arXiv:2303.02791v1 [math.AC] 5 Mar 2023

关于边理想符号幂平方自由部分的正则性

S. A. SEYED FAKHARI

Abstract. 设 G 是一个图，其边理想为 $I(G)$。对于每个整数 $s \geq 1$，我们用 $I(G)^{\{s\}}$表示 $I(G)$的 s次符号幂的平方自由部分。当 G 是弦图时，我们确定 $I(G)^{\{s\}}$ 正则性的一个上界。若 G 是一个 Cameron-Walker 图，我们用 G的诱导匹配数来计算 $\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}})$ 。此外，对于任意图 G，我们给出 $\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}})$ 和 $\operatorname{reg}(I(G)^{\{3\}})$ 的紧上界。

1. Introduction

设 $\mathbb{K}$ 是一个域， $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 是$\mathbb{K}$上的 n 元多项式环。假设 M 是一个分次 S-模，其极小自由分解为

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}(M)} \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

整数$\beta_{i,j}(M)$称为 M的第(i, j)个分次贝蒂数。 M的 Castelnuovo–Mumford 正则性（或简称正则性）记作 $\operatorname{reg}(M)$，定义为

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{j - i |\ \beta_{i,j}(M) \neq 0\},$$

它是交换代数和代数几何中的一个重要不变量。

在S 中的二次平方自由单项式理想与具有 n 个顶点的有限简单图之间存在自然对应。对于每个顶点集为$V（G）= \{x_1, \ldots, x_n\}$、边集为 $E（G）$的简单图 G ，我们定义其边理想 $I = I（G）$如下:

$$I(G) = \big(x_i x_j : x_i x_j \in E(G)\big) \subseteq S.$$

许多研究者已研究了边理想及其幂的正则性的计算和界的确定（例如，见 [1], [2], [4], [6], [11]-[13], [16], [21], [26], 和 [29]）。

设 I 是一个单项式理想。我们将 I的平方自由部分定义为由 I的平方自由单项式生成的单项式理想。在 [7], 中，Erey、Herzog、Hibi 和 Saeedi Madani 开创了对边理想的幂的平方自由部分的正则性的研究。 [8] 和 [25]延续了这项研究。本文将普通幂替换为符号幂，并研究边理想的符号幂平方自由部分的正则性

2020年数学主题分类。主要分类：13D02，05E40，05C70。关键词和短语：Castelnuovo–Mumford 正则性，边理想，诱导匹配数，匹配数，有序匹配数，符号幂。

。对于单项式理想 I 和正整数 s，令 $I^{\{s\}}$ 表示 I的第 s个符号幂的平方自由部分。Erey 等人 [7, 定理 2.1]证明，对于每个诱导匹配数为 ind-match(G) 的图 G ，以及任意正整数 $s \leq$ ，ind-match(G),

$$\operatorname{reg}(I(G)^{[s]}) \geq s + \operatorname{ind-match}(G),$$

其中， $I(G)^{[s]}$ 表示 $I(G)^s$的平方自由部分。在定理 3.3 中，我们将证明，将 $I(G)^{[s]}$ 替换为 $I(G)^{\{s\}}$后，同一不等式仍然成立。

在第 4 节中，我们研究弦图的边理想之符号幂的平方自由部分的正则性。对于任意平方自由单项式理想 I，不难看出， $I^{\{s\}} \neq 0$ 当且仅当 $s \leq \mathfrak{ht}(I)$，其中 $\mathfrak{ht}(I)$ 表示 I 的高度（见命题 2.2）。在定理 4.3 中，我们将证明，对于任意弦图 G 以及满足 $1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(G))$的每个整数 s ，有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \leq s + \operatorname{ord-match}(G)$$

其中，ord-match(G)表示 G 的有序匹配数（见定义 2.1）。此外，我们将在注 4.4 中看到，上述不等式是尖锐的。另一方面，根据 [23] ，我们知道 $I(G)^{(s)}$ 的正则性仅取决于 G的诱导匹配数。注 4.5 表明，对于 $I(G)^{\{s\}}$的正则性，不能期待同样的性质。

在第 5 节中，我们确定 Cameron-Walker 图的边理想的符号幂平方自由部分的正则性。作为该节的主要结果，我们将在定理 5.5 中证明，对于任意 Cameron-Walker 图 G 以及满足 $1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(G))$ 的每个整数 s,

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) = s + \operatorname{ind-match}(G).$$

根据 [25, 定理 4.3] ，我们知道，对于任意 Cameron-Walker 图 G 以及满足 $1 \leq s \leq$ match(G) 的每个整数 s，都有 reg($I(G)^{[s]}$) $= s +$ ind-match(G)。因此，对于这类图，每个满足 $1 \leq s \leq$ match(G) 的整数s 都使等式 reg($I(G)^{\{s\}}$) $=$ reg($I(G)^{[s]}$) 成立。自然会有人问，对于任意图 G，是否也成立。然而，正如我们将在注 5.6 中看到的，答案是否定的。

在第 6 节和第 7 节中，我们确定 $I(G)^{\{2\}}$ 和 $I(G)^{\{3\}}$ 的正则性的紧上界。更准确地说，我们将在定理 6.5 中证明，对于任意满足$I(G)^{\{2\}} \neq 0$ 的图 G ，有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}}) \leq \min\left\{\operatorname{reg}(I(G)) + 2, \operatorname{match}(G) + 2\right\},$$

其中，match(G) 表示 G 的匹配数。在 [7], Erey 等人猜想，对于任意图 G 以及满足 $I(G)^{[s]} \neq 0$ 的任意整数 s ，不等式 reg($I(G)^{[s]}$) $\leq$ match(G) $+ s$ 成立。我们认为，将 $I(G)^{[s]}$ 替换为 $I(G)^{\{s\}}$ 后，同样的结论也成立。因此，我们提出以下猜想。

猜想 1.1. 对于任意图 G 以及任意满足 $I(G)^{\{s\}} \neq 0$ 的整数 s ，都有 reg($I(G)^{\{s\}}$) $\leq$ match(G) $+ s$。

注意，猜想 1.1 对于
- $s = 1$ ([10, 定理 6.7]),
- $s = 2$ (定理 6.5),
- 弦图（定理 4.3），以及
- Cameron-Walker 图（定理 5.5）。

遗憾的是，我们无法验证 $s = 3$ 的猜想 1.1。不过，我们将在定理 7.6 中证明，对于任意具有 n 个顶点且满足 $I(G)^{\{3\}} \neq 0$ 的图 G，有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{3\}}) \leq \min\left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3, \operatorname{reg}(I(G)) + 4\right\}.$$

2. Preliminaries and basic results

本节将给出后续各节中要用到的定义和基本事实。

本文中的所有图都是简单图，即不含自环和重边。设 G 是一个图，其顶点集为 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，边集为 $E(G)$。我们将 G 的顶点（分别）与 S 的变量相对应，将其边（分别）与相应的二次单项式相对应。对于顶点 x_i，x_i 的邻集为 $N_G(x_i) = \{x_j \mid x_ix_j \in E(G)\}$。我们令 $N_G[x_i] = N_G(x_i) \cup \{x_i\}$。$x_i$ 的次数记为 $\deg_G(x_i)$，等于 $N_G(x_i)$ 的基数。次数为一的顶点称为叶节点。若边 $e \in E(G)$ 与一个叶节点相 incident，则称其为悬挂边。G 的悬挂三角形是 G 的一个三角形 T，其中恰有两个 T 的顶点在 G 中的次数为二。星三角图是由有限多个三角形构成、且这些三角形恰好共享一个顶点的图。若存在划分 $V(G) = A \cup B$，使得 G 的每条边均为 x_ix_j，其中 $x_i \in A$ 且 $x_j \in B$，则称图 G 为二分图。若进一步地，A 的每个顶点都与 B 的每个顶点相邻，则称 G 为完全二部图，并记作$K_{a,b}$，其中 $a = |A|$ 且 $b = |B|$。若子图 H 中的两个顶点相邻，当且仅当它们在 G 中相邻，则称 H 为 G 的诱导子图。若图 G 不含长度至少为四的诱导圈，则称其为弦图。若子集 W （属于 $V(G)$）中的任意两个不同顶点在 G 中相邻，则称 W 为 G 的团。若顶点 x 属于 G，且 $N_G(x)$ 是一个团，则称 x 为单纯顶点。众所周知，每个弦图都含有一个单纯顶点。补图 $\overline{G}$ 是一个图，其 $V(\overline{G})$ 为 $= V(G)$，且 $E(\overline{G})$ 为 $= \{x_ix_j \mid x_ix_j \notin E(G)\}$。对于每个子集 $U \subset V(G)$，图 $G \setminus U$ 的顶点集为 $V(G \setminus U) = V(G) \setminus U$，边集为 $E(G \setminus U) = \{e \in E(G) \mid e \cap U = \emptyset\}$。若 $U = \{x_i\}$ 是单元素集，则我们用 $G \setminus x_i$ 代替 $G \setminus \{x_i\}$。若子集 A 属于 $V(G)$，且 A 中的顶点之间不存在边，则称 A 为 G 的独立集。

设 G 为一个图。称 $V(G)$ 的子集 C 为 G 的顶点覆盖，如果 G 的每条边都至少与 C中的一个顶点关联。若 C 的任何真子集都不是 G的顶点覆盖，则称顶点覆盖 C 为极小顶点覆盖。G 的极小顶点覆盖集合记为 $\mathcal{C}(G)$。对于 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的每个子集 A，$\mathfrak{p}_A$ 表示由属于 A的变量生成的单项式素理想。它

众所周知，对于任意具有边理想 $I(G)$ 的图 G，

$$I(G) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}(G)} \mathfrak{p}_C.$$

特别地， $I(G)$的高度是 G的极小顶点覆盖的最小基数。

设 G 是一个图。若对于每一对边 e、$e' \in M$，都有 $e \cap e' = \emptyset$，则子集 $M \subseteq E(G)$称为一个匹配。 G 的最大匹配的基数称为 G 的匹配数，记作 match(G)。显然，对于每个正整数 s，理想 $I(G)^{[s]}$ 由形如 $e_1 \dots e_s$的单项式生成，其中 $\{e_1, \dots, e_s\}$ 是 G的一个匹配。若对于每一对边 e、$e' \in M$，不存在满足 $f \subset e \cup e'$的边 $f \in E(G) \setminus M$，则 G 的匹配 M 称为 G 的诱导匹配。 G 的最大诱导匹配的基数称为 G 的诱导匹配数，记作 ind-match(G)。

定义 2.1. 设 G 为一个图， $M = \{a_i b_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ 为 G的一个非空匹配。若满足以下条件，则称 M 为 G的一个有序匹配：

(1) $A := \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq V(G)$ 是 G的一组独立顶点；且 (2) $a_i b_j \in E(G)$ 蕴含 $i \leq j$。

G 的最大有序匹配的基数称为 G 的有序匹配数，记作 ord-match(G)。

若图 G 满足 match(G) =ind-match(G)，则称其为 Cameron-Walker 图。显然，一个图是 Cameron-Walker 图，当且仅当它的所有连通分支都是 Cameron-Walker 图。根据 [5, 定理 1]（另见 [15, 备注 0.1]），连通图 G是 Cameron-Walker 图，当且仅当

- 它是一个星图，或者
- 它是一个星三角图，或者
- 它由一个连通二分图 H 按顶点划分 $V(H) = X \cup Y$构成，并满足以下性质：X 的每个顶点都至少连接一条悬挂边，且 Y的每个顶点都可以连接若干个悬挂三角形。

对于单项式理想 I，其极小素理想集合记为 Min(I)。对于每个整数 $s \geq 1$， I的第 s 个符号幂记为 $I^{(s)}$，定义为

$$I^{(s)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)} \mathrm{Ker}(S \to (S/I^s)_{\mathfrak{p}}).$$

设 I 是 S 中的一个平方自由单项式理想，并假设 I 具有如下不可约主分解

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r,$$

其中，每个 $\mathfrak{p}_i$ 都是由 S的变量的一个子集生成的理想。由[12, 命题 1.4.4] 可知，对每个整数 $s \geq 1$,

$$I^{(s)} = \mathfrak{p}_1^s \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r^s.$$

对于任意整数 $s \leq 0$，我们令 $I^{(s)} = S$。正如我们在第 1 节中提到的，$I^{(s)}$ 的平方自由部分记作 $I^{\{s\}}$。

设 I 是一个单项式理想。I 的极小单项式生成元的唯一集合记为 $G(I)$。此外，Ass(S/I) 表示 S/I 的关联素理想集合。若 S/I 的关联素理想具有相同的高度，则称理想 I 是无混合的。

命题 2.2. 设 I 是一个平方自由单项式理想，$s \geq 1$ 是一个正整数。那么，当且仅当 $s \leq \mathfrak{ht}(I)$ 时，$I^{\{s\}} \neq 0$。此外，若 I 是无混合的，则 $I^{\{\mathfrak{ht}(I)\}}$ 是一个主理想。

证明。设 $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ 是一个单项式素理想。那么对于每个正整数 $s \leq k$，都有 $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathfrak{p}^s$。此外，显然对于每个整数 $s > k$，理想 $\mathfrak{p}^s$ 不是平方自由的。因此，对于任意单项式素理想 $\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}^s$ 的平方自由部分非零，当且仅当 $s \leq \mathfrak{ht}(\mathfrak{p})$。由于 $I^{\{s\}}$ 是有限多个素理想的幂的平方自由部分的交，因此可得，当且仅当 $s \leq \mathfrak{ht}(I)$ 时，$I^{\{s\}} \neq 0$。

为证明最后一个断言，令 k 表示 I 的高度。对于任意单项式素理想 $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in$Ass$(S/I)$，$\mathfrak{p}^k$ 的平方自由部分是由 $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ 生成的主理想。由于有限多个主单项式理想的交仍是主理想，我们得出 $I^{\{k\}}$ 是主理想。□

我们以如下命题结束本节。该命题是限制引理 [14, 引理 2.4] 的直接推论，且 Erey 等人 [7] 已经指出这一结果。

命题 2.3. 设 I 是一个单项式理想，并假设 J 是 I 的平方自由部分。若 J 是非零理想，则 reg$(J) \leq$ reg(I)。

3. A Lower bound

Erey 等人 [7, 定理 2.1] 证明，对于每个图 G 以及每个正整数 $s \leq$ ind-match(G)，$s +$ ind-match(G) 是 $I(G)^{[s]}$ 正则性的一个下界。在本节中，我们证明，将 $I(G)^{[s]}$ 替换为 $I(G)^{\{s\}}$ 时，这一结论仍然成立（见定理 3.3）。我们首先陈述以下引理，并以此开始证明；该引理是 [23, 引理 3.2] 的直接推论。

引理 3。 1. 设 G 是一个图，x 是 G 的一个顶点。那么对于每个整数 $s \geq 1$，

$$I(G)^{\{s\}} + (x) = I(G \setminus x)^{\{s\}} + (x).$$

以下命题是定理 3.3 证明中的关键步骤。

命题 3.2. 设 G 是一个图，并假设 H 是 G 的一个诱导子图。此外，设 s 是一个整数，使得 $1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(H))$。那么对于每对整数 i 和 j，有

$$\beta_{i,j}(I(H)^{\{s\}}) \leq \beta_{i,j}(I(G)^{\{s\}}).$$

特别地，正则性$(I(H)^{\{s\}}) \leq$正则性$(I(G)^{\{s\}})$。

证明。设 $W := V(G)\backslash V(H)$。由引理 3.1可知， $I(H)^{\{s\}}$ 由 $I(G)^{\{s\}}$ 中的单项式生成，且这些单项式不被 W中的任何变量整除。于是，由限制引理 [14, 引理 4.4]可得所述结论。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 3.3。设 G 是一个图。那么对于每个满足 $1 \leq s \leq$ ind-match(G) 的整数 s，我们有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \geq s + \operatorname{ind-match}(G).$$

证明。令 $t :=$ ind-match(G)。不失一般性，假设边集 $\{x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2t-1}x_{2t}\}$ 是 G 的一个诱导匹配。设 H 是 G 在顶点 x_1、x_2、.....、x_{2t} 上的诱导子图。根据 [7, 定理 2.1] 的证明，我们知道 reg($I(H)^{[s]}$) $\geq s+t$。另一方面， H 是一个二分图，因此由 [27, 定理 5.9] 可得 $I(H)^{\{s\}} = I(H)^{[s]}$。因此，reg($I(H)^{\{s\}}$) $\geq s + t$，结论由命题 3.2 得出。□

4. Chordal graphs

本节的目标是为当 G 是弦图时 $I(G)^{\{s\}}$ 的正则性提供一个精确的组合上界。更确切地说，我们将在定理 4.3 中证明：对于任意弦图 G，以及满足 $1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(G))$ 的每个整数 s， $I(G)^{\{s\}}$ 的正则性有上界 $s +$ord-match(G)。该结果的证明采用归纳法，下面两个引理在归纳步骤中发挥着重要作用。

引理 4.1. 设 G 是一个图，并假设 x_1 是 G 的一个单纯顶点，且对于某个整数 $d \geq 2$，有 $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots x_d\}$。那么对于每个整数 $s \geq 1$,

$$\left(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2 \ldots x_d\right) = I(G \setminus N_G[x_1])^{\{s-d+1\}}.$$

证明。设 u 是 $I(G\backslash N_G[x_1])^{\{s-d+1\}}$ 的一个极小单项式生成元。由引理 2] 可知 $ux_1x_2 \ldots x_d \in I(G)^{(s)}$。由于 u 是一个不能被 x_1、.....、x_d 整除的平方自由单项式，我们推得 $ux_1x_2 \ldots x_d$ 是一个平方自由单项式。因此， $ux_1x_2 \ldots x_d \in I(G)^{\{s\}}$，从而有

$$I(G \setminus N_G[x_1])^{\{s-d+1\}} \subseteq \left(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2 \ldots x_d\right).$$

为证明反向包含，设 v 是理想 $\left(I(G)^{\{s\}}\right.$ 的极小单项式生成元: $\left.x_1x_2 \ldots x_d\right)$。由于 $vx_1x_2 \ldots x_d \in I(G)^{(s)}$，由 [20, 引理 2]可得 $v \in I(G)^{\{s-d+1\}}$。由于 v 不被 x_1、.....、x_d 整除，根据引理 3.1,

$$v \in I(G \setminus \{x_1, \ldots, x_d\})^{\{s-d+1\}} = I(G \setminus N_G[x_1])^{\{s-d+1\}}.$$

□

下文中，对于 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的任意子集 B，我们将单项式 $\prod_{x_i \in B} x_i$ 记作 $\mathbf{x}_B$。

引理 4.2. 设 G 是一个图，并且假设 $W = \{x_1, \ldots, x_d\}$ 是 G 的顶点的非空子集。那么对于每个整数 $s \geq 1$,

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1)) \leq$$
$$\max\left\{\operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_B\big) + |B| - 1 \mid x_1 \in B, A \cap B = \emptyset, A \cup B = W\right\}.$$

证明。我们对 d 使用归纳法。对于 $d = 1$，无需证明。因此，假设 $d \geq 2$。令 $W' = \{x_1, \ldots, x_{d-1}\}$。根据归纳假设，我们知道

(1) $$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1)) \leq$$
$$\max\left\{\operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_B\big) + |B| - 1 \mid x_1 \in B, A \cap B = \emptyset, A \cup B = W'\right\}.$$

对于每一对子集 $A, B \subseteq V(G)$，满足 $x_1 \in B, A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = W'$，由 [6,引理 2.10] 可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_B\big) + |B| - 1\\
&\leq \max\left\{\operatorname{reg}\big((I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_B), x_d\big) + |B| - 1, \operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : x_d\mathrm{x}_B\big) + |B|\right\}\\
&= \max\left\{\operatorname{reg}\big((I(G \setminus A)^{\{s\}}, x_d) : \mathrm{x}_B\big) + |B| - 1, \operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : x_d\mathrm{x}_B\big) + |B|\right\}\\
&= \max\left\{\operatorname{reg}\big(I(G \setminus (A \cup \{x_d\}))^{\{s\}} : \mathrm{x}_B\big) + |B| - 1, \operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_{B \cup \{x_d\}}\big) + |B|\right\},
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由引理 3.1 得出。结合上述不等式和不等式 (1)，即可得到所需结论。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 4.3。设 G 是一个弦图。那么，对于每个满足 $1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(G))$ 的整数 s，我们有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \leq s + \text{ord-match}(G).$$

证明。设 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$。我们对 n 使用归纳法。若 $n = 2$，则 $I(G) = (x_1x_2)$。因此，$\mathfrak{ht}(I(G)) = 1$，从而 $s = 1$。在这种情况下，断言显然成立。因此，设 $n \geq 3$。

不失一般性，假设 x_1 是 G 的单纯顶点，并且 $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_d\}$，其中 $d \geq 2$ 为某个整数。由引理 2. [6, 可得

(2) $$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \leq \max\left\{\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1) + 1, \operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}, x_1)\right\}.$$

利用引理 3.1，我们有

$$\big(I(G)^{\{s\}}, x_1\big) = \big(I(G \setminus x_1)^{\{s\}}, x_1\big).$$

因此，

$$\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{s\}}, x_1\big) = \operatorname{reg}\big(I(G \setminus x_1)^{\{s\}}\big).$$

由于 $G \setminus x_1$ 是一个弦图，根据归纳假设和上述等式可得

$$\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{s\}}, x_1\big) \leq s + \text{ord-match}(G \setminus x_1) \leq s + \text{ord-match}(G). \tag{3}$$

因此，利用不等式 (2)，只需证明

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1) \leq s + \text{ord-match}(G) - 1.$$

将 $W = N_G[x_1]$ 代入引理 4.2，我们可推得

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1)) \leq \max\left\{\operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_B\big) + |B| - 1 \mid x_1 \in B, A \cap B = \emptyset, A \cup B = N_G[x_1]\right\}. \tag{4}$$

设 A 和 B 是 $V(G)$ 的子集，且满足 $x_1 \in B$、$A \cap B = \emptyset$ 和 $A \cup B = N_G[x_1]$。显然，$G \setminus A$ 是一个弦图，而 x_1 是该图的一个单纯顶点。此外，$N_{G\setminus A}[x_1] = B$。因此，由引理 4.1 可得

$$(I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_B) = I\big(G \setminus (A \cup B)\big)^{\{s-|B|+1\}} = I(G \setminus N_G[x_1])^{\{s-|B|+1\}}.$$

因此，利用归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}\big(I(G \setminus A)^{\{s\}} : \mathrm{x}_B\big) + |B| - 1 &\leq s - |B| + 1 + \text{ord-match}(G \setminus N_G[x_1]) + |B| - 1 \\ &\leq s + \text{ord-match}(G) - 1,\end{aligned} \tag{5}$$

其中第二个不等式由 [19, 引理 2.1] 得出。

结合不等式 (2)、(3)、(4) 和 (5)，即可得到所述结论。 □

注 4.4. 设 G 是一个弦图。定理 4.3 中得到的 $I(G)^{\{s\}}$ 正则性上界是尖锐的。事实上，显然，对于任意 Cameron-Walker 图 G，都有独立匹配数(G) = 有序匹配数(G)。因此，由下文的定理 5.5 可知，若 I 是 Cameron-Walker 图，则 reg($G^{\{s\}}$) = s +) G有序匹配数(G)。此外，存在一些弦图 G，使得独立匹配数(G) $\neq$ 有序匹配数(G)，并且s + 有序匹配数(G) 是 reg($I(G)^{\{s\}}$) 的尖锐上界。例如，设 $G = P_4$ 是一个具有 4 个顶点的路径图。那么 $\mathfrak{h}\mathfrak{t}(I(G))$ = 2 ，且有序匹配数(G) = 2。此外，可以验证 reg($I(G)^{\{2\}}$) = 4。因此，对于该图，定理 4.3 中得到的不等式在 $s = 2$ 时取等号。

注 4.5. 根据 [23] ，我们知道 $I(G)^{(s)}$ 的正则性仅取决于 G 的诱导匹配数。对于 $I(G)^{\{s\}}$ 的正则性，情况则并非如此。例如，设 $G_1 = P_4$ 是具有 4 个顶点的路径图，$G_2 = K_3$ 是三角图。这两个图的诱导匹配数都为 1。但是，reg($I(G_1)^{\{2\}}$) = 4 和 reg($I(G_2)^{\{2\}}$) = 3。

5. Cameron-Walker graphs

设 G 是一个 Cameron-Walker 图。在 [25, 定理 4.3] 中，我们证明了若 $I(G)^{[s]} \neq 0$，则 $I(G)^{[s]}$ 的正则性等于 $s+\text{ind-match}(G)$。本节中，我们证明将 $I(G)^{[s]}$ 替换为 $I(G)^{\{s\}}$ 后，该结论仍然成立（见定理 5.5）。根据定理 3.3，对于每个满足 $1 \leq s \leq \text{ind-match}(G)$ 的整数 s，$I(G)^{\{s\}}$ 的正则性以下界 $s+\text{ind-match}(G)$ 为界。为了在 $s > \text{ind-match}(G)$ 时证明 $\text{reg}(I(G)^{\{s\}})$ 具有相同的下界，我们计算 $I(G)^{\{s\}}$ 的极小单项式生成元的最大次数。推论 5.4 将给出这一结果。不过，要证明该推论，我们还需要一些引理。

引理 5.1. 设 G 是一个图。那么理想 $I(G)^{\{\text{ind-match}(G)\}}$ 有一个次数为 $2\,\text{ind-match}(G)$ 的极小单项式生成元。

证明。我们沿用定理 3.3 证明中的记号。由于 $I(H)^{\{t\}} = I(H)^{[t]}$，我们得出 $u := x_1x_2\dots x_{2t}$ 是 $I(H)^{\{t\}}$ 的一个极小生成元。因此，引理 3.1 表明，u 也是 $I(G)^{\{t\}}$ 的一个极小生成元。□

在下一个引理中，我们研究当 G 是一个星形三角图时，$I(G)^{\{s\}}$ 的极小单项式生成元的次数。

引理 5.2. 设 G 是一个含有 t 个三角形的星形三角图。那么理想 $I(G)^{\{t+1\}}$ 有一个次数为 $2t+1$ 的极小生成元。

证明。容易验证 $\mathfrak{ht}(I(G)) = t+1$。特别地，$I(G)^{\{t+1\}} \neq 0$。假设

$$V(G) = \{x, y_1, y_2, \dots, y_t, z_1, z_2, \dots, z_t\} \quad \text{and} \quad E(G) = \bigcup_{i=1}^{t} \{xy_i, xz_i, y_iz_i\}.$$

因此，$S = \mathbb{K}[x, y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_t]$。令 $u := xy_1 \dots y_tz_1 \dots z_t$。换言之，$u$是 S 中所有变量的乘积。由于 $I(G)^{[t+1]}$ 是非零平方自由单项式理想，它包含 u。我们证明 u 是 $I(G)^{[t+1]}$的一个极小生成元。由于 $C := \{x, y_1, y_2, \dots, y_t\}$ 是 G的一个极小顶点覆盖，我们得出理想 $\mathfrak{p}_C$是 $I(G)$的一个极小素理想。显然，$u/x \notin \mathfrak{p}_C^{t+1}$。此外，对于每个整数 $i = 1, 2, \dots, t$，都有 $u/y_i \notin \mathfrak{p}_C^{t+1}$。因此，$u/x, u/y_i \notin I(G)^{\{t+1\}}$。由对称性，$u/z_i \notin I(G)^{\{t+1\}}$。因此，$u$ 是 $I(G)^{\{t+1\}}$ 的一个极小生成元，这就证明了该引理。□

在下面的引理中，当 G 是一个连通的 Cameron-Walker 图时，我们研究 $I(G)^{\{s\}}$ 的极小单项式生成元的次数。

引理 5.3. 假设 G 是一个连通的 Cameron-Walker 图，且 $\text{ind-match}(G) < \mathfrak{ht}(I(G))$，并令 s 为满足 $\text{ind-match}(G)+1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(G))$ 的一个整数。那么，理想 $I(G)^{\{s\}}$ 具有一个次数为 $s+\text{ind-match}(G)$ 的极小单项式生成元。

证明。若 G 是二分图，则由柯尼希定理 [28, 定理 3.1.16] 可得

$$\text{ind-match}(G) = \text{match}(G) = \mathfrak{ht}(I(G)).$$

因此，这种情况下无需证明。于是，假设 G 不是二分图。设 G 是星形三角图，并记 G 中三角形的个数为 t。容易验证，ind-match$(G) = t$，且 $\mathfrak{ht}(I(G)) = t+1$。因此，$s = t+1$，结论由引理 5.2 得出。于是，假设 G 由一个连通二分图 H 构成，其顶点划分为 $V(H) = X \cup Y$；每个 X 顶点至少连接一条悬挂边，并且每个 Y 顶点还可能连接若干悬挂三角形。

如上，令 t 表示 G的三角形数。由于 G 不是二分图，我们有 $t \geq 1$。假设 $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ 且 $Y = \{y_1, \ldots, y_q\}$。此外，假设对每个整数 $i = 1, 2, \ldots, p$，边 $x_i w_{i1}, \ldots, x_i w_{im_i}$ 是连接到 x_i的悬挂边；对每个整数 $j = 1, 2, \ldots, q$，顶点为 $\{y_j, z_{j1}, z'_{j1}\}, \ldots, \{y_j, z_{jr_j}, z'_{jr_j}\}$ 的三角形是连接到 y_j的悬挂三角形。特别地，$r_1 + r_2 + \cdots + r_q = t$。由 [22, 引理 3.3] 可知，ind-match$(G) = p + t$。令 k 表示满足 $r_j \neq 0$且 $1 \leq j \leq q$ 的整数 j 的个数。我们断言$\mathfrak{ht}(I(G)) = p + k + t$。

注意到集合

$$\{x_1, \ldots, x_p\} \cup \{y_j, z_{j1}, \ldots, z_{jr_j} \mid 1 \leq j \leq q \text{ and } r_j \neq 0\}$$

是 G 的顶点覆盖，其基数为 $p + k + t$。特别地，$\mathfrak{ht}(I(G)) \leq p + k + t$。反向不等式可由以下观察得到。

(I) 设 C 是 G 的顶点覆盖。那么，对于满足 $1 \leq i \leq p$ 和 $1 \leq \ell \leq m_i$ 的每对整数 i 和 ℓ，有 $C \cap \{x_i, w_\ell\} \neq \emptyset$。由于 m_1、.....、m_p 都是非零整数，我们推得

$$|C \cap \{x_1, \ldots, x_p, w_{11}, \ldots, w_{1m_1}, w_{21}, \ldots w_{2m_2}, \ldots, w_{p1}, \ldots, w_{pm_p}\}| \geq p.$$

(II) 设 C 是 G 的顶点覆盖。那么，对于满足 $1 \leq j \leq q$ 和 $1 \leq \ell \leq r_j$ 的每对整数 j 和 ℓ，有 $|C \cap \{y_j, z_{j\ell}, z'_{j\ell}\}| \geq 2$。因此，

$$|C \cap \{y_1, \ldots, y_q, z_{11}, \ldots, z_{1r_1}, \ldots, z_{q1}, \ldots, z_{qr_q}, z'_{11}, \ldots, z'_{1r_1}, \ldots, z'_{q1}, \ldots, z'_{qr_q}\}| \geq k + t.$$

上述观察表明，$\mathfrak{ht}(I(G)) \geq p + k + t$，结论得证。

由于 ind-match$(G) + 1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(G))$，我们可将 $s = p + t + m$ 写为某个满足 $1 \leq m \leq k$ 的整数 m。不失一般性，假设 r_1、.....、$r_k \geq 1$ 且 $r_{k+1} = \cdots = r_q = 0$。换言之，至少有一个悬挂三角形连接到顶点 y_1、.....、y_k 中的每一个顶点上，并且没有悬挂三角形连接到 y_{k+1}、.....、y_q。令

$$u := \prod_{i=1}^{p} x_i \prod_{i=1}^{p} w_{i1} \prod_{j=1}^{m} y_j \prod_{j=1}^{k} \prod_{\ell=1}^{r_j} (z_{j\ell} z'_{j\ell}).$$

特别地，u 是次数为 $2p + m + 2t = s +$ ind-match(G) 的平方自由单项式。我们证明，u 是 $I(G)^{\{s\}}$ 的一个极小生成元。根据上述观察 **(I)** 和 **(II)**，对于 G 的每个顶点覆盖 C，都有 $u \in \mathfrak{p}_C^{p+t+m} = \mathfrak{p}_C^s$。因此，$u \in I(G)^{\{s\}}$。令

$$C_1 := \{x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_k, z_{11}, \ldots, z_{1r_1}, z_{21}, \ldots, z_{2r_2}, \ldots, z_{k1}, \ldots, z_{kr_k}\}.$$

那么， C_1 是 G的一个顶点覆盖。容易验证，这些单项式

$$u/x_1, \ldots, u/x_p, u/y_1, \ldots, u/y_m, u/z_{11}, \ldots, u/z_{1r_1}, \ldots, u/z_{k1}, \ldots, u/z_{kr_k}$$

不属于 $\mathfrak{p}_{C_1}^s$。特别地，上述单项式不属于 $I(G)^{\{s\}}$。令

$$C_2 := \{w_{11}, \ldots, w_{1m_1}, \ldots, w_{p1}, \ldots, w_{pm_p}, y_1, \ldots, y_q, z'_{11}, \ldots, z'_{1r_1}, \ldots, z'_{k1}, \ldots, z'_{kr_k}\}.$$

C_2 是 G的顶点覆盖。容易验证，这些单项式

$$u/w_{11}, \ldots, u/w_{p1}, u/z'_{11}, \ldots, u/z'_{1r_1}, \ldots, u/z'_{k1}, \ldots, u/z'_{kr_k}$$

不属于 $\mathfrak{p}_{C_2}^s$。因此，这些单项式不属于 $I(G)^{\{s\}}$。由此，u 是 $I(G)^{\{s\}}$ 的极小生成元。□

在下面的推论中，我们将引理 5.3 的断言推广到非连通 Cameron-Walker 图。

推论 5.4. 假设 G 是一个（不一定连通的）Cameron-Walker 图，并设 s 为一个整数，满足 ind-match(G) $\leq s \leq$ ht($I(G)$)。那么理想 $I(G)^{\{s\}}$有一个次数为 $s +$ ind-match(G)的极小生成元。特别地，

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \geq s + \text{ind-match}(G).$$

证明. 设 $G_1, \ldots, G_c$ 表示 G的连通分支。注意到

$$\text{ind-match}(G) = \sum_{i=1}^{c} \text{ind-match}(G_i) \quad \text{and} \quad \operatorname{ht}(I(G)) = \sum_{i=1}^{c} \operatorname{ht}(I(G)).$$

由于 ind-match(G) $\leq s \leq$ ht($I(G)$)，我们可以写成 $s = s_1 + \cdots + s_c$，使得对于每个满足 $1 \leq i \leq c$的整数 i，都有 ind-match(G_i) $\leq s_i \leq$ ht($I(G_i)$)。利用引理 5.1 和 5.3，每个理想 $I(G_i)^{\{s_i\}}$ 都有一个次数为 $s_i +$ind-match(G_i)的极小单项式生成元。于是， $u := u_1u_2 \cdots u_c$是理想 $I(G)^{\{s\}}$ 的一个极小生成元，且 deg(u) $=s +$ ind-match(G)。第二个断言由第一个断言立即推出。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 5.5. 设 G 是一个 Cameron-Walker 图。那么对于每个满足$1 \leq s \leq$ ht($I(G)$)的整数 s，我们有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) = s + \text{ind-match}(G).$$

证明. 根据定理 3.3 和推论 5.4，对于每个满足 $1 \leq s \leq$ ht($I(G)$)的整数 s，我们有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \geq s + \text{ind-match}(G).$$

因此，只需证明

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \leq s + \text{ind-match}(G).$$

不失一般性，假设 G没有孤立顶点，并且设$V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$。我们对 n使用归纳法。若 $n = 2$，则 $I(G) = (x_1x_2)$。因此，ht($I(G)$) $= 1$，所以 $s = 1$。在这种情况下，结论显然成立。因此，假设

$n \geq 3$。若 G 是二分图，则由 [27, 定理 5.9], 可得 $I(G)^{\{s\}} = I(G)^{[s]}$，结论由 [25, 定理 4.3] 推出（注意，由 K¨onig 定理 [28,定理 3.1.16], 可得 ind-match(G) = match(G) = ht$(I(G))$）。因此，假设 G不是二分图。由 Cameron-Walker 图的结构可知， G 有一个悬挂三角形，记作 T。不失一般性，假设$V(T) = \{x_1, x_2, x_3\}$，且 deg$_G(x_2)$ = deg$_G(x_3)$ = 2。考虑下面的短正合列。

$$0 \longrightarrow \frac{S}{(I(G)^{\{s\}} : x_1)}(-1) \longrightarrow \frac{S}{I(G)^{\{s\}}} \longrightarrow \frac{S}{I(G)^{\{s\}} + (x_1)} \longrightarrow 0$$

由此可得

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}) \leq \max\big\{\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1) + 1, \operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}, x_1)\big\}. \tag{6}$$

由于 $G \setminus x_1$ 是一个（非连通的）Cameron-Walker 图，且

$$\text{ind-match}(G \setminus x_1) \leq \text{ind-match}(G),$$

由引理 3.1 和归纳假设可得

$$\begin{aligned} &\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}, x_1) = \operatorname{reg}(I(G \setminus x_1)^{\{s\}}, x_1) = \operatorname{reg}(I(G \setminus x_1)^{\{s\}}) \\ &\leq s + \text{ind-match}(G \setminus x_1) \leq s + \text{ind-match}(G). \end{aligned} \tag{7}$$

因此，利用不等式 (6)，我们需要证明

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1) \leq s + \text{ind-match}(G) - 1.$$

考虑以下短正合列。

$$0 \longrightarrow \frac{S}{(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2)}(-1) \longrightarrow \frac{S}{(I(G)^{\{s\}} : x_1)} \longrightarrow \frac{S}{(I(G)^{\{s\}} : x_1) + (x_2)} \longrightarrow 0$$

由此可得

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1) \leq \max\big\{\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2) + 1, \operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2\big)\big\}. \tag{8}$$

断言 1. 正则性$(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2)$ $\leq s +$ 独立匹配数$(G) - 2$.

断言 1 的证明. 考虑下面的短正合列。

$$0 \longrightarrow \frac{S}{(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2x_3)}(-1) \longrightarrow \frac{S}{(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2)} \longrightarrow \frac{S}{(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2) + (x_3)} \longrightarrow 0$$

由此可得

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2) \leq \max\big\{\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2x_3) + 1, \operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}} : x_1x_2), x_3\big) \tag{9}$$

正则性$(I(G)^{\{s\}} :$

由 [22, 引理 3.3] 可得，独立匹配数$(G \setminus N_G[x_2])$ = 独立匹配数$(G) - 1$。此外， x_2 是 G 的一个单纯顶点，且满足 $N_G[x_2] = \{x_1, x_2, x_3\}$。因此，由引理 4.1 和归纳假设可得

$$\begin{aligned} &\text{正则性}(I(G)^{\{s\}} : x_1x_2x_3) = \text{正则性}(I(G \setminus N_G[x_2])^{\{s-2\}}) \leq (s-2) + \text{独立匹配数}(\\ &G \setminus N_G[x_2]) = s + \text{独立匹配数}(G) - 3. \end{aligned} \tag{10}$$

另一方面,

$$\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}} : x_1x_2), x_3\big) = \operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}}, x_3) : x_1x_2\big) = \operatorname{reg}\big(I(G \setminus x_3)^{\{s\}} : x_1x_2\big),$$

其中，第二个等式是引理 3.1 的推论。由于 x_2 是 $G \setminus x_3$ 的叶节点，由引理 4.1 可得

$$\big(I(G \setminus x_3)^{\{s\}} : x_1x_2\big) = I(G \setminus \{x_1, x_2, x_3\})^{\{s-1\}}.$$

因此,

$$\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}} : x_1x_2), x_3\big) = \operatorname{reg}\big(I(G \setminus \{x_1, x_2, x_3\})^{\{s-1\}}\big).$$

注意， $G \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ 是一个 Cameron-Walker 图。此外，由 [22, 引理 3.3] 可知, ind-match($G \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$) = ind-match($G$) $- 1$。因此，由上述等式和归纳假设可推出

$$\begin{aligned} &\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}} : x_1x_2), x_3\big) \le (s-1) + \text{ind-match}(G \setminus \{x_1, x_2, x_3\}) \\ &= s + \text{ind-match}(G) - 2. \end{aligned} \tag{11}$$

最后，断言 1 由不等式 (9)、(10) 和 (11) 得出。

断言 2. reg$\big((I(G)^{\{s\}} : x_1)x_2\big) \le s +$ ind-match(G) $- 1$。

断言 2 的证明。考虑以下短正合列。

$$0 \longrightarrow \frac{S}{\big(\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2\big) : x_3\big)}(-1) \longrightarrow \frac{S}{\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2\big)} \longrightarrow \frac{S}{\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2, x_3\big)} \longrightarrow 0$$

由此可得

$$\begin{aligned} &\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2\big) \le \\ &\max\big\{\operatorname{reg}\big(\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2\big) : x_3\big) + 1, \operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2, x_3\big)\big\}. \end{aligned} \tag{12}$$

注意到

$$\operatorname{reg}\big(\big((I(G)^{\{s\}} : x_1), x_2\big) : x_3\big) = \operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}}, x_2) : x_1x_3\big) = \operatorname{reg}\big((I(G \setminus x_2)^{\{s\}}, x_2) : x_1x_3\big)$$
$$= \operatorname{reg}\big(\big(I(G \setminus x_2)^{\{s\}} : x_1x_3\big), x_2\big) = \operatorname{reg}\big(I(G \setminus x_2)^{\{s\}} : x_1x_3\big),$$

其中第二个等式由引理 3.1 得出。由于 x_1x_3 是 $G \setminus x_2$ 的一条悬挂边，由引理 4.1 可得

$$\big(I(G \setminus x_2)^{\{s\}} : x_1x_3\big) = I(G \setminus \{x_1, x_2, x_3\})^{\{s-1\}}.$$

因此,

$$\begin{aligned} &\operatorname{reg}\big(\big((I\{G\}^{\{s\}} : x_1), x_2\big) : x_3\big) = \operatorname{reg}\big(I(G \setminus \{x_1, x_2, x_3\})^{\{s-1\}}\big) \\ &\le s + \text{ind-match}(G) - 2, \end{aligned} \tag{13}$$

其中，该不等式可由断言 1 的证明中的论证得知。另一方面，

$$\begin{aligned}&\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}}:x_1),x_2,x_3\big)=\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}},x_2,x_3):x_1\big)\\&=\operatorname{reg}\big((I(G\setminus\{x_2,x_3\})^{\{s\}},x_2,x_3):x_1\big)\\&=\operatorname{reg}\big(\big(I(G\setminus\{x_2,x_3\})^{\{s\}}:x_1\big),x_2,x_3\big)\\&=\operatorname{reg}\big(I(G\setminus\{x_2,x_3\})^{\{s\}}:x_1\big),\end{aligned}$$

其中第二个等式由引理 3.1 得出。

由 [18, 引理 4.2]可知

$$\operatorname{reg}\big(I(G\setminus\{x_2,x_3\})^{\{s\}}:x_1\big)\leq\operatorname{reg}\big(I(G\setminus\{x_2,x_3\})^{\{s\}}\big).$$

因此，

$$\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}}:x_1),x_2,x_3\big)\leq\operatorname{reg}\big(I(G\setminus\{x_2,x_3\})^{\{s\}}\big).$$

注意到 $G\setminus\{x_2,x_3\}$ 是一个 Cameron-Walker 图。此外，由 [22,引理 3.3] 可得，ind-match($G\setminus\{x_2,x_3\}$) = ind-match(G) -1。因此，根据归纳假设和上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}}:x_1),x_2,x_3\big)\leq s+\text{ind-match}(G\setminus\{x_2,x_3\})\\&=s+\text{ind-match}(G)-1.\end{aligned}\tag{14}$$

由不等式 (12)、(13) 和 (14) 立即可得

$$\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s\}}:x_1),x_2\big)\leq s+\text{ind-match}(G)-1,$$

由此证明了断言 2。

由断言 1、2 和不等式 (8)，我们可推出

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}}:x_1)\leq s+\text{ind-match}(G)-1.$$

上述不等式与不等式 (6) 和 (7) 一起表明

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s\}})\leq s+\text{ind-match}(G)$$

由此完成了该定理的证明。 □

注 5.6. 根据 [25, 定理 4.3], ，对于任意 Cameron-Walker 图 G 以及每个满足 $1\leq s\leq$ 匹配数(G)的整数 s，都有正则性($I(G)^{[s]}$) $=s+$ 独立匹配数(G)。因此，由定理 5.5 可知，对于这类图，等式正则性($I(G)^{\{s\}}$) =正则性($I(G)^{[s]}$)成立，其中每个整数 s均满足 $1\leq s\leq$ 匹配数(G)。自然会问，对于任意图 G，是否也有同样的结论。然而，答案是否定的。例如，设 G 为一个边理想为 $I(G)=(x_1x_2,x_1x_3,x_1x_4,x_2x_3)$ 的图。那么容易验证，$I(G)^{[2]}=x_1x_2x_3x_4(I)$，且 $G(^{\{2\}}=)x_1x_2x_3(I)$。因此，正则性($G(^{[2]})=4$)I，而正则性($G(^{\{2\}})=3$)。

6. Second power

本节研究边理想的第二符号幂的平方自由部分的正则性。由 [3, 定理 1.1] 和 [24, 推论 3.9] 可知，对于任意图 G,

$$\operatorname{reg}(I(G)^2) \leq \operatorname{reg}(I(G)) + 2 \quad \text{and} \quad \operatorname{reg}(I(G)^{(2)}) \leq \operatorname{reg}(I(G)) + 2.$$

因此，我们从命题 2.3 得出以下推论。

推论 6.1. 设 G 是一个图。

(i) 若 match(G) ≥ 2，则 reg($I(G)^{[2]}$) $\leq$ reg($I(G)$) $+ 2$。

(ii) 若 $\mathfrak{ht}(I(G)) \geq 2$，则 reg($I(G)^{\{2\}}$) $\leq$ reg($I(G)$) $+ 2$。

在定理 6.5 中，我们将证明 $I(G)^{\{2\}}$ 的正则性不超过 match(G)$+2$。该定理的证明基于引理 6.3 中针对 $s = 1$ 给出的不等式。引理 6.3 也将在第 7 节中用于界定 $I(G)^{\{3\}}$ 的正则性。基于这一原因，我们针对一般的 s （而不仅仅是针对 $s = 1$）陈述并证明该引理。为证明引理 6.3，我们使用以下命题，其证明实质上与 [25, 命题 3.1] 的证明相同。不过，为求完整起见，我们仍给出证明。

命题 6.2. 假设 G 是一个图，并令 s:= 匹配数(G)。那么， $G(I(G)^{[s]})$ 中的单项式可以标记为 $u_1, \ldots, u_m$，使得对于每一对整数$1 \leq j < i \leq m$，都存在一个整数 $r \leq i - 1$，使得 $(u_r : u_i)$ 由一个变量生成，并且 $(u_j : u_i) \subseteq (u_r : u_i)$。

证明. 根据 [1, 定理 4.12],， $G(I(G)^s)$ 中的元素可以标记为 $v_1, \ldots, v_t$，使得对于每一对整数 $1 \leq j < i \leq t$，以下条件之一成立。

(1) $(v_j : v_i) \subseteq (I(G)^{s+1} : v_i)$；或者 (2) 存在一个整数 $k \leq i - 1$，使得 $(v_k : v_i)$ 由一个变量生成，并且 $(v_j : v_i) \subseteq (v_k : v_i)$。

由于 $G(I(G)^{[s]}) \subseteq G(I(G)^s)$，存在整数 ℓ_1，...，ℓ_m，使得 $G(I(G)^{[s]}) = \{v_{\ell_1}, \ldots, v_{\ell_m}\}$。对于满足 $1 \leq k \leq m$的每个整数 k，令 $u_k := v_{\ell_k}$。我们声称，该标记满足所需性质。为证明这一点，固定满足 $1 \leq j < i \leq m$的整数 i 和j 。根据上面的性质 (1) 和 (2)，我们将证明的其余部分分为两种情形。

情形 1。假设 $(v_{\ell_j} : v_{\ell_i}) \subseteq (I(G)^{s+1} : v_{\ell_i})$。回忆一下， v_{ℓ_i} 和 v_{ℓ_j} 是平方自由单项式。因此，对于某个满足 gcd(u, v_{ℓ_i}) $= 1$的平方自由单项式 u，有 $(v_{\ell_j} : v_{\ell_i}) = (u)$。这说明 uv_{ℓ_i} 是 $I(G)^{s+1}$ 中的一个平方自由单项式，这与定义 s矛盾，因为根据定义 $I(G)^{[s+1]} = 0$ 。

情形 2. 假设存在一个整数 $k \leq \ell_i - 1$，使得 $(v_k : v_{\ell_i})$ 由一个变量生成，且 $(v_{\ell_j} : v_{\ell_i}) \subseteq (v_k : v_{\ell_i})$。因此，对于某个满足 $1 \leq p \leq n$ 的整数 p，有 $(v_k : v_{\ell_i}) = (x_p)$。由包含关系 $(v_{\ell_j} : v_{\ell_i}) \subseteq (v_k : v_{\ell_i})$ 可知 x_p

整除 $v_{\ell_j}/\gcd(v_{\ell_j}, v_{\ell_i})$。由于 v_{ℓ_j} 是一个平方自由单项式，我们推断 x_p 不整除 v_{ℓ_i}。由于 $\deg(v_k) = \deg(v_{\ell_i})$，由 $(v_k : v_{\ell_i}) = (x_p)$ 可知，存在一个变量 x_q 整除 v_{ℓ_i}，使得 $v_k = x_p v_{\ell_i}/x_q$。这意味着 v_k 是一个平方自由单项式。因此，对于某个满足 $1 \leq r \leq m$ 的整数 r，有 $v_k = v_{\ell_r} = u_r$。利用 $k \leq \ell_i - 1$，得到 $\ell_r \leq \ell_i - 1$。因此，$r \leq i - 1$ 并

$$(u_j : u_i) \subseteq (u_r : u_i) = (x_p).$$

证明到此完成。 □

在下面的引理中，我们给出一种方法，用以界定边理想符号幂的平方自由部分的正则性。

引理 6.3。设 G 是一个图，且 s 是满足 $1 \leq s \leq$ 匹配数(G) 的整数。令 $G(I(G)^{[s]}) = \{u_1, \ldots, u_m\}$ 表示 $I(G)^{[s]}$ 的极小单项式生成元集合。则

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{s+1\}}) \leq \max\left\{\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{s+1\}} : u_i\big) + 2s, 1 \leq i \leq m, \operatorname{reg}\big(I(G)^{\{s+1\}} + I(G)^{[s]}\big)\right\}.$$

证明。由命题 6.2 和 [25, 命题 3.1]，，我们可以假设对每一对整数 $1 \leq j < i \leq m$，以下条件之一成立。

(i) $(u_j : u_i) \subseteq (I(G)^{[s+1]} : u_i) \subseteq (I(G)^{\{s+1\}} : u_i)$；或 (ii) 存在一个整数 $k \leq i - 1$，使得 $(u_k : u_i)$ 由一个变量生成，且 $(u_j : u_i) \subseteq (u_k : u_i)$。

由上述（i）和（ii）可得

$$\big((I(G)^{\{s+1\})} + (u_1, \ldots, u_{i-1})) : u_i\big) = (I(G)^{\{s+1\}} : u_i) + (\text{some variables}).$$

因此，由 [1, 引理 2.10] 可得

$$\operatorname{reg}\big((I(G)^{\{s+1\}}, u_1, \ldots, u_{i-1}) : u_i\big) \leq \operatorname{reg}(I(G)^{\{s+1\}} : u_i). \tag{15}$$

对于每个整数 i 且满足 $0 \leq i \leq m$，令 $I_i := (I(G)^{\{s+1\}}, u_1, \ldots, u_i)$。特别地，$I_0 = I(G)^{\{s+1\}}$ 且 $I_m = I(G)^{\{s+1\}} + I(G)^{[s]}$。考虑短正合列

$$0 \to S/(I_{i-1} : u_i)(-2s) \to S/I_{i-1} \to S/I_i \to 0,$$

对每个 $1 \leq i \leq m$均成立。因此可得

$$\operatorname{reg}(I_{i-1}) \leq \max\big\{\operatorname{reg}(I_{i-1} : u_i) + 2s, \operatorname{reg}(I_i)\big\}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(I(G)^{\{s+1\}}) = \operatorname{reg}(I_0) &\leq \max\big\{\operatorname{reg}(I_{i-1} : u_i) + 2s, 1 \leq i \leq m, \operatorname{reg}(I_m)\big\} \\ &= \max\big\{\operatorname{reg}(I_{i-1} : u_i) + 2s, 1 \leq i \leq m, \operatorname{reg}(I(G)^{\{s+1\}} + I(G)^{[s]})\big\}.\end{aligned}$$

结论现由不等式（15）得出。 □

根据引理 6.3，为界定 $I(G)^{\{2\}}$ 的正则性，需要研究形如 $(I(G)^{\{2\}} : u)$ 的理想，其中 u 是 $I(G)$ 的一个极小单项式生成元。下面引理中给出的恒等式将有助于这项研究。

引理 6.4. 设 G 是一个图，并设 x_ix_j 是 G 的一条边。那么，对于满足 $1 \leq s \leq \mathfrak{ht}(I(G)) - 1$ 的任意整数 s，有

$$\big(I(G)^{\{s+1\}} : x_ix_j\big) = \big(I(G - x_j)^{\{s\}} : x_i\big) \cap \big(I(G - x_i)^{\{s\}} : x_j\big).$$

证明。令 u 为 $\big(I(G)^{\{s+1\}} : x_ix_j\big)$ 的一个极小单项式生成元。则 ux_ix_j 是 $I(G)^{(s+1)}$ 中的一个平方自由单项式。因此，u 不能被 x_i 和 x_j 整除。由 $ux_ix_j \in I(G)^{(s+1)}$，我们得出 $ux_i \in I(G)^{(s)}$。由于 ux_i 是平方自由单项式且不整除 x_j，由引理 3.1 可得 $ux_i \in I(G - x_j)^{\{s\}}$。因此，$u \in \big(I(G - x_j)^{\{s\}} : x_i\big)$。类似地，$u$属于 $\big(I(G - x_i)^{\{s\}} : x_j\big)$。于是，

$$\big(I(G)^{\{s+1\}} : x_ix_j\big) \subseteq \big(I(G - x_j)^{\{s\}} : x_i\big) \cap \big(I(G - x_i)^{\{s\}} : x_j\big).$$

为证明反向包含，令 v 为

$$\big(I(G - x_j)^{\{s\}} : x_i\big) \cap \big(I(G - x_i)^{\{s\}} : x_j\big).$$

特别地，v 不能被 x_i 和 x_j整除。因此，vx_ix_j 是一个平方自由单项式。于是，我们必须证明 $vx_ix_j \in I(G)^{(s+1)}$。只需证明，对于 G的任意极小顶点覆盖 C，都有$vx_ix_j \in \mathfrak{p}_C^{s+1}$。设 C 是 G的一个极小顶点覆盖。由 $x_ix_j \in E(G)$可知，C 至少包含顶点 x_i 和x_j中的一个。不妨设 $x_i \in C$。由于 $v \in \big(I(G - x_i)^{\{s\}} : x_j\big)$，我们有

$$vx_j \in I(G - x_i)^{(s)} \subseteq I(G)^{(s)} \subseteq \mathfrak{p}_C^s.$$

这与 $x_i \in \mathfrak{p}_C$ 结合起来可推出$vx_ix_j \in \mathfrak{p}_C^{s+1}$。 □

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 6.5. 对任意图 G，若 $\mathfrak{ht}(I(G)) \geq 2$，则有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}}) \leq \min\big\{\operatorname{reg}(I(G)) + 2, \operatorname{match}(G) + 2\big\}.$$

特别地，猜想 1.1 对 $s = 2$成立。

证明。由推论 6.1 可知，$\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}}) \leq \operatorname{reg}(I(G)) + 2$。因此，我们需要证明

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}}) \leq \operatorname{match}(G) + 2.$$

设 $G(I(G)) = \{u_1, \ldots, u_m\}$ 表示$I(G)$的极小单项式生成元集合。注意，$I(G)^{\{2\}} + I(G) = I(G)$。因此，

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}} + I(G)) = \operatorname{reg}(I(G)) \leq \operatorname{match}(G) + 1,$$

其中不等式由 [10, 定理 6.7]得出。因此，利用引理 6.3，只需证明对于每个满足 $1 \leq i \leq m$ 的整数 i，

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}} : u_i) \leq \operatorname{match}(G).$$

我们在下面的引理中证明上述不等式。 □

引理 6.6. 设 G 是一个图，满足 $\mathfrak{ht}(I(G)) \geq 2$，并设 x_ix_j 是 G 的一条边。则

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j) \leq \operatorname{match}(G).$$

证明. 我们将证明分为三种情况。

情形 1. 假设 x_ix_j 是 G的一条悬挂边。由引理 4.1可得 $(I(G)^{\{2\}}: x_ix_j) = I(G\setminus\{x_i,x_j\})$。注意，$\mathrm{match}(G\setminus\{x_i,x_j\}) \leq \mathrm{match}(G)-1$。因此，利用 [10, 定理 6.7]，我们有

$$\text{正则性}(I G)^{\{2\}} : x_ix_j) = \mathrm{reg}(I(G\setminus\{x_i,x_j\})) \leq \mathrm{match}(G\setminus\{x_i,x_j\})+1 \leq \mathrm{match}(G).$$
(

情形 2. 假设 x_i 和 x_j 是G的一个悬挂三角形中的度为二的顶点。换言之，$\deg_G(x_i) = \deg_G(x_j) = 2$，且存在一个顶点 $x_k \in V(G)$，使得 $x_ix_k, x_jx_k \in E(G)$。那么显然，我们有 $x_k \in (I(G)^{\{2\}}: x_ix_j)$。因此，

$$\begin{aligned}(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j) &= (I(G)^{\{2\}} : x_ix_j) + (x_k) = \big((I(G)^{\{2\}}, x_k) : x_ix_j\big)\\ &= \big((I(G-x_k)^{\{2\}}, x_k) : x_ix_j\big) = (I(G-x_k)^{\{2\}} : x_ix_j) + (x_k),\end{aligned}$$

其中，第三个等式由引理 3.1得出。因此，

$$\mathrm{reg}\big(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j\big) = \mathrm{reg}\big(I(G-x_k)^{\{2\}} : x_ix_j\big).$$

由于顶点 x_i, x_j, x_k 构成 G 的一个悬挂三角形，我们推得边 x_ix_j 是 $G-x_k$ 的一个连通分支。因此，利用引理 4.1 和上述等式，我们得到

$$\mathrm{reg}\big(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j\big) = \mathrm{reg}\big(I(G\setminus\{x_i,x_j,x_k\})\big).$$

由于匹配数$(G\setminus\{x_i,x_j,x_k\}) \leq$匹配数$(G)-1$，由 [10, 定理 6.7] 可得

$$\mathrm{reg}\big(I(G\setminus\{x_i,x_j,x_k\})\big) \leq \mathrm{match}(G\setminus\{x_i,x_j,x_k\})+1 \leq \mathrm{match}(G).$$

因此，本情形下的断言得证。

情形 3. 假设 x_i 和 x_j 的次数都至少为二，并且，$|N_G(x_i)\cup N_G(x_j)| \geq 4$。由引理 6.4 可知

$$\big(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j\big) = \big(I(G-x_j) : x_i\big) \cap \big(I(G-x_i) : x_j\big).$$

Set

$$I_1 := (I(G-x_j) : x_i) \quad \text{and} \quad I_2 := (I(G-x_i) : x_j).$$

因此，$\big(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j\big) = I_1 \cap I_2$。因此，我们得到以下短正合列。

$$0 \to \frac{S}{(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j)} \to \frac{S}{I_1} \oplus \frac{S}{I_2} \to \frac{S}{I_1+I_2} \to 0.$$

对上述正合列应用 [17, 推论 18.7] 可得

$$\mathrm{reg}\big(I(G)^{\{2\}} : x_ix_j\big) \leq \max\{\mathrm{reg}(I_1), \mathrm{reg}(I_2), \mathrm{reg}(I_1+I_2)+1\}. \tag{16}$$

注意到

$$I_1 = (I(G-x_j) : x_i) = I(G-N_G[x_i]) + (\text{some variables}).$$

因此，由 [1, 引理 2.10], 可得 $\mathrm{reg}(I_1) \leq \mathrm{reg}(I(G - N_G[x_i]))$。注意，$G - N_G[x_i]$ 是 $G - \{x_i, x_j\}$的诱导子图。接着，采用与情形 1 类似的论证可知，$\mathrm{reg}(I(G - N_G[x_i])) \leq \mathrm{match}(G)$，因此，

$$\mathrm{reg}(I_1) \leq \mathrm{match}(G). \tag{17}$$

由对称性，

$$\mathrm{reg}(I_2) \leq \mathrm{match}(G). \tag{18}$$

此外，注意到

$$I_1+I_2 = I(G-x_j) : x_i)+(I(G-x_i) : x_j) = I\big(G-(N_G[x_i]\cup N_G[x_j])\big)+(\text{some variables}).$$

利用 [1, 引理 2.10],我们推得

$$\mathrm{reg}(I_1 + I_2) \leq \mathrm{reg}\big(I(G - (N_G[x_i] \cup N_G[x_j]))\big). \tag{19}$$

由于我们假设 x_i 和 x_j 的次数至少为二，且 $|N_G(x_i) \cup N_G(x_j)| \geq 4$，因此存在不同的顶点 x_p、$x_q \notin \{x_i, x_j\}$，使得 x_ix_p和 x_jx_q是 G的边。于是，对于 $G - (N_G[x_i] \cup N_G[x_j])$ 的每个匹配 M，集合 $M \cup\{x_ix_p, x_jx_q\}$ 是 G的一个匹配。特别地，

$$\mathrm{match}\big(G - (N_G[x_i] \cup N_G[x_j])\big) + 2 \leq \mathrm{match}(G).$$

因此，由 [10, 定理 6.7] 可得

$$\mathrm{reg}\big(I(G - (N_G[x_i] \cup N_G[x_j]))\big) + 1 \leq \mathrm{match}\big(G - (N_G[x_i] \cup N_G[x_j])\big) + 2 \leq \mathrm{match}(G). \tag{20}$$

不等式 (19) 和 (20) 推出

$$\mathrm{reg}(I_1 + I_2) + 1 \leq \mathrm{match}(G). \tag{21}$$

结合不等式 (16)、(17)、(18) 和 (21)，即可得到所述结论。 □

7. Third power

本节研究 $I(G)^{\{3\}}$的平方自由部分的正则性。作为主要结果，我们在定理 7.6 中给出 $I(G)^{\{3\}}$正则性的一个尖锐上界。定理 7.6 的证明基于引理 6.3 中得到的不等式。因此，我们需要分析形如 $(I(G)^{\{3\}} : u)$ 的理想，其中 u 是 $I(G)^{[2]}$ 的一个极小单项式生成元。在引理 7.2 中，我们将看到，这些理想可以用适当理想的二次符号幂的平方自由部分来表示。为了证明引理 7.2，我们需要以下引理。

引理 7.1. 设 G 为一个图，并设 $e = x_1x_2$ 是 G 的一条边。那么

$$\big(I(G)^{(2)} : x_1x_2\big) + (x_1, x_2) = \big(I(G)^{\{2\}} : x_1x_2\big) + (x_1, x_2).$$

证明。包含关系"$\supseteq$"显然。为证明反向包含，令 u为 $(I(G)^{(2)} : x_1x_2) + (x_1, x_2)$ 的一个极小单项式生成元。我们可以假设 u 不能被 x_1 和 x_2整除，否则无需证明。因此，u 是 $(I(G)^{(2)} : x_1x_2)$ 的一个极小单项式生成元。特别地，$ux_1x_2 \in I(G)^{(2)}$。由

[24, 引理 3。2], 我们知道 u 是一个平方自由单项式。由于 u 不能被 x_1 和 x_2整除，因此 ux_1x_2 也是一个平方自由单项式。于是，$u \in (I(G)^{\{2\}} : x_1x_2)$。□

引理 7.2. 设 G 是一个边集为 $E(G) = \{e_1, \dots, e_r\}$ 的图，并设 s 是一个满足 $1 \leq s \leq \text{match}(G)$ 的整数。假设 $u = e_{i_1} \dots e_{i_s}$ 是 $I(G)^{[s]}$ 的一个极小单项式生成元。那么

$$\big(I(G)^{\{s+1\}} : u\big) = \Big(\big(I(G)^{\{2\}} : e_{i_1}\big)^{\{s\}} : e_{i_2} \dots e_{i_s}\Big).$$

证明. 对于 $s = 1$，无需证明。因此，假设 $s \geq 2$。

令 v 为 $\Big(\big(I(G)^{\{2\}} : e_{i_1}\big)^{\{s\}} : e_{i_2} \dots e_{i_s}\Big)$ 的一个极小单项式生成元。那么 v 是一个平方自由单项式，且不能被 $\cup_{j=1}^{s} e_{i_j}$ 中的变量整除。由引理 3.3] 可知， v 属于 $\big(I(G)^{(s+1)} : u\big)$。因此， $vu \in I(G)^{(s+1)}$。由于 uv 是一个平方自由单项式，我们得出 $uv \in I(G)^{\{s+1\}}$。换言之，$v \in (I(G)^{\{s+1\}} : u)$。

接下来，我们证明反向包含。不失一般性，我们可以假设 $e_{i_1} = x_1x_2$。根据 [24, 引理 3.2], ，我们知道 $(I(G)^{(2)} : e_{i_1})$ 是一个平方自由单项式理想。令 $(I(G)^{(2)} : e_{i_1}) = \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{p}_k$ 为 $(I(G)^{(2)} : e_{i_1})$ 的不可约主分解。特别地，理想 $\mathfrak{p}_1$、 ..... 、 $\mathfrak{p}_m$ 由变量的子集生成。于是

$$\begin{aligned}\big(I(G)^{(2)} : e_{i_1}\big)^{\{s\}} + (x_1, x_2) &= \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{p}_k^{\{s\}} + (x_1, x_2) = \bigcap_{k=1}^{m} (\mathfrak{p}_k + (x_1, x_2))^{\{s\}} + (x_1, x_2) \\ &= J^{\{s\}} + (x_1, x_2),\end{aligned}$$

其中 $J = (I(G)^{(2)} : e_{i_1}) + (x_1, x_2)$。另一方面，由引理 7.1 可知， $J = (I(G)^{\{2\}} : e_{i_1}) + (x_1, x_2)$。因此，根据上述等式，我们得出

$$\begin{aligned}&\big(I(G)^{(2)} : e_{i_1}\big)^{\{s\}} + (x_1, x_2) = \big((I(G)^{\{2\}} : e_{i_1}) + (x_1, x_2)\big)^{\{s\}} + (x_1, x_2) = \\ &\big((I(G)^{\{2\}} : e_{i_1})\big)^{\{s\}} + (x_1, x_2).\end{aligned} \tag{22}$$

设 w 是理想 $(I(G)^{\{s+1\}} : u)$ 的一个极小单项式生成元。那么 w 是一个平方自由单项式，且不能被 $\cup_{j=1}^{s} e_{i_j}$ 中的变量整除。由 [24, 引理 3.3] 可推知， w 属于理想 $\Big(\big(I(G)^{(2)} : e_{i_1}\big)^{(s)} : e_{i_2} \dots e_{i_s}\Big)$。由于 $we_{i_2} \dots e_{i_s}$ 是一个平方自由单项式，我们得出

$$we_{i_2} \dots e_{i_s} \in \big(I(G)^{(2)} : e_{i_1}\big)^{\{s\}}.$$

由于 $we_{i_2} \dots e_{i_s}$ 不能被 x_1 和 x_2 整除，我们由（22）可得

$$we_{i_2} \dots e_{i_s} \in \big(I(G)^{\{2\}} : e_{i_1}\big)^{\{s\}}.$$

由此可得

$$w \in \left(\left(I(G)^{\{2\}} : e_{i_1} \right)^{\{s\}} : e_{i_2} \dots e_{i_s} \right)$$

至此，证明完毕。 □

设 G 为一个图，并假设 $u = e_1 e_2$ 是 $I(G)^{[2]}$ 的极小单项式生成元。由引理 7.2 可知，$(I(G)^{\{3\}} : u) = \left((I(G)^{\{2\}} : e_1)^{\{2\}} : e_2 \right)$。因此，为了界定 $(I(G)^{\{3\}} : u)$ 的正则性，需要研究形如 $(I(G)^{\{2\}} : e)$ 的理想，其中 e 是 G 的一条边。在下面的引理中，我们确定这类理想的结构。

引理 7.3。设 G 为一个图，且 $e = x_i x_j$ 是 G 的一条边。则

$$\left(I(G)^{\{2\}} : x_i x_j \right) = I(G - \{x_i, x_j\}) + \left(x_p x_q : x_p \in N_{G-x_j}(x_i), x_q \in N_{G-x_i}(x_j), x_p \neq x_q \right) + \left(x_t : x_t \in N_G(x_i) \cap N_G(x_j) \right).$$

证明。利用引理 7.1 和 [24, 引理 3。2], 我们有

$$\begin{aligned} &\left(I(G)^{\{2\}} : x_i x_j \right) + (x_i, x_j) = \left(I(G)^{(2)} : x_i x_j \right) + (x_i, x_j) \\ &= I(G) + \left(x_p x_q : x_p \in N_G(x_i), x_q \in N_G(x_j), x_p \neq x_q \right) \\ &+ \left(x_t : x_t \in N_G(x_i) \cap N_G(x_j) \right) + (x_i, x_j) \\ &= I(G - \{x_i, x_j\}) + \left(x_p x_q : x_p \in N_{G-x_j}(x_i), x_q \in N_{G-x_i}(x_j), x_p \neq x_q \right) \\ &+ \left(x_t : x_t \in N_G(x_i) \cap N_G(x_j) \right) + (x_i, x_j). \end{aligned}$$

由于 $(I(G)^{\{2\}} : x_i x_j)$ 的极小单项式生成元均不被 x_i 和 x_j 整除，故由上述等式可得结论。 □

在下面的引理中，我们确定当 u 是 $I(G)^{[2]}$ 的极小单项式生成元时，$(I(G)^{\{3\}} : u)$ 的正则性的一个组合上界。

引理 7.4. 假设 G 是一个边集为 $E(G) = \{e_1, \dots, e_r\}$ 且匹配数为 $\operatorname{match}(G) \geq 2$ 的图。设 $u = e_{i_1} e_{i_2}$ 是 $I(G)^{[2]}$ 的极小单项式生成元。若 $I(G)^{\{3\}} \neq 0$，则

$$\operatorname{reg}\left(I(G)^{\{3\}} : u \right) \leq \frac{|V(G)|}{2} - 1.$$

证明. 不失一般性，我们可以假设 $e_{i_1} = x_1 x_2$ 和 $e_{i_2} = x_3 x_4$。令 G' 为具有边理想的图

$$I(G') = I(G - \{x_1, x_2\}) + \left(x_p x_q : x_p \in N_{G-x_2}(x_1), x_q \in N_{G-x_1}(x_2), x_p \neq x_q \right).$$

特别地，$|V(G')| \leq |V(G)| - 2$。利用引理 7.3，存在一个变量子集 A，使其满足以下性质:

$$\left(I(G)^{\{2\}} : e_{i_1} \right) = I(G') + (A).$$

由引理 7.2 可知

$$\begin{aligned}(23)\qquad &\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{3\}}:u\big)=\operatorname{reg}\Big(\big(I(G)^{\{2\}}:e_{i_1}\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big)=\operatorname{reg}\Big(\big(I(G'),A\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big)\\ &=\operatorname{reg}\Big(\big(I(G'\setminus A),A\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big),\end{aligned}$$

最后一个等式由引理 3.1 得出。我们将证明的其余部分分为两种情形。

情形 1. 假设 $A\cap\{x_3,x_4\}=\emptyset$。因此，$e_{i_2}$ 是 $G\setminus(A\cup\{x_1,x_2\})$ 的一条边。于是，e_{i_2} 属于 $I(G'\setminus A)$。因此，对于每个变量 $z\in A$，我们有

$$ze_{i_2}\in\big(I(G'\setminus A),A\big)^{\{2\}}.$$

换句话说，

$$z\in\Big(\big(I(G'\setminus A),A\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big).$$

因此，

$$\Big(\big(I(G'\setminus A)\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big)+(A)\subseteq\Big(\big(I(G'\setminus A),A\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big).$$

反过来，设 v 是 $\Big(\big(I(G'\setminus A)\ A\big)^{\{2\}}$ 中的一个单项式：$e_{i_2}\Big)$，并假设 v 不能被 A 中的任何变量整除。由于 e_{i_2} 与 A 没有公共顶点，我们可推得 $ve_{i_2}\in I(G'\setminus A)^{\{2\}}$。因此，

$$(24)\qquad\Big(\big(I(G'\setminus A),A\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big)=\Big(\big(I(G'\setminus A)\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big)+(A).$$

若 $I(G'\setminus A)\big)^{\{2\}}$ 是零理想，则由上述等式可得 $\Big(\big(I(G'\setminus A)\ A\big)^{\{2\}}:\ e_{i_2}\Big)=(A)$，它由变量的一个（可能为空的）子集生成。因此，由 (23) 和上述等式可得

$$\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{3\}}:u\big)=\operatorname{reg}(A)\le 1\le\frac{|V(G)|}{2}-1.$$

因此，假设 $I(G'\setminus A)\big)^{\{2\}}\neq 0$。特别地，$\mathfrak{ht}(I(G'\setminus A)\ \ge 2$。由等式 (23) 和 (24) 可得

$$\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{3\}}:u\big)=\operatorname{reg}\Big(\big(I(G'\setminus A)\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big)\le\operatorname{match}(G'\setminus A)\le\frac{|V(G')|}{2}\le\frac{|V(G)|}{2}-1,$$

其中，第一个不等式由引理 6.6 得出，最后一个不等式则由 $|V(G')|\le|V(G)|-2$ 这一事实得出。

情形 2。假设 $A\cap\{x_3,x_4\}\neq\emptyset$。特别地，$|A|\ge 1$。不失一般性，设 $x_3\in A$ 并令 $B:=A\setminus\{x_3\}$。则由（ 23 ）可得

$$\begin{aligned}(25)\qquad &\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{3\}}:u\big)=\operatorname{reg}\Big(\big(I(G'\setminus A),A\big)^{\{2\}}:e_{i_2}\Big)=\operatorname{reg}\Big(\Big(\big(I(G'\setminus A),A\big)^{\{2\}}:x_3\Big):x_4\Big)\\ &=\operatorname{reg}\Big(\big(I(G'\setminus A),B\big):x_4\Big),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由假设 $x_3 \in A$ 得出。如果 $x_4 \in B$，则$\big(I(G' \setminus A)\ B\big) : x_4\big) = S$，断言显然成立。因此，假设 $x_4 \notin B$。于是可得

$$\big(I(G' \setminus A), B\big) : x_4\big) = I\big(G' \setminus (A \cup N_{G-A}[x_4])\big) + (\text{some vriables}).$$

特别地，

$$\operatorname{reg}\big(\big(I(G' \setminus A), B\big) : x_4\big) = \operatorname{reg}\big(I\big(G' \setminus (A \cup N_{G-A}[x_4])\big)\big). \tag{26}$$

注意，x_1、x_2、x_3 和 x_4 不是 $G' \setminus (A \cup N_{G-A}[x_4])$ 的顶点。因此，利用等式 (25)、(26) 和 [10,定理 6.7]，，可得

$$\operatorname{reg}\big(I(G)^{\{3\}} : u\big) \le \operatorname{match}\big(G' \setminus (A \cup N_{G-A}[x_4])\big) + 1 \le \frac{|V(G' \setminus (A \cup N_{G-A}[x_4]))|}{2} + 1$$
$$\le \frac{|V(G)| - 4}{2} + 1 = \frac{|V(G)|}{2} - 1.$$

□

根据引理 6.3，为了界定 $I（G）^{\{3\}}$的正则性，需要估计 $I（G）^{\{3\}} + I（G）^{[2]}$的正则性。下面的引理表明，这个理想实际上就是 $I（G）^{[2]}$。

引理 7.5. 对于任意图 G，有 $I（G）^{\{3\}} \subseteq I（G）^{[2]}$。

证明. 该结论可直接由 [24,命题 3.7]推出。 □

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 7.6. 设 G 是一个具有 n 个顶点的图，满足 $\mathfrak{ht}(I(G)) \ge 3$。则

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{3\}}) \le \min\left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3, \operatorname{reg}(I(G)) + 4\right\}.$$

证明。由 [24, 推论 3.9] 可知，$\operatorname{reg}(I(G)^{(3)}) \le \operatorname{reg}(I(G)) + 4$。因此，由命题 2.3 可得

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{3\}}) \le \operatorname{reg}(I(G)) + 4.$$

为了证明不等式 $\operatorname{reg}(I(G)^{(3)}) \le \lfloor n/2 \rfloor + 3$，注意到根据引理 7.5，有 $I(G)^{\{3\}} + I(G)^{[2]} = I(G)^{[2]}$。因此，由引理 6.3 和 7.4，我们得到

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{3\}}) \le \min\big\{\frac{n}{2} + 3, \operatorname{reg}(I(G)^{[2]})\big\}.$$

该断言现由 [7, 定理 2.11] 得出，该定理指出

$$\operatorname{reg}(I(G)^{[2]}) \le \operatorname{match}(G) + 2 \le \frac{n}{2} + 2.$$

□

设 G为一个具有 n 个顶点的图，使得 $I(G)^{\{3\}} \ne 0$。在定理 7.6 中，我们证明了 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$ 以及 $\operatorname{reg}(I(G)) + 4$是 $I(G)^{\{3\}}$的正则性的上界。下面的例子表明，这两个上界都是尖锐的。

例 7.7。（1）设 $G = C_5$ 为五环图。容易验证 $I(G)^{\{3\}} = (x_1x_2x_3x_4x_5)$。因此，

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{3\}}) = 5 = \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor + 3$$

其严格小于 $\operatorname{reg}(I(G)) + 4$。

(2) 令 G 为完全二部图 $K_{3,\,5}$。由于补图 $\overline{G}$是弦图，根据 [9, 定理 1] 可知 $\operatorname{reg}(I(G)) = 2$。此外，由于 G是二分图，根据 [27, 定理 5.9] 可推出 $I(G)^{\{3\}} = I(G)^{[3]}$。因此， $I(G)^{\{3\}}$ 由次数 6 的元素生成。于是利用定理 7.6，我们有

$$\operatorname{reg}(I(G)^{\{3\}}) = 6 = \operatorname{reg}(I(G)) + 4 < \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor + 3.$$

References

[1] A. Banerjee，边理想幂的正则性，《代数组合杂志》41 (2015), 303–321。[2] A. Banerjee, S. Beyarslan, H. T. H`a，边理想幂的正则性：从局部性质到全局界，《代数组合学》3 (2020), 839–854。[3] A. Banerjee, E. Nevo，通过悬挂研究边理想的正则性，预印本。[4] S. Beyarslan, H. T. H`a, T. N. Trung，森林与圈的幂的正则性，《代数组合杂志》42 (2015), 1077–1095。[5] K. Cameron, T. Walker，诱导匹配数与匹配数相等且均达到最大值的图，《离散数学》299 (2005), 49–55。[6] H. Dao, C. Huneke, J. Schweig，与图相关的理想的正则性和投射维数的界，《代数组合杂志》38 (2013), 37–55。[7] N. Erey, J. Herzog, T. Hibi, S. Saeedi Madani，匹配与边理想的平方自由幂，《组合理论杂志 A辑》188 (2022), 105585。[8] N. Erey, T. Hibi，森林的边理想的平方自由幂，《电子组合学杂志》28 (2021), 第2期，研究论文 P2.32。[9] R. Fr¨oberg，关于Stanley-Reisner环，载于：《代数专题》，Banach 中心出版物，26 第2部分，(1990), 57–70。[10] H. T. H`a, A. Van Tuyl，单项式理想、超图的边理想及其分次贝蒂数，《代数组合杂志》27 (2008), 215–245。[11] H. T. H`a，平方自由单项式理想的正则性，载于 S.M. Copper 和 S. Sather-Wagstaff（编），《代数、组合学与几何之间的联系》。Springer 数学与统计学论文集 76 (2014), 251–276。[12] J. Herzog, T. Hibi，《单项式理想》，Springer-Verlag，2011。[13] J. Herzog, T. Hibi，边理想幂的正则性上界，《斯堪的纳维亚数学》126 (2020), 165–169。[14] J. Herzog, T. Hibi, X. Zheng，关于弦图的 Dirac定理与 Alexander对偶性，《欧洲组合杂志》25 (2004), 第7期，949–960。[15] T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura, A. B. O'Keefe, Cameron-Walker 图的代数研究，《代数杂志》422 (2015), 257–269。[16] A. V. Jayanthan, S. Selvaraja，图的边理想幂的正则性上界，《代数杂志》574 (2021), 184–205。[17] I. Peeva，《分次syzygy》，代数与应用，第14卷，Springer-Verlag London Ltd., London，2011。

[18] S. A. Seyed Fakhari，非常良覆盖图与二分图的覆盖理想的符号幂，《美国数学学会会刊》146 (2018), 97–110。[19] S. A. Seyed Fakhari，与图相关的理想的深度、Stanley 深度和正则性，《数学档案（巴塞尔）》107 (2016), 461–471。[20] S. A. Seyed Fakhari，弦图的边理想符号幂的正则性上界，《电子组合学杂志》26 (2019), 第2期，研究论文 P2.10。[21] S. A. Seyed Fakhari，单圈图的边理想符号幂的正则性，《代数杂志》541 (2020), 345–358。[22] S. A. Seyed Fakhari，Cameron-Walker 图的边理想符号幂的正则性，《通讯代数》48 (2020), 第12期，5215–5223。[23] S. A. Seyed Fakhari，弦图的边理想符号幂的正则性，《京都数学杂志》62 (2022), 753–762。[24] S. A. Seyed Fakhari，关于图的边理想的小符号幂的正则性，《斯堪的纳维亚数学》，即将出版。[25] S. A. Seyed Fakhari，关于边理想平方自由幂的 Castelnuovo-Mumford 正则性，已投稿。[26] S. A. Seyed Fakhari, S. Yassemi，图的边理想正则性的改进界，《数学汇刊》69 (2018), 249–262。[27] A. Simis, W. Vasconcelos, R. H. Villarreal，关于图的理想理论，《代数杂志》167 (1994), 389–416。[28] D. B. West，《图论导论》，第2版，Prentice Hall，2001。[29] R. Woodroofe，匹配、覆盖与 Castelnuovo-Mumford 正则性，《交换代数杂志》6 (2014), 287–304。

S. A. Seyed Fakhari, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.电子邮箱地址：s.seyedfakhari@uniandes.edu.co