arXiv:2303.02797v2 [quant-ph] 9 Apr 2024

用于赊销风险分类的变分量子本征求解器

Joanna Wi´sniewska[1], 0000−0002−2119−3329,
Marek Sawerwain[2], 0000−0001−8468−2456

[1]军事技术大学控制论学院信息系统研究所，Gen. S. Kaliskiego 2，华沙 00-908，波兰，邮箱：JWisniewska@wat.edu.pl[2] 绿山大学控制与计算工程研究所，Licealna 9，绿山 65-417，波兰，邮箱：M.Sawerwain@issi.uz.zgora.pl

2024年4月11日

摘要

数据分类任务广泛应用于众多科学领域，可通过多种已知方法（如神经网络）实现。然而，在本研究中，我们利用量子计算来解决这一问题。我们考虑了一种基于变分量子本征求解器（VQE）和所谓的 SWAP 测试的量子电路，以解决与赊销相关的分类问题。更具体地说，我们处理的是一个决策问题：根据选定的决策变量值（如营业额、合作历史）来判断客户可靠性。

经典数据样本被转换为归一化量子态。完成此操作后，样本可由量子门构成的电路进行处理。变分量子本征求解器方法可训练量子电路（即所谓的试探态）的参数，使其为每个类别输出模式态。在所用的数据集中，可以观察到两种类别——

信用风险较低和较高的情况。然而，VQE电路区分的类别不止两种（引入了更详细的情况），最终结果通过前述的 SWAP 测试获得。该解决方案结构紧凑，所需量子比特数量仅按对数增长（这是由于量子寄存器具有指数级容量）。

由于所提出的量子电路复杂度较低，因此可以在当前可用的量子计算机上进行实验，包括含噪中等规模量子（NISQ）设备。尽管存在噪声，这类设备仍能够解决本文所分析的任务。所有计算、模拟、绘图和比较均在 Python 语言环境中实现并完成。每个量子分类示例的源代码都可以在源代码仓库中找到。

关键词： 变分量子算法、分类、信用风险分析、量子电路

1 引言

如今，含噪中等规模量子（NISQ）设备 [23]被视为量子计算发展的一个极具前景的方向。由于量子比特数量有限且已知的纠错方案有限，NISQ技术可成功用作变分量子算法（VQA）方法 [31], [8], [34]的硬件基础。这类解决方案假设，有些问题可以轻松地由经典计算机解决，而另一些问题则可以借助量子计算来处理。VQA是一种混合方法，它利用结构简单的量子电路解决不同的问题，并利用经典计算机优化上述电路的参数。这种方法十分流行，以至于出现了各种子类型，例如量子近似优化算法（QAOA） [11] 和变分量子本征求解器（VQE） [21], [17], [24], [10], [13], [9], [12], [27] ，后者也应用于本研究。VQE中的量子电路会计算与基态哈密顿量最低本征值相关联的本征向量。这种方法已应用于许多领域，例如药物发现 [5], 、材料科学 [16], 和化学工程 [7]。此外，SWAP 测试 [3], ——即一种用于比较两个量子比特态的方法——也是低复杂度电路的一个例子，因此很容易

在NISQ设备上实现。

变分量子本征求解器方法可用于指出某个类别中我们希望对数据样本进行分类的特定情况。在我们的数据集中，可以提取出两个主要类别，但其中还包含其他样本子组。VQE电路实现学习过程，并指出给定类别中的个别情况。随后，SWAP 测试将一个数据样本与同一类别中的其他观测值进行比较。

因此，我们的主要目标是将变分量子本征求解器与 SWAP 测试结合起来，用于分类问题。本研究所用的训练数据来自一家波兰医药批发商，涉及2003年的某一段时期。

本文组织如下：第2节介绍有关符号的预备知识，并简要概述量子计算，尤其是量子寄存器的概念，以及关于酉操作和测量操作的基本信息。第3节介绍一个决策问题。分析表明，数据集中存在取值范围各不相同的多种变量，因此必须进行归一化处理。本节还展示了使用经典模型进行分类的结果，并在后文将其与 VQE+SWAP 测试方法的输出进行比较。我们还分析了所用量子寄存器中是否存在纠缠，因为它会影响变分量子本征求解器方法中所构造的试探态电路的形式。恰当的试探态电路形式（即更短的形式）自然可以实现更快的模拟，并缩短学习过程。量子电路的深度有限，对于使用 NISQ设备执行此类电路并获得更高准确率至关重要。第4节专门介绍基于变分量子本征求解器方法和 SWAP 测试的分类方法。第5节介绍所采用的量子电路，以及通过数值模拟计算出的电路效能。结论见第6节。致谢和参考文献是本文的最后部分。

2 预备知识

在本节中，我们将定义一些量子计算领域的术语，这些术语会在我们的工作中用到。关于这一主题的更多信息，请参见 [19]。首先，我们需要定义量子位，即所谓的量子比特。量子信息的这一基本单位可表示为

一个二元素向量:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

满足归一化条件:

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1, \;\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

标记 $|\psi\rangle$ 表示列向量，在狄拉克符号中记作 ψ。表示量子比特状态的另一种方式是依赖基的叠加方程:

$$|\psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle, \tag{3}$$

此处也必须满足归一化条件（2）。向量 $|0\rangle$和 $|1\rangle$ 张成计算基，称为标准基:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

可指定的基有无穷多个——单个量子比特的基必须由两个正交归一向量组成。若两个向量（例如 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$）的内积为 $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$，则它们互相正交；向量 $\langle 0|$ 是 $|0\rangle$的复共轭。

此外，如果要进行任何计算，单个量子比特并没有太大用处。由多个量子比特组成的系统称为量子寄存器。若有 n 个量子比特，并要将它们组合成寄存器，就必须对连续的单元执行张量积运算，例如，对两个归一化向量 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, |\phi\rangle = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1|\phi\rangle \\ \alpha_2|\phi\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 \\ \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{bmatrix} = |\psi\phi\rangle. \tag{5}$$

我们也可以用叠加方程来表示这一操作:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (\alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle) \otimes (\beta_1|0\rangle + \beta_2|1\rangle) = \\ \alpha_1\beta_1|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \alpha_2\beta_1|10\rangle + \alpha_2\beta_2|11\rangle = |\psi\phi\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

如我们所见，描述 n 量子比特态所必需的元素数量为 2^n，我们称它们为振幅。它是向量元素的数量和/或

叠加方程中的分量数量。当然，多量子比特态必须归一化，因此它们的振幅 α_i（复数）必须满足：

$$\sum_{i=1}^{2^n} |\alpha_i|^2 = 1. \tag{7}$$

对量子态可以执行两种主要类型的操作：计算操作和测量。

计算操作由所谓的量子门执行，量子门可以用酉矩阵表示。这种酉性使量子态在操作后仍能保持归一化。这里实现的数学操作是将酉矩阵 $U \in \mathbb{U}(\mathbb{C}^d)$（其中 $\mathbb{U}$ 表示作用于所选空间 $\mathbb{C}^d$中的一整组酉算子）乘以向量态 $|\psi\rangle$:

$$U|\psi\rangle = |\psi'\rangle, \tag{8}$$

其中，如果 U 变换的是 n量子比特态，则其大小为 $2^n \times 2^n$ 。还应注意，本文中的 U 算子作用于纯态 $\partial E(\mathbb{C}^d)$。输出态 $|\psi'\rangle$ 的大小与 $|\psi\rangle$相同。

当然，对量子态进行一系列计算后，人们希望知道其结果，因此必须执行测量操作。在这种情况下，可以采用冯·诺依曼方法：

$$|\psi'\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_i|\psi\rangle}}, \tag{9}$$

其中，测得的状态 $|\psi'\rangle$ 是利用初始态 $|\psi\rangle$和投影算子 P_i计算得到的。冯·诺依曼量子测量是在选定的计算基中进行的。它将整个状态 $|\psi\rangle$或其中的特定量子比特投影到基态上。这自然只是物理实验的数学模型，其中 P_i 描述所有可能投影中的一种。例如，在 SWAP 测试中，存在一个三量子比特电路，测量第一个量子比特上的 $|0\rangle$ 的概率至关重要，因此在这种情况下 $P_i = P_0 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$，其中 $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ 将第一个量子比特投影到标准基中的$|0\rangle$ ，而另外两个量子比特不进行测量（这用恒等操作 $\mathbb{I}$表示）。

总而言之，我们汇总了本文所用的符号，并在表 1 中列出了所有最重要的记号。

表 1：本文中使用的符号和记法

记号	描述
$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	整数、实数和复数集合
$\mathbb{H}$	希尔伯特空间
α, β, γ, λ, ...	实数或复数
i, j, k, l	用于索引的整数
$\otimes$, $\times$	张量积以及两个对象的乘法或乘积 标量和/或矩阵
$\mathbb{I}$, $\mathbb{I}_N$, $\mathbb{I}_{d^N}$	单位矩阵/单位算子，在.....中定义的单位算子 含有 N 个量子比特的系统，具有 de- 的单位算子 声明的维数
$\mathbb{U}(\mathbb{C}^d)$	作用于 $\mathbb{C}^d$中的酉矩阵组
U, $U_{(i)}$	一般酉算子 U，以及应用于 量子寄存器中第 i 个量子比特/量子位的算子 {v2}
$A^\star$, $A^\dagger$	矩阵共轭、矩阵的厄米共轭
$\langle -\vert -\rangle$	内积（标量积）
$\partial E(\mathbb{C}^d)$	$\mathbb{C}^d$上的纯态集合
$1...n$	表示1、2、3、.....、 n这一序列
X, Y	X 输入向量数据集和 Y 二元输出（0/良好，1/不良）
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)_i$	第i个输入数据向量
$D_{c,\ g^c}$	分类数据集 类别编号，类别 c 中的组编号
c_n, c_n^g	主要类别的数量，以及组的数量 在类别 c 中
$\theta_{T_c^g}$	类别 c 和组 g 的拟设电路参数
$(\Lambda_c^g,\ \Omega_c^g)$	类别 c 中给定组 g 的接受范围
T_{ini}, T_{VQE}, T_{SWAP}, T_{qtot}	分别为初始态的计算复杂度、 变分量子本征求解器、交换门以及整个量子电路
$\vert\Psi\rangle$、 $\vert\psi_{ans}\rangle$、 $\vert\psi_{VQE}\rangle$、 $\vert\psi_i\rangle$	整个量子寄存器和子寄存器
H	描述系统能量的哈密顿量
E_0	H 的基态能量
E_{VQE}	VQE 系统的能量

3 决策情境模型

本文讨论一项决策任务，重点是对某些赊销进行风险评估——这一示例已在文献 [32, 33] 中探讨过。所采用的商业模式假设批发商与订购其所提供产品的某些公司合作。批发商交付货物、开具发票，客户有义务在发票规定的期限内付款。当然，有时客户即使有逾期发票，仍会下新订单。此时，批发商的催收部门员工应采取行动——联系客户，并决定是否可以履行订单，还是应暂停订单。我们假设，在这一决策情境中应考虑以下因素:

(a) 客户的欠款金额（实数），(b) 所有当前应付款的金额（实数），(c) 最早一张逾期发票的付款延迟天数（整数），(d) 声明已发出但尚未记入账户的付款金额（实数），(e) 客户在过往合作中的可靠性（布尔值），(f) 对客户合作实体的评估（布尔值），(g) 客户提供的本票（布尔值）。

如果客户有逾期发票，案件就会转交给催收部门，由员工决定是否应停止订单的执行。数学模型可以表示为两个向量 X 和 Y：第一个向量包含上述七个因素对应的输入数据（第 i 个变量 x_i 对应第 i 个因素），第二个向量则包含二元输出（0——可以发货，1——否则（销售阻止）：

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7),\ Y = (y_1),\ y_1 \in \{0, 1\}. \tag{10}$$

本研究使用的数据集是依据一些实际指导原则构建的，例如，如果客户的欠款超过所有当前应付款总额的 20%

，则该案例将面临销售禁令。另一个令人担忧的因素是最早到期的款项逾期超过 6 天。减轻情节包括：已声明付款、以往合作经历良好、对客户收款方评价良好，以及可能使债务追偿流程更容易进行的本票。

3.1 数据归一化过程

在开始学习过程之前（即拟合量子电路参数的过程），准备数据非常重要。训练集包含不同类型和范围的变量，因此不进行数据归一化可能会导致某些变量对所得结果产生不正确的影响，例如，一个变量接受范围为 $[0;\ 10000]$ 的值，而另一个变量只获取布尔值。

我们在数据归一化中采用两个步骤：经典步骤和量子步骤。首先，我们按照广为人知的归一化过程，将所有值转换到范围 $[0;\ 1]$（当然，如果处理的是布尔变量，则这是多余的）。假设 i 表示变量的索引，变量数量为 a，因此 $i = 1$、2、.....、a。相应地，j 是数据集中的观测值索引，b 是观测值的数量（$j = 1$、2、.....、b）。现在，对于第 i 个变量，必须在所有观测值上执行归一化过程。归一化后的值 $\tilde{x}_{i,\ j}$ 按如下方式计算：

$$\tilde{x}_{i,j} = \frac{x_{i,j} - \min\limits_{1 \le j \le b}\{x_{i,j}\}}{\max\limits_{1 \le j \le b}\{x_{i,j}\} - \min\limits_{1 \le j \le b}\{x_{i,j}\}}. \tag{11}$$

此时，变量已完成归一化，但用于求解问题的量子电路需要以正确量子态的形式作为输入。因此，还需要进行第二步量子归一化。

n 量子比特的量子态具有 2^n 个振幅 α_i，因为每个纯量子态都可以描述为标准基态 $|i\rangle$的叠加：

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle, \tag{12}$$

其中 i 以十进制数编码，但有时，例如在描述标准基向量时，会使用二进制数。振幅 α_i 为复数

数，并且满足归一化条件：

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1. \tag{13}$$

如果我们有 a 个变量，那么所使用的量子寄存器的大小 n 必须遵循以下规则：

$$a \leq 2^n. \tag{14}$$

如果 $a = 2^n$ ，那么所有振幅都具有确定的值。如果 $a < 2^n$，更有可能的是，必须将缺失的 c 个变量（$a+c = 2^n$）以零值添加到数据集中。例如，在我们的赊销问题中，我们有七个变量，因此必须引入第八个变量 x_8 ，并且在每个观测值中，该变量的值均为零。

最后，必须将数据转换为量子态，这可以通过改变每个第 j 个观测值中的变量值来实现：

$$\hat{x}_{i,j} = \sqrt{\frac{\tilde{x}_{i,j}}{\sum_{i=1}^{2^n} \tilde{x}_{i,j}}}. \tag{15}$$

现在，观测值满足量子态的归一化条件——第 j个观测值的变量值 $\hat{x}_{i,\ j}$ 变为第 j个量子态的振幅值 α_i。

注 1. 经典（非量子）机器学习中的归一化过程有助于限制某些变量对模型参数的过强影响。我们也希望在计算中获得相同的效果，因此执行两个归一化步骤——经典归一化和量子归一化（以提供正确的量子态）。

在本文接下来的章节中，我们将使用归一化为量子态形式的数据集。首先，我们对变量 x_1 至 x_4 进行了经典归一化，因为它们不是布尔值。然后，我们添加了值为零的变量 x_8 ，以确保为三量子比特态（$n = 3$）中的所有振幅提供数值。最后一步，我们按照（15）的含义完成归一化过程。

3.2 样本中的纠缠

经过双重归一化过程后，我们得到以量子态形式表示的样本，这些样本是根据数据集中的观测值构建的。

量子态 D_j 对应第 j 个观测值。所分析的示例需要三个量子比特，因此：

$$|D_j\rangle = |q_0 q_1 q_2\rangle = \sum_{k=0}^{7} \alpha_k |k\rangle. \tag{16}$$

本例中的变量数量为七个，因此最后一个振幅始终为零。我们使用 EntDetector 软件包 [14]，分析了两个类别中是否存在纠缠（标记为 0 表示可以发放货物，标记为 1 表示应阻止销售）。我们可以观察到括号中指定的量子比特之间的纠缠：

$$\text{class } 0\colon (0,1,2),\quad (1,2) \quad \text{class } 1\colon (0,1,2),\quad (0,2),\quad (1,2). \tag{17}$$

在大多数情况下，三个量子比特均处于纠缠状态。类别0中只有四个样本仅在量子比特 (1, 2) 之间存在纠缠。类别 1 中，量子比特 (0, 2) 之间存在纠缠的情况有四例，量子比特 (1, 2) 之间存在纠缠的情况有八例。纠缠是通过 EntDetector 软件包中的分区划分纠缠检测方法进行诊断的，该方法基于偏迹计算。- - -

备注 2. 数据中存在纠缠意味着，在分类过程的后续部分使用变分量子本征求解器方法时，拟设电路必须根据样本数据正确地重建纠缠。

3.3 训练数据集分析中的经典方法

在介绍量子方法的结果之前，我们希望先关注一下可应用于所分析问题的经典机器学习方法。

很容易看出，Python 的 Seaborn 库中的成对图方法 [30]表明，我们的问题中的类别没有得到很好的区分（没有形成由单一颜色构成的连续区域）。如图 1 所示，与客户继续合作的情况以蓝色标记，橙色则表示销售禁令。变量x_7 是一个小小的例外，因为其中有一些蓝色点构成的区域，但这并不改变这样一个事实：很难在二维图中清晰地划分类别。变量之间的相关性较弱，

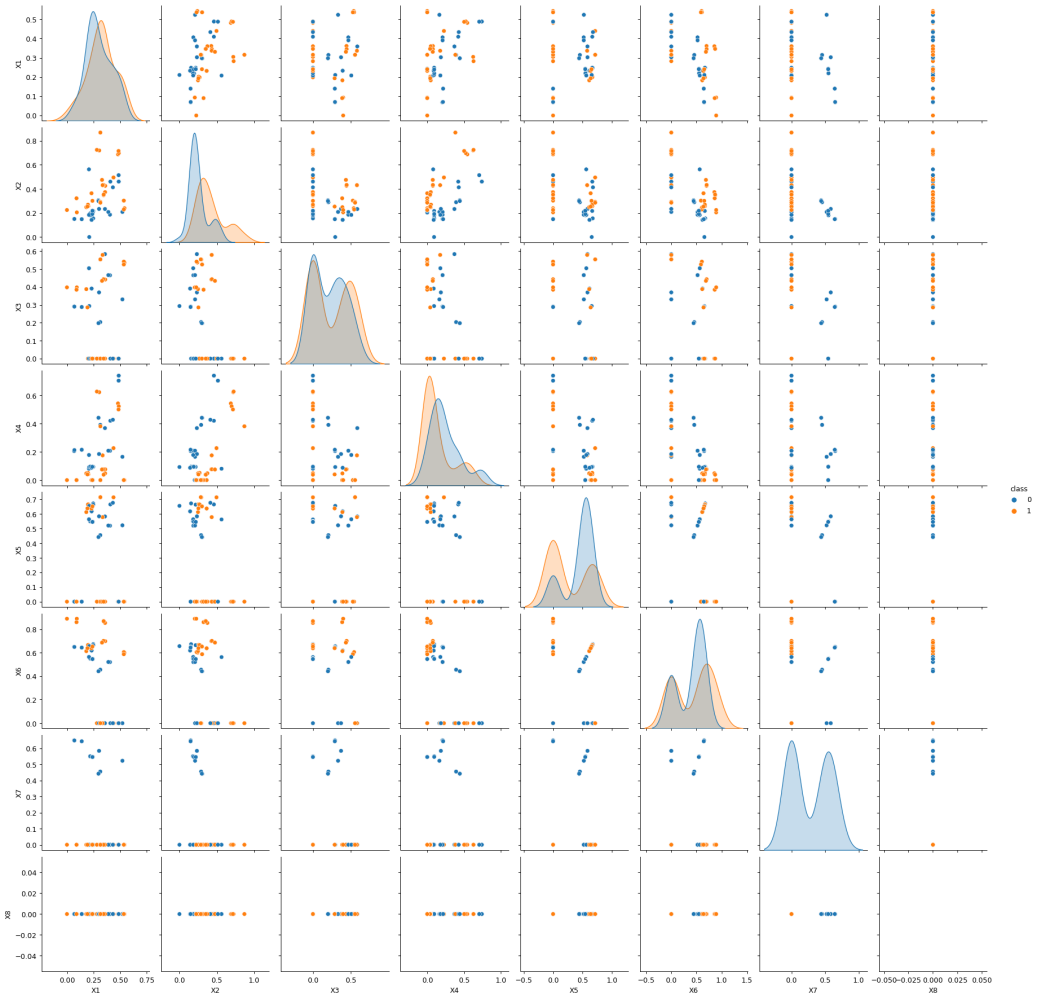

图1：由 Python 的 Seaborn 库中的成对绘图函数生成的图表，展示了每对变量的类别分离情况。变量 x_8 的结果应省略，因为该变量的值始终为零（归一化过程中添加的辅助变量）

使用包含皮尔逊系数的相关矩阵进行了测试。展示所得结果的表 2（由于变量 x_8 是常数，因此无法计算其系数值）可在我们的源代码仓库 [25]中查阅。

表 2：所分析问题中归一化变量的皮尔逊系数

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1.000000	0.395159	0.002715	0.419183	-0.157285	-0.543081	-0.281667
x_2	0.395159	1.000000	-0.392805	0.560917	-0.437261	-0.504038	-0.403142
x_3	0.002715	-0.392805	1.000000	-0.310900	0.056815	0.031139	-0.134183
x_4	0.419183	0.560917	-0.310900	1.000000	-0.305393	-0.640078	-0.053246
x_5	-0.157285	-0.437261	0.056815	-0.305393	1.000000	-0.146336	0.091410
x_6	-0.543081	-0.504038	0.031139	-0.640078	-0.146336	1.000000	0.056590
x_7	-0.281667	-0.403142	-0.134183	-0.053246	0.091410	0.056590	1.000000

此时，我们可以断定不存在适用于我们数据的简单线性模型。不过，也可以采用其他模型。在完成输入数据探索阶段后，我们发现主成分分析（PCA）颇具价值。它利用奇异值分解（SVD），将我们这个包含八个变量的问题的维度降低。图 2 展示了所得结果。可以观察到，由同一类别的观测值形成了若干簇。

注 3。 用于生成 *Seaborn* 图、图 *2* 以及表 *2* 所示皮尔逊系数数据的所有脚本，均可在源代码仓库 *[25]*中获取。此外，仓库还包含本文所开展并讨论的数值实验的全部源代码。

3.4 经典分类器的准确率

为了评估量子方法的准确率，将其结果与非量子分类器可能得出的结果进行比较是合理的。表 3 展示了不同模型获得的准确率。所有计算均使用 Scikit-Learn 库中的程序完成 [20]。标记为 SVM（支持向量机）的分类器是

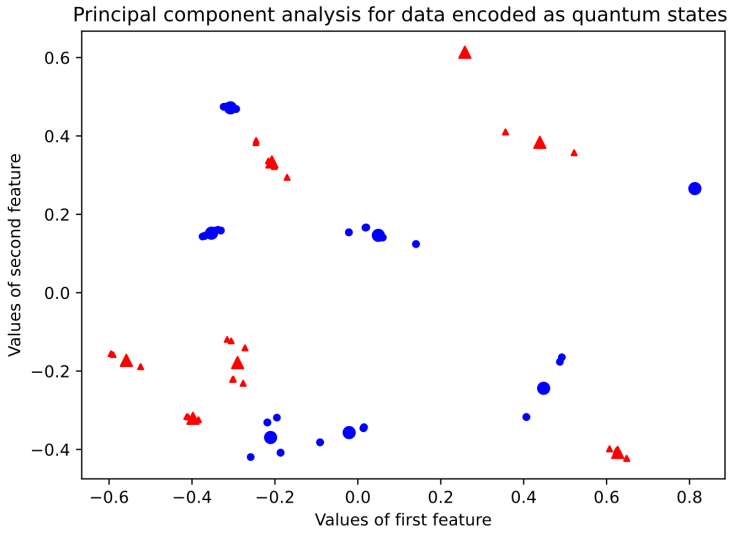

图2：使用 Python 的 Scikit-Learn[20] 库中的 PCA 方法，将八维数据（包含 40 个探针的训练数据）降至二维。蓝色（实心圆）对应类别0，红色（三角形）对应类别 1。每个类别被划分为七个簇。需要强调的是，经过 PCA 处理后，有些样本彼此非常接近，因此图中未能将它们分别展示出来

通过 SVC（支持向量分类）方法进行模拟，该方法适用于包含两个及以上类别的任务。测试采用了不同类型的核函数（参数 k）。接下来使用的方法是 k近邻方法，其中参数 n 表示邻居数量。对于其余使用的分类器，它们的名称与 Scikit-Learn 库中函数的名称相同，相关参数见表 3。

可以观察到，某些分类器对我们的训练数据达到了 100.0% 的拟合度。然而，这些情况采用了带有多项式核函数的复杂模型。我们预计，混合模型VQE 的模拟能够以较简单的模型完成这项任务。

表 3：经典分类器在赊销问题上的效率。各类别的点分布在整个空间中，并未形成均匀簇（图 2），因此需要应用多项式核函数方法来获得较高的模型拟合度。“基本参数”列中的“默认”一词表示，调用给定方法时未使用任何其他参数。

分类器简称	基本参数	准确率 for 训练-集
SVM	k=Sigmoid，C=10	62.5%
SVM	k=线性	98.8%
SVM	k=径向基函数	98.8%
SVM	k=多项式	100.0%
K近邻分类器	n=3	98.8%
高斯过程分类器	k = 1.0 * 径向基函数(1.0)	100.0%
决策树分类器	最大深度=5	100.0%
随机森林分类器	最大深度=5， 估计器数量=10， 最大特征数=8	100.0%
多层感知机分类器	alpha=1，最大迭代次数=1000	98.8%
AdaBoost分类器	默认	100.0%
高斯朴素贝叶斯	默认	75.0%
二次判别分析	默认	50.0%

4 基于 VQE 和交换门测试电路的分类

变分量子本征求解器（VQE）方法最初在 [21] 中提出，并在 [17]中进一步发展。这引起了许多研究人员的兴趣，并催生了大量相关研究，例如 [9], [12], [27]。VQE 属于一类称为变分量子算法（VQA）[31], [8], [34]的方法，这类方法基于结合量子计算与经典计算的混合方案。本文所分析问题的 VQE 方法方案如图 3 所示，其中可见该方案包含两个部分：数据准备和优化在经典计算机上完成，而所谓的试探态 [31], [18], [4], 则应通过量子电路实现。

VQE 的优势之一是量子电路可以在 NISQ设备上实现 [23]。这类量子机器的特点是，尽管存在噪声，仍然可以成功执行某些计算。

VQE 中的量子电路会生成一个 n量子比特态 $|\psi\rangle$ ，它可以与同名波函数相对应。哈密顿量 H 的基态能量 E_0 表示为：

$$E_0 \leq \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}. \tag{18}$$

VQE 的主要目标是确定 $|\psi\rangle$的振幅，从而求得 E_0 的上界。这意味着必须最小化 H 的期望值，因为 H 的最低本征值与所需的本征向量相关。这个问题可以定义为：确定一个带有参数 $\{\theta_i\}$ 的幺正操作 U ，以满足以下优化问题：

$$E_{\mathrm{VQE}} = \min_{\theta_i} \langle 0|U^{\dagger}(\theta_i) H U(\theta_i)|0\rangle, \tag{19}$$

其中， $|0\rangle$ 是初始态，使得 $U(\theta_i)|0\rangle = |\psi\rangle$。在 [27] 中，哈密顿量 H的定义为 $H = \sum_j \omega_j P_j$，其中 ω_j是 P_j的权重，表示相应的泡利算符： X、 Y、 Z、 I($j = 1$，.....，4)。这意味着公式（19）可以写为：

$$E_{\mathrm{VQE}} = \min_{\theta_i} \sum_j \omega_j \langle 0|U^{\dagger}(\theta_i) P_j U(\theta_i)|0\rangle. \tag{20}$$

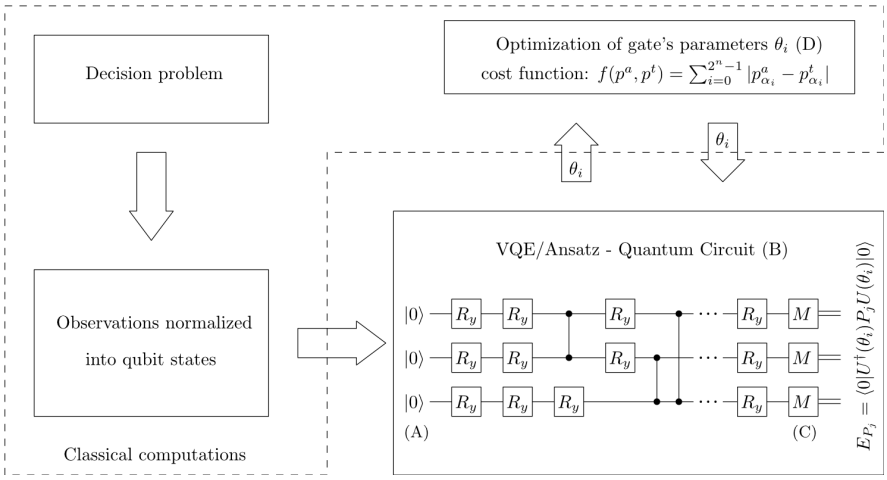

图 3：简化形式的变分量子本征求解器方法的一般示意图。实现变分量子本征求解器方法的第一阶段（A）是确定初始态 $|000\rangle$。随后实现拟设电路（B），该电路需要一系列参数 $\{\theta_i\}$，这些参数通过使用经典计算机进行优化来确定。电路的任务是将输入态转换为另一种形式的态，使其接受测量操作。在测量步骤（C）之后，根据获得的概率分布计算代价函数（D）的值。在优化过程中，为量子门选择代价函数值和旋转参数 $\{\theta_i\}$（例如使用梯度法）。这样做的目的是使测量（C）后获得的分布，就代价函数而言，尽可能接近期望的概率分布；该分布例如代表待研究样本的某个特定类别。优化过程由经典计算机执行，但显然，电路的运行则是量子计算机的任务

N现在，我们可以分别表示每个泡利算符的期望值：

$$E_{P_j} = \langle 0|U^\dagger(\theta_i)P_jU(\theta_i)|0\rangle. \tag{21}$$

可以借助量子设备（例如含噪声中等规模量子设备）计算期望值。

优化问题：

$$E_{\mathrm{VQE}} = \min_{\theta_i} \sum_j \omega_j E_{P_j}, \tag{22}$$

可由经典计算机求解，例如使用 SciPy Python 软件包中的 COBYLA 或 SPSA 方法 [28]。

注 4。变分量子本征求解器方法以存在贫瘠高原问题 *[15]* 而闻名，该问题会在优化阶段出现。但是，在所考察的数据中，由于簇的规模较小，因此未观察到贫瘠高原问题。

本文利用变分量子本征求解器方法生成一个状态 $|\psi\rangle$，以表示所分析观测所属的类别。此外，将变分量子本征求解器得到的状态与特定类别对应的测试状态进行比较。这些向量态之间的距离决定了某个观测所属的类别。另一项重要任务是实现操作 U，该操作见第 5 节。

回到优化问题，即寻找 E_{VQE} 值，自然需要定义一个将在整个优化过程中使用的代价函数。将其记为 $f(p^a,\ p^t)$，其中 p^a 表示当前量子态的描述，而 p^t 是最终量子态。代价函数的值应尽可能小，即尽量减小上述两个状态之间的差异。保真度度量 [19]是 f 的一个合理候选。不过，在本文中，我们使用所比较量子态的概率分布，并计算各个概率绝对误差之和，具体如下：

$$f(p^a, p^t) = \sum_{i=0}^{2^n-1} |p^a_{\alpha_i} - p^t_{\alpha_i}|, \tag{23}$$

其中，$p^a_{\alpha_i}$ 是经过测量后获得状态 $|i\rangle$ 的概率（由概率振幅 α_i 给出）。

这种形式的代价函数 f 取决于从量子设备（例如 IBM Q Experience）获取概率分布信息的方式；在该设备上，重复实验即可获得概率分布。考虑到当前可用量子设备的能力，这种方法似乎更加现实。因此，在描述我们的实验时，我们假设

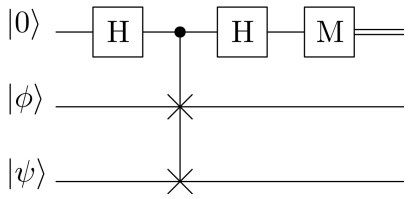

图 4：量子电路示意图（两个哈达玛门用带有大写字母 H 的方块表示，弗雷德金门也称为受控交换门，用于实现状态 $|\phi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$之间的 SWAP 测试（“重叠度”）。第一个量子比特上的输入始终为 $|0\rangle$。给定状态的相似度体现在第一个输出量子比特中，即测得 $|0\rangle$的概率（用测量门 M 表示），其值为： $P_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\langle\psi|\phi\rangle|^2$。如果状态正交（不同），该概率为 1/2；如果状态相同，该概率为 1

代价函数 f 将误差表示为两个概率分布之间的绝对差值。

需要指出的是，量子计算能够通过所谓的 SWAP 测试 [3] 比较两个量子态（例如 p^a 和 p^t）。这是因为 SWAP 测试基于被考察状态的标量积（这一点与保真度度量类似）。图 6 也展示了 SWAP 测试的一般方案。

这个简单的电路可以测量第一个输出量子比特的状态。状态 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 的相似性体现在：第一个量子比特得到状态 $|0\rangle$ 的概率为 $P_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\langle\psi|\phi\rangle|^2$。如果 $P_0 = 1$，那么分析的状态相同，因为这意味着内积 $\langle\psi|\phi\rangle = 1$。状态在布洛赫球上指向的方向越相反，它们就越不相似。对于正交态，乘积 $\langle\psi|\phi\rangle = 0$，因此 $P_0 = 0.5$。SWAP 测试可用于检查两个量子态的相似性。此外，SWAP 测试还可应用于变分量子算法中使用的每个量子比特。也可以通过检查测试完成后的概率分布来评估分类结果。如果三个量子比特各自获得 $|0\rangle$ 的概率都很高，那么该观测就被正确分类。变分量子本征求解器方法中的类别由电路参数集合 θ_i 表示。

5 用于赊销风险分析的变分量子本征求解器

所提出的采用变分量子本征求解器的分类方法，需要准备量子电路；在此方法中，该电路称为试探态。第 5.1 节介绍了该电路的特征。第 5.2 节展示了分类过程中依次处理后续观测的方案。第 5.3 节讨论了实验结果。

5.1 拟设电路的创建

图5展示了本文用于执行二元分类的两个试探电路示例。电路（A）是一种通用型拟设电路 [31] ，目前正被提议用于变分量子本征求解器方法。电路（A）所示的结构由两部分组成。第一部分中的前三个旋转门负责对状态特征进行编码；但正如我们在第3.2节中提到的，描述数据的状态彼此纠缠，因此电路的第二部分负责引入纠缠。这通过受控变号门和旋转门实现，它们能够改变纠缠程度。第二部分的重复次数也很重要，因为增加重复次数，也就是增加电路深度，可以提高准确率。不过，正如下文将展示的，两层就足以实现较高的正确分类率。

该电路的变体（B）旨在直接构建与当前分类任务所编码数据的一般结构相符的状态。该电路的特点是深度较小，且仅需一层即可获得较高的分类结果准确率。因此，我们得以构建较为简单的电路，并减少实现VQE电路所需的旋转门数量。

5.2 VQE数据分类

分类算法以伪代码的形式呈现，如算法 1 所示。我们使用九量子比特寄存器，其初始态可分为三部分 $|\Psi\rangle = |\psi_{anc}\rangle|\psi_{VQE}\rangle|\psi_{D_i}\rangle$，其中子寄存器 $|\psi_{VQE}\rangle$ 标记

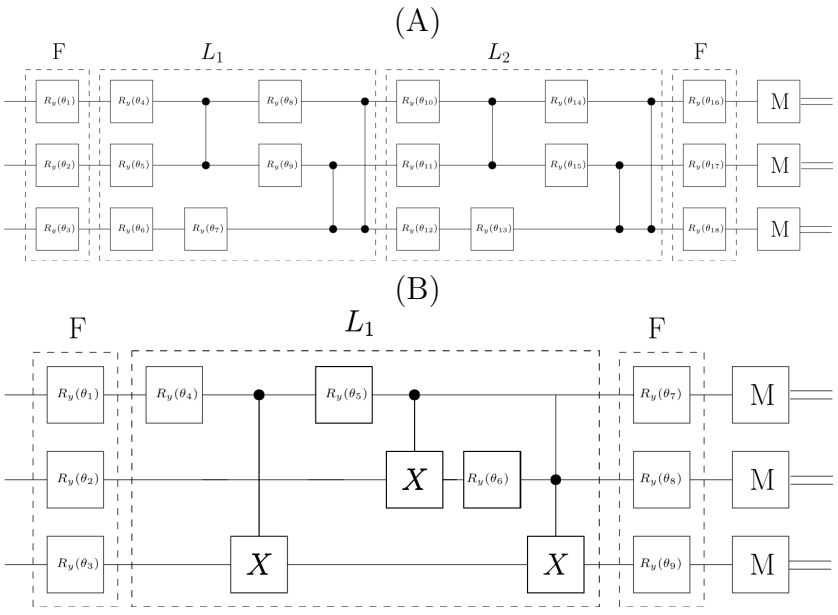

图 5：用于信用数据分类计算实验的两种试探电路。电路 (A) 是文献中常见的典型拟设电路，使用了旋转 Y 量子门和受控-Z 量子门。它的通用性质使其能够广泛应用于不同组的数据（也适用于本文讨论的问题）。电路 (B) 是针对本文讨论的数据改编的简化版本。它的优点是旋转门数量较少 R_y ，并且我们使用受控-NOT 量子门代替受控-Z 量子门

专用于 VQE 的量子比特，$|\psi_{D_i}\rangle$ 表示数据集中的第 i 个样本 D，$|\psi_{anc}\rangle$ 是实现 SWAP 测试所必需的辅助量子比特。

通常，可以应用各种函数来计算误差值。可以通过公式（23）中给出的函数 f实现，但在算法 1 中，误差值由 SWAP 测试直接计算。该算法的输入是数据集 $\{D\}$。每个观测都使用先前计算的参数 $\theta_{T_c^g}$进行评估。这些参数是针对每个类别 c 和组 g 按照公式 22 的优化过程输出的（数据分析表明，每个类别中都有若干彼此靠近的点组，这一点可见图 2）。

函数 f 和 SWAP 测试计算分析观测的向量 i 与类别 c之间的距离。更准确地说，这两个函数计算观测 i 与由参数 $\theta_{T_c^g}$所指示的量子态之间的距离。接受阈值——即类别中心到其最远元素的边界距离——不应过高，否则可能导致类别重叠。对于所分析的数据集，初始接受阈值为 $\Omega_c^g = 0.5$，其最低值为 $\Lambda_c^g = 0.0$。优化过程应使 Ω_c^g 最小化，以减少一个观测可能被归类到多个类别的情况。

需要补充说明的是，被识别为某个类别元素的观测值会被放入集合 C，而未分类的观测值则放入集合 U。由于参数 $\theta_{T_c^g}$ 的值会在优化过程中发生变化，因此需要对集合 U 的元素进行额外筛选。

该分类算法基于一个变分量子本征求解器方法实例，但通过更改参数 $\theta_{T_c^g}$，可以针对每个类别 c 和组 g 重新配置。算法 1 的复杂度为多项式复杂度：

$$T\left(|\Psi\rangle, \theta_{T_c^g}, D\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{c_n-1} \sum_{l=0}^{c_n^g-1} \left(\underbrace{T_{ini} + T_{VQE} + T_{SWAP} + T_{oth}}_{T_{qtot}} \right) = O(N \cdot c_n \cdot c_n^g \cdot T_{qtot}), \tag{24}$$

由于三次 for 循环（T_{ini} 表示算法/电路中量子部分初始化所需的固定时间）。理论上，如果类别数和组数也都等于探针总数 N，则最大复杂度可达到 $O(N^3)$。对于我们的数据，假设有 N 个探针和两个主要类别——零（0）和一（1）——那么复杂度可表示为 $T(N \cdot 0_n^g 1_n^g)$，其中总数

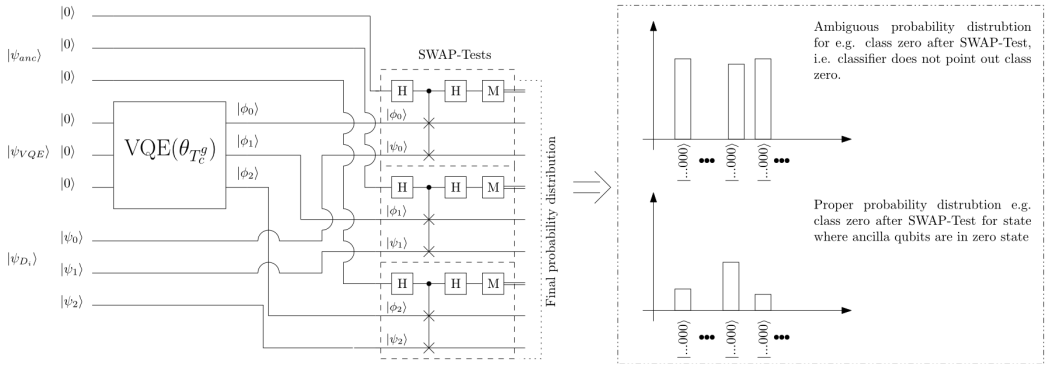

图 6：本文所讨论的数据集对应的 VQE 分类电路通用方案。经过预训练的拟设电路根据其参数生成模式态， $\theta_{T_c^g}$ 这些模式态可明确对应某一特定类别。SWAP 测试用于计算样本与平均模式态之间的距离。

探针总数为 N，而两个类别中各组的探针数量会影响分类计算任务的复杂度。 T_{qtot} （由量子电路实现的部分）的复杂度仅取决于 VQE 电路的深度，因为 SWAP 测试的电路深度是常数，等于三层。一般而言，VQE 电路的深度应视为多对数函数 $O(\log^c \frac{1}{\varepsilon})$ 和 $c \approx 4$。在这种情况下， ε 是 VQE [6]学习过程后所得状态的准确率。由于复杂度呈指数增长，所需量子比特数始终与维度呈对数关系；对于维度为 d的单个探针，我们只需要对数数量的量子比特 q_n:

$$q_n = \log_2 d. \tag{25}$$

在所分析的问题中，八个输入特征需要使用三个量子比特。

此外，可以并行调用数量充足的变分量子本征求解器实例，并将观测值分配给独立电路，以实现并行处理，从而获得额外的线性加速。

算法1： MVQEClassification($|\Psi\rangle, \theta_{T_c^g}, D$) $\longrightarrow$ (C, U) 用于对一组 D 进行数据分类的算法（N 表示观测值的数量）。整个量子寄存器标记为$|\Psi\rangle$，而$\theta_{T_c^g}$是类别 c 和组g的拟设电路参数。对于每个类别，给定接受范围（Λ_c^g， Ω_c^g）。符号c_n 表示类别数量， c_n^g 表示类别 c 中的组数。索引 i_c 表示第 i 个探针属于类别 c

输入： $|\Psi\rangle$， $\{\theta_{T_c^g}\}$， D
输出： C， U
$C = \emptyset$； $U = \emptyset$；
对于 $i \leftarrow 0, \cdots, N-1$ **执行**
  对于 $c \leftarrow 0, \cdots, c_n - 1$ **执行**
    对于 $l \leftarrow 0, \cdots, c_n^g - 1$ **执行**
      初始化子寄存器 $|\psi_{anc}\rangle$，使用 $|0\rangle$；
      初始化子寄存器 $|\psi_{VQE}\rangle$，使用 $|0\rangle$；
      初始化子寄存器 $|\psi_{D_i}\rangle$，使用 D_i；
      执行变分量子本征求解器($|\psi_{VQE}\rangle, \theta_{T^{g=l}}$) $\rightarrow |\phi_c^{g=l}\rangle$；
      P_{D_i} = 执行 SWAP 测试$\left(|\phi_c^{g=l}\rangle, |\psi_{D_i}\rangle\right)$；
      如果 $\Lambda_c^g < P_{D_i} < \Omega_c^g$ **那么**
        $C_{i_c} = C_{i_c} \cup D_i$；
        探针 $|\psi_{D_i}\rangle$ 被分类为类别 c （组 g）；
      end
      else
        $U = U \cup (|\psi_{D_i}\rangle, c)$)；
        探针 $|\psi_{D_i}\rangle$ 不被识别为类别 c 的探针；
      end
    end
  end
end
返回 C , U

5.3 所提方法的准确率

通过采用多个 VQE 变体对所提出的解决方案进行了验证。表 4 展示了针对所分析数据集获得的结果。对总体效果进行了检查，即正确分类样本的数量，

此外，对于所提出的解决方案，还验证了给定分类器如何处理来自另一类别的样本，从而能够指出错误分类的情况。还应注意，VQE电路生成的状态能够以极低的错误率指示给定类别。计算得到的代价函数值 f（公式(23)）小于 ≈ 0.25，通常取值范围为 (0.05,0.1)。

表 4：采用不同版本拟设电路的多种量子电路变体的 VQE 分类质量。q 参数表示用于编码观测值特征的量子比特数量，f 表示用于编码特征的数值数量，al 表示拟设电路中数值的数量。std-ansatz-tuned-epsilon 表示参数 Ω_c^g 经过了人工调整，例如通过选择接受阈值，并多次重复 VQE 的学习过程。名称 std- tuned-ansatz-tuned-epison 表示采用了（B）变体拟设，并再次调整 epsilon参数，以提高分类器的灵敏度。

No.	分类器简称	基本参数	准确率
1	VQE^8	q=8, f=1, al=1	71.25%
2	VQE^8	q=8、f=1、al=2	81.25%
3	VQE^8	q=8、f=1、al=3	88.75%
4	VQE^8	q=8、f=2、al=2	91.25%
5	VQE^3，标准试探形式	q=3, al=1	85.00% (22%)
6	VQE^3，标准试探形式	q=3, al=2	95.00% (27%)
7	VQE^3, std-ansatz-tuned-epsilon	q=3, al=2	100.00% (0%)
8	VQE^3, 标准调优试探形式	q=3, al=1	87.50% (32%)
9	VQE^3，标准调优试探形式	q=3, al=2	97.50% (7%)
10	VQE^3，标准调谐试探形式调谐 epsilon	q=3, al=1	98.50% (1%)
11	VQE^3，标准调谐试探形式调谐 epsilon	q=3, al=2	100.0% (0%)

对于本文所述的方法，最佳结果由图5所示的两个试探电路实现。尤其是案例（B），除了对电路进行多次训练外，还对分类阈值的参数进行了适当选择，从而仅通过双层电路便获得了较高的 100% 分类效率（表 4 中的第 7 和第 11 项）。该版本

（B）在调整 Ω_c^g 值后，仅使用一层也可以达到 100% 准确率。所有样本均被正确分类，类别 1 中没有误报。还应注意的是，使用三个量子比特来描述样本，也加快了优化过程。使用 SPSA 优化器 [26], [29], [1]进行 500 次迭代时，学习时间约为 30 秒（最差情况下为 35 秒）；所使用的处理器为 Intel Xeon W-2245 3.9 GHz，操作系统为 Windows 11，Python 版本为 Python 3.10.7。相比之下，对于基于八个量子比特的变分量子本征求解器方法，使用 COBYLA 优化器[22], [2]时，学习时间超过 600 秒（案例 4 的最差时间超过 700 秒，见表 4）。然而，这里同样实现了较高的分类效率；并且如图所示，增加拟设电路层数会带来准确率的提升。

6 结论

在本研究中，我们证明了变分量子本征求解器方法结合 SWAP 测试可用于执行分类任务。首先，我们对所分析的数据集进行了归一化。此过程避免了某些变量对所构建模型产生过大的影响，并将经典观测值转换为量子态。这种数据准备策略具有普适性，可用于任何类型的变量。

通过采用经典机器学习方法，我们在第 3.4 节中证明，经典计算机能够以较高的准确率解决所构建的决策问题。然而，能够拟合所分析数据的经典模型相当复杂（例如，采用多项式核函数的支持向量机或随机森林分类器）。

在结合变分量子本征求解器方法与 SWAP 测试的所述方法中，可以看出，该方案简单，且由于量子态具有天然特性——指数级容量，所构建电路的复杂度仅为对数级。

实验过程中，在制备的样本中检测到了纠缠。变分量子本征求解器方法还使我们能够在保留纠缠现象的情况下对类别进行建模。所有已开展数值实验的源代码（包括绘图代码）均可在代码仓库 [25] 中找到。

致谢

我们感谢波兰 Zielona G´ora 大学控制与计算工程研究所（ISSI）的 *Q-INFO* 组所开展的有益讨论。我们也感谢匿名审稿人对论文初稿提出的宝贵意见。数值结果使用了位于波兰 Zielona G´ora 大学控制与计算工程研究所的“GPUμ-Lab”所提供的硬件和软件资源。

参考文献

[1]Artem Agafonov、Pavel Dvurechensky、Gesualdo Scutari、Alexander Gasnikov、Dmitry Kamzolov、Aleksandr Lukashevich 和 Amir Danesh- mand。用于分布式随机优化的加速二阶方法，2021年。[2]Andrew Arrasmith、M. Cerezo、Piotr Czarnik、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。贫瘠高原对无梯度优化的影响。《量子》，5:558，2021年10月。[3]Adriano Barenco、Andr´e Berthiaume、David Deutsch、Artur Ekert、Richard Jozsa 和 Chiara Macchiavello。通过对称化稳定量子计算。《SIAM 计算杂志》，26(5):1541–1557，1997年。[4] M. Bilkis、M. Cerezo、Guillaume Verdon、Patrick J. Coles 和 Lukasz Cincio。用于变分量子算法的半无关先验结构与可变结构。《量子机器智能》，5(2):43，2023年11月。[5] Nick S. Blunt、Joan Camps、Ophelia Crawford、R´obert Izs´ak、Sebas- tian Leontica、Arjun Mirani、Alexandra E. Moylett、Sam A. Scivier、Christoph S¨underhauf、Patrick Schopf、Jacob M. Taylor 和 Nicole Holzmann。量子计算在药物发现应用中的当前先进水平展望。《化学理论与计算杂志》，18(12):7001–7023，2022年。PMID: 36355616。

[6] Carlos Bravo-Prieto、Josep Lumbreras-Zarapico、Luca Tagliacozzo 和 Jos´e I. Latorre。凝聚态物质系统中变分量子电路深度的扩展。《量子》，4:272，2020年5月。[7] Yudong Cao、Jonathan Romero、Jonathan P. Olson、Matthias Degroote、Peter D. J ohnson、M´aria Kieferov´a、Ian D. Kivlichan、Tim Menke、Borja Peropadre、Nicolas P. D. Sawaya、Sukin Sim、Libor Veis 和 Al´an Aspuru-Guzik。量子计算时代的量子化学。《Chemical Reviews》，119(19):10856–10915，2019年。PMID: 31469277。[8] M. Cerezo、Andrew Arrasmith、Ryan Babbush、Simon C. Benjamin、Suguru Endo、Keisuke Fujii、Jarrod R. McClean、Kosuke Mitarai、Xiao Yuan、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。变分量子算法。《Nature Reviews Physics》，3(9):625–644，2021年9月。[9] M. Cerezo、Kunal Sharma、Andrew Arrasmith 和 Patrick J. Coles。变分量子态本征求解器。npj Quantum Information，8(1):113，2022年9月。[10] D. Chivilikhin、A. Samarin、V. Ulyantsev、I. Iorsh、A. R. Oganov 和 O. Kyriienko。多目标遗传变分量子本征求解器：多目标遗传变分量子本征求解器，2020年。[11] Edward Farhi、Jeffrey Goldstone 和 Sam Gutmann。一种量子近似优化算法，2014年。[12] Dmitry A. Fedorov、Bo Peng、Niranjan Govind 和 Yuri Alexeev。变分量子本征求解器方法：简要综述与最新进展。《Materials Theory》，6(1):2，2022年1月。[13] Francisco M. Fern´andez。关于瑞利-里兹变分法，2023年。[14] Roman Gielerak、Marek Sawerwain、Joanna Wi´sniewska 和 Marek Wr´oblewski。Entdetector：用于双体量子态的纠缠检测工具箱。载于 Maciej Paszynski、Dieter Kranzlm¨uller、Valeria V. Krzhizhanovskaya、Jack J. Dongarra 和 Peter M. A. Sloot（编），《计算科学 – ICCS 2021》，第113–126页，Cham，2021年。Springer International Publishing。[15] A. Kulshrestha 和 I. Safro。BEINIT：避免变分量子算法中的贫瘠高原。载于2022年IEEE国际会议

载于量子计算与工程（QCE），第197–203页，美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，2022年9月。IEEE计算机学会。[16]Vincenzo Lordi 和 John M. Nichol。面向可扩展量子计算的材料科学进展与机遇。《MRS Bulletin》，46(7):589–595，2021年7月。[17]Jarrod R McClean、Jonathan Romero、Ryan Babbush 和 Al´an Aspuru-Guzik。变分混合量子-经典算法理论。《New Journal of Physics》，18(2):023023，2016年2月。[18] Kouhei Nakaji 和 Naoki Yamamoto。交替分层试探波函数在量子计算中的表达能力。Quantum，5:434，2021年4月。[19] Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，2010年6月。[20]F. Pedregosa、G. Varoquaux、A. Gramfort、V. Michel、B. Thirion、O. Grisel、M. Blondel、P. Prettenhofer、R. Weiss、V. Dubourg、J. Vander-plas、A. Passos、D. Cournapeau、M. Brucher、M. Perrot 和 E. Duch-esnay。Scikit-learn：Python中的机器学习。《Journal of Machine Learning Research》，12:2825–2830，2011年。[21] Alberto Peruzzo、Jarrod McClean、Peter Shadbolt、Man-Hong Yung、Xiao-Qi Zhou、Peter J. Love、Al´an Aspuru-Guzik 和 Jeremy L. O’Brien。在光子量子处理器上实现的变分本征值求解器。《Nature Communications》，5(1):4213，2014年7月。[22] M. J. D. Powell。一种通过线性插值对目标函数和约束函数建模的直接搜索优化方法。载于 Susana Gomez 和 Jean-Pierre Hennart 编，《Advances in Optimization and Numerical Analysis》，第51–67页。Springer Netherlands，多德雷赫特，1994年。[23]John Preskill。NISQ时代及以后的量子计算。Quantum，2:79，2018年8月。[24] Arthur G. Rattew、Shaohan Hu、Marco Pistoia、Richard Chen 和 Steve Wood。一种领域无关、抗噪声、硬件高效的进化变分量子本征求解器，2020年。

[25] Marek Sawerwain 和 Joanna Wi´sniewska。示例文件源代码的 GitHub 仓库，2024年。[26] J.C. Spall。仅使用函数测量的加速二阶随机优化。载于第36届 IEEE 决策与控制会议论文集，第2卷，第1417–1424页，第2卷，1997年。[27] Jules Tilly、Hongxiang Chen、Shuxiang Cao、Dario Picozzi、Kanav Setia、Ying Li、Edward Grant、Leonard Wossnig、Ivan Rungger、George H. Booth 和 Jonathan Tennyson。变分量子本征求解器：方法与最佳实践综述。《物理学报告》，986:1–128，2022年。《变分量子本征求解器：方法与最佳实践综述》。[28] Pauli Virtanen 等。SciPy 1.0：用于科学计算的基础 Python 算法。《自然方法》，17(3):261–272，2020年3月。[29] Long Wang、Jingyi Zhu 和 James C. Spall。用于含噪测量下无梯度优化的混合同时扰动随机逼近。载于2018年美国控制会议年会（ACC），第3774–3779页，2018年。[30] Michael L. Waskom。Seaborn：统计数据可视化。《开放源代码软件期刊》，6(60):3021，2021年。[31] Dave Wecker、Matthew B. Hastings 和 Matthias Troyer。实用量子变分算法的进展。Phys. Rev. A，92:042303，2015年10月。[32] Joanna Wi´sniewska。量子决策算法中酉矩阵的快速计算方法。《波兰环境研究杂志》，18:381–385，2009年。[33] J. Wi´sniewska 和 M. Sawerwain。量子分类在赊销风险评估中的应用。载于第36届国际商业信息管理协会（IBIMA）会议论文集《全球疫情时代的可持续经济发展与教育卓越提升》；ISBN：9780999855157，第6299–6308页，格拉纳达，西班牙，2020年。诺里斯敦：国际商业信息管理协会（IBIMA）。

[34] Fabio Zoratti、Giacomo De Palma、Bobak Kiani、Quynh T. Nguyen、Milad Marvian、Seth Lloyd 和 Vittorio Giovannetti。提升用于量子纠错的变分量子算法的速度。Phys. Rev. A，108:022611，2023年8月。