

并展示了任意 线丛的第一陈类如何由这个线丛的第一陈类导出，我把它称为 c。

如果一种广义上同调理论具有乘法结构，并且其中存在一个 c $h^2(\mathbb{CP}^\infty)$元素，其作用类似于泛直线丛的第一陈类，我们就称这种理论为"复定向"的。当然，要对此作出精确定义，我们需要提炼出第一陈类的关键

特征并将其抽象化。我在“第149周”中已经做过这件事，所以这里就不再重复了。接下来，我只简要谈谈复定向上同调理论可以做些什么。

首先，我们可以使用元素 c 来得到复线丛的一个不变量——第一陈类的一种推广版本。为此，只需记住“第149周” 中提到的 $\mathbb{CP}^\infty$ 是复线丛的分类空间。换句话说，任意空间 X 上的任意 线丛 都同构于泛直线丛在某个映射下的拉回

$$f\colon X \to \mathbb{CP}^\infty.$$

因此，给定一个线丛，我们可以找到这样的映射 f，并用它将元素c 拉回，从而得到 $h^2(X)$ 的一个元素。这与线丛通常的第一陈类完全类似，只不过现在使用的是广义上同调理论，而不是普通上同调。

我们能从 $\mathbb{CP}^\infty$ 的上同调中的<style id='1'>其他 元素得到复线丛的<style id='3'>其他 不变量吗？实际上不能：在任何复定向上同调理论中， $\mathbb{CP}^\infty$ 的上同调环就是关于元素 c 的形式幂级数代数：

$$h^*(\mathbb{CP}^\infty) = R[[c]]$$

其中 R 是系数环。

不过，我们还能得到复向量 丛的其他不变量，它们类似于高阶陈类。事实上，在复定向上同调理论的语境下，我们可以仿照特征类的通常理论，构建大量类似的内容。我很想谈谈这一点，不过这会偏离我的主要目标：让业余棋手至少能对椭圆上同调有初步的理解。

那么：上次我提到， $\mathbb{CP}^\infty$ 是一个阿贝尔拓扑群，带有一个乘法
ca映射

$$m\colon \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$$

和一个逆映射

$$i\colon \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty.$$

我还解释了它们分别表示对两个线丛取张量积 以及对一个线丛取对偶 这两种运算。现在，让我们看看在有复定向上同调理论时，如何利用这些映射。首先，由于上同调是逆变的，我们得到同态

$$m^*\colon h^*(\mathbb{CP}^\infty) \to h^*(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty)$$

and

$$i^*\colon h^*(\mathbb{CP}^\infty) \to h^*(\mathbb{CP}^\infty)$$

但正如我之前所说，我们有

$$h^*(\mathbb{CP}^\infty) = R[[c]]$$

类似地，我们有

$$h^*(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty) = R[[c]] \otimes R[[c]]$$

其中右侧的乘积“$\otimes$”是通常的 R 上代数张量积的稍微扩展版。因此，我们确实有同态

$$m^*\colon R[[c]] \to R[[c]] \otimes R[[c]]$$

$$i^*\colon\quad R[[c]]\to R[[c]]$$

它们满足阿贝尔群中乘积和逆元的所有常见公理——只是方向反了。

喜欢霍普夫代数的人会立即注意到，$R[[c]]$ 很像一个霍普夫代数。构造霍普夫代数的一种巧妙方法，是取群上的函数代数，并利用群中的乘积和逆运算，为这个代数赋予称为“余乘法”和“对极”的额外运算。我们在这里做的是同样的事情，只不过使用的是关于一个变量 c 的形式幂级数，而不是关于一个变量的函数。因此，人们把$R[[c]]$称为“形式群律”。

简而言之：复定向上同调理论给出了形式群律！

为了避免这看起来过于抽象且缺乏动机，请记住，这只是在讨论当我们对线丛进行张量积时，广义“第一陈类”会发生什么。以一种模糊但有用的方式，我们可以把 $R[[c]]$ 中的对象想象成直线上的形式幂级数，其中这条直线被赋予了某种阿贝尔群结构，至少在原点附近是如此。这种群结构产生了余乘法

$$m^*\colon R[[c]]\to R[[c]]\otimes R[[c]]$$

和对极

$$i^*\colon R[[c]]\to R[[c]]$$

但关键在于，这个群结构告诉我们，如何根据两个线丛各自的广义第一陈类，计算它们张量积的广义“第一陈类”。

举几个例子或许会有所帮助。在普通上同调理论中，当我们对两个线丛取张量积时，只需将 它们的第一陈类相加。因此，在这个例子中，我们通过加法赋予直线群结构，而 $R[[c]]$ 就成为一种形式群律，称为“加法形式群律”。

另一个著名的例子是复K理论。在这个理论中，当我们对两个线丛取张量积时，基本上只需将 它们的广义第一陈类相乘。这是因为K理论中的上同调类就是向量丛的等价类，而将它们相乘意味着 对它们取张量积。因此，在这个例子中，$R[[c]]$ 就成为“乘法的”形式群律。当然，我们需要稍作调整，因为我们通常不会把乘法单位元1看作直线的原点.....不过，如果愿意，我们也可以这么做。

还有哪些例子呢？复配边理论就是其中之一。它对应着“普适”形式群律：一种到任何其他形式群律都有唯一同态的形式群律！在这个例子中，R 相当庞大：它被称为“拉扎德环”。复配边理论的这一普适性，使它成为所有复定向广义上同调理论中的王者。我真该花大约十页向你详细解释它，但我不会.....

.....因为我终于想谈谈椭圆上同调了！

我在“第13周”、“第125周”和“第126周”中已经谈了很多椭圆曲线，所以我就假定你们已经了解它们：椭圆曲线是一个1维紧复流形，同时也是一个阿贝尔群。因此，任意椭圆曲线都会给出一个形式群律。由此，我们可以思考这个形式群律是否来自某种复定向上同调理论.....答案是肯定的！这就是椭圆上同调！

这只是一个漫长故事的开端：还有很多内容可讲，而我没有精力在这里一一展开……不过，我还是想用几个精彩之处吊吊你们的胃口。由于椭圆曲线可以被视为弦的世界面，弦理论与椭圆上同调之间存在许多有趣的联系。除了我在"第149周"中给出的参考资料外，还可以参阅例如：

17) 玉井宏隆，椭圆属与顶点算子超代数，施普林格数学讲义**1704**，施普林格，柏林，1999年。

我们还发现了许多与模形式理论之间的优美联系。不过，显然我们还 没有对椭圆上同调作出非常简洁的几何描述！这样的描述一定存在，因为其中涉及如此多优美的几何……但它究竟是什么呢?

（关于这个问题的答案，请参见"第197周"。）

补遗： 关于复配边理论对应于万有形式群律的证明，请阅读 Quillen 关于这一主题的原始论文：

18) Daniel Quillen，《关于无定向与复配边理论的形式群律》，《美国数学会通报》**第75卷**（1969年），1293–1298。另可见 http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183530915

在任何领域中，找出最奇特的事物，然后去探索它。—
John Wheeler