arXiv:2303.02807v1 [math.NT] 6 Mar 2023

二元模同余群的共轭表示

PHAM HUU TIEP

Abstract. 受附录 [H] 中关于迭代Shimura积分上的海克作用的研究 [H], 启发，我们在此证明：对于任意素数 $p \geq 5$ 和任意整数 $n \geq 1$， $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$的每个在$\mathrm{Z}(G)$上作用平凡的复不可约表示，都是 G的共轭表示的不可约成分。

设 G 为一个有限群。考虑 G 通过对自然基 $\{x \mid x \in G\}$的共轭作用，在复群代数 $\mathbb{C}G = \langle x \mid x \in G\rangle_{\mathbb{C}}$（即其向量空间）上的作用：

$$g : x \mapsto gxg^{-1}.$$

相应的表示 $\Pi = \Pi_G$ 称为共轭表示，也称伴随表示。该表示及其特征 π_G 是有限群表示论中的标准研究对象。例如，该模的 G-不变子模构成群代数 $\mathbb{C}G$的中心。平凡表示 1_G 在 Π_G中的重数等于 G中共轭类的数目 $k(G)$。然而，对于 Π_G中其他不可约直和项的重数，我们几乎一无所知。这个问题历史悠久；大多数研究都致力于确定 Π_G的这些不可约成分。参见 [R], [Sch], [P] 及其中的参考文献。

显然， Π_G 的任何不可约成分在中心 $\mathrm{Z}(G)$ 上都是平凡的。事实证明，这一条件并不充分。更一般地，对于有限单群，确定 Π_G 的不可约成分这一问题已经得到完全解决：交错群和散在群见[HZ] ，李型群见 [HSTZ]:

定理1。 [HSTZ，定理1。1] 设 G 是一个有限非阿贝尔单群，但不包括 $\mathrm{PSU}_n(q)$（其中 $n \geq 3$ 与 $2(q+1)$互素）。那么， G 的每个不可约特征都是共轭特征 π_G的一个组成部分。在例外情形下，除了维数为 $(q^n - q)/(q + 1)$ 的那个唯一不可约特征外，每个不可约特征都会出现。

作为定理1的一个特例，我们看到，当 $G = \mathrm{PSL}_2(p)$且 $p \geq 5$为任意素数时， π_G 包含 $\mathrm{Irr}(G)$（即 G的复不可约特征的集合）。等价地，对于 π_G，其中 $G = \mathrm{SL}_2(p)$，其不可约成分恰好是 G 中在 $\mathrm{Z}(G)$ 上平凡的不可约特征。

正如 [H], 所示，为了研究迭代Shimura积分上的某些海克作用，参见 [H，第§23], 节，将上述结果推广到所有二元模群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$，对所有素数 p 和所有整数 $n \geq 1$，具有重要意义。

本文的主要结果为 $p \geq 5$ 解决了这一问题。

作者衷心感谢美国国家科学基金会（资助项目 DMS-2200850）、西蒙斯基金会以及 Joshua Barlaz 数学讲席的支持。本工作的部分内容是在作者访问普林斯顿大学和麻省理工学院期间完成的。作者很高兴感谢普林斯顿大学和麻省理工学院的热情接待，以及富有启发性的学术环境。作者感谢 Richard Hain 将这一问题提请自己关注，也感谢 Gabriel Navarro 和 Eamonn O'Brien 就该问题进行的有益讨论，并在 $p = 2,3$的情形下完成了若干计算机计算。

定理 2. 设 $p \geq 5$ 为任意素数，n 为任意自然数，并令 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$。那么，$G$ 的每个在中心对合 $z = -I_2$ 上为平凡的不可约特征，都是共轭特征标 π_G 的组成部分。

首先回顾一些众所周知的事实。

引理 3。设 G 是一个有限群，且 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$。那么，χ 是 π_G 的一个组成部分，当且仅当存在某个 $g \in G$，使得 χ 在中心化子 $\mathbf{C}_G(g)$ 上的限制包含主特征标 $1_{\mathbf{C}_G(g)}$。

证明。显然，π_G 是 G 通过共轭作用于自身所得到的置换特征标。该作用的轨道恰好是共轭类 $g_i^G, 1 \leq i \leq k(G)$。因此，$\pi_G = \sum_{i=1}^{k(G)} \pi_i$，其中 π_i 是 G 作用于 g_i^G 所得到的置换特征标。现在，π_i 就是诱导特征标 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_G(g_i)}^G(1_{\mathbf{C}_G(g_i)})$。由弗罗贝尼乌斯互反定理，

$$[\pi_i, \chi]_G = [1_{\mathbf{C}_G(g_i)}, \chi|_{\mathbf{C}_G(g_i)}]_{\mathbf{C}_G(g_i)},$$

因此，χ 是 π_i 的一个不可约成分，当且仅当 $\chi|_{\mathbf{C}_G(g_i)}$ 包含主特征标 $1_{\mathbf{C}_G(g_i)}$。□

引理 4. 设 G 为一个有限群，且 $N \lhd G$ 为任意正规子群。设 $\theta \in \mathrm{Irr}(G/N)$ 是 $\pi_{G/N}$ 的一个组成部分。那么，将 θ 通过膨胀视为 G 的一个特征后，它也是 π_G 的一个组成部分。

证明。根据引理 3，存在某个 $g \in G$，使得 $\theta|_{\bar{C}}$ 包含 $1_{\bar{C}}$，其中 $C := \mathbf{C}_{G/N}(\bar{g})$ 对于 $\bar{g} := gN$。我们可以将 $C = D/N$ 写成某个子群 D 的形式，其中 G 包含 N。将 θ 膨胀为一个 G-特征，并将 $1_{\bar{C}}$ 膨胀为一个 D-特征，于是有 $\theta|_D$ 包含 1_D。但是，D 包含 $1_{\mathbf{C}_G(g)}$，因此 $\theta|_{\mathbf{C}_G(g)}$ 包含 $1_{\mathbf{C}_G(g)}$。□

推论 5. 如果 $p \geq 2$ 是一个素数且 $G = \mathrm{SL}_2(p)$，那么 π_G 包含 G 的每个在 $\mathbf{Z}(G)$ 上为平凡的不可约特征。

证明。由定理1，若 $p \geq 5$，则 $\pi_{G/Z}$ 包含 $\mathrm{Irr}(G/Z)$。$p = 3$ 也同样成立。（事实上，$\mathrm{PSL}_2(3) \cong \mathrm{A}_4$ 有四个不可约特征标，其中三个次数为 1，一个次数为 3。前三个在 $\mathrm{PSL}_2(3)$ 中任意对合的中心化子上都取平凡值，而次数为 3 的特征标限制到任意 3 阶元素的中心化子上时，等于正则特征标。因此，由引理 3 可得所述结论。）现在，对于 $p \geq 3$，由引理 4 即可得出该结论。

对于 $p = 2$，$\mathrm{SL}_2(2) \cong \mathrm{S}_3$ 有 3 个不可约特征标。其中两个次数为 1，限制到 3-循环的中心化子上时等于主特征标。剩下的一个次数为 2，限制到 2-循环的中心化子上时等于正则特征标。因此，由引理 3 可得该结论。□

引理 6. 设 $p \geq 3$ 为任意奇素数，$q = p^a$ 满足 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，并考虑 $V := \mathbb{F}_q^3$，其上带有非退化对称双线性型 $(\cdot,\cdot)$，以及相应的特殊正交群 $\mathrm{SO}(V)$。设 U 是 V 的一个包含非零向量 u 的二维非退化子空间，且 $(u,u) = 0$。若 $0 \neq w \in V$，则 w 关于 $\Omega(V) = [\mathrm{SO}(V), \mathrm{SO}(V)]$ 的轨道与 U 相交。

证明. 由于 U 包含 u 且是非退化的，我们可以找到 U 的一组基 $\{u, v\}$，使得 $(u,u) = (v,v) = 0$ 且 $(u,v) = 1$（例如参见 [KlL，命题 2.5.3] 的证明）。对于任意 $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$，有 $(u + \lambda v, u + \lambda v) = 2\lambda$。因此存在某个 $0 \neq w_0 \in U$，使得 $(w_0, w_0) = (w, w)$。根据 Witt 引理（例如参见 [KlL，命题 2.1.6]），存在某个 $g_0 \in \mathrm{O}(V)$，使得 $g_0(w) = w_0$。注意，$G := \mathrm{O}(V) = \langle -I_3 \rangle \times \mathrm{SO}(V)$，且 $\Omega(V)$ 在 $\mathrm{SO}(V)$ 中的指数为 2，参见 [KlL，表 2.1.C]。

此外，假设 $(w,w) \neq 0$。那么对于 $W := w^\perp$，我们有 $\mathrm{Stab}_G(w) = \mathrm{O}(W) \cong \mathrm{O}_2^\pm(q)$，且 $[\mathrm{O}(W) : \mathrm{SO}(W)] = [\mathrm{SO}(W) : \Omega(W)] = 2$，参见 [KlL, Proposition 2.9.1(iii)]。由此可得

$G = \Omega(V)\mathrm{Stab}_G(w)$，因此我们可以写成 $g_0 = gh$，其中 $g \in \Omega(V)$ 且 $h(w) = w$。现在我们有$g(w) = gh(w) = g_0(w) = w_0 \in U$，如所求。

现在假设 $(w, w) = 0$。上述论证表明，G 在 V中的 $\mathcal{O}$各向同性向量集合上迁移作用。直接检查可得

$$|\mathrm{Stab}_G(w)| = 2|\mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}(V)}(w)| = 2q.$$

因此 $|\mathcal{O}| = q^2 - 1$，且 $\mathsf{SO}(V)$ 在 $\mathcal{O}$ 上迁移作用。由于 $\mathsf{Stab}^{\mathrm{SO}(V)}(w)$ 的阶 q 为奇数，它包含于 $\Omega(V)$ 中，因此 $\mathcal{O}$ 分裂为两个 $\Omega(V)$-轨道，每个轨道的长度为 $(q^2 - 1)/2$。由于$w\, w_0\, u \in \mathcal{O}$，不妨设 $g \in \mathsf{SO}(V)$ 且 $w_0 = u$。如果 $g \in \Omega(V)$，则结论成立。否则，我们可以找到一个非平方元素 $\delta \in \mathbb{F}_q^\times$，并注意到 $\mathsf{SO}(U)$ 中的元素 $s := \mathsf{diag}(\delta, \delta^{-1})$ 不包含于 $\Omega(V)$ 中（因为 $\Omega(U) \cong C_{(q-1)/2}$且 $\mathsf{SO}(U) \cong C_{q-1}$）。现在 $sg(w) = s(u) = \delta u \in U$，结论再次成立。□

引理 7. 设 E 是有限群，$F \le \mathsf{Z}(E)$，$x \in E$，且 λ 是 F的不可约特征。假设我们可以找到 $h \in E$，使得换位子 $[x, h]$ 属于 $F \smallsetminus \mathsf{Ker}(\lambda)$。那么，对于任何位于 λ之上的 E 的不可约特征 φ，都有 $\varphi(x) = 0$。

证明。设 φ 由表示 $\Phi\colon E \to \mathsf{GL}_d(\mathbb{C})$给出。根据假设，对于某个 $1 \neq \alpha \in \mathbb{C}^\times$，有 $\Phi([x, h]) = \alpha I_d$。现在我们有 $\alpha I_d = \Phi(x)\Phi(hx^{-1}h^{-1})$，因此

$$\Phi(x) = \alpha\Phi(hxh^{-1}).$$

取迹，得到 $\varphi(x) = \alpha\varphi(hxh^{-1}) = \alpha\varphi(x)$，因此 $\varphi(x) = 0$。 □

现在我们固定任意素数 $p \ge 3$和任意整数 $n \ge 2$，并考虑

$$G = G_n := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

模 p 约化诱导出正合序列

$$1 \to E \to G \to G_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 1, \tag{7.1}$$

而模 p^{n-1} 约化诱导出正合序列

$$1 \to F \to G \to G_{n-1} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}) \to 1. \tag{7.2}$$

我们将用 $\mathbb{Z}$ 上的 $G \times 2\times 2$ 矩阵来表示元素。特别地，E 中的任意元素都可写成 $I_2 + pX$，其中 $X \in M_2(\mathbb{Z})$，而

$$F = \{I_2 + p^{n-1}Y \mid Y \in M_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Tr}(Y) = 0\}, \tag{7.3}$$

其中，迹条件等价于行列式为 1。

对于任意满足 $i + j \ge n$ 的 $i, j \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$，以及任意 $X, Y \in M_2(\mathbb{Z})$，我们有

$$(I_2 + p^iX)(I_2 + p^jY) = I_2 + p^iX + p^jY = (I_2 + p^jY)(I_2 + p^iX) \tag{7.4}$$

在 G 中。因此

$$F \le \mathbf{Z}(E),$$

因此，G 在 F 上的共轭作用的核包含 E 和 $\boldsymbol{z} = -I_2$。于是，F 可视为一个 $\mathbb{F}_pS$-模

$$V = \{Z \mid Z \in M_2(\mathbb{F}_p), \mathrm{Tr}(Z) = 0\}$$

其大小为 p^3，其中“线性化”由映射给出

$$I_2 + p^{n-1}Y \mapsto Y (\mathrm{mod}\ p) \tag{7.5}$$

利用 (7.3)，以及 $S := G_1/\langle \boldsymbol{z} \rangle \cong \mathsf{PSL}_2(p)$。

在同一化 (7.5) 下，G_1 在 V 上的作用通过 $g : Z \mapsto gZg^{-1}$给出。（事实上，可以证明 V 是 G_1的伴随模。）注意，S 中阶为 2 的元素 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 在 V上作用非平凡。现在，若 $p > 3$，则 S是单群，因此 S必须忠实地作用于 V。若 $p = 3$，则 $S \cong \mathrm{A}_4$ 的任意非平凡正规子群都包含 S中任意一个阶为 2 的元素，因此 S 也忠实地作用于 V。

S 在 V 上的作用保持迹型

$$(Z, T) = \mathrm{Tr}(ZT) \tag{7.6}$$

这给出了 V上的一个非退化对称双线性形式。由于 S 的阶为 $p(p^2-1)/2 = |\Omega(V)|$，且 S 忠实地作用于 V，因此我们已经证明

$$\Omega(V) = S.$$

注意，元素 $1-p$ 在$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$中的阶为 p^{n-1}。因此，我们可以找到$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$的一个生成元 t($1-p$)，其中 t 的阶为 $p-1$。现在我们固定这些元素

$$A := \begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 1+p+p^2+\ldots+p^{n-1} \end{pmatrix},\ g := \begin{pmatrix} t(1-p) & 0 \\ 0 & t^{p-2}(1+p+p^2+\ldots+p^{n-1}) \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

$G = G_n$的元素，并注意到 $A \in E$ 的阶为 p^{n-1}，而 g 的阶为 $p^{n-1}(p-1)$.

Le引理8。设 $p \geq 5$。对于 $G = G_n$中由(7.7)定义的元素 g，我们有 e

$$C := \mathbf{C}_G(g) = \langle g \rangle.$$

证明。我们将对 n 进行归纳，归纳基础 $n = 1$ 显然。对于归纳步骤 $n \geq 2$，只需证明任意元素 $h \in \mathrm{C}_G(g)$ 都包含于 $\langle g \rangle$。利用序列 (7.2) 和归纳假设，我们得到 $\mathrm{C}^{G/F}(g) = \langle gF \rangle$。由于 $\mathrm{C}^{G/F}(g) = \langle gF \rangle$，我们可以将 h 调整为乘以 g 的某个幂，并假设

$$h \in \mathbf{C}_F(g).$$

在 $G/E \cong \mathrm{SL}_2(p)$ 对 F 的共轭作用下（见 (7.1)），g 经由 $\mathrm{diag}(t, t^{-1})$ 作用，因此有一个由 $\mathrm{diag}(1, -1)$ 生成的一维不动点子空间。由此可得 $|\mathrm{C}_F(g)| = p$，进而 $\mathrm{C}_F(g) = \langle A^{p^{n-2}} \rangle$。因此 $h \in \langle A^{p^{n-2}} \rangle$，从而 $h \in \langle g \rangle$。□

此外，设 F_0 是与子空间

$$V_0 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

在同一化 (7.5) 下相对应的 V 的子群。

引理 9. 设 $n \geq 3$、$0 \leq j \leq n-3$ 和 i 是与 p 互素的任意整数。那么

$$\left\{ [A^{ip^j}, B] \mid B = I_2 + p^{n-j-2}Y \in E, Y \in M_2(\mathbb{Z}) \right\} = F_0.$$

证明。令 $X := \mathrm{diag}(-i, i)$。对 $j \geq 0$ 作归纳法可得

$$A^{ip^j} = I_2 + p^{j+1}(X + pX_1),\ A^{-ip^j} = I_2 - p^{j+1}(X + pX_2)$$

对某些依赖于 j 的 $X_1, X_2 \in M_2(\mathbb{Z})$。对于任意 $B = I_2 + p^{n-j-2}Y$，模 p^n 有

$$\begin{aligned} A^{ip^j}B &\equiv A^{ip^j} + p^{n-j-2}Y + p^{n-1}XY, \\ A^{ip^j}BA^{-ip^j} &\equiv I_2 + p^{n-j-2}Y - p^{n-1}YX + p^{n-1}XY \\ &= B + p^{n-1}(XY - YX), \\ A^{ip^j}BA^{-ip^j}B^{-1} &\equiv I_2 + p^{n-1}(XY - YX), \end{aligned}$$

（对于最后一个同余式，我们还使用了 $B^{-1} \equiv I_2$（模 p）。令 $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中 a、b、c、$d \in \mathbb{Z}$，我们有 $XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$，这表明 $[A^{ip^j}, B] \in F_0$。由于 $F_0 \leq \mathbf{Z}(E)$，对任意 $B' \in E$，我们有

$$[A^{ip^j}, B'][A^{ip^j}, B] = A^{ip^j}B'A^{-ip^j} \cdot A^{ip^j}BA^{-ip^j}B^{-1} \cdot B'^{-1} = [A^{ip^j}, B'B],$$

这表明

$$F' := \left\{ [A^{ip^j}, B] \mid B = I_2 + p^{n-j-2}Y \in E, Y \in M_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

是 F_0 的子群。分别取 $a = d = c = 0$ 和 $0 \leq b \leq p-1$、$a = d = b = 0$ 和 $0 \leq c \leq p-1$，我们看到 F' 包含所有形如 $\begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和形如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$ 的元素。因此，子群 F' 与 F_0 重合。

□

定理 2 的证明。我们对 $n \geq 1$ 进行归纳，其中归纳基础 $n = 1$ 已在推论 5 中说明。

对于归纳基础 $n \geq 2$，我们考虑 (7.2) 中的正规子群 $F \lhd G = G_n$，它是一个阶为 p^3 的初等阿贝尔子群；并考虑 G 的任意一个在中心对合 $\boldsymbol{z}$ 上取值为平凡的不可约特征 χ。若 $\mathrm{Ker}(\chi) \geq F$，则由归纳假设和引理 4 可知，$\chi$ 是 π_G 的一个组成部分。因此，我们假设 $\mathrm{Ker}(\chi) \ngeq F$。于是，$\chi|_F$ 含有 F 的一个非平凡不可约特征 λ，由克利福德对应，

$$\chi = \mathrm{Ind}_J^G(\psi),$$

其中 $J = I_G(\lambda)$ 是 λ 的惯性群（因此 $J \rhd F$），且 $\psi \in \mathbf{Irr}(J)$ 位于 λ 之上。事实上，我们有$J \geq E$，因为 $F \leq \mathbf{Z}(E)$。

由引理 3，只需证明对于引理 8 中元素g的中心化子 $C = \langle g \rangle$，$\chi|_C$ 包含 1_C。根据麦基公式，$\chi|_C$包含 $\mathrm{Ind}_{J\cap C}^C(\psi|_{J\cap C})$。因此，只需证明，对于 J 的一个不可约特征 ψ（它位于 λ之上），其限制 $\psi|_{J\cap C}$ 包含 $1_{J\cap C}$。

我们再次使用映射 (7.5) 将 F 与 V对应起来。固定一个本原 p^{th} 次单位根 $\epsilon \in \mathbb{C}^\times$，我们可以找到唯一的元素 $0 \neq Z \in V$，使得

$$\lambda(T) = \epsilon^{\mathrm{Tr}(ZT)} \tag{9.1}$$

对于任意 $T \in V$。我们已经指出，$G/\langle E, \boldsymbol{z} \rangle$ 在 V上的作用为 $\Omega(V) \cong \Omega_3(p)$。此外，关于迹型 (7.6)，平面 V_0 是非退化的，并且包含各向同性向量 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。因此，在 G下对 λ 作适当的共轭后，根据引理 6，我们可以假设

$$Z \in V_0. \tag{9.2}$$

由于迹型 (7.6) 是 G-不变的，任意元素 $x \in C$ 固定 λ 当且仅当它固定 Z。注意，对角子群 $\langle \mathrm{diag}(t, t^{-1}) \rangle = \langle gE \rangle$ 中任意一个既非 I_2 也非 $\boldsymbol{z} = -I_2$ 的元素

在 V 中只有一维不动点子空间 $\langle \mathrm{diag}(-1,1)\rangle$。因此，根据条件 (9.2)，任何这样的元素都不能固定 Z。换言之，

$$J \cap C = \langle A\rangle \times \langle \boldsymbol{z}\rangle.$$

由于 χ 在中心对合 $\boldsymbol{z}$ 上平凡，ψ 在 $\boldsymbol{z}$ 上也平凡。因此，只需证明 $\psi|_{\langle A\rangle}$ 包含主特征标 $1_{\langle A\rangle}$。

设 φ 是 $\psi|_E$ 的一个不可约成分。由于 ψ 在 $F \le \mathbf{Z}(E)$ 的特征 λ 之上，φ 也在 λ 之上，即 $\varphi|_F = \varphi(1)\lambda$。

首先假设 $n = 2$，于是 A 的阶为 p、$A \in F = E$ 和 $\varphi = \lambda$。在同一化 (7.5) 下，A 对应于 V 中的元素 $\mathrm{diag}(-1,1)$。公式 (9.1) 和条件 (9.2) 保证 $\lambda(A) = 1 = \lambda(1)$，因此得证。

现在假设 $n \ge 3$。与上面相同的论证表明，$A^{p^{n-2}}$ 包含在 λ 的核中，因此也包含在 φ 的核中。另一方面，任取整数 $0 \le j \le n-3$，以及任一与 p 互素的整数 i。如果 $\mathrm{Ker}(\lambda)$ 包含整个 F_0（它在 (7.5) 下对应于 V_0），那么由 (9.1) 可知 Z 是 $\mathrm{diag}(-1,1)$ 的倍数，这与 (9.2) 矛盾。因此

$$\mathrm{Ker}(\lambda) \not\ge F_0.$$

由引理 9，存在某个 $B \in E$ 使得

$$[A^{ip^j}, B] \in F \smallsetminus \mathrm{Ker}(\lambda).$$

由引理 7 可得 $\varphi(A^{ip^j}) = 0$。

我们已经证明，φ 在阶为 p^{n-1} 的循环群 $\langle A\rangle$ 中，所有不属于阶为 p的子群的元素上都取值为零；而在该子群上，φ 是平凡的。因此，$1_{\langle A\rangle}$ 在 $\varphi|_{\langle A\rangle}$ 中的重数等于

$$\frac{1}{p^{n-1}} \sum_{x \in \langle A\rangle} \varphi(x) = \frac{\varphi(1)}{p^{n-2}} > 0,$$

证明至此完成。 □

注 10. (i) 也有可能利用 [Ku] 的结果，为定理 2 给出另一种证明。定理 2 的当前证明有一个优点：它只依赖于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ 的结构，无需了解其特征标表。

(ii) Eamonn O'Brien 已使用 Magma 验证，定理 2 对带有$1 \le n \le 11$的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ 以及带有 $1 \le n \le 7$的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})$ 也成立。在 $p = 2,3$ 的情形下，我们对定理 2 的证明确实表明，$G/\mathbf{Z}(G)$ 的许多不可约特征标会出现在 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ 的共轭特征标中，但仍有一些特征标未被涵盖。目前尚不清楚 [Ta] 的结果能否用于证明 $p = 2,3$ 的定理 2。

References

[ ] 2302 00143 1 H R. Hain，迭代
[ ]
Shimura积分的环路与周期上的Hecke作用，arXiv：. v HSTZ G. Heide、J. Saxl、P.H. Tiep和A.E. Zalesski，李型单群的共轭作用、诱导表示与Steinberg平方， *Proc. Lond. Math. Soc.* **106** (2013), 908–930. [HZ] G. Heide和A.E. Zalesski，关于伴随表示的Passman问题，载于：“*Groups, Rings and Algebras*,
Proc. Conf. in Honour of D.S. Passman Contemp. Math. **420** 2006 163 176 ”, ( ), – . [KlL] P.B. Kleidman和M.W. Liebeck， *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups*，伦敦数学会讲义系列第129卷，剑桥大学出版社，1990. [Ku] P. Kutzko，二元模同余群的特征， *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1973), 702–704.[P] D.S. Passman，群代数与包络代数的伴随表示，*tiques* **36** 1992 861 878 *Publications Mathema* ( ),
– . [R] R. Roth，有限群的共轭表示， *Pacific J. Math.* **36** (1971), 515–521.

[Sch] T. Scharf，另一个证明：对称群的共轭表示包含每个不可约表示， *Arch. Math.* **54** (1990), 427–429. [Ta] S. Tanaka，模 p^λ *J. Math. Kyoto* 的二元模同余 *Univ.* **7** 1967 123 132
群的不可约表示，( ), – .

Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854
Email address: tiep@math.rutgers.edu