arXiv:2303.02789v1 [math.GT] 5 Mar 2023

固定有理四维流形中最小亏格为 0 的各向同性同调类的映射类

Seraphina Eun Bi Lee

摘要

对于任意 $N \geq 1$，令 M_N 表示有理四维流形 $\mathbb{CP}^2\#N\overline{\mathbb{CP}}^2$。本文研究拓扑映射类群 Mod($M_N$) 在 $H_2(M_N;\mathbb{Z})$ 上的自然作用下，最小亏格为 0 的本原各向同性类 $w \in H_2(M_N;\mathbb{Z})$ 的稳定子 Stab(w)。尽管 Stab(w) 的大多数元素无法由保留任何 Lefschetz 纤维化 $M_N \to \Sigma$ 的同胚表示，我们证明 Stab(w) 的任意元素都可以由一个微分同胚表示，该微分同胚几乎保留一个全纯的零属 Lefschetz 纤维化 pr : $M_N \to \mathbb{CP}^1$，其一般纤维代表同调类 w。对于 Mod(M_N) 的某个极大无挠阿贝尔子群 Λ_w，我们还通过找到 Λ_w 在商映射 q: Homeo$^+$(M_N) $\to$Mod(M_N) 下到 Diff$^+$(M_N) $\leq$Homeo$^+$(M_N) 的一个提升，回答了 Nielsen 实现问题；该提升可以做到几乎保留 pr : $M_N \to \mathbb{CP}^1$。本文的所有结果对每个本原各向同性类 $w \in H_2(M_N;\mathbb{Z})$ 也成立，只要 $N \leq 8$，因为这类中的每个类的最小亏格都是 0。

1 引言

闭定向流形 M 的（拓扑）映射类群 Mod(M) 是由

$$\mathrm{Mod}(M) := \pi_0(\mathrm{Homeo}^+(M))$$

M 的同胚的同伦类构成的群。Mod(M) 在 $H_2(M;\mathbb{Z})$ 上有一个保持交叉形式 Q_M 的自然作用，我们考虑任意类$w \in H_2(M;\mathbb{Z})$ 的稳定子 Stab(w) $\leq$ Mod(M)。

设 M 是一个光滑、单连通的 4-流形。若 $w \in H_2(M;\mathbb{Z})$ 是一个自交数为 0 的非零同调类，则称 w 为各向同性的。各向同性类的一种来源是 Lefschetz纤维化 $p : M \to \Sigma$ 的一般纤维的同调类，其中 Σ 是一个闭定向曲面。

在某些情形下，已知元素 $g \in$ Stab(w) $\leq$ Mod(M) 存在代表映射φ，它们保持某个 Lefschetz纤维化 $p : M \to \Sigma$，其一般纤维代表同调类 w；这意味着存在 Σ 的某个微分同胚 ψ，使得 $p \circ \varphi = \psi \circ p$ 和 $[\varphi] = g$。例如，Gizatullin（[Giz81]）证明，紧致 K¨ahler 曲面 M 上的任意抛物型自同构都必须保持某个椭圆纤维化 $M \to \Sigma$（另见 [Can01，命题 1.4] 或 [DF01，定理 4.3，附录]）。在光滑范畴下，Farb–Looijenga [FL] 即将发表的工作研究了有理椭圆曲面和 K3 曲面的情形；例如，他们证明，任意 $g \in$ Stab(w) 都可以由一个保持某个全纯椭圆纤维化 $M \to \mathbb{CP}^1$ 的微分同胚表示。

本文研究 有理流形 M 中各向同性类稳定子的代表映射，以及它们与属零 Lefschetz 纤维化 $M \to \Sigma$之间的关系。更具体地说，我们研究形如

$$M_N := \mathbb{CP}^2\#N\overline{\mathbb{CP}^2} \qquad \text{for } N \geq 1,$$

它们是将 $\mathbb{CP}^2$ 在 N 个点处吹起后得到的底层光滑四维流形。若 $N \leq 8$，则所有原始的各向同性类 $w \in H_2(M_N;\mathbb{Z})$ 都由属为 0 的全纯

Lefschetz纤维化 $p\colon M_N \to \mathbb{CP}^1$ 的一般纤维表示。我们有时将这种Lefschetz纤维化称为 M_N 上的圆锥丛结构。注意，除非 $N = 1$，否则这些Lefschetz纤维化都不是相对极小的。参见第2.3节。

用微分同胚表示 Stab(w)。设 $N \geq 1$，且令 $w \in H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 为任意一个最小亏格为 0 的本原各向同性类。尽管任何这样的类 w 都由某个零属 Lefschetz 纤维化 $p\colon M_N \to \mathbb{CP}^1$ 的一般纤维表示，但不难证明，如果 $[\varphi]$ 在映射类群 Mod(M_N) 中具有无限阶，则不存在满足 $[\varphi] \in$ Stab(w) 的 $\varphi \in$ Homeo$^+(M_N)$ 能够保持这样的纤维化 p。

命题 1.1。设 $N \geq 1$，且令 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 为一个最小亏格为0的本原各向同性类。令$\varphi \in \mathrm{Homeo}^+(M_N)$ 表示映射类群 $[\varphi] \in \mathrm{Stab}(w) \leq \mathrm{Mod}(M_N)$中的一个无限阶映射类。不存在任何 ***Lefschetz*** 纤维化 $p\colon\ M_N \to \Sigma$，其中 Σ 是一个闭定向曲面，且 φ 保持 p；也就是说，不存在同胚 $h\colon\ \Sigma \to \Sigma$ 使得 $p \circ \varphi = h \circ p$。

证明见第2.3节。本文转而要求，任何代表无限阶映射类 $f \in$ Stab(w) $\leq$ Mod(M_N) 的微分同胚都几乎保持某个Lefschetz纤维化$p : M_N \to \Sigma$。

定义1.2 (几乎保持Lefschetz纤维化）。微分同胚群 $G \leq \mathrm{Diff}^+(M)$几乎保持***Lefschetz***纤维化 $p : M \to \Sigma$，如果其元素在 p的奇异纤维之外、互不相交的邻域中作用于 p 的纤维。更准确地说，存在

(a) 奇异点 $z_1, \ldots, z_m \in \Sigma$ 的像的互不相交开邻域 $V_1, \ldots, V_m \subseteq \Sigma$，以及

(b) a homomorphism $i : G \to \mathrm{Diff}^+\left(\Sigma - \bigcup_{k=1}^m V_k\right)$

使得对所有 $\varphi \in G$，下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M - \bigcup_{k=1}^m p^{-1}(V_k) & \xrightarrow{\varphi} & M - \bigcup_{k=1}^m p^{-1}(V_k) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \Sigma - \bigcup_{k=1}^m V_k & \xrightarrow{i(\varphi)} & \Sigma - \bigcup_{k=1}^m V_k \end{array}$$

有了定义1.2，我们的第一个定理展示了与命题 1.1 的对比:

定理 1.3 (固定各向同性类的映射类）。设 $N \geq 1$，且令 $w \in H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 为一个最小亏格为0的本原各向同性类。对于任意 $h \in \mathrm{Stab}(w)$，存在 $\varphi \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$，几乎保持一个全纯的亏格0 ***Lefschetz***纤维化 $p\colon\ M_N \to \mathbb{CP}^1$，其一般纤维代表同调类 w，且 $[\varphi] = h \in \mathrm{Mod}(M_N)$。

对于 $N \leq 8$，定理 1.3 对任意本原各向同性类 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 均成立，因为任何此类都具有最小亏格 0。见推论 4.2。

我们还可以考虑 Stab(w) 的子群，而不是单个元素。下一个定理涉及 Stab(w) 的某个有限指数阿贝尔无挠子群，我们现在对其进行定义。对于任意 $N \geq 2$，Stab(w) 的任意元素都必须保持 $\mathbb{Z}(H_2;\ M_N)$ 的以下 $\mathbb{Z}$-子模:

$$w^\perp := \{w_0 \in H_2(M_N; \mathbb{Z}) : Q_{M_N}(w, w_0) = 0\} \cong \mathbb{Z}^N.$$

因此，Stab(w) 作用于格 $(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\},\ Q_{M_N})$ 上，其中 Q_{M_N} 是由 Q_{M_N} 在 $w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$ 上诱导的幺模对称双线性形式。由于 $(H_2(M_N;\ \mathbb{Z})\ Q_{M_N})$ 的符号为 $(1,\ N)$，所以 $(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\},\ Q_{M_N})$ 必须是秩为 $N-1$ 的负定格。

定义 1.4. 令 Λ_w 表示映射 $\mathrm{Stab}(w) \to \mathrm{Aut}(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}, Q_{M_N})$的核。

Λ_w 可与格 $(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}, Q_{M_N})$ 的偶元素子群相识别，而 Stab(w) 属于一个分裂短正合列

$$0 \to \underbrace{\Lambda_w}_{\cong \mathbb{Z}^{N-1} \leq w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}} \to \mathrm{Stab}(w) \to \mathrm{Aut}(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}, \overline{Q_{M_N}}) \to 0.$$

Λ_w 的两个性质是：它是 Mod(M_N) 的极大无挠阿贝尔子群，并且在 Stab(w) 中具有有限指数。参见引理 2.5 和 2.6。

定理 1.5 (通过微分同胚实现 Λ_w)。设 $N \geq 2$，且 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 是一个最小亏格为 0 的本原各向同性类。存在一个同态 $\rho_w:\ \Lambda_w \to \mathrm{Diff}^+(M_N)$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Diff}^+(M_N) \\ & \overset{\rho_w}{\nearrow} & \big\downarrow q \\ \Lambda_w & \hookrightarrow & \mathrm{Mod}(M_N) \end{array}$$

此外，像 $\rho_w(\Lambda_w)$ 几乎保持一个全纯的亏格为0 的 *Lefschetz*纤维化 $p:\ M_N \to \mathbb{CP}^1$，其一般纤维代表同调类 w。

与定理 1.3 类似，对于任意本原各向同性类 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$，只要 $2 \leq N \leq 8$，定理 1.5 也成立。参见推论 3.9。

理解本文结果的一种方式，是考察 Mod(M_N)（的指数为 2 的子群）在 $\mathbb{H}^N$ 上的自然作用，以及将双曲等距变换分为椭圆型、抛物型和双曲型三类的分类。对于各向同性类 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$，稳定子 Stab($w$) 中的无限阶元素，恰好是 Mod($M_N$) 中在 $\mathbb{H}^N$ 上以抛物型等距变换作用的元素（引理 2.2）。因此，下面的结论是定理 1.3 的直接推论。

推论 1.6。设 $2 \leq N \leq 8$。若 $g \in \mathrm{Mod}(M_N)$ 在 $\mathbb{H}^N$ 上以抛物等距变换作用，则存在 $\varphi \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$，其满足 $[\varphi] = g$，并几乎保持一个全纯的属 *0 Lefschetz* 纤维化 $p:\ M_N \to \mathbb{CP}^1$。

相关研究。在某些情形下，已有研究探讨了固定各向同性类的四维流形映射类与具有指定一般纤维的Lefschetz纤维化之间的关系。如上所述，关于紧致 K¨ahler 曲面和椭圆纤维化的情形，可参见 Gizatullin [Giz81]；关于有理椭圆型流形和 K3 流形的情形，可参见 Farb–Looijenga [FL]； [FL]则启发了本文的研究。

保持圆锥丛结构的自同构在研究 M_N 的有限自同构群时也发挥着重要作用。这类复自同构的一个例子是*de Jonqui´eres* 对合，它是本文的一项主要工具。沿这一方向的研究包括：在复范畴中，对 $\mathbb{CP}^2$ 的二阶双有理自同构进行共轭分类（Bertini [Ber77], Bayle–Beauville [BB00]），以及一般地研究 $\mathbb{CP}^2$ 的双有理自同构有限子群（Dolgachev–Iskovskikh [DI09]）；在辛范畴中，则研究有理曲面的辛同胚有限群（Chen–Li–Wu [CLW21]）。

论文结构。第 2 节回顾有理流形映射类群 Mod(M_N) 的相关事实，并推导各向同性类 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 的基本性质，其中包括命题 1.1 的证明。第 3 节通过显式构造所需的微分同胚来证明定理 1.5。利用第 3 节构造的这些微分同胚，我们在第 4 节证明定理 1.3。

致谢。我想感谢 Benson Farb 提出这一问题，并在本项目进行过程中持续给予我鼓励、建议和指导，以及提出许多有益的意见

，这些意见针对本文的早期草稿。我还要感谢 Benson 和 Eduard Looijenga 与我分享他们将在即将发表的著作 [FL] 中关于有理椭圆型流形和 K3 流形的研究结果。我还要感谢 Carlos A. Serv´an，就有理4维流形和 Lefschetz 纤维化与我进行了许多富有成效的讨论。

2 $\mathrm{Mod}(M_N)$中的各向同性同调类及其稳定子

本节汇总四维流形的映射类群、 $H_2(M_N;\,\mathbb{Z})$中的各向同性类，以及某些Lefschetz 纤维化的有用性质。

2.1 M_N的映射类群

对于任意四维流形 M，令 Q_M表示 $H_2(M;\,\mathbb{Z})$上的交叉形式。形式 Q_M是一个整数、幺模、非退化的对称双线性形式，而格$(H_2(M;\,\mathbb{Z})\ Q_M)$记为$\mathrm{H}_M$。格$\mathrm{H}_M$的自同构群记为$\mathrm{O}(\mathrm{H}_M)$。

闭、定向、单连通四维流形 M 的映射类群$\mathrm{Mod}(M) := \pi_0(\mathrm{Homeo}^+(M))$可由下面的Freedman和Quinn定理计算得到。

定理 2.1 (Freedman [Fre82], Quinn [Qui86])。 设 M^4 是一个闭、定向且单连通的流形。映射

$$\Phi : \mathrm{Mod}(M) \to \mathrm{O}(\mathrm{H}_M)$$

由 Φ： $[\varphi] \mapsto \varphi_*$ 给出的映射是群的同构。

Mayer–Vietoris 序列表明 $H_2(M_N;\,\mathbb{Z}) = H_2(\mathbb{CP}^2;\,\mathbb{Z}) \oplus H_2(\overline{\mathbb{CP}^2};\,\mathbb{Z})^{\oplus N}$，并给出通常的 $\mathbb{Z}$-基 $\{H, E_1, \ldots, E_N\}$。交叉形式 Q_{M_N}由关于对角的 $(N+1)\times(N+1)$ 矩阵给出

$$\mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$$

相对于 $\mathbb{Z}$-基 $\{H, E_1, \ldots, E_N\}$。另一方面，存在一个自然的 $\mathbb{Z}$-基

$$\{s, v, e_1, \ldots, e_{N-1}\} \tag{1}$$

$H_2((\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)\#(N-1)\overline{\mathbb{CP}^2};\,\mathbb{Z})$ 的基，经由 Mayer–Vietoris 序列得到；此处， s和 v分别对应于 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 的第一和第二个因子。对于所有 $N \geq 2$，存在一个微分同胚 $(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)\#(N-1)\overline{\mathbb{CP}^2} \cong M_N$，给出一个识别

$$v = H - E_1, \quad s = H - E_2, \quad e_1 = H - E_1 - E_2, \quad e_k = E_{k+1} \text{ for all } 2 \leq k \leq N-1.$$

本文中，我们主要使用 $\mathbb{Z}$-基 $\{s, v, e_1, \ldots, e_{N-1}\}$ of $H_2(M_N;\,\mathbb{Z})$。

因此，根据 Freedman–Quinn（定理 2.1），

$$\mathrm{Mod}(M_N) \cong \mathrm{O}(1, N)(\mathbb{Z}) := \mathrm{O}(\mathrm{H}_{M_N})$$

在本文中，我们将 $\mathrm{O}(\mathrm{H}_{M_N})$ 与 $\mathrm{Mod}(M_N)$ 视为相同。

另一方面，考虑 $\mathbb{E}^{1,\,N} := (\mathbb{R}^{N+1},\ Q_N)$，其中 Q_N 是符号为 $(1,\ N)$ 的对角双线性对称形式：

$$Q_N((x_0, x_1, \ldots, x_N), (y_0, y_1, \ldots, y_N)) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \cdots - x_N y_N.$$

存在一种自然的恒等对应，将 $\mathbb{R}^{N+1}$与 $\mathbb{R}$-张成的 $\mathbb{Z}$基底 $\{H, E_1, \ldots, E_N\}$的 $H_2(M_N;\,\mathbb{Z})$ 联系起来，使得 Q_{M_N}的 $\mathbb{R}$-双线性延拓与 Q_N一致。 $\mathbb{H}^N$的双曲面模型位于 $\mathbb{E}^{1,\,N}$ 中，其定义为

$$\mathbb{H}^N = \{w = (w_0, w_1, \ldots, w_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : Q_N(w, w) = 1,\, w_0 > 0\}.$$

其中，黎曼度量由 Q_N 到 $\mathbb{H}^N$ 的限制定义（见 [Thu97，第 2]章）。由于 O(1， N)(ℤ)作用于 $\mathbb{R}^{N+1}$并保持 Q_N不变，它包含一个指数为 2 的子群 $\mathrm{O}^+(1,\ N)(\mathbb{Z})$，该子群通过等距变换作用于 $\mathbb{H}^N$。

$\mathbb{H}^N$ 的边界球面对应于

$$\partial\mathbb{H}^N = \{w = (w_0, w_1, \ldots, w_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : Q_N(w, w) = 0,\ w_0 > 0\}/\sim$$

其中，对于所有的 $a \in \mathbb{R}_{>0}$， $aw \sim w$ 。 $\mathbb{H}^N$ 的抛物型等距变换是指固定 $\partial\mathbb{H}^n$中的唯一点的等距变换。根据 [Thu97, 问题2.5.24(g)]，，抛物型等距变换不仅保持 $\mathbb{R}^{N+1}$ 中的某条直线，还逐点固定该直线。此外，$\mathrm{O}^+(1, N)(\mathbb{Z})$中的抛物型等距变换必须固定一个非零的、具有整数条目的各向同性向量，即某个非零的 $w \in H_2(M_N; \mathbb{Z})$，其中 $Q_{M_N}(w, w) = 0$。下面的引理表明，反过来结论也成立。

引理 2.2. 设 $N \geq 2$。元素 $f \in \mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N}) \cap \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^N)$ 作用为抛物型等距变换，当且仅当 f具有无限阶，并且存在某个本原各向同性类 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$，使得 $f \in$稳定子$(w)\ \in \mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$。

证明。 根据引理陈述之前的讨论，一个方向成立，因此只需证明：如果 $f \in \mathrm{Stab}(w)$ 具有无限阶，那么 f 在 $\mathbb{H}^N$ 上的作用是抛物等距变换。

设 $w_0 \in \mathbb{E}^{1,\ N}$ 是一个各向同性向量，使得对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$， $f(w_0) = \lambda w_0$ 。如果 $w_0 \in \mathbb{R}\{w\}^\perp$，那么$w_0$ 必须是 w 的标量倍数，因为 Q_{M_N} 在 $\mathbb{R}\{w\}^\perp/\mathbb{R}\{w\}$ 上的限制是负定的。如果 $Q_{M_N}(w,\ w_0) =: a \neq 0$那么 $\lambda = 1$，因为

$$a = Q_{M_N}(w, w_0) = Q_{M_N}(w, f(w_0)) = \lambda a.$$

于是 $f(aw + w_0) = aw + w_0$，并且

$$Q_{M_N}(aw + w_0, aw + w_0) = 2aQ_{M_N}(w, w_0) = 2a^2 > 0.$$

$aw + w_0$ 的一个标量倍数属于 $\mathbb{H}^N$，这意味着 f 通过椭圆等距变换作用于 $\mathbb{H}^N$，而 $\mathbb{H}^N$ 在 $\mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$ 中的所有此类等距变换都具有有限阶。因此， w_0 必须是 w 的标量倍数，从而f 在 $\partial\mathbb{H}^N$ 中固定唯一点。 □

2.2 本原各向同性类 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 以及 稳定子$(w)\ \leq$映射类群(M_N)

考虑格 (L, Q)，其中 $L \cong \mathbb{Z}^r$ 作为阿贝尔群，取某个 $r \in \mathbb{N}$，且 Q 是 L上的整数、幺模、非退化对称双线性形式。对于每个本原各向同性向量 $w \in L$，存在 $u \in L$，使得根据 Q的幺模性， $Q(w, u) = 1$ 。存在一个正交分解

$$L = \mathbb{Z}\{u, w\} \oplus \mathbb{Z}\{u, w\}^\perp$$

在该分解中， Q 在每个因子上的限制都是幺模形式。 Q 在 $\mathbb{Z}\{u, w\}$ 上的限制的符号为 (1,1)。注意， $\mathbb{Z}\{u, w\}^\perp$ 是 $w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$ 在自然商 $w^\perp \to w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$下的一个提升。这意味着，通过该商，$(\mathbb{Z}\{u, w\}^\perp, Q|_{\mathbb{Z}\{u,w\}^\perp})$ 与 $(\underline{w^\perp}/\mathbb{Z}\{w\}, Q)$ 作为格同构，其中Q是 $w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$上的诱导双线性形式。本节中我们始终沿用上述记号。

引理 2.3. 设 $w \in L$ 是一个本原各向同性向量。若 $h_1, h_2 \in$稳定子$(w)\ \leq \mathrm{O}(L, Q)$ 且 $h_1|_{w^\perp} = h_2|_{w^\perp}$，则 $h_1 = h_2$。特别地，对于任意 $h_1, h_2 \in$稳定子$(v)\ \leq \mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$，其中 v是式 *(1)* 中给出的同调类，且 $N \geq 2$，若对所有 $1 \leq k \leq N - 1$ 都有 $h_1(e_k) = h_2(e_k)$，则 $h_1 = h_2$。

证明。 注意到 $h_1^{-1} \circ h_2$ 在 $\mathbb{Z}\{u, w\}^\perp \leq w^\perp$ 上作用为恒等变换，因此 $h_1^{-1} \circ h_2$ 限制为保持 Q不变的 $\mathbb{Z}\{u, w\}$ 自同构。保持 w不变的（$\mathbb{Z}\{u, w\}, Q|_{\mathbb{Z}\{u,w\}}$）的唯一自同构是恒等变换。因此， $h_1^{-1} \circ h_2 =$在 L上为恒等变换。在 $v \in H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 的情形下，对任意 $N \geq 2$，应用上述论证，其中取 $w = v$、 $u = s$ 和 $\mathbb{Z}\{u, w\}^\perp = \mathbb{Z}\{e_1, \ldots, e_{N-1}\}$。 □

令 Λ_w 表示自然映射 $h_w : \mathrm{Stab}(w) \to \mathrm{O}(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}, Q)$ 的核（参见定义 1.4）。为了描述 Λ_w，我们引入 $\mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$ 中一种重要的元素类型，本文将始终用到这种元素。

定义 2.4. 设 $N \geq 2$ 和 $u \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 满足 $Q_N(u,u) = \pm 1$ 或 ± 2。关于 u 的反射 反射$_u$ 是 $\mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$ 中的一个元素，定义为

$$\mathrm{Ref}_u(x) = x - \frac{2Q_{M_N}(x,u)}{Q_{M_N}(u,u)}u.$$

在下面的引理中，我们使用反射和艾希勒变换为 Λ_w 给出生成元。

引理 2.5. 设 (L,Q) 是任意一个格，且 $w \in L$ 是一个各向同性向量。令 $A \leq w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$ 表示关于 Q 的偶元素构成的 $\mathbb{Z}$-子模。则存在一个群同构

$$E(w,\cdot) : A \to \Lambda_w.$$

在 $(L,Q) = \mathrm{H}^{M_N}$ 对任意 $N \geq 2$ 和 $w = v$ 均成立的情况下，群 Λ_w 由以下元素生成：

$$f_k := \mathrm{Ref}_{e_k} \circ \mathrm{Ref}_{e_{k+1}} \circ \mathrm{Ref}_{v-e_k-e_{k+1}} \circ \mathrm{Ref}_{e_k-e_{k+1}}$$

对于 $1 \leq k \leq N-2$ 和 $g :=$ 反射$_{e_1}\circ$反射$_{v-e_1}$。

证明。 对于任意 $f \in \Lambda_w$，存在 $c(f) \in w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$，使得对于任意 $e \in w^\perp$，

$$f(e) = e - \overline{Q}(c(f), e)w$$

根据 Λ_w 的定义以及 Q 的幺模性。这定义了一个同态 $c :\ \Lambda_w \to w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$，它由引理 2.3 可知是单射。

对于任意 $f \in \Lambda_w$，存在 $a,\ b \in \mathbb{Z}$ 和 $e \in \mathbb{Z}\{u,w\}^\perp$，使得

$$f(u) = u + aw + be$$

因为 $Q(f(u)\ w) = 1$。此外，

$$Q(u,u) = Q(f(u),\ f(u)) = Q(u,u) + 2a + b^2Q(e,e)$$

因此，$b^2Q(e,\ e)$ 和 $bQ(e,\ e)$ 都必须是偶数。由于 $c(f)\ e \in \mathbb{Z}\{w,u\}^\perp$，

$$\begin{aligned} 0 &= Q(f(u),\ f(c(f))) = Q(f(u),\ c(f) - Q(c(f),c(f))w) = bQ(e,\ c(f)) - Q(c(f),\ c(f)),\\ 0 &= Q(f(u),\ f(e)) = Q(f(u),\ e - Q(e,c(f))w) = bQ(e,\ e) - Q(e,\ c(f)). \end{aligned}$$

由第二个等式，$Q(e,\ c(f))$ 是偶数；由第一个等式，$Q(c(f)\ c(f))$ 是偶数。因此，$c(\Lambda_w) \leq A$。

考虑由以下定义的同态 $E(w,\ \cdot) :\ A \to \Lambda_w$

$$E(w,e) : x \mapsto x + Q(w,x)e - Q(e,x)w - \frac{1}{2}Q(e,e)Q(w,x)w$$

对每个 $e \in A$，其中 $E(w,\ e)$ 是一个艾希勒变换。计算表明，$c\circ E(w,\ \cdot) = \mathrm{Id}\,|_A$。最后，如果 $(L,\ Q) = (H_2(M_N;\ \mathbb{Z})\ Q_{M_N})$ 且 $w = v$，则计算得出，对于每个 $1 \leq k \leq N-2$，$f_k = E(w,\ e_k + e_{k+1})$，以及 $g = E(w,\ 2e_1)$；它们共同生成 A。 □

我们结合本小节的结果，并记录 $\mathrm{Stab}(w)$ 的一项重要代数性质。

引理 2.6. 对于任意本原各向同性向量 $w \in L$，存在一个分裂短正合列

$$0 \to \Lambda_w \to \mathrm{Stab}(w) \xrightarrow{h_w} \mathrm{O}(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}, \overline{Q}) \to 0.$$

在 $(L, Q) = \mathrm{H}^{M_N}$ 的情形下，对于任意 $N \geq 2$ 和 $w = f(v)$，对于任意 $f \in \mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$，上述分裂短正合列同构于

$$0 \to \mathbb{Z}^{N-1} \to \mathrm{Stab}(w) \xrightarrow{h_w} \mathrm{O}(N-1)(\mathbb{Z}) \to 0$$

因此，$\Lambda_w \cong \mathbb{Z}^{N-1}$ 是$\mathrm{Stab}(w)$ 的有限指数极大无挠子群，也是 $\mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$ 的极大无挠阿贝尔子群。

证明。 h_w 有一个截面 ℓ，定义如下:

$$\ell : f \mapsto \mathrm{Id} \oplus f \in \mathrm{O}(\mathbb{Z}\{u, w\} \oplus \mathbb{Z}\{u, w\}^\perp, Q) = \mathrm{O}(L, Q)$$

这表明 h_w 是满射的，且该序列是分裂的。

在 $(L, Q) = \mathrm{H}^{M_N}$ 且 $N \geq 2$ 和 $w = f(v)$ 的情形下，对于任意 $f \in \mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$，我们可以令 $u = f(s)$，此时

$$(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}, \overline{Q}) \cong (\mathbb{Z}\{f(e_1), \ldots, f(e_{N-1})\}, Q_{M_N})$$

因此 $\mathrm{O}(w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}, Q) \cong \mathrm{O}(N-1)(\mathbb{Z})$ 是有限的。相对于 Q 而言，由偶元素构成的子群 $A \leq w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$ 在 $w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$ 中的指数为 2，而 $w^\perp/\mathbb{Z}\{w\}$ 的秩为 $N-1$，因此 $\Lambda_w \cong A \cong \mathbb{Z}^{N-1}$。由于该序列是分裂的，对于任意满足 $g \notin \Lambda_w$ 的 $g \in \mathrm{Stab}(w)$，$\langle \Lambda_w, g \rangle$ 必有挠元，因此 Λ_w 是 $\mathrm{Stab}(w)$ 的极大无挠子群。

对于任意 $f \in \mathrm{Stab}(w)$，引理 2.2 表明 f是抛物型，并且 $w \in H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 是 $H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 中在缩放意义下被 f 固定的唯一元素。设 $g \in \mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$ 与某个 $f \in \Lambda_w$对易。那么 $g(w) = \pm w$，因为 f 固定了 $g(w)$，所以 $g \in \mathrm{Stab}(w)$ 或 $-g \in \mathrm{Stab}(w)$。若 $\langle g, \Lambda_w \rangle$ 无挠，则分别有 $g \in \Lambda_w$ 或 $-g \in \Lambda_w$。然而，若 $-g \in \Lambda_w$，则 $-g \circ g^{-1} = -\mathrm{Id}$ 是挠元素，且属于 $\langle g, \Lambda_w \rangle$。因此 $g \in \Lambda_w$，这意味着 Λ_w 是 $\mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$ 的极大无挠阿贝尔子群。 □

为应用引理 2.6，我们采用 Li–Li 的一个定理 [LL02, Theorem 4.2]，该定理指出，对于任意 $N \geq 2$ 以及任意最小亏格为 0 的本原各向同性类 $w \in H_2(M_N; \mathbb{Z})$，存在 $\varphi \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$ 使得 $[\varphi](v) = w$。此外，下面的初等引理在 $2 \leq N \leq 8$ 的情形下加强了该定理。回忆一下式 (1) 中给出的 $H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 的固定 $\mathbb{Z}$-基 $\{s, v, e_1, \ldots, e_{N-1}\}$。

引理 2.7。 如果 $2 \leq N \leq 8$ 和 $w \in H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 是各向同性类，那么

(a) there exists $f \in \mathrm{O}(\mathrm{H}_{M_N})$ such that $f(w) = v$ if w is primitive, and

(b) w 的最小亏格为0。

证明。 Q_{M_N}在 $\mathbb{Z}\{w, u\}$ 上的限制是幺模且不定的，因此 $\mathbb{Z}\{w, u\}^\perp$ 是秩为 $N-1 < 8$的负定形式。根据 [Mor38]，$\mathbb{Z}\{w, u\}^\perp$ 与 $\mathbb{Z}\{e_1, \ldots, e_{N-1}\}$等距同构；令 $w_0 \in \mathbb{Z}\{w, u\}^\perp$ 满足$Q_{M_N}(w_0, w_0) = -1$。

取 $a := Q_{M_N}(u, u)$，我们有 $Q_{M_N}(w, u - aw_0) = 1$并且

$$Q_{M_N}(u - aw_0, u - aw_0) = a - a^2 \equiv 0 \pmod 2.$$

因此，$\mathbb{Z}\{w, u - aw_0\}$ 是幺模的、偶的且不定。再次由 [Mor38]，$\mathbb{Z}\{w, u - aw_0\}^\perp$ 是秩为 $N-1$的负定对角的。存在 $f \in \mathrm{O}(\mathrm{H}^{M_N})$，它保持如下的正交直和

$$f : \mathbb{Z}\{v, s\} \oplus \mathbb{Z}\{e_1, \ldots, e_{N-1}\} \to \mathbb{Z}\{w, w_0 - aw_1\} \oplus \mathbb{Z}\{w, w_0 - aw_1\}^\perp$$

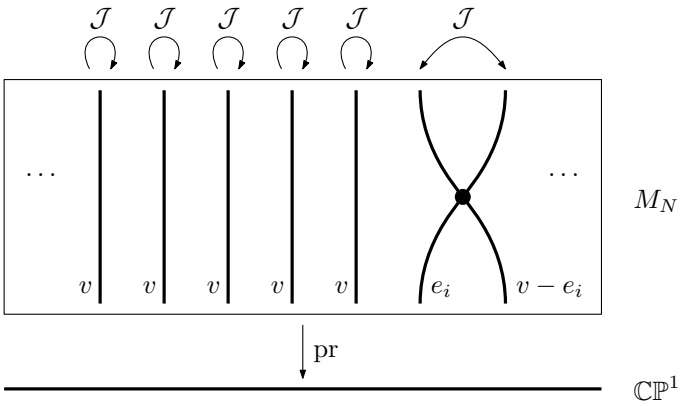


图 1：每条直线表示 $\mathbb{CP}^1$ 的一个副本，并标注了其在 M_N 中的同调类。最右侧的纤维（$1 \le i \le N-1$）是一个奇异纤维。每个奇异纤维都是两个（-1）-球面的并集，并且二者横截地相交于一点。

使得 $f(v) = w$。这证明了 (a)。

为证明 (b)，不妨设 $w \neq 0$。设 $w_1 \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 是一个本原各向同性类，满足 $aw_1 = w$，其中某个 $a \in \mathbb{Z}$。由 (a) 可知，存在某个 $f \in \mathsf{Mod}(M_N)$，使得 $f(w_1) = v$。由于 $N \le 9$，存在一个微分同胚 $\varphi \in \mathsf{Diff}^+(M_N)$，使得根据 [Wal64，定理2]，$[\varphi] = f$，因此 w 的最小亏格与 av 的最小亏格相等，而 $av = a(H - E_1)$ 的最小亏格为 0（参见 [LL02，定理 4.2]）。 □

2.3 Lefschetz 纤维化、圆锥丛与 de Jonqui´ères 对合

令 $N = 2m+1 \ge 3$ 为奇数，并固定一些互不相同的复数 a_1、……、$a_{2m} \in \mathbb{C}$。考虑如下双有理映射 $\mathcal{J}_0 : \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \dashrightarrow \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$

$$\mathcal{J}_0 : ([X_1 : X_2],\, [Y_1 : Y_2]) \mapsto \left([X_1 : X_2],\, \left[Y_2 \prod_{i=m+1}^{2m} (X_1 - a_i X_2) : Y_1 \prod_{i=1}^{m} (X_1 - a_i X_2) \right] \right).$$

于是，$\mathcal{J}_0$ 可提升为一个阶为 2 的自同构 $\mathcal{J}$，称为 $X := \mathsf{Bl}_P(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1)$ 的 *de Jonqui´ère* 对合，其中

$$P := \{([a_i : 1],\, [1 : 0]) : 1 \le i \le m\} \cup \{([a_i : 1],\, [0 : 1] : m+1 \le i \le 2m)\}$$

是 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 中由 $2m$ 个点组成的集合。注意，X 与 M_N 微分同胚。在此同一化下，对于每个 $1 \le k \le m$，$e_k \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 是位于 $([a_k :\ 1], [1 :\ 0])$ 上方的例外纤维的类；对于每个 $m+1 \le k \le m$，它也是位于 $([a_k :\ 1], [0 :\ 1])$ 上方的例外纤维的类。

考虑到第一个坐标的投影映射 $\mathsf{pr}_0 : \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$，它可扩展为映射 $\mathsf{pr} : X \to \mathbb{CP}^1$，从而定义一个全纯亏格 0 Lefschetz 纤维化（换言之，一个圆锥丛）。根据构造，$\mathsf{pr} \circ \mathcal{J} = \mathsf{pr}$。

若 $z \neq z_k := [a_k :\ 1] \in \mathbb{CP}^1$ 对任意 k 成立，则 pr 在点 $z \in \mathbb{CP}^1$ 上方的纤维是 $\{z\} \times \mathbb{CP}^1$，其同调类为 $v \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$。由于 $\mathcal{J}$ 以保持定向的方式作用于每个这样的 $\mathsf{pr}^{-1}(z)$，因此 $[\mathcal{J}] \in \mathsf{Stab}(v) \le \mathsf{Mod}(M_N)$。此外，对所有 $1 \le k \le 2m$ 以及所有 $([a_k :\ 1],\ [Y_1 :\ Y_2]) \notin P$，

$$\mathcal{J}_0 : ([a_k : 1], [Y_1 : Y_2]) \mapsto \begin{cases} ([a_k : 1], [1 : 0]) & \text{if } 1 \le k \le m, \\ ([a_k : 1], [0 : 1]) & \text{if } m+1 \le k \le 2m. \end{cases}$$

因此，$[\mathcal{J}]$ 必须将 X 中 $\mathsf{pr}^{-1}([a_k :\ 1])$ 的严格变换的同调类 $v - e_k$ 映到例外因子 e_k。图 1 展示了 $\mathcal{J}$ 对 pr 的纤维的作用。

上述映射 pr 和 $\mathcal{J}$ 将在第 3 节和第 4 节的显式构造中使用。本节余下部分的目标是说明，对于我们的情形，只需考虑 Lefschetz纤维化 pr：$M_N \to \mathbb{CP}^1$，并证明命题 1.1。

命题 2.8。设 $p\colon M_N \to \Sigma$ 是一个 ***Lefschetz*纤维化**，其中 Σ 是一个闭定向曲面，且一般纤维 F 满足 $[F] \neq 0 \in H_2(M_N;\mathbb{Z})$。如果 $[F]$ 的最小亏格为 0，那么 $\Sigma = \mathbb{CP}^1$ 且 $F = \mathbb{CP}^1$。

证明。由于 M_N 是闭的，一般纤维 F 是 M 的一个紧子流形，且有有限个连通分支。根据 [GS99，命题 8.1.9]，存在一个双射 $\pi_1(\Sigma) \to \pi_0(F)$，因为 $\pi_1(M_N) = 0$。因此，$\Sigma = \mathbb{CP}^1$ 与 F 是连通的，因为 $\pi_0(F) = \pi_1(\mathbb{CP}^1) = 0$。

由于 $[F]$ 非平凡，M_N 可以赋予一个辛结构，使得 F 是一个辛子流形（Gompf [GS99，定理 10.2.18], [Gom05，定理 1.2]），因此根据辛 Thom 猜想（Oszv´ath–Szab´o [OS00，定理 1.1]），F 必定在其同调类中达到最小亏格。 □

命题 *1.1* 的证明。假设存在这样的 Lefschetz纤维化 $p\colon M_N \to \Sigma$ 以及一个同胚 $h\colon \Sigma \to \Sigma$，使得 $p \circ \varphi = h \circ p$。命题 2.8 表明，$\Sigma = \mathbb{CP}^1$，且 p 的一般纤维的亏格为 0。将 p的纤维中包含的 (-1)-球面吹下后，我们看到，根据 [GS99，命题 8.1.7]，p 必定是以 Σ 为底的 $\mathbb{CP}^1$-丛。由于以 $\mathbb{CP}^1$ 为底的所有 $\mathbb{CP}^1$-丛都是全纯的，M_N 便获得了作为有理曲面的复结构，而且 p 是全纯的。

我们对 N使用归纳法，证明若某个同胚 $\varphi \in$ Homeo$^+(M_N)$ 保持一个亏格为 0 的 Lefschetz纤维化 $p\colon M_N \to \mathbb{CP}^1$，则 $[\varphi] \in$ 在映射类群 Mod(M_N) 中具有有限阶。若 $N = 1$，则映射类群 Mod(M_N) 是有限的。现在假设对于某个 $N_0 > 1$，该结论对任意 $1 \le N < N_0$都成立。

设 $N = N_0$ $\varphi \in$ M_N 0 p $M_N \to$，并假设 $\mathbb{CP}^1$ Homeo$^+$( ) 保持一个亏格为 的 Lefschetz纤维化：。那么 φ 必须置换奇异纤维，因为没有任何奇异纤维与一般纤维 $\mathbb{CP}^1$ 同胚。奇异纤维只有有限个，因此 φ^k 的某个幂必须保持每个奇异纤维不变。p 的每个奇异纤维 F 都是有限个负自交数的球面之并，这些球面在有限个点处横截相交 q_1，……，q_m。由于 φ^k 在每个奇异纤维上的限制是一个同胚，φ^k 必须置换点 q_1，……，q_m。此外，φ^k 在 $F - \{q_1,\dots,q_m\}$ 上的限制也是一个同胚；$F - \{q_1,\dots,q_m\}$是有限个带穿孔球面的不交并。因此，$\varphi^{k\ell}$ 的某个更高次幂必须保持 $F - \{q_1,\dots,q_m\}$ 的每个分支及其定向不变。

设 $S \subseteq F$ 是 M_N 中一个嵌入的 (-1)-球面，它只与另一个负自交数为 $S_0 \subseteq F$ 的球面相交于点 q_m。由于 $\varphi^{k\ell}$ 固定 q_m 并保留 $S - \{q_m\} \subseteq F - \{q_1,\dots,q_m\}$，同胚 $\varphi^{k\ell}$ 必须保留 $S \subseteq M_N$。令 $b\colon M_N \to M$ 为将 S 吹掉至点 $q \in M$ 的映射。由于 M 是有理曲面，M 与 M_{N-1} 或 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 微分同胚。

由于 $\varphi^{k\ell}$ 在 $M_N - S$ 上定义了一个同胚，它诱导出 $M - q$ 的一个同胚，该同胚可延拓为 M 的同胚 ψ，并保留 Lefschetz纤维化 $p' : M \to \mathbb{CP}^1$，使得$p = p' \circ b$。若 $M \cong M_{N-1}$，则根据归纳假设，$[\psi]$ 在映射类群(M) 中具有有限阶。否则，$M \cong \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$，因此映射类群$(M)$ 是有限的。因此，$[\psi]$ 在映射类群(M) 中也具有有限阶。

最后，注意到 $b_*\colon H_2(M_N;\mathbb{Z}) \to H_2(M;\mathbb{Z})$ 诱导出商映射

$$H_2(M_N;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\{[S]\}^\perp \oplus \mathbb{Z}\{[S]\} \to \mathbb{Z}\{[S]\}^\perp \cong H_2(M;\mathbb{Z}).$$

由于 $\psi = b \circ \varphi^{k\ell}$ 和 $\varphi_*^{k\ell}([S]) = [S]$，$\varphi_*^{k\ell}$对 $\mathbb{Z}\{[S]\}^\perp$ 的限制必须与ψ_*具有相同的阶。最后，这表明 $[\varphi^{k\ell}]$，因而 $[\varphi]$，在 Mod(M_N) 中具有有限阶。 □

3 定理 1.5：将 Λ_w 提升到 Diff$^+(M_N)$

本节旨在证明定理 1.5。在开始证明之前，我们先固定关于 $\mathbb{CP}^1$ 的某些子集的记号，这些子集如图 2所示。令 $N = n+1$ 和 $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$，使得

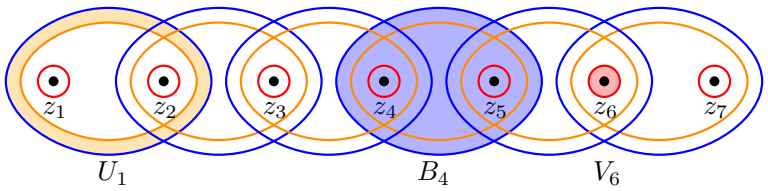


图2：此图展示了情形 $n=7$ 下的集合 U_k、B_k 和 V_k。特别地，蓝色阴影部分 B_4 包围着 z_4 和 z_5。橙色阴影环带 U_1 是 B_1 的领圈邻域，包围着 z_1 和 z_2。红色阴影圆盘 V_6 包含 z_6，且包含于 $(B_5-U_5)\cap(B_6-U_6)$ 中。

若 n 为偶数，则 $n+1=2m+1$；若 n 为奇数，则 $n=2m+1$。取互不相同的复数 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_{2m}\in\mathbb{C}$，并令 $z_k:=[a_k:1]$ 对所有 $k=1,\ \ldots\ldots,\ n$ 成立。于是

(a) 对每个 $1\le k\le n-1$，令 $B_k\cong\mathbb{D}^2$ 表示 $\mathbb{CP}^1-\{[1\text{ 中的一个闭圆盘：}\ 0]\}$ 包含 z_k 和 z_{k+1}，且不含其他点 z_j，其中 $j\neq k,\ k+1$，使得当 $|k-k'|>1$ 时 $B_k\cap B_{k'}=\emptyset$；(b) 对每个 $1\le k\le n-1$，令 $U_k\cong[0,1]\times\mathbb{S}^1\subseteq B_k$ 表示 B_k 的一个领圈邻域，其中 $\{0\}\times\mathbb{S}^1$ 对应于 ∂B_k；(c) 对每个 $1\le k\le n$，令 $V_k\cong\mathbb{D}^2$ 表示 B_k 中的一个闭圆盘（若 $k=1$），或者在 $(B_k-U_k)\cap(B_{k-1}-U_{k-1})$ 中的一个闭圆盘（若 $k\ge 2$），其中 $z_k\in V_k$。

如第2.3节所述，令

$$P=\{([a_i:1],[1:0]):1\le i\le m\}\cup\{([a_i:1],[0:1]):m+1\le i\le 2m\}$$

并考虑 $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1)$ 上的 de Jonqui´ere 对合。将 M_{n+1} 视为

（a）当 n 为偶数时，$\mathrm{Bl}_P(\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1)$；以及（b）当 n 为奇数时，$\mathrm{Bl}_{P-\{([a_{2m}:1],[0:1])\}}(\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1)$。

在这两种情况下，考虑第2.3节中定义的 $\mathrm{pr}:M_{n+1}\to\mathbb{CP}^1$。存在一个自然嵌入

$$\mathrm{pr}^{-1}(B_k)\hookrightarrow\mathrm{Bl}_P(\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1)$$

该自然嵌入在任意 $1\le k\le n-1$ 下的 $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1)$ 上由 $\mathcal{J}$ 保持不变。我们利用这个嵌入，在每个 $\mathrm{pr}^{-1}(B_k)\subseteq M_{n+1}$ 上定义 $\mathcal{J}|_{\mathrm{pr}^{-1}(B_k)}$，而不论 n 的奇偶性。注意，当限制到 $\mathrm{pr}^{-1}(B_k)\cap\mathrm{pr}^{-1}(B_{k+1})$ 时，对所有 $1\le k\le n-2$，$\mathcal{J}|_{\mathrm{pr}^{-1}(B_k)\cap\mathrm{pr}^{-1}(B_{k+1})}$。

定理 1.5 的证明主要分为四个步骤。

(1) 构造相互可交换的微分同胚 $\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1}\in\mathrm{Diff}^+(M_N)$，使其保持零亏格全纯 Lefschetz 纤维化 $\mathrm{pr}:M_N\to\mathbb{CP}^1$，且 $\mathrm{supp}(\gamma_k)\subseteq\mathrm{pr}^{-1}(B_k)$，并且对每个 $1\le k\le n-1$，γ_k 在 $\mathrm{pr}^{-1}(B_k-U_k)$ 上与 $\mathcal{J}$ 一致。这些映射可视为局部 de Jonqui´eres 映射。(2) 构造相互可交换的微分同胚 $r_1,\ldots,r_n\in\mathrm{Diff}^+(M_N)$，其 $\mathrm{supp}(r_k)\subseteq\mathrm{pr}^{-1}(V_k)$，使得对每个 $1\le k\le n$，$[r_k]=\mathrm{Ref}_{e_k}$。(3) 利用上述微分同胚定义同态 $\rho_v:\Lambda_v\to\mathrm{Diff}^+(M_N)$，使得 ρ_v 是映射 $q:\mathrm{Diff}^+(M_N)\to\mathrm{Mod}(M_N)$ 的截面，并且 $\rho_v(\Lambda_v)$ 几乎保持 $\mathrm{pr}:M_N\to\mathbb{CP}^1$。(4) 对任意其他最小亏格 0 的本原各向同性类 w，通过在 $\mathrm{Mod}(M_N)$ 和 $\mathrm{Diff}^+(M_N)$ 中进行共轭，对 ρ_v 前后复合，从而定义同态 $\rho_w:\Lambda_w\to\mathrm{Diff}^+(M_N)$。

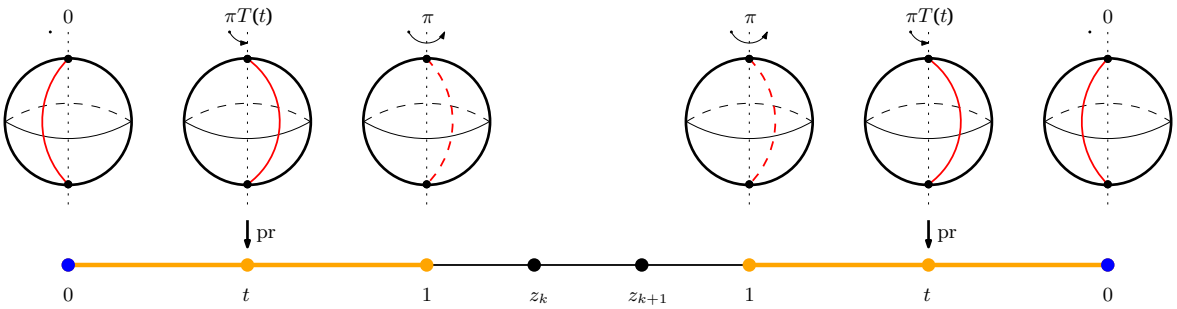


图3：此图展示了 j_k 在 $\mathrm{pr}^{-1}(U_k) \cong [0,1]\times\partial B_k\times\mathbb{CP}^1$上的作用。水平直线表示 $B_k\subseteq\mathbb{CP}^1$，橙色部分表示环带 $U_k\subseteq B_k\subseteq\mathbb{CP}^1$，其宽度由 $t\in[0,1]$参数化。蓝色点表示 $\partial B_k\cong\mathbb{S}^1$。微分同胚 j_k 通过对位于点 $(t,x)\in[0,1]\times\partial B_k\cong U_k$上方的球面进行-$\pi T(t)$旋转来作用。

3.1 步骤1：构造局部 de Jonquières 映射 $\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\in\mathrm{Diff}^+(M_N)$

对每个 $1\le k\le 2m$，定义 $\lambda_k\colon U_k\to\mathbb{C}^\times$ 为

$$\lambda_k(x):=\sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{m}(x-z_i)}{\prod_{i=m+1}^{n}(x-z_i)}}$$

采用任意光滑的平方根选取。这样的选取定义良好，因为 U_k 是一个环带，它环绕但不包含两点 z_k 和 z_{k+1}。此外，$x-z_i\neq 0$，因为对于任意 $1\le i\le n$，都有 $z_i\notin U_k$。对于这样的 λ_k选取，考虑映射 $M_{\lambda_k}\colon U_k\to\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$，其定义如下：

$$M_{\lambda_k}(x)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\lambda_k(x) & \lambda_k(x)\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

我们还记录下 $M_{\lambda_k}(x)$ 的逆映射，以供后续使用：

$$M_{\lambda_k}(x)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{\lambda_k(x)}\\ 1 & \frac{1}{\lambda_k(x)}\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

x x u_{λ_k} =
将 $M_{\lambda_k}(U_k\times\mathbb{CP}^1$) 和 M_{λ_k}
$)^{-1}$ 视为 $\mathbb{CP}^1$ 的自同构群，定义 $\mathrm{pr}^{-1}(U_k)$ 上的微分同胚如下：

$$u_{\lambda_k}([x:1],[Y_1:Y_2])=([x:1],\,M_{\lambda_k}(x)\cdot[Y_1:Y_2]).$$

设 $T\colon[0,1]\to[0,1]$ 是一个光滑非递减函数，使得 $T|_{[0,\varepsilon]}\equiv 0$ 和 $T|_{[1-\varepsilon,1]}\equiv 1$对某个 $0<\varepsilon\ll 1$成立。将 $\mathrm{pr}^{-1}(U_k)=U_k\times\mathbb{CP}^1$ 与 $[0,1]\times\partial B_k\times\mathbb{CP}^1$ 等同（参见图2），令 j_k 为 $\mathrm{pr}^{-1}(U_k)$ 上定义的微分同胚：

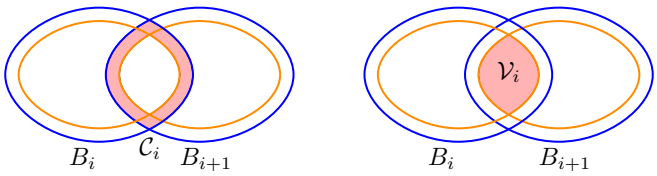
$$j_k(t,\,\theta,\,[Y_1:Y_2])=(t,\,\theta,\,[e^{\sqrt{-1}\pi T(t)}Y_1:Y_2]).$$

粗略地说，j_k 是由 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{CP}^1$ 从 $\mathrm{Id}\times\mathrm{Id}$ 到 $\mathrm{Id}\times R(\pi)$ 的同伦所诱导的 $[0,1]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{CP}^1$ 上的映射，其中 $R(\pi)$ 是 $\mathbb{CP}^1$ 上旋转 π 的映射。参见图 3。

在下一个引理中，我们利用 de Jonquières 映射在每个 $\{t\}\times\partial B_k\times\mathbb{CP}^1$ 上都与 $\mathrm{Id}\times R(\pi)$ 共轭这一事实，将 $\mathcal{J}|_{\mathrm{pr}^{-1}(U_k)}$ 修改为在边界 $\mathrm{pr}^{-1}(\partial B_k)$ 附近为恒等变换。

引理3.1. 设 $1\le k\le n-1$。在 $\mathrm{pr}^{-1}(U_k)=[0,1]\times\partial B_k\times\mathbb{CP}^1$，

$$u_{\lambda_k}\circ j_k\circ u_{\lambda_k}^{-1}=\begin{cases}\mathcal{J} & on\ \mathrm{pr}^{-1}([1-\varepsilon,1]\times\partial B_k),\\ \mathrm{Id} & on\ \mathrm{pr}^{-1}([0,\varepsilon]\times\partial B_k).\end{cases}$$



Fig图 4：对于每个 $1 \le i \le n-1$，集合 $\mathcal{C}_i$（左）和 $\mathcal{V}_i$（右）都包含于 $B_i \cap B_{i+1}$.

证明。 在 $\mathrm{pr}^{-1}([0,\varepsilon] \times \partial B_k)$ 上，注意到 $j_k \equiv \mathrm{Id}$。在 $\mathrm{pr}^{-1}([1-\varepsilon,1] \times \partial B_k)$ 上，

$$j_k([x:1],[Y_1:Y_2]) = ([x:1],[-Y_1:Y_2]).$$

对于所有 $[x:\ 1] \in [1-\varepsilon,1] \times \partial B_k \subseteq U_k$

$$M_{\lambda_k}(x) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{\lambda_k}(x)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_k(x)^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}),$$

因此

$$u_{\lambda_k} \circ j_k \circ u_{\lambda_k}^{-1}([x:1],[Y_1:Y_2]) = \big([x:1],[Y_2:\lambda_k(x)^2 Y_1]\big) = \mathcal{J}([x:1],[Y_1:Y_2]). \qquad \square$$

下文的微分同胚 γ_k 应被视为局部 de Jonqui´ères 映射，它们仅作用于 pr. 的一对奇异纤维上。

定义 3.2。 对于任意 $1 \le k \le n-1$，令 γ_k 为微分同胚

$$\gamma_k = \begin{cases} \mathcal{J} & on\ \ \mathrm{pr}^{-1}(B_k - U_k) \\ u_{\lambda_k} \circ j_k \circ u_{\lambda_k}^{-1} & on\ \ \mathrm{pr}^{-1}(U_k) \\ \mathrm{Id} & on\ \ \mathrm{pr}^{-1}(\mathbb{CP}^1 - B_k). \end{cases}$$

命题 3.3。 微分同胚 γ_k 满足以下性质：

(a) 微分同胚 γ_k 对所有 $1 \le k \le n-1$ 都保持 pr 。特别地，$\mathrm{pr} \circ \gamma_k = \mathrm{pr}$。

(b) 对所有 $1 \le i$、$j \le n-1$，微分同胚 γ_i 和 γ_j 可交换。

(c) 作为映射类，对所有 $1 \le k \le n-1$，$[\gamma_k] =$ 反射$^{v-e_k-e_{k+1}} \circ$反射$^{e_k-e_{k+1}}$。

证明。 对于每个 k，根据 u_{λ_k} 和 j_k 的构造，当限制在 $\mathrm{pr}^{-1}(U_k)$ 上时，$\mathrm{pr} \circ u_{\lambda_k} = \mathrm{pr}$ 且 $\mathrm{pr} \circ j_k = \mathrm{pr}$。因此，

$$(\mathrm{pr} \circ \gamma_k)|_{\mathrm{pr}^{-1}(U_k)} = \big(\mathrm{pr} \circ (u_{\lambda_k} \circ j_k \circ u_{\lambda_k}^{-1})\big)\big|_{\mathrm{pr}^{-1}(U_k)} = \mathrm{pr}\,|_{\mathrm{pr}^{-1}(U_k)}$$

并且对于所有 k，γ_k 在 $\mathrm{pr}^{-1}(U_k)$ 上保持 pr 的纤维。在 $\mathrm{pr}^{-1}(\mathbb{CP}^1 - B_k)$ 上显然也如此；根据 $\mathcal{J}$ 的构造，在 $\mathrm{pr}^{-1}(B_k - U_k)$ 上也如此。这就证明了 (a)。

若 $|i-j| > 1$，则 $\mathrm{supp}(\gamma_i) \cap \mathrm{supp}(\gamma_j) = \emptyset$，因此 γ_i 和 γ_j 可交换。为了证明 γ_i 和 γ_{i+1} 可交换，我们将考察这两个微分同胚在

$$\mathrm{pr}^{-1}(B_i \cap B_{i+1}) = \mathrm{pr}^{-1}(\underbrace{(B_i \cap B_{i+1}) \cap (U_i \cup U_{i+1})}_{=:\mathcal{C}_i}) \cup \mathrm{pr}^{-1}(\underbrace{(B_i \cap B_{i+1}) - (U_i \cup U_{i+1})}_{=:\mathcal{V}_i})$$

其包含支集(γ_i) ∩支集(γ_{i+1})。见图4。

根据构造，

$$\gamma_i|_{\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{V}_i)} = \mathcal{J}\,|_{\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{V}_i)} = \gamma_{i+1}|_{\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{V}_i)}$$

因此 γ_i 和 γ_{i+1} 在 $\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{V}_i)$ 上交换。

对于任意 $[x:1]\in\mathcal{C}_i$，γ_i 和 γ_{i+1} 都按 (a) 的方式作用于 $\mathrm{pr}^{-1}([x:1])$。若 $[x:1]\in U_i\cap U_{i+1}$，则存在某个t，$T\in[0,1]$，其取决于 x，

$$\gamma_i([x:1],[Y_1:Y_2])=\left([x:1],\left(M_{\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}e^{\sqrt{-1}\pi t}&0\\0&1\end{pmatrix}M_{\lambda_i}(x)^{-1}\right)\cdot[Y_1:Y_2]\right)$$
$$\gamma_{i+1}([x:1],[Y_1:Y_2])=\left([x:1],\left(M_{\lambda_{i+1}}(x)\begin{pmatrix}e^{\sqrt{-1}\pi T}&0\\0&1\end{pmatrix}M_{\lambda_{i+1}}(x)^{-1}\right)\cdot[Y_1:Y_2]\right)$$

此外，$\lambda_i(x)=\lambda_{i+1}(x)$ 或 $-\lambda_{i+1}(x)$。在第一种情况下，$M_{\lambda_i}(x)=M_{\lambda_{i+1}}(x)$，因此 γ_i 和 γ_{i+1} 在 $\mathrm{pr}^{-1}([x:1])$ 上可交换。在第二种情况下，对每个 $[x:1]\in U_i$ 计算可得

$$M_{\lambda_i}(x)=M_{-\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad\text{and}\qquad M_{\lambda_i}(x)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}M_{-\lambda_i}(x)^{-1}$$

因此

$$M_{-\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}e^{\sqrt{-1}\pi T}&0\\0&1\end{pmatrix}M_{-\lambda_i}(x)^{-1}=M_{\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{\sqrt{-1}\pi T}\end{pmatrix}M_{\lambda_i}(x)^{-1}.$$

显然，

$$M_{\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}e^{\sqrt{-1}\pi t}&0\\0&1\end{pmatrix}M_{\lambda_i}(x)^{-1}\qquad\text{and}\qquad M_{\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{\sqrt{-1}\pi T}\end{pmatrix}M_{\lambda_i}(x)^{-1}$$

com在 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 中可交换，这说明在这种情况下，γ_i 和 γ_{i+1} 在 $\mathrm{pr}^{-1}([x:1])$ 上可交换
种情况。若 $[x:1]\in$
U_i 和 $[x:1]\notin U_{i+1}$ 那么对于某个取决于 x 的 $t\in[0,1]$ 以及所有 $[Y_1$，都有：$Y_2]\in\mathbb{CP}^1$，

$$\gamma_i([x:1],[Y_1:Y_2])=\left([x:1],\left(M_{\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}e^{\sqrt{-1}\pi t}&0\\0&1\end{pmatrix}M_{\lambda_i}(x)^{-1}\right)\cdot[Y_1:Y_2]\right)$$
$$\gamma_{i+1}([x:1],[Y_1:Y_2])=\mathcal{J}([x:1],[Y_1:Y_2])=\left([x:1],\left(M_{\lambda_i}(x)\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}M_{\lambda_i}(x)^{-1}\right)\cdot[Y_1:Y_2]\right)$$

其中，第二个等式由引理3.1（的证明）得出。因此，γ_i 和 γ_{i+1} 在 $\mathrm{pr}^{-1}([x:1])$ 上可交换。通过类似的计算，如果 $x\in U_{i+1}$ 和$x\notin U_i$，则 γ_i 和 γ_{i+1} 在 $\mathrm{pr}^{-1}([x:1])$ 上可交换。这证明了 (b)。

最后注意，对于所有 $j\neq k$，$k+1$，映射 γ_k 在 e_j 上以及对任意 $z\notin B_k$ 的 $\mathrm{pr}^{-1}(z)$ 上限制为恒等变换，因此 $(\gamma_k)_*(e_j)=e_j$ 以及 $(\gamma_k)_*(v)=v$。此外，γ_k 在 $\mathrm{pr}^{-1}(B_k)$ 上与 $\mathcal{J}$ 一致，这意味着对于 $j=k$ 和 $j=k+1$，$(\gamma_k)_*(e_j)=v-e_j$。根据引理 2.3，这随后确定了 $[\gamma_k]\in$ 映射类群(M_{n+1})。计算表明，$\mathrm{Ref}_{v-e_k-e_{k+1}}\circ\mathrm{Ref}_{e_k-e_{k+1}}$ 也具有相同性质。 □

3.2 第2步：构造 r_1，……，$r_n\in\mathrm{Diff}^+(M_N)$

对于每个 $1\le k\le n$，例外因子 e_k 在 $\mathrm{pr}^{-1}(V_k)$ 中有一个管状邻域 ν_k，该邻域与 $\mathbb{CP}^2-\{[0:0:1]\}$ 微分同胚。令 $\overline{i_k}:\mathbb{CP}^2-\{[0:0:1]\}\to\overline{\nu_k}$ 为这一微分同胚，并令τ_0 为 $\mathbb{CP}^2-\{[0:0:1]\}$ 的一个微分同胚，由复共轭给出，即 $\tau_0:[X:Y:Z]\mapsto[\bar{X}:\bar{Y}:\bar{Z}]$。

考虑一条光滑路径 $\eta:(0,1)\to$ 四维特殊正交群 SO(4)，使得

$$\eta(t)=\begin{cases}\mathrm{diag}(1,-1,1,-1) & \text{if } t\in(1,1-\varepsilon)\\ \mathrm{Id} & \text{if } t\in(0,\varepsilon)\end{cases}$$

对于某个 $0<\varepsilon\ll1$。令 B 表示 $\mathbb{CP}^2-\{[0$ 中的穿孔球$\overline{:0:1]}\}$，定义如下

$$B:=\{[a+b\sqrt{-1}:c+d\sqrt{-1}:1]\in\overline{\mathbb{CP}^2}:0<\|(a+b\sqrt{-1},c+d\sqrt{-1})\|<1\}\cong(0,1)\times\mathbb{S}^3\subseteq\mathbb{R}^4,$$

并定义 $\tau \in \mathrm{Diff}^+(\overline{\mathbb{CP}^2 - \{[0:0:1]\}})$ 如下

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & \text{on } \overline{\mathbb{CP}^2} - B, \\ (t,x) \mapsto (t, \eta(t)x) & \text{on } B \cong (0,1) \times \mathbb{S}^3. \end{cases}$$

于是，τ的支集紧含于 $\mathbb{CP}^2 - \{[0 \overline{\text{中}}: \overline{0}: 1]\}$。

定义 3.4. 对于所有 $1 \le k \le n$，令 $r_k \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$ 为

$$r_k := \begin{cases} i_k \circ \tau \circ i_k^{-1} & \text{on } \nu_k \\ \mathrm{Id} & \text{on } M_N - \nu_k \end{cases}$$

注 3.5. 根据构造，微分同胚 r_k 限制为 e_k 上的一个反定向微分同胚，并且对所有 $i \neq k$ 和 v，都保持同调类 e_i 不变。由引理 2.3 可知，这迫使 $[r_k] =$ 反射$_{e_k} \in$映射类群(M_N)。此外，$\mathrm{supp}(r_k) \subseteq \nu_k \subseteq \mathrm{pr}^{-1}(V_k)$，且 r_k 保持 $\nu_k \subseteq \mathrm{pr}^{-1}(V_k)$不变。

3.3 第三步：构造 $\rho_v :\ \Lambda_v \to \mathrm{Diff}^+(M_N)$

映射类群 Λ_v 的生成元 f_1、……、f_{n-1}（参见引理 2.5）将在 ρ_v 下映射为以下微分同胚。

引理 3.6. 对每个 $1 \le k \le n-1$，令

$$\varphi_k := r_k \circ r_{k+1} \circ \gamma_k.$$

那么，对于任意 $1 \le i,\ j \le n$，有 $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i$。

证明。对于任意 $1 \le i,\ j \le n$，若 $|i-j| > 1$，则微分同胚 φ_i 和 φ_j 可交换，因为它们的支集不交。对于任意 $1 \le i \le n-1$,

$$\varphi_i|_{\mathrm{pr}^{-1}(V_{i+1})} = (r_{i+1} \circ \mathcal{J})|_{\mathrm{pr}^{-1}(V_{i+1})} = \varphi_{i+1}|_{\mathrm{pr}^{-1}(V_{i+1})}$$

因此，φ_i 和 φ_{i+1} 在 $\mathrm{pr}^{-1}(V_{i+1})$ 上可交换。此外，在 S_i 上：$= \mathrm{pr}^{-1}(B_i \cap B_{i+1}) - \mathrm{pr}^{-1}(V_{i+1})$

$$\varphi_i|_{S_i} = \gamma_i, \qquad \varphi_{i+1}|_{S_i} = \gamma_{i+1}$$

因此，根据命题 3.3(b)，φ_i 和 φ_{i+1} 在 $\mathrm{pr}^{-1}(B_i \cap B_{i+1})$ 上可交换。最后，φ_i 和 φ_{i+1} 在 $M_{n+1} - \mathrm{pr}^{-1}(B_i \cap B_{i+1})$ 上可交换，因为 $\mathrm{supp}(\varphi_i) \cap \mathrm{supp}(\varphi_{i+1})$ 包含于 $\mathrm{pr}^{-1}(B_i \cap B_{i+1})$ 中。 □

接下来需要构造 ρ_v 下 Λ_v 的最后一个生成元 g 的像。

引理 3.7。下面是一个定义良好的微分同胚：

$$\psi = \begin{cases} \varphi_1 \circ \varphi_1 & \text{on } \mathrm{pr}^{-1}(V_1) \\ \mathrm{Id} & \text{on } M_{n+1} - \mathrm{pr}^{-1}(V_1). \end{cases}$$

此外，

(a) 映射 ψ 对于所有 $1 \le k \le n$ 均与 φ_k 交换，并且

(*b*) 属于映射类群(M_{n+1})，$[\psi] = g =$ 反射$_{e_1} \circ$反射$_{v-e_1}$。

证明。根据定义，对于所有 $1 \le k \le n$， r_k 的支集包含于 $\mathrm{pr}^{-1}(V_k)$ 的内部。因此，$r_1|_C =$ 在 $\mathrm{pr}^{-1}(V_1)$ 的某个领圈邻域 C 上等于 Id，且

$$\psi|_C = (\varphi_1 \circ \varphi_1)|_C = (r_1 \circ \mathcal{J} \circ r_1 \circ \mathcal{J}))|_C = (\mathcal{J} \circ \mathcal{J})|_C = \mathrm{Id}\,|_C.$$

M此外， $\mathcal{J}$、 r_1和 r_2 都保持 $\mathrm{pr}^{-1}(V_1)$不变，因此映射 ψ 确实是一个微分同胚。

对于所有 $k > 1$，微分同胚 ψ 和 φ_k 的支集不交。分别考察子集 $\mathrm{pr}^{-1}(V_1)$ 和 $M_{n+1} - \mathrm{pr}^{-1}(V_1)$，可知 φ_1 和 ψ 也彼此可交换。

对于所有 $2 \le k \le n$，计算可得 $[\psi](e_k) = e_k$，因为 $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq \mathrm{pr}^{-1}(V_1)$。此外， ψ 在 $\mathrm{pr}^{-1}(V_1)$ 上与 φ_1^2 一致，这意味着

$$[\psi](e_1) = [\varphi_1^2](e_1) = e_1 + 2v.$$

计算可得

$$\mathrm{Ref}_{e_1} \circ \mathrm{Ref}_{v-e_1}(e_k) = [\psi](e_k)$$

对于所有 $1 \le k \le n$，应用引理 2.3 可得 $[\psi] = g$。 □

命题 3.8。存在一个同态 ρ_v： $\Lambda_v \to \mathrm{Diff}^+(M_N)$，定义如下

$$\rho_v(f_k) := \varphi_k \quad \textit{for all } 1 \le k \le n-1, \qquad \rho_v(g) := \psi$$

w这里， g 和 f_k 是 $1 \le k \le n-1$ 的生成元，如引理 *2.5* 所述。此外，

(a) ρ_v *is a section of the map* $q : \mathrm{Diff}^+(M_N) \to \mathrm{Mod}(M_N)$ *restricted to* $\Lambda_v \le \mathrm{Mod}(M_N)$*, and*

(b) 对所有 $\varphi \in \rho_v$（Λ_v），

$$(\mathrm{pr} \circ \varphi)|_{M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)} = \mathrm{pr}\,|_{M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)}.$$

因此， ρ_v（Λ_v）几乎保持 ***Lefschetz***纤维化pr： $M_N \to \mathbb{CP}^1$。

证明。根据引理 2.5， $\Lambda_v \cong \mathbb{Z}^n$ 由 f_1、……、 f_{n-1}、 g生成。由引理 3.6 和引理 3.7(a) 可知， ρ_v 的像是阿贝尔群，因此 ρ_v 是良定义的同态。

利用命题 3.3(c) 和注 3.5 计算可得

$$[\rho_v(f_k)] = [r_k] \circ [r_{k+1}] \circ [\gamma_k] = \mathrm{Ref}_{e_k} \circ \mathrm{Ref}_{e_{k+1}} \circ \mathrm{Ref}_{v-e_k-e_{k+1}} \circ \mathrm{Ref}_{e_k-e_{k+1}} = f_k \in \Lambda_v.$$

引理 3.7 表明 $[\rho_v(g)] = g$。因此， ρ_v 是商映射 $q : \mathrm{Diff}^+(M_N) \to$映射类群$(M_N)$在 $\Lambda_v \le$映射类群(M_N)上的截面。

最后，对所有 $1 \le k \le n$，$\mathrm{supp}(r_k) \subseteq \mathrm{pr}^{-1}(V_k)$（参见注 3.5）。由命题 3.3(a)，对所有 $1 \le k \le n-1$，$\mathrm{pr} \circ \gamma_k = \mathrm{pr}$，因此

$$\varphi_k|_{M_{n+1} - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)} = \gamma_k|_{M_{n+1} - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)}.$$

由引理 3.7，

$$\psi|_{M_{n+1} - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)} = \mathrm{Id}\,|_{M_{n+1} - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)}.$$

因此，对所有 $\varphi \in \rho_v(\Lambda_v)$，限制在 $M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)$ 上的 $\mathrm{pr} \circ \varphi = \mathrm{pr}$，故 $\rho_v(\Lambda_v)$ 几乎保持 pr。

□

3.4 St第 4 集：推广到任意最小亏格为0的本原各向同性类 w

有了上述构造，我们便完成了定理 1.5 的证明。

定理 *1.5* 的证明。由于 w 是一个最小亏格 0 的本原各向同性类，根据 Li–Li 的定理（[LL02，定理 4.2]），存在某个 $\alpha \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$，使得 $[\alpha](w) = v$。利用 h_v 和 h_w 的定义（参见引理 2.6），计算可得

$$\Lambda_v = [\alpha] \circ \Lambda_w \circ [\alpha^{-1}]$$

并定义 $\rho_w \colon \Lambda_w \to \mathrm{Diff}^+(M_N)$ 如下

$$\rho_w(f) = \alpha^{-1} \circ \rho_v([\alpha] \circ f \circ [\alpha^{-1}]) \circ \alpha$$

其中 $\rho_v \colon \Lambda_v \to \mathrm{Diff}^+(M_N)$ 是命题 3.8 中构造的同态。计算可得，对所有 $x \in M_N - \bigcup_{k=1}^{n} (\mathrm{pr} \circ \alpha)^{-1}(V_k)$，

$$(\mathrm{pr} \circ \alpha) \circ \rho_w(f)(x) = \mathrm{pr} \circ \rho_v([\alpha] \circ f \circ [\alpha^{-1}]) \circ \alpha(x) = (\mathrm{pr} \circ \alpha)(x)$$

因为根据命题 3.8(b)，$\mathrm{pr} \circ \rho_v([\alpha] \circ f \circ [\alpha^{-1}])$ 在 $M_N - \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{pr}^{-1}(V_k)$ 上等于 pr。因此，$\rho_w(\Lambda_w)$ 几乎保持 $\mathrm{pr} \circ \alpha$，而它对于 M_N 上某个复结构是全纯的。最后，根据命题 3.8(a) 计算可得，对任意 $f \in \Lambda_w$，

$$q(\alpha^{-1} \circ \rho_v([\alpha] \circ f \circ [\alpha^{-1}]) \circ \alpha) = [\alpha^{-1}] \circ (q \circ \rho_v)([\alpha] \circ f \circ [\alpha^{-1}]) \circ [\alpha] = f. \qquad \square$$

若 $2 \le N \le 8$，则定理 1.5 对 $H_2(M_N; \mathbb{Z})$ 中任意本原各向同性类成立。

推论 3.9. 设 $2 \le N \le 8$，并令 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 为任意本原各向同性类。存在一个同态 $\rho_w \colon \Lambda_w \to \mathrm{Diff}^+(M_{n+1})$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Diff}^+(M_N) \\ & \overset{\rho_w}{\nearrow} & \big\downarrow q \\ \Lambda_w & \hookrightarrow & \mathrm{Mod}(M_N) \end{array}$$

此外，像 $\rho_w(\Lambda_w)$ 几乎保持一个全纯的亏格为0 *Lefschetz*纤维化 $p \colon M_N \to \mathbb{CP}^1$，其一般纤维表示同调类 w。

证明。若 $2 \le N \le 8$ 且 $w \in H_2(M_N;\ \mathbb{Z})$ 是一个本原各向同性类，则引理 2.7(b) 表明 w 的最小亏格为 0。现在应用定理 1.5。 $\square$

4 定理 1.3：映射类群(M_N)中的单个抛物元素

本节中，我们利用第 3 节中构造的微分同胚证明定理 1.3。下面的引理考虑子群 $S_n \le \mathrm{O}(n)(\mathbb{Z}) \le$ 稳定子(v)，该子群通过置换类e_1、.. .、 e_n给出。

引理 4.1。对于每个 $1 \le k \le n-1$，存在 $s_k \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$ 和 $\tau_k \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{CP}^1)$，使得

(a) $\mathrm{pr} \circ s_k = \tau_k \circ \mathrm{pr}$，并且

(b) $[s_k] =$ 反射$_{e_k - e_{k+1}} \in$ 映射类群(M_N)。

证明。设

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

使得 A 的阶为 2，并且 $A([1:\ 1]) = [-1:\ 1] \in \mathbb{CP}^1$。存在一个邻域 D，它微分同胚于路径 $\{[t:\ 1]: t \in [-1,1]\} \subseteq \mathbb{CP}^1$ 的圆盘 $\mathbb{D}^2$，且该邻域在 A作用下保持不变。设 $\iota_k:\ D \hookrightarrow \mathbb{CP}^1$ 为一个光滑嵌入，其像包含于 $B_k - U_k$ 中，并且

$$\iota_k([-1:1]) = [a_k:1], \quad \iota_k([1:1]) = [a_{k+1}:1],$$

从而，当限制在 $[1:\ 1]$ 和 $[-1:\ 1]$ 在 D 中的小邻域上时，ι_k 是全纯的。现在令 $\tau_k \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{CP}^1)$ 为一个满足以下条件的微分同胚:

$$\tau_k = \begin{cases} \iota_k \circ A \circ \iota_k^{-1} & \text{on } \iota_k(D) \subseteq B_k - U_k, \\ \mathrm{Id} & \text{on } \mathbb{CP}^1 - B_k. \end{cases}$$

考虑微分同胚 $s\colon (X,Y) \mapsto (\tau_k(X)\ Y)$ of $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$，它可延拓为 s_k 上的微分同胚，因为对于所有 $1 \le i \le n$，s 在 $\mathrm{pr}^{-1}([a_i:\ 1])$ 的邻域上是全纯的。根据构造，$\mathrm{pr} \circ s_k = \tau_k \circ \mathrm{pr}$。此外，如果 $i \ne k$ 或 $k+1$，则 s_k 在 e_i 上充当恒等变换，但 $s_k(e_k) = e_{k+1}$，且 $s_k(e_{k+1}) = e_k$。因此，根据引理 2.3，$[s_k] = \mathrm{Ref}_{e_k - e_{k+1}}$，因为 $[s_k] \in \mathrm{Stab}(v)$。 □

我们可以假设，对于所有 $1 \le k \le n-1$，$V_{k+1} \subseteq \mathbb{CP}^1$ 的选取都满足 $\tau_k(V_k) = V_{k+1}$。这也意味着 $\tau_k(V_{k+1}) = V_k$，因为 $\tau_k|_{B_k - U_k}$ 的阶为 2。

定理 *1.3* 的证明。 当 $N = 1$ 时，定理成立，因为此时稳定子$(w) = 1$。现在假设$N \ge 2$ 且 $w = v$。由于 $h \in$ 稳定子(v)，我们可以写成 $h = f \circ \sigma$，其中 $f \in \Lambda_v$，且根据引理 2.6，$\sigma \in$自同构群$(\mathbb{Z}\{e_1,\dots,e_n\},\ Q_{M_N}) \cong \mathrm{O}(n)(\mathbb{Z})$。此外，$\sigma$可以写成乘积$[r] \circ [s] \in$自同构群$(\mathbb{Z}\{e_1,\dots,e_n\},\ Q_{M_N})$，其中

$$r \in \langle r_k : 1 \le k \le n \rangle \le \mathrm{Diff}^+(M_N), \qquad s \in \langle s_k : 1 \le k \le n-1 \rangle \le \mathrm{Diff}^+(M_N),$$

根据注 3.5 和引理 4.1(b)。令

$$\varphi := \rho_v(f) \circ r \circ s \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$$

其中 $\rho_v:\ \Lambda_v \to \mathrm{Diff}^+(M_N)$ 是命题 3.8 中的同态。根据构造，$[\varphi] = h$。注意

$$\mathrm{pr} \circ \rho_v(f) \circ r|_{M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)} = \mathrm{pr}\,|_{M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)}$$

根据命题 3.8(b) 和注 3.5。由引理 4.1(a)，存在 $\tau \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{CP}^1)$，使得 $\mathrm{pr} \circ s = \tau \circ \mathrm{pr}$ 且 τ 保持 $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)$。因此

$$\mathrm{pr} \circ \varphi|_{M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)} = \mathrm{pr} \circ (\rho_v(f) \circ r \circ s)|_{M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)} = \tau \circ \mathrm{pr}\,|_{M_N - \bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}^{-1}(V_i)},$$

这表明 φ 几乎保持 pr。

取任意另一个最小亏格 0 的本原各向同性类 $w \in H_2(M_N;\mathbb{Z})$；我们按照定理 1.5 的证明采用类似方法。应用 Li–Li [LL02，定理 4.2]，得到 $\alpha \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$，使得 $[\alpha](w) = v$ 且 $[\alpha] \circ g \circ [\alpha^{-1}] \in \mathrm{Stab}(v)$。存在一个微分同胚 $\varphi \in \mathrm{Diff}^+(M_N)$，几乎保持 pr：$M_N \to \mathbb{CP}^1$，且 $[\varphi] = [\alpha] \circ g \circ [\alpha^{-1}]$。于是 $\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha$ 几乎保持 pr $\circ \alpha$，并且 $[\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha] = h$ □

推论 4.2. 令 $N \le 8$，并令 $w \in H_2(M_N)$ 为任意本原各向同性类。对于任意 $h \in$稳定子(w)，存在 $\varphi \in$微分同胚$^+(M_N)$ 几乎保持某个全纯 *genus*-0 *Lefschetz*纤维化 $p\colon M_N \to \mathbb{CP}^1$，其一般纤维表示同调类 w，使得 $[\varphi] = h \in$ 映射类群(M_N)。

证明。若 $N \le 8$ and $w \in H_2(M_N;\mathbb{Z})$ 是一个本原各向同性类，则引理 2.7(b) 表明 w 的最小亏格为 0。现在应用定理 1.3。 □

参考文献

[BB00] Lionel Bayle 和 Arnaud Beauville。$\mathbb{P}^2$ 的双有理对合。《亚洲数学杂志》，4:11–18，2000。[Ber77] E. Bertini。平面上一一对合变换的研究。《纯粹与应用数学年鉴》，8:244–286，1877。[Can01] Serge Cantat。K3曲面自同构的动力学。《数学学报》，187:1–57，2001。[CLW21] Weimin Chen、Tian-Jun Li 和 Weiwei Wu。辛有理 G 曲面与等变辛锥。《微分几何杂志》，119(2):221, 260，2021。[DF01] J. Diller 和 C. Favre。曲面双亚纯映射的动力学。《美国数学杂志》，123:1135–1169，2001。[DI09] Igor V. Dolgachev 和 Vasily A. Iskovskikh。平面 Cremona 群的有限子群，第 443–548 页。Birkh¨auser Boston，2009。[FL] Benson Farb 和 Eduard Looijenga。即将出版。[Fre82] Michael Hartley Freedman。四维流形的拓扑。《微分几何杂志》，17:357–453，1982。[Giz81] M. H. Gizatullin。有理 G 曲面。《苏联科学院数学系列》，16:103–134，1981。[Gom05] Robert E. Gompf。局部全纯映射导出辛结构。《分析与几何通讯》，13:511–525，2005。[GS99] Robert E. Gompf 和 Andr´as I. Stipsicz。《四维流形与 Kirby 演算》。美国数学学会，1999。[LL02] Bang-He Li 和 Tian-Jun Li。辛属、最小亏格与微分同胚。《亚洲数学杂志》，6:123–144，2002。[Mor38] Mordell, L. J. 行列式为 1 的八个变量正定二次型。《纯粹与应用数学杂志》，17:41–46，1938。[OS00] Peter Oszv´ath 和 Zolt´an Szab´o。辛 Thom 猜想。《数学年刊》，151:93–124，2000。[Qui86] Frank Quinn。四维流形的同痕。《微分几何杂志》，24:343–372，1986。[Thu97] William P. Thurston。《三维几何与拓扑》，第 1 卷。普林斯顿大学出版社，1997。[Wal64] C.T.C. Wall。四维流形的微分同胚。《伦敦数学会杂志》，s1-39(1):131–140，1964。

Seraphina Eun Bi Lee 数学系
芝加哥大学
seraphinalee@uchicago.edu