arXiv:2303.02809v1 [math.OA] 6 Mar 2023

一致超 McDuff II_1 因子

ISAAC GOLDBRING、DAVID JEKEL、SRIVATSAV KUNNAWALKAM ELAYAVALLI 和 JENNIFER PI

摘要。我们引入并研究一致超 McDuff II_1 因子这一类。我们证明，该类在初等等价下封闭，并且恰好与 [AGE22] 中引入的具有 Brown 性质的 II_1 因子类相同。我们证明，某一类存在闭因子——即所谓的无限泛型因子——是一致超 McDuff 的，从而改进了 [CDI22] 的一项近期结果。我们还证明，Popa 的强 McDuff II_1 因子类是一致超 McDuff 的。最后，我们考察有限泛型 II_1 因子在何种情况下是一致超 McDuff 的。

1. 引言

自 Murray 和 von Neumann 时代以来，II_1 因子中的中心序列研究一直是算子代数的核心主题。他们在 [MN43] 中引入了 Gamma 性质的概念，该性质指出存在非平凡中心序列，并可用于区分超有限 II_1 因子与自由群因子 $L(\mathbb{F}_2)$。McDuff [McD69] 利用中心序列极其丰富这一性质，构造出连续统多个彼此不同构的可分 II_1 因子，解决了自该领域创立以来一直悬而未决的一个基本问题。在 [McD70], 中，McDuff 证明中心序列代数非交换等价于张量吸收超有限 II_1 因子；从那以后，这种对 Gamma 性质的强化被称为 McDuff 性质，在该领域具有重要的概念意义。

II_1 因子的模型论由 [FHS13；FHS14a；FHS14b], 开创，此后一直是算子代数理论中的一个活跃研究领域（有关近期综述，见 [GH22] 及其中的参考文献）。模型论所提供的诸多见解之一在于对超幂的分析；由于中心序列可以简单地视为一个II_1 因子M到其超幂 $M^{\mathcal{U}}$的对角嵌入的交换子，模型论尤其适合研究中心序列代数。（在本引言中，所有超滤子均假定为 $\mathbb{N}$上的非主超滤子。）II_1 因子的模型论研究的主要方向之一，是确定两个II_1 因子M 和 N 何时初等等价，记作 $M \equiv N$；在假设连续统假设的前提下，这等价于询问是否存在一个超滤子 $\mathcal{U}$，使得超幂 $M^{\mathcal{U}}$和 $N^{\mathcal{U}}$同构。（一般而言，本文假设连续统假设，以便能够对模型论性质给出此类代数刻画。）按初等等价分类II_1 因子，结果证明比按同构分类困难得多（例如，存在连续统多个两两不同构的可分II_1 因子，它们与给定的II_1 因子 [FHS14b，定理4.3]初等等价）。中心序列代数再次在初等等价问题中发挥了关键作用。事实上，首批

I. Goldbring 部分获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2504477 的资助。D. Jekel 部分获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2002826 的资助。S. Kunnawalkam Elayavalli 获得了西蒙斯博士后奖学金的资助。1

彼此不初等等价的II_1 因子示例（见 [FHS14b；FGL06；DL69；Zel69；GH17]），以及首个包含连续统多个彼此不初等等价的II_1 因子的族（有趣的是，它与McDuff因子相一致；见 [BCI17]），都关键性地使用中心序列代数的结构作为不变量（另见 [CIE22], ，其中展示了两个没有中心序列的、彼此不初等等价的II_1 因子）。尽管有这些结果，进一步推进具有中心序列的II_1 因子按初等等价的分类，仍然是一个富有挑战性的问题。

在本文中，我们通过确定 McDuff II_1 因子的一个在初等等价下保持不变的真子族来研究这一问题，并将其称为*一致超 McDuff* 因子。该术语的动机源于 [GH17], ，后者引入了超 McDuff 性质，即具有 II_1 因子中心序列代数的性质；近年来，这一性质在 von Neumann代数的模型论中受到了广泛关注（例如参见 [IS21；Mar18；AGE22；GH20a；CDI22]）。关于超 McDuff 性质与其他 Gamma性质因子子类之间的各种例子和关系，请参阅 [AGE22，第 6 节4]。本文引入了上述超 McDuff 性质的有限化重述的一致版本，并将其称为**一致超 McDuff 性质**。

定义。 McDuff II_1 因子 M 若满足以下条件，则称为**一致超 McDuff**：对于所有 $n \geq 1$，存在 $m \geq 1$，使得：对于所有满足 $|F| \leq n$ 的 $F \subseteq (M)_1$，存在满足 $|G| \leq m$ 的 $G \subseteq (M)_1$，并且对于任意 $(p, q) \in \mathcal{P}_2(M)$，均有

$$\max_{x \in G} \max(\|[x,p]\|_2, \|[x,q]\|_2) < \frac{1}{m},$$

存在 $u \in U(M)$，使得 $\|upu^* - q\|_2 < \frac{1}{n}$ 且 $\max_{x \in F} \|[x,u]\|_2 < \frac{1}{n}$。

首先，我们回顾一个在 [AGE22] 中首次引入的概念；该文还研究了这一概念，并将其用于证明 Jung 的一项关键结果的推广版本 [Jun07]（另见 [AK21]）。

定义。若一个可分 II_1 因子 M 对每个可分子因子 $N \subseteq M^{\mathcal{U}}$，都存在一个可分子因子 $N \subseteq P \subseteq M^{\mathcal{U}}$，满足 $P' \cap M^{\mathcal{U}}$ 为 II_1 因子，则称其具有 **Brown 性质**。

回顾一下，我们假设连续统假设成立，因此 M 的任意两个非主超幂都同构，这意味着 Brown 性质的定义不依赖于所选的超滤子。类似地，可以看出，若 M 具有 Brown 性质，且 N 与 M 初等等价，那么 N 也具有 Brown 性质。我们的第一个主要结果表明，一致超 McDuff 性质在初等等价下封闭，并且事实上与 Brown 性质一致：

定理 A. 对于一个 II_1 因子 M，以下条件等价：

(1) M *是一致超 McDuff。(2) 每个* $N \equiv M$ *都是一致超 McDuff。(3) 每个* $N \equiv M$ *都是超 McDuff。(4) 对于自然数集* $\mathbb{N}$ *上的每个非主超滤子* $\mathcal{U}$，$M^{\mathcal{U}}$ *都是超 McDuff。(5) 对于自然数集* $\mathbb{N}$ *上的某个非主超滤子* $\mathcal{U}$，$M^{\mathcal{U}}$ *是超 McDuff。(6) 每个可分* $N \equiv M$ *都是超 McDuff。(7)* M *具有 Brown 性质。*

接下来，我们将证明两类特定的超 McDuff II_1 因子实际上是一致超 McDuff 的（因此也具有 Brown 性质）：

定理 B. 任何与下列任一可分 II_1 因子初等等价的 II_1 因子，都是一致超 *McDuff* 的：

(1) 一个**无限泛型** II_1 因子。*(2)* $N \otimes \mathcal{R}$ 其中 N 是一个可分的满（即非 Γ）II_1 因子。

第一类是存在闭因子这一类中的一个特定子类（见 [Far+16]），它源自 II_1 因子的模型论。我们对这一情形的结果改进了 [CDI22], 的工作；该工作证明了无限泛型 II_1 因子是超 McDuff 的。请注意，我们的结果还表明，与无限泛型因子初等等价的因子具有一致超 McDuff 性，其中有些因子本身并非无限泛型（见引理 2.4）。

上述列表中的第二类因子通常称为**强 McDuff** 因子，最早由 Popa 在 [Pop12]中研究。 [AGE22, 命题 6.1.5]证明了强 McDuff II_1 因子是超 McDuff 的。

定理 A 和 B 给出了若干具有 Brown 性质的因子的新具体例子。事实上，在这项工作之前，已知具有 Brown 性质的 II_1 因子，只有那些与 $\mathcal{R}$ [AGE22; GH20a], 初等等价、且不属于上述定理中两类中任何一类的因子。

既然已经证明无限泛型因子具有一致超 McDuff 性质，自然会想知道存在闭因子的另一个重要子类，即有限泛型因子，是否也具有这一性质。此处，第三种性质——我们称之为 (T)-因子相对交换子性质，或 (T)-FRC 性质——便与此相关。我们称一个可分 II_1因子 M 具有 **(T)-FRC 性质**，当且仅当每个具有性质（T）的可分 II_1 因子都嵌入 $M^{\mathcal{U}}$，且其因子相对交换子非平凡。下文将证明，这一性质是可分 II_1 因子的可公理化性质。在 [Gol20], 中，已证明无限泛型因子具有 (T)-FRC 性质。此处，我们将有限泛型因子是否具有 (T)-FRC 性质与它们是否一致超 McDuff 这一问题联系起来：

定理 C. 如果有限泛型因子具有 *(T)-FRC* 性质，那么它们也具有一致超 *McDuff* 性质。

我们以陈述一个与本文工作相关的主要开放问题结束本引言：

问题 D. 具有超 McDuff 性质的 II_1 因子类在初等等价下是否封闭？等价地，超 McDuff 因子类与一致超 McDuff 因子类是否相同？

论文结构. 在第 2 节中，我们回顾带迹 von Neumann 代数模型论的一些背景，包括对存在闭、无限泛型和有限泛型因子类的讨论。关于相关问题的更详细背景，请读者参阅 [AGE22，第 2] 节。第 3 节引入一致超 McDuff 性质，并证明定理 A。第 4 节通过一种涉及特定谱隙判据的统一方法证明定理 B。在第 5 节中，我们证明定理 C，并记录了关于有限泛型 II_1 因子是否一致超 McDuff 这一问题的若干评述。

致谢。 我们很高兴感谢 Adrian Ioana，感谢他建议我们使用 Hastings的结果来证明第4.3节中的定理 B。

2. 预备知识

2.1. 存在闭、无限泛型和有限泛型因子

定义 2.1。 若一个可分迹冯·诺伊曼代数 M 满足以下条件，则称其为**存在闭（e.c.）**：对于任意包含 M 的带迹冯·诺伊曼代数 N，都存在一个嵌入 $N \hookrightarrow M^{\mathcal{U}}$，其限制为对角嵌入 $M \hookrightarrow M^{\mathcal{U}}$。

上面给出的是语义定义，并使用了关于 M 的可分性假设。不作可分性假设的句法定义如下： M 是存在闭的，当且仅当对于每个扩张 M 的带迹冯 · 诺伊曼代数 N，以及每个带有来自 M 的参数的无量词公式 $\varphi(x)$，都有

$$\inf\{\varphi(a)^M \ : \ a \in M\} = \inf\{\varphi(b)^N \ : \ b \in N\}.$$

存在闭的带迹冯·诺伊曼代数是 McDuff II_1 因子（例如参见 [GHS13，第 2] 节）；因此，我们常将存在闭的带迹冯·诺伊曼代数称为存在闭的 II_1 因子。此外，存在闭的带迹冯·诺伊曼代数类是 **嵌入普适**的，也就是说，每个可分 II_1 因子都包含于某个可分的存在闭 II_1 因子中。（这是一个一般模型论事实的特例；经典逻辑中的证明见 [CK13，引理 3.5。7] ）

在继续之前，我们先简短地补充说明一些关于 e.c. 因子的事实，这些事实可以由 [AGE22] 的结果推出，但在那里并未明确指出。在 [AGE22, Question 6.3.1], 中，曾提出这样一个问题：每个存在闭因子是否都是超 McDuff 因子。下面的结果给出了判定一个存在闭因子何时为超 McDuff 因子的标准：

定理 2.2。 对于一个存在闭因子 M，以下各项等价：

(1) M 是超 *McDuff* 因子。*(2)* 对于任意满足 $M \subseteq N$ 的存在闭因子 N，都有 $M' \cap N^{\mathcal{U}}$ 是一个因子。*(3)* 存在一个满足 $M \subseteq N$ 的存在闭因子 N，使得 $M' \cap N^{\mathcal{U}}$ 是一个因子。

证明。 对于蕴含关系 (1) 推出 (2)，假设 M 是超 McDuff 因子，且 N 是一个满足 $M \subseteq N$ 的存在闭因子。考虑链 $M \subseteq M^{\mathcal{U}} \subseteq N^{\mathcal{U}}$，根据 [AGE22, 定理 7.15(2)、引理 7.2.1 以及引理 7.2.8]，我们看到 $M' \cap N^{\mathcal{U}}$ 是一个因子。
蕴含关系 (2) 推出 (3) 是显然的。对于 (3) 推出 (1)，假设 N 是存在闭的、$M \subseteq N$，且 $M' \cap N^{\mathcal{U}}$ 是一个因子。利用 [AGE22、定理 7.1.5(1) 和引理 7.2.1]，我们便有 $M \subseteq M^{\mathcal{U}}$是一个因子。□

在 [AGE22 的问题 6.3.10], 中，有人提出：超 McDuff 因子的链的并是否仍然是超 McDuff。利用定理 2.2，我们可以证明，如果链中的所有超 McDuff 因子也都是存在闭的，那么这个问题的答案是肯定的（这是对 [AGE22 命题 6.3.17]的加强）：

推论 2.3. 任意存在闭超 *McDuff* 因子的链的并都是（存在闭）超 *McDuff* .

现在我们回到本节的主线。在本文中，我们将关注存在闭因子类的若干特定子类。我们首先考虑 **无限泛型因子**类，该类被定义为最大的 II_1 因子类，具有嵌入普适性，并且

是**模型完备**的，这意味着任意两个无限泛型因子之间的嵌入 $i\colon M \hookrightarrow N$ 都是初等的，也就是说，可以扩展为同构 $M^{\mathcal{U}} \to N^{\mathcal{U}}$。（此类的存在性可由 [Far+16，推论 5.15] 得出。术语“无限泛型”指的是在构造这些因子时使用了所谓的无限模型论强迫；参见 [Far+16，第 5] 节。）由[Far+16，引理 5.20] 可知，任意两个无限泛型 II_1 因子都是初等等价的。无限泛型因子是存在闭的，这一点可由 [Far+16，命题 5.11] 得出。
关于下文的定理 4.13，我们需要记录如下内容：

引理 2.4. *存在一个 II_1 因子 M，它与无限泛型因子初等等价，但本身并非无限泛型。*

证明。令 T^* 表示无限泛型因子的共同理论。若引理中的陈述为假，则 T^* 的模型恰好就是无限泛型因子。由于无限泛型因子这一类具有嵌入普适性且模型完备，因此T^* 是带迹冯·诺伊曼代数理论的模型伴侣，这与 [GHS13]的主要结果相矛盾。□

我们需要考虑的另一类存在闭因子是**有限泛型因子**。对这类因子的任何定义都涉及对有限模型论强迫的讨论（例如，参见[Far+16，第 6] 节，或 [Gol21，第 3]节）。不过，就我们的目的而言，只需了解有限泛型因子 N 的以下两项性质（以及它们的存在性）：

- N 是**局部普适**的，这意味着每个可分的 II_1 因子都可以嵌入到$N^{\mathcal{U}}$中；
- N 具有**广义荣格性质**，这意味着每个嵌入 $N \hookrightarrow N^{\mathcal{U}}$ 都是初等的。

第一项由 [Gol21 的命题 2.10 和 3.9] 以及以下事实得出：具有联合嵌入性质的理论的存在闭模型是局部普适的（参见 [Gol21，第 1.1]小节）。第二项由 [Gol21 的命题 3.10]得出。

这两个性质是否确实刻画了有限泛型性，仍是一个开放问题（参见[AGE22，问题 3.3.8.]）。

由这两个性质可立即得出，任何有限泛型因子都是存在闭的。目前尚不清楚有限泛型因子与无限泛型 II_1 因子的理论是否相同，或者等价地，任何有限泛型因子是否必定是无限泛型的。（一般而言，给定理论的有限泛型模型与无限泛型模型之间未必存在任何联系。）

2.2. **可定义性**。我们自由采用 [Gol18] 中关于可定义性的术语。在本小节中，T 表示适当连续签名下的带迹冯·诺伊曼代数理论。

对于带迹冯·诺伊曼代数 M，我们令 $\mathcal{P}_2(M)$ 表示来自M 且具有相同迹的投影对的集合。集合 $\mathcal{P}_2(M)$ 的重要性在于：M 是因子，当且仅当对于任意 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(M)$，存在一个酉元 $u \in M$ 使得 $upu^* = q$。

赋值 $M \mapsto \mathcal{P}_2(M)$ 是一个 T-函子，它是 T-公式的零点集

$$\xi(p,q) := \max(\|p^* - p\|_2, \|p^2 - p\|_2, \|q^* - q\|_2, \|q^2 - q\|_2, |\tau(p) - \tau(q)|).$$

此外，利用一个简单的泛函演算论证可知

$$\mathcal{P}_2\left(\prod_{\mathcal{U}} M_i\right) = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{P}_2(M_i)$$

对于所有带迹冯·诺伊曼代数族 $(M_i)_{i\in I}$ 以及所有定义在 I 上的超滤子 $\mathcal{U}$，因此根据 [Gol18，定理 2.13]，$\mathcal{P}_2$ 是一个T-可定义集。

因此，对于任意 T-公式 $\varphi(p,q,\vec{z})$，T-函子 $\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2}\varphi(p,q,\vec{z})$ 是一个 T-公式。了解 $\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2}\varphi(p,q,\vec{z})$ 的量词复杂度与 $\varphi(p,q,\vec{z})$ 本身的量词复杂度之间的关系，对我们大有裨益。为了解这一关系，我们首先注意到，作为 T-公式，有

$$\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2} \varphi(p,q,\vec{z}) = \sup_{\vec{x}}(\varphi(\vec{x},\vec{z}) \dot{-} \alpha(d(\vec{x},\mathcal{P}_2)),$$

其中 $\alpha\colon [0,1]\to[0,1]$ 是一个递增连续函数，且 $\alpha(0)=0$ 满足

$$|\varphi(\vec{x},\vec{z})-\varphi(\vec{y},\vec{z})| \le \alpha(d(\vec{x},\vec{y}))$$

对于 T 的模型中的所有元组 $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$。由于 ξ 是无量词的，可以证明 $d(\vec{x},\mathcal{P}_2)$ 与一个存在公式 T-等价（参见 [GH20b，第 2, 节），因此，由于 α 递增，$\alpha(d(\vec{x},\mathcal{P}_2))$ 也具有这一性质。结果是，若 $\varphi(p,q,\vec{z})$ 是 $\forall_n$（分别为 $\exists_n$），则 $\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2}\varphi(p,q,\vec{z})$ 是 $\forall_n$（分别为 $\forall_{n+1}$）。

我们还需要对酉元的 T-可定义集 U 取下确界，该集合是 T-公式的零点集

$$v(u) = \max(\|u^*u-1\|_2, \|uu^*-1\|_2).$$

在这种情况下，对于任意 T-公式 $\varphi(u,\vec{z})$，存在一个连续函数 γ，使得作为 T-公式，我们有

$$\inf_{u\in U}\varphi(u,\vec{z}) = \inf_x(\varphi(x,\vec{z})+\gamma(v(x))$$

（参见 [Gol18，定理 2.13] 的证明）。结果是，若 $\varphi(u,\vec{z})$ 是 $\forall_n$（分别为 $\exists_n$），则 $\inf_{u\in U}\varphi(u,\vec{z})$ 是 $\exists_{n+1}$（分别为 $\exists_n$）。

3. The uniform super McDuff property

以下是 具有因子相对交换子的有限化（无超积）重述 ：

命题 3.1。若 M是一个可分的 II_1 因子，则 $M'\cap M^{\mathcal{U}}$是因子当且仅当：对每个 $\epsilon>0$ 和每个有限的 $F\subseteq(M)_1$，，都存在 $\delta>0$ 和有限的 $G\subseteq(M)_1$，使得：对于所有$(p,q)\in\mathcal{P}_2(M)$，若 $\|[x,p]\|_2,\|[x,q]\|_2<\delta$对所有 $x\in G$都成立，则存在 $u\in U(M)$使得$\|upu^*-q\|_2<\epsilon$且 $\|[x,u]\|_2<\epsilon$对所有 $x\in F$都成立。

证明。首先，假设 $M'\cap M^{\mathcal{U}}$ 是一个因子，但为了导出矛盾，设对于某个特定的 ϵ 和 F，该条件不成立。令 (G_n) 表示 $(M)_1$ 的有限子集序列，其并集在 $(M)_1$ 中强算子拓扑稠密。根据矛盾假设，对于每个 $n\ge 1$，存在投影 $(p_n,q_n)\in\mathcal{P}_2(M)$，表明 $\delta=\frac{1}{n}$ 和 $G=G_n$ 不满足正向结论，针对的是 ϵ 和 F 这一特定选择。设 $p=(p_n)_{\mathcal{U}}$ 且 $q=(q_n)_{\mathcal{U}}$。于是注意到，$(p,q)\in\mathcal{P}_2(M'\cap M^{\mathcal{U}})$。由于 M 是超 McDuff，存在 $u\in U(M'\cap M^{\mathcal{U}})$ 使得 $upu^*=q$。因此，对于 $\mathcal{U}$-几乎所有的 n，都有 $\|u_np_nu_n^*-q_n\|_2<\epsilon$ 且 $\max_{x\in F}\|[x,u_n]\|_2<\epsilon$，这与 (p_n,q_n) 的选取矛盾。

对于逆向，假设该条件成立。固定 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(M' \cap M^{\mathcal{U}})$；我们旨在证明 p 和 q 在 $M' \cap M^{\mathcal{U}}$ 中酉共轭。根据饱和性，只需证明：对于每个 $\epsilon > 0$ 以及有限 $F \subseteq (M)_1$，，存在 $u \in U(M^{\mathcal{U}})$ 使得 $\|upu^* - q\|_2 \leq \epsilon$ 且 $\max_{x \in F} \|[x,u]\|_2 \leq \epsilon$。令 δ 和 G 如条件中关于 ϵ 和 F 的规定。写作 $p = (p_n)_{\mathcal{U}}$ 且 $q = (q_n)_{\mathcal{U}}$，其中对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$(p_n, q_n) \in \mathcal{P}_2(M)$。注意，对于 $\mathcal{U}$-几乎所有的 n，都有 $\max_{x \in G} \max(\|[x,p_n]\|_2, \|[x,q_n]\|_2) < \delta$。因此，对于这些 n，存在 $u_n \in U(M)$ 使得 $\|u_n p_n u_n^* - q_n\|_2 < \epsilon$ 且 $\max_{x \in F} \|[x,u_n]\|_2 < \epsilon$。令 $u = (u_n)_{\mathcal{U}} \in U(M^{\mathcal{U}})$。于是 $\|upu^* - q\|_2 \leq \epsilon$ 且 $\max_{x \in F} \|[x,u]\|_2 \leq \epsilon$，如所需。□

备注 3.2。 虽然超 McDuff 的原始定义仅适用于可分的 II_1 因子，但我们可以利用命题 3.1 中出现的有限性判据，为任意 II_1 因子定义超 McDuff 性（同时利用 McDuff 性存在一个适用于任意带迹冯·诺伊曼代数的有限性定义；参见 [FHS14b，命题 3.9]）。

命题 3.1 中的条件自然地导出了一致版本，即在命题 3.1 的判据中，δ 和 G 的大小都可以仅取决于 ϵ 和 F的大小。换一种说法：

定义 3.3。 McDuff II_1 因子 M 是一**致超 McDuff** 的，当且仅当，对于所有$n \geq 1$，存在 $m \geq 1$，使得：对于所有带有 $|F| \leq n$的 $F \subseteq (M)_1$，都存在带有 $|G| \leq m$的 $G \subseteq (M)_1$，使得对于任意 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(M)$，有

$$\max_{x \in G} \max(\|[x,p]\|_2, \|[x,q]\|_2) < \frac{1}{m},$$

存在 $u \in U(M)$，使得 $\|upu^* - q\|_2 < \frac{1}{n}$且 $\max_{x \in F} \|[x,u]\|_2 < \frac{1}{n}$。

注记 3.4. 注意，前一定义中所述的一致性条件在 M 不具有 Gamma 性质的情况下自动成立。事实上，在这种情况下，给定 $n \geq 1$，存在一个有限子集 $K \subseteq (M)_1$和 $m \geq 1$，使得对于所有压缩元 $x \in M$，若 $\max_{y \in K} \|[x,y]\|_2 < \frac{1}{m}$，则 $d(x, \mathbb{C}) < \frac{1}{2n}$。因此，若 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(M)$ 满足 $\max_{y \in K} \max(\|[p,y]\|_2, \|[q,y]\|_2) < \frac{1}{m}$，则 $d(p, \mathbb{C})$ $d(q, \mathbb{C}) < \frac{1}{2n}$，由此可得 $\|p - q\|_2 < \frac{1}{n}$，并且在上述定义中我们可以取 $u = 1$。

现在我们可以证明，Brown 性质等价于一致超 McDuff 性质，以及若干其他条件：

定理 3.5. 对于 II_1 因子 M，以下条件等价：

(1) M 是一致超 *McDuff*。*(2)* 每个 $N \equiv M$ 都是一致超 *McDuff*。*(3)* 每个 $N \equiv M$ 都是超 *McDuff*。*(4)* 对于 $\mathbb{N}$上的每个非主超滤子 $\mathcal{U}$， $M^{\mathcal{U}}$ 都是超 *McDuff*。*(5)* 对于 $\mathbb{N}$上的某个非主超滤子 $\mathcal{U}$， $M^{\mathcal{U}}$ 是超 *McDuff*。*(6)* 每个可分 $N \equiv M$ 都是超 *McDuff*。*(7)* M 具有 *Brown* 性质。

证明。(1) 推出 (2)：假设 M 是一致超 McDuff。固定 $n \geq 1$，并按照一致超 McDuff 的定义取相应的 $m \geq 1$。考虑句子 $\sigma_{n,m} = \sup_{x_1,\ldots,x_n} \inf_{y_1\ldots,y_m} \sup_{(p,q) \in \mathcal{P}_2} \varphi_{n,m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q)$，其中 $\varphi_{n,m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q)$ 是如下公式：

$$\min\left(\frac{1}{m} \dot{-} \max_{j=1,\dots,m} \max(\|[p,y_j]\|_2, \|[q,y_j]\|_2), \inf_{u\in U(M)} \max(\|upu^*-q\|_2, \max_{i=1,\dots,n} \|[u,x_i]\|_2) \dot{-} \frac{1}{n}\right).$$

那么，依假设有 $\sigma_{n,m}^M = 0$ ，因此任何与之初等等价的结构 N 也满足同样的性质。我们用此证明 N 是一致超 McDuff。固定 $\eta > 0$，使得 $\eta < \min(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$；我们断言， $\delta := \frac{1}{m} - \eta$ 和 m 能证明 N 对大小至多为 n 且满足 $\epsilon = \frac{2}{n}$ 的有限集具有一致超 McDuff 性。为此，固定 $x_1, \dots, x_n \in N$，并取 $y_1, \dots, y_m \in N$，使得 $\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2} \varphi_{n,m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q) < \eta$。现在假设 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(N)$ 满足

$$\max_{j=1,\dots,m} \max(\|[p,y_j]\|_2, \|[q,y_j]\|_2) < \frac{1}{m} - \eta.$$

$\varphi_{n,\ m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q)$ 的第一项大于 η，因此第二项小于 η。由此可知，存在一个酉元，它将 p 共轭到距 q 不超过 $\frac{1}{n} + \eta < \frac{2}{n}$ 的范围内，并且$\frac{1}{n} + \eta < \frac{2}{n}$ 与每个 x_i 交换，正如所需。

蕴含关系 (2) 推出 (3)、(3) 推出 (4) 以及 (4) 推出 (5) 都是显然的。为证明 (5) 推出 (6)，假设 $M^{\mathcal{U}}$ 是超 McDuff，并取一个可分的 $N \equiv M$。通过考虑一个初等嵌入 $N \hookrightarrow M^{\mathcal{U}}$，不妨假设 N 是 $M^{\mathcal{U}}$ 的初等子结构。固定 $n \geq 1$ 和有限多个 x_1、.....、$x_n \in N$。由于 $M^{\mathcal{U}}$ 是超 McDuff，我们得到相应的$\delta > 0$ 和有限多个 $G \subseteq (M^{\mathcal{U}})_1$。若 $m \geq \frac{1}{\delta}$ 和 $G = \{y_1, \dots, y_m\}$（可能有重复），则有 $(\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2} \varphi_{n,\ m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q))^{M^{\mathcal{U}}} = 0$，其中 $\varphi_{n,\ m}$ 如蕴含关系 (1) 推出 (2) 中所述。由于N 是 $M^{\mathcal{U}}$ 的初等子结构，可得

$$\left(\inf_{\vec{y}} \sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2} \varphi_{n,m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q)\right)^N = 0.$$

如果 $z_1, \dots, z_m \in N$证明存在量词公式小于 $\eta < \min(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$，如蕴含关系 (1) 推出 (2) 中所示，那么我们看到 $\delta = \frac{1}{m}$和 $z_1, \dots, z_m$ 证明了 N相对于 $x_1, \dots, x_n$及误差 $\frac{2}{n}$ 的超 McDuff 性。

(6) 推出 (4)：固定 $n \geq 1$和 $x_1, \dots, x_n \in M^{\mathcal{U}}$。取 $M^{\mathcal{U}}$的一个包含 $x_1, \dots, x_n$的可分初等子结构 N。根据 (6)， N是超 McDuff 的。令 $m \geq 1$满足：$\delta = \frac{1}{m}$和$y_1, \dots, y_m \in N$如超 McDuff 性定义中针对 $\epsilon = \frac{1}{n}$和 $x_1, \dots, x_n$的情形。由此可得 $(\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2} \varphi_{n,\ m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q))^N = 0$。由初等性可知，$(\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2} \varphi_{n,\ m}(\vec{x}, \vec{y}, p, q))^{M^{\mathcal{U}}} = 0$。因此，$\frac{1}{m}$和 $y_1, \dots, y_m$证明了 $M^{\mathcal{U}}$相对于 $\epsilon = \frac{1}{n}$和 $x_1, \dots, x_n$的超 McDuff 性。

(4) 推出 (1)：反设 M 不是一致超 McDuff。那么存在某个 $n \geq 1$ ，使得不存在一对 m 能证明 M 对于这个 n 具有一致超 McDuff 性。因此，对每个 $m \geq 1$，都存在 x_1^m、 ..... 、 $x_n^m \in M$，使得没有大小至多为 m 的 $G \subseteq (M)_1$ 能证明 M 具有超 McDuff 性。于是我们可以考虑元素 $x_j = (x_j^m)_{\mathcal{U}} \in M^{\mathcal{U}}$。根据假设， $M^{\mathcal{U}}$ 是超 McDuff 的，因此存在 $\delta > 0$ 和有限的 $G = \{y_1, \dots, y_t\} \in M^{\mathcal{U}}$，它们证明有限子集 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 具有超 McDuff 性，其中 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 $M^{\mathcal{U}}$ 和 $\epsilon = \frac{1}{n}$ 的有限子集。对每个 $j = 1$、.....、t，记 $y_j = (y_j^m)_{\mathcal{U}}$。根据假设，对每个 $m \geq t$，存在 $(p_m, q_m) \in \mathcal{P}_2(M)$，满足 $\max_{j=1,\dots,t}(\|[p_m, y_j^m]\|_2, \|[q_m, y_j^m]\|_2) < \frac{1}{m}$，但在 M 中不存在酉元能将 p_m 共轭到距 q_m 不超过 $\frac{1}{n}$ 的范围内，同时还与每个 x_j^m 交换至 $\frac{1}{n}$ 的程度，其中 $j = 1$、.....、n。令 $p = (p_m)_{\mathcal{U}}$ 和 $q = (q_m)_{\mathcal{U}}$，于是 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(M^{\mathcal{U}})$，且对所有 $j = 1$、.....、t， $[p, y_j] = [q, y_j] = 0$。由此可得存在 $u \in U(M^{\mathcal{U}})$，使得

满足 $\|upu^*-q\|_2<\frac{1}{n}$ 且 $\max_{j=1、\ldots\ldots、n}\|[u,x_j]\|_2<\frac{1}{n}$。令 $u=(u_m)_{\mathcal{U}}$，其中每个 $u_m\in U(M)$。那么对 $\mathcal{U}$-几乎所有 m，都有 $\|u_mp_mu_m^*-q_m\|_2<\frac{1}{n}$ 且 $\max_{j=1、\ldots\ldots、n}\|[u_m,x_j^m]\|_2<\frac{1}{n}$，这与 p_m 和 q_m 的选取矛盾。

至此，我们得到 (1)–(6) 等价。然而，正如引言中提到的，[AGE22 命题 6.24] 证明了 (6) 与 (7) 等价，从而完成了该定理的证明。□

注 3.6. 根据第 2.2 小节末尾的评论，我们看到上述证明中出现的句子都是 $\forall_4$-句子。这些具体句子的量词复杂度，与 [GH20a]，中利用 Ehrenfeucht-Fraïssé 博弈证明的结论一致：任何与具有 Brown 性质的 II_1因子具有相同四量词理论的 II_1 因子，也具有 Brown 性质。

由于 $\mathcal{R}$ 具有 Brown 性质，根据定理 3.5，我们知道 $\mathcal{R}$ 是一致超 McDuff。在下面的第 4.3 小节中，我们将直接证明 $\mathcal{R}$ 是一致超 McDuff。

4. 谱隙与一致超 McDuff 性质

本节将用谱隙给出一致超 McDuff 性质的一个充分条件，并推得无限泛型 II_1 因子和强 McDuff II_1 因子都是一致超 McDuff 的。

4.1. **谱隙判据**。

我们先回顾带迹因子中子代数的谱隙定义。

定义 4.1。设 M 是一个带迹因子，$A\subseteq M$ 是一个冯·诺伊曼子代数。若存在有限的 $F\subseteq(A)_1$ 和常数 $C>0$，使得对所有 $\xi\in L^2(M)$，都有

$$\|\xi-E_{A'\cap M}(\xi)\|_2^2\leq C\sum_{x\in F}\|x\xi-\xi x\|_2^2.$$

此外，若 $|F|\leq C$，则称 C为 $A\subseteq M$的一个**谱隙数**。我们用 $\mathrm{SG}(A,M)$ 表示 A在 M中的最小谱隙数。我们还记 $\mathrm{SG}(M)=\mathrm{SG}(M,M)$。

注 4.2. 特别地，如果存在有限的 $F\subseteq(M)_1$ 和常数 $C>0$，使得对于所有 $\xi\in L^2(M)$，都有 $M\subseteq M$ 具有谱隙

$$\|\xi-\tau(\xi)\cdot 1\|_2^2\leq C\sum_{x\in F}\|x\xi-\xi x\|_2^2.$$

Connes 在 [Con76, 定理 2.1] 中证明，带迹因子 $M\subseteq M$ 具有谱隙，当且仅当 M 是满的（等价地，在 II_1 因子的情形下，M 不具有 Gamma 性质）。

对于带迹冯·诺伊曼代数 M、子集 X、$Y\subseteq M$ 和 $\epsilon>0$，我们用 $X\subseteq_\epsilon Y$表示 X 中的每个元素都在 ϵ 之内（相对于 2- 范数），且距离某个 Y 中的元素。

定义 4.3. 若存在某个常数 $s>0$，使得对任意有限的 $F\subseteq M$ 和 $\epsilon>0$，都存在一个冯·诺伊曼子代数 $A\subseteq M$，满足 $A'\cap M$ 是一个因子、$\mathrm{SG}(A,M)\leq s$，且 $F\subseteq_\epsilon A$，则称带迹因子 M 具有**因子型交换子极限谱隙性质** 或**FC 极限谱隙性质** 。

下面的命题给出了 McDuff II_1 因子一致超 McDuff 的一个充分判据：

命题 4.4. 如果 M 是具有 *FC* 极限谱隙性质的 *McDuff* II_1 因子，那么 M 是一致超 *McDuff*。

证明。 固定 $n \geq 1$。我们断言，任意 $m > 24sn$都能证明 M 是一致超 McDuff。为此，固定满足 $|F| \leq n$的 $F \subseteq$ （M）$_1$。选取 $A \subseteq M$，使得 $A' \cap M$是因子，SG(A, M) $\leq s$，且 F包含于 A的（$1/2n$）邻域中。于是存在 $G \subseteq$ （A）$_1$，使得 $|G| \leq s$ 并且

$$\|\xi - E_{A'\cap M}(\xi)\|_2^2 \leq s \sum_{x\in G} \|x\xi - \xi x\|_2^2.$$

I特别是，如果（p， q） $\in \mathcal{P}_2$（M），且 max$_{x\in G}$max（$\|[x,p]\|_2$， $\|[x,q]\|_2$） $\leq 1/m$，则 n

$$\|p - E_{A'\cap M}(p)\|_2^2 \leq \frac{s^2}{m^2}.$$

令 $a = E_{A'\cap M}$(*p*)。由于 $\left\|a^2 - p^2\right\|_2 < 2s/m$，我们得到 $\left\|a - a^2\right\|_2 < 3s/m$。令 $\tilde{p} = \mathbf{1}_{[1/2,1]}$(*a*)，这是 $A' \cap M$中的一个投影。由于对于 $t \in [0,1]$，有 $|t - \mathbf{1}_{[1/2,1]}$(*t*)$| \leq 2t(1-t)$，因此我们有 $\|p\|_2 \leq 2\|a(1-a)$ $\|_2 <6s/m$。类似地，存在一个投影 $\tilde{q} \in A' \cap M$ 使得 $\|\tilde{q} - q\|_2 < 6s/m$。
接下来注意到 $|\tau$(*p̃*) $-\tau$(*q̃*)$| \leq 12s/m$。由于 $A' \cap M$是一个因子，因此存在 $A' \cap M$中的酉元 u，使得 $u\tilde{p}u^* - \tilde{q}$ 是迹为 $< 12s/m$的投影或其相反数。特别地， $\|u\tilde{p}u^* - \tilde{q}\|_2 <12s/m$，这意味着 $\|upu^* - q\|_2 < 24s/m < 1/n$。
此外，由于我们假设 F 包含在 A 的（$1/2n$）邻域中，且 u 属于$A' \cap M$，因此对于 $x \in F$，有 $\|[u,x]\|_2 < 1/n$。最后，注意到 $|G| \leq s \leq 24sn < m$，证明完毕。□

注记 4.5. 值得注意的是，在前面的证明中， G 的大小仅取决于常数 s，而与 n无关。

4.2. **无限泛型因子是一致超 McDuff**。 本节中，我们利用命题 4.4 证明无限泛型因子是一致超 McDuff。该结果改进了 Chifan、Drimbe 和 Ioana 在 [CDI22] 中的结果；他们证明了无限泛型因子是超 McDuff。后一个结果证明中的一个主要要素是性质 (T) 因子的嵌入普适性，该性质也在 [CDI22] 中得到证明。本小节的证明同样利用了这一事实（及其证明）。

回忆一下，II_1 因子 N 具有 **性质（T）**，是指存在一个有限 $F \subseteq N$ 和 $\delta > 0$，使得每当 $\mathcal{H}$ 是一个正规 N-N 双模，并且具有满足 max$_{x\in F}\|x\xi - \xi x\| < \delta$的单位向量 $v \in \mathcal{H}$ 时，就存在一个非零向量 $\eta \in \mathcal{H}$，使得对所有 $x \in N$都有 $x\eta = \eta x$。如果 Γ 是一个 ICC 群，那么L(Γ)具有性质（T）当且仅当 Γ 具有性质（T）。Connes 和 Jones [CJ85] 还证明了，对于因子而言，性质（T）等价于下面这个看似更强的性质。

定理 4.6。 一个 II_1 因子具有性质（*T*）当且仅当存在一个有限子集 $F \subseteq N$ （称为**Kazhdan 集**）和一个常数 $K > 0$，使得对于每个正规 N-N 双模 $\mathcal{H}$，都有

$$\|\xi - P_{central}(\xi)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K \sum_{x\in F} \|x\xi - \xi x\|_{\mathcal{H}}^2,$$

其中， $P_{central}$ 是到 $\mathcal{H}$中中心向量子空间的投影。

特别地，如果 $N \subseteq M$ 是 II_1 因子的一个包含，且 N 具有性质（T），那么 $L^2(M)$是一个正规 N-N-双模，因此 N在 M中具有谱隙。此外，Tan [Tan22]证明了逆向蕴含，即如果 II_1 因子 N 在每个包含$N \subseteq M$中都在 M 内具有谱隙，那么 N 具有性质（T）。因此，将 M的性质（T）子代数与我们关于一致超 McDuff 性质的谱隙判据结合起来是很自然的。

与上一节中的谱隙数相对应，我们引入以下概念。

定义 4.7. 我们称 K 是一个具有性质（T）的 II_1 因子 N 的**Kazhdan 数**，如果存在有限的 $F \subseteq (N)_1$ 满足 $|F| \leq K$，使得对于每个正规的 N-N-双模 $\mathcal{H}$，

$$\|\xi - P_{\mathrm{central}}(\xi)\|_H^2 \leq K \sum_{x \in F} \|x\xi - \xi x\|_H^2.$$

我们用 K(N) 表示 N可能具有的最小 Kazhdan 数。

注意，若 N 是具有性质（T）的 II_1 因子，且 $N \subseteq M$ 是带迹冯·诺伊曼代数的一个包含，则 SG(N, M) $\leq$K(N)。

定义 4.8. 我们称 II_1 因子 M 具有一**致局部性质 (T)**，如果存在某个常数 s，使得对于任意有限的 $F \subseteq M$ 和 $\epsilon > 0$，都存在一个具有性质（T）的 II_1 因子 $N \subseteq M$，满足 K(N) $\leq s$ 且 $F \subseteq_\epsilon A$。

命题 4.9. 设 M 是具有一致局部性质 *(T)* 的存在闭 II_1 因子。那么 M 具有 *FC* 极限谱隙性质，因此是一致超 *McDuff*。

证明. 设 s 如一致局部性质 (T) 的定义所述。若 $F \subseteq M$ 是有限子集，则存在某个具有性质（T）的 II_1 因子 $N \subseteq M$，使得 K(N) $\leq s$ 且 $F \subseteq_\epsilon N$。注意，SG(N, M) $\leq$K(N) $\leq s$。此外，由于 M 是存在闭的，且 N 具有性质（T），可知 $N' \cap M$ 是一个因子（参见 [Gol20，定理 2.8]）。因此， M 具有 FC 极限谱隙性质。此外，由于存在闭 II_1 因子是 McDuff 的，命题 4.4 蕴含 M 是一致超 McDuff 的。□

注 4.10. 如果在一致局部性质 (T) 的定义中去掉一致性要求，也可以作类似的论证。称 II_1 因子 M 具有**局部性质 (T)**，如果：对于每个$\epsilon > 0$ 和有限 $F \subseteq M$，都存在 M 的一个性质（T）子因子 N，使得 $F \subseteq_\epsilon N$。那么，具有局部性质 (T) 的存在闭因子 M 将是超 McDuff 的。事实上， M 可以写成性质（T）子因子 N_i 的归纳极限；与前面的证明一样，由于 M 是存在闭的，每个 $N_i' \cap M$ 都是一个因子。这意味着 $N_i' \cap M^{\mathcal{U}}$ 是一个因子，因此根据 [AGE22，命题 6.3， $M' \cap M^{\mathcal{U}}$ 也是一个因子。12]

接下来，我们将 证明前面的命题适用于某个无限泛型 II_1 因子 s.

命题 4.11。 存在一个具有一致局部性质 *(T)* 的无限泛型 II_1 因子。

为证明这一点，我们将使用以下定理，该定理摘自引言末尾关于 [CDI22]的讨论。

定理 4.12 ([CDI22])。 存在一个固定的可数性质（*T*）群 Γ，使得：对于任意 II_1 因子 M，都存在一个包含 M 的 II_1 因子 N，且该因子由群同态π： $\Gamma \to U(N)$生成。因此， N具有性质（*T*），并且 N 的 *Kazhdan* 集可以取为

π 下 Γ 的一个 *Kazhdan* 集的像，其对应的 *Kazhdan* 常数等于 Γ 的 *Kazhdan* 常数。因此，N 的 *Kazhdan* 数一致有界（与 M 无关），上界为 Γ 的 *Kazhdan* 数 $K(\Gamma)$。

命题 *4.11* 的证明。我们归纳地构造一个 II_1 因子链

$$M_0 \subseteq N_0 \subseteq M_1 \subseteq N_1 \subseteq \dots$$

如下。令 M_0 为一个无限泛型 II_1 因子。选定 M_i 后，令 N_i 为利用定理 4.12 构造的一个性质 (T) 因子，因此其 Kazhdan 数被 $K(\Gamma)$ 所界定。选定 N_i 后，令 M_{i+1} 为一个包含 N_i 的无限泛型 II_1 因子；这样的因子存在，因为无限泛型 II_1 因子是嵌入普适的。

令 M 为该链的归纳极限。按构造，M 具有一致局部性质 (T)。根据 [AGE22，引理 6.3.16]，它也是无限泛型的。□

定理 4.13。每个无限泛型 II_1 因子都是一致超 *McDuff*。因此，任何与某个无限泛型 II_1 因子初等等价的 II_1 因子都是一致超 *McDuff*。

证明。 正如预备知识中所指出的，任意两个无限泛型 II_1 因子都初等等价。由于一致超 McDuff 性质在初等等价下保持不变，只需证明存在某个 无限泛型 II_1 因子是一致超 McDuff 的。由命题 4.11，存在一个具有一致局部性质 (T) 的无限泛型 II_1 因子；由命题 4.9 可知，它必定是一致超 McDuff 的。□

定理 4.13 推广了 Chifan、Drimbe 和 Ioana 的结果；他们证明了无限泛型 II_1 因子是超 McDuff 的 [CDI22，定理 6.4]。事实上，这是严格推广，因为存在与无限泛型因子初等等价、但自身并非无限泛型的 II_1 因子（引理 2.4）。

定理 4.13 还使我们能够将第 2.1 小节讨论的两个开放问题联系起来：每个存在闭因子是否都是超 McDuff 的，以及超 McDuff 因子的链的并是否仍然是超 McDuff 的。

命题 4.14. 如果每条一致超 *McDuff* 因子的链的并仍是（一致）超 *McDuff*，那么每个存在闭因子都是（一致）超 *McDuff*。

证明. 设 P 是一个存在闭因子，并将 P 嵌入一个无限泛型因子 M。由定理 4.13，M 是一致超 McDuff。固定一个嵌入 $M \hookrightarrow P^{\mathcal{U}}$，使其限制为对角嵌入$P \hookrightarrow P^{\mathcal{U}}$。于是我们得到如下链

$$P \subseteq M \hookrightarrow P^{\mathcal{U}} \subseteq M^{\mathcal{U}} \hookrightarrow P^{2\mathcal{U}} \subseteq M^{2\mathcal{U}} \dots$$

注意，所有嵌入 $P^{k\mathcal{U}} \hookrightarrow P^{(k+1)\mathcal{U}}$都是初等的（它们是对角嵌入的迭代超幂）。因此，链的极限 Q 是 P的初等扩张。由于M是一致超 McDuff，且每个 $M^{k\mathcal{U}}$都与 M初等等价，它们也都是一致超 McDuff。根据假设，Q 是（一致）超 McDuff。由于（一致）超 McDuff 性在初等子结构下保持，结论得证。□

4.3. **强 McDuff 蕴含一致超 McDuff**。以下结果是 Adrian Ioana 向我们提出的。

定理 4.15. 设 M 是一个满带迹因子。那么 $M \otimes \mathcal{R}$ 具有 *FC* 极限谱隙性质，因此是一致超 *McDuff*。

特别地，取 $M = \mathbb{C}$，我们便得到一个直接论证，说明 $\mathcal{R}$ 是一致超 McDuff（这一点此前已知，因为 $\mathcal{R}$ 具有 Brown 性质）。当 M 是一个满 II_1 因子时， $M \otimes \mathcal{R}$通常称为强 McDuff II_1 因子。AGE22 的命题 6.1.5] 证明，强 McDuff II_1 因子是超 McDuff 的。定理 4.15 将这一结果推广，证明强 McDuff 因子是一致超 McDuff 的。正如 AGE22 的命题 6.3.2], 所示，存在闭因子绝不会是强 McDuff 的，因此，定理 4.15 展示了一类与上述无限泛型因子截然不同的一致超 McDuff 因子。

定理 4.15 的证明中一个主要环节，是 Hastings 关于量子扩张子的以下结果 [Has07]。这里我们只陈述 Hastings 结果的一个特殊情形；用 Hastings 的术语来说，这是满足 $D = 4$ 的厄米情形。

定理 4.16 (Hastings [Has07])。 取一个偶数 $d \geq 4$。存在酉元 $U_{k,1}, \ldots, U_{k,d}$ ， 使得它们满足以下性质：令 $\Phi_k : M_k(\mathbb{C}) \to M_k(\mathbb{C})$ 定义为

$$\Phi_k(X) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} U_{k,j} X U_{k,j}^*.$$

令 $\lambda_2(\Phi_k)$ 为 Φ_k 的第二大特征值，也就是 Φ_k 在 $\mathbb{C}1$ 的正交补上的最大特征值。那么

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_2(\Phi_k) = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}.$$

对我们而言，Hastings 结果的重要性在于以下几点：

推论 4.17。 $M_k(\mathbb{C})$ 的谱隙数满足 $\operatorname{limsup}_{k \to \infty} \mathrm{SG}(M_k(\mathbb{C})) \leq 8$。特别地，$\sup_k \mathrm{SG}(M_k(\mathbb{C})) < \infty$。

证明。 固定一个偶数 $d \geq 4$ （最后我们将使用 $d = 8$），并令 Φ_k 如前一定理所述。根据 $\lambda_2(\Phi_k)$ 的定义，我们有

$$\|X - \mathrm{tr}_k(X)1\|_2 \leq \frac{1}{1 - \lambda_2(\Phi_k)} \|X - \Phi_k(X)\|_2.$$

我们还有

$$\|X - \Phi_k(X)\|_2 = \left\| X - \sum_{j=1}^{d} U_{k,j} X U_{k,j}^* \right\|_2 \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \left\| X - U_{k,j} X U_{k,j}^* \right\|_2 = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \|U_{k,j} X - X U_{k,j}\|_2.$$

因此，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\|X - \mathrm{tr}_k(X)1\|_2^2 \leq \frac{1}{(1-\lambda_2(\Phi_k))^2}\left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\|U_{k,j}X - XU_{k,j}\|_2\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{(1-\lambda_2(\Phi_k))^2}\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\|U_{k,j}X - XU_{k,j}\|_2^2.$$

因此，

$$\limsup_{k\to\infty}\mathrm{SG}(M_k(\mathbb{C})) \leq \limsup_{k\to\infty}\max\left(d, \frac{1}{4(1-\lambda_2(\Phi_k))^2}\right) = \max\left(d, \frac{1}{d(1-2\sqrt{d-1}/d)^2}\right).$$

最大值中的第二项等于 $d(d+2\sqrt{d-1})/(d-2)^2$，当 $d \geq 8$时小于 d，因此取 $d = 8$ 即可得到该推论的结论。□

我们还将使用以下关于谱隙数和张量积的初等观察。这些结果为专家所熟知，但为完整起见（也因为我们关注谱隙数），这里仍给出证明。

引理 4.18. 设 M是一个满带迹因子。那么对于任意带迹冯·诺伊曼代数 N， $M\otimes\mathbb{C}$在 $M\otimes N$中具有谱隙。事实上，若 F和 C见证了 M在 M中的谱隙，则 $F\otimes 1$和 C见证了 $M\otimes\mathbb{C}$在 $M\otimes N$中的谱隙。特别地，$\mathrm{SG}(M, M\otimes N) \leq \mathrm{SG}(M, M)$。

证明。令 S为 $L^2(M)$ 上的算子恒等映射 $-\tau$，并令 $T\colon L^2(M) \to L^2(M)^F$为由 $T(\xi) = (x\xi - \xi x)_{x\in F}$给出的线性映射。那么， $M \subseteq M$的谱隙性质可表示为

$$\|S\xi\|^2 \leq C\|T\xi\|^2 \text{ for } \xi \in L^2(M),$$

或等价地， $S^*S \leq C\cdot T^*T$。注意， $L^2(M\otimes N) \cong L^2(M)\otimes L^2(N)$，且 $E_{\mathbb{C}\otimes N} = \tau_M \otimes \mathrm{id}_{L^2(N)}$ 是作用在 $L^2(M)\otimes L^2(N)$ 上的算子。由于 $S^*S \leq C\cdot T^*T$，我们有

$$(S\otimes \mathrm{id}_{L^2(N)})^*(S\otimes \mathrm{id}_{L^2(N)}) \leq C\cdot(T\otimes \mathrm{id}_{L^2(N)})^*(T\otimes \mathrm{id}_{L^2(N)}),$$

这可转化为

$$\|\xi - E_{\mathbb{C}\otimes N}(\xi)\|_2^2 \leq C\sum_{x\in F}\|(x\otimes 1)\xi - \xi(x\otimes 1)\|_2^2,$$

由此得到所需结果。 □

引理 4.19。 设 M_1 和 M_2 为全迹因子。那么 $M_1\otimes M_2$ 也为满。更确切地，对于 $j = 1, 2$，设 F_j和 C_j见证了 $M_j \subseteq M_j$的谱隙。那么 $(F_1\otimes 1)\cup(1\otimes F_2)$且$\max(C_1, C_2)$见证了 $M_1\otimes M_2$的谱隙。因此，$\mathrm{SG}(M_1\otimes M_2) \leq \mathrm{SG}(M_1) + \mathrm{SG}(M_2)$。

证明。 固定 $\xi \in L^2(M_1\otimes M_2)$，并令 $1\otimes\eta = E_{\mathbb{C}\otimes M_2}(\xi)$。由前一个引理，

$$\|\xi - 1\otimes\eta\|_2^2 \leq C_1\sum_{x\in F_1}\|(x\otimes 1)\xi - \xi(x\otimes 1)\|_2^2.$$

由 $M_2 \subseteq M_2$ 的谱隙,

$$\begin{aligned}\|\eta - \tau_N(\eta)\|_2^2 &\leq C_2 \sum_{y\in F_2} \|y\eta - \eta y\|_2^2 = C_2 \sum_{y\in F_2} \|(1\otimes y)(1\otimes\eta) - (1\otimes\eta)(1\otimes y)\|_2^2 \\ &= C_2 \sum_{y\in F_2} \|(1\otimes y)E_{1\otimes M_2}(\xi) - E_{\mathbb{C}\otimes M_2}(\xi)(1\otimes y)\|_2^2 \\ &= C_2 \sum_{y\in F_2} \|E_{\mathbb{C}\otimes M_2}((1\otimes y)\xi) - E_{\mathbb{C}\otimes M_2}(\xi(1\otimes y))\|_2^2 \\ &\leq C_2 \sum_{y\in F_2} \|(1\otimes y)\xi - \xi(1\otimes y)\|_2^2.\end{aligned}$$

Now $\xi - 1\otimes\eta$ 与 $\mathbb{C}\otimes M_2$ 正交，尤其与 $1\otimes\eta - \tau_{M_2}(\eta)$ 正交，因此

$$\begin{aligned}\|\xi - \tau_{M_1\otimes M_2}(\xi)\|_2^2 &= \|\xi - E_{\mathbb{C}\otimes M_2}(\xi)\|_2^2 + \|\eta - \tau_{M_2}(\eta)\|_2^2 \\ &\leq C_1 \sum_{x\in F_1} \|(x\otimes 1)\xi - \xi(x\otimes 1)\|_2^2 + C_2 \sum_{y\in F_2} \|(1\otimes y)\xi - \xi(1\otimes y)\|_2^2 \\ &\leq \max(C_1, C_2) \left(\sum_{x\in F_1} \|(x\otimes 1)\xi - \xi(x\otimes 1)\|_2^2 + \sum_{y\in F_2} \|(1\otimes y)\xi - \xi(1\otimes y)\|_2^2 \right).\end{aligned}$$

引理的证明至此完成。 □

现在我们可以证明定理 4.15。

定理 *4.15* 的证明。令 $F \subseteq M\otimes\mathcal{R}$ 为一个有限子集，并令 $\epsilon > 0$。置 $s = \mathrm{SG}(M) \tilde{+} \sup_k \mathrm{SG}(M_k(\mathbb{C}))$。则存在某个张量分解 $\mathcal{R} = M_k(\mathbb{C})\otimes\mathcal{R}$，使得 F 包含于 ϵ-邻域 $M\otimes M_k(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}$中。另请注意,

$$(M\otimes M_k(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C})' \cap (M\otimes\mathcal{R}) = \mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\otimes\tilde{\mathcal{R}},$$

这是一个因子。根据引理 4.18 和 4.19,

$$\mathrm{SG}(M\otimes M_k(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}, M\otimes\mathcal{R}) \leq \mathrm{SG}(M\otimes M_k(\mathbb{C})) \leq \mathrm{SG}(M) + \mathrm{SG}(M_k(\mathbb{C})) \leq s.$$

因此， $M\otimes\mathcal{R}$ 具有 FC 极限谱隙性质，正如所需。 □

在 [AGE22 中，命题 6.1.7], 证明了满 II_1 因子的无穷张量积是超 McDuff。我们自然会想知道这一结果是否存在一致版本。定理 4.15 的证明立即给出以下结论:

命题 4.20. 设(M_k) 是一个满 II_1 因子序列，且满足 h

$$\sup_k \mathrm{SG}(M_1\otimes\cdots\otimes M_k) < \infty.$$

那么 $\bigotimes_k M_k$ 是一致超 *McDuff*。

注 4.21。 目前尚不清楚满 II_1 因子的谱隙数是否存在统一上界，或者等价地，满 II_1 因子的类是否在超积下封闭。命题 4.20 表明，若对此问题的回答是肯定的，则满因子的无穷张量积是一致超 McDuff。换言之，如果能找到一个不是一致超 McDuff 的满 II_1 因子的无穷张量积实例，那么就可以得出满 II_1 因子的谱隙数无界。

5. 有限泛型因子是否具有一致超 McDuff 性质?

上述关于无限泛型因子的结果促使我们提出关于有限泛型因子的以下问题：

问题 5.1. 是否存在一个有限泛型（具有一致超 McDuff 性质的）超 McDuff 因子？所有有限泛型因子是否都是（具有一致超 McDuff 性质的）超 McDuff 因子?

注 5.2. 如果限制在 Connes 可嵌入因子的情形，那么 $\mathcal{R}$ 是唯一的有限泛型因子（见 [AGE22, 推论 3.2.6]）。设 (σ_n) 是一列表明$\mathcal{R}$ 具有一致超 McDuff 性质的句子。根据 [Gol21，定理 2.14 和命题 3.9], ，对每个 $n \geq 1$，存在唯一的实数 r_n，使得 $\sigma_n^M = r_n$ 在所有有限泛型因子 M中成立。如果对某个 n有 $r_n > 0$，那么我们可以得出结论：有限泛型因子不具有一致超 McDuff 性质。这一结果可能会导出另一种不同的证明，说明 Connes 嵌入问题是负解（见 [Ji+21]）。

5.1. **有限泛型因子成为一致超 McDuff 的充分条件**。在本小节中，我们给出有限泛型因子成为一致超 McDuff 的一个充分条件。我们首先需要一个预备引理。

引理 *5.3.* 对任意 $K \geq 1$，存在一个函数 $\alpha_K : (0, 1) \to (0, 1)$，具有如下性质：设 N 具有性质（*T*），且有限 *Kazhdan* 集为 G，*Kazhdan* 常数至多为 K。那么，对于任意包含 N 的 II_1 因子 M，以及任意 $(p, q) \in \mathcal{P}_2(M)$，若 $\max_{x\in G} \max(\|[x, p]\|_2, \|[x, q]\|_2) < \alpha_K(\epsilon)$，则存在 $(p', q') \in \mathcal{P}_2(N' \cap M)$，使得 $\|p - p'\|_2, \|q - q'\|_2 < \epsilon$。

证明。 假设 $\delta < \frac{1}{K}$并且 $(p, q) \in \mathcal{P}_2(M)$ 满足

$$\max_{x\in G} \max(\|[x, p]\|_2, \|[x, q]\|_2) < \delta.$$

那么根据 Kazhdan 集的定义，存在 $(p_0, q_0) \in N' \cap M$使得 $\|p - p_0\|_2, \|q - q_0\|_2 < K\delta$。回忆第 2.2 小节中的公式 ξ，其零点集为 $\mathcal{P}_2$。令 $\beta : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ 为 ξ 的一致连续模数，并令 $\gamma : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ 为 ξ的可定义性模数。那么，如果 $K\delta < \beta(\gamma(\frac{\epsilon}{2}))$，我们有 $\xi(p_0, q_0) < \gamma(\frac{\epsilon}{2})$，因此存在 $(p', q') \in \mathcal{P}_2(N' \cap M)$ 使得$\|p_0 - p'\|_2, \|q_0 - q'\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$。于是，$\alpha_K(\epsilon) := \min(\frac{1}{K}\beta(\gamma(\frac{\epsilon}{2})) \frac{\epsilon}{2K})$ 就是所需的函数。□

命题 5.4。 假设 P 是有限泛型的，并且存在一个具有性质（*T*）的 II_1 因子 $N \supseteq P$，使得存在一个具有因子相对交换子的嵌入 $N \hookrightarrow P^{\mathcal{U}}$。那么 P 是一致超 *McDuff* 的。

证明。 我们考虑以下嵌入序列

$$P \subseteq N \hookrightarrow P^{\mathcal{U}} \subseteq N^{\mathcal{U}} \hookrightarrow P^{2\mathcal{U}} \subseteq N^{2\mathcal{U}} \cdots,$$

其中，对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们令 $P^{k\mathcal{U}}$ 表示 P 的 k^{th} 次迭代超幂；其他迭代超幂同理，而嵌入 $N^{k\mathcal{U}} \hookrightarrow P_{(k+1)^{\mathcal{U}}}$由原始嵌入 $N \hookrightarrow P^{\mathcal{U}}$诱导。我们令 Q 表示这条链的并。由于 P是有限泛型的，嵌入 $P \hookrightarrow P^{\mathcal{U}}$是初等的，因此所有迭代嵌入 $P^{k\mathcal{U}} \hookrightarrow P_{(k+1)^{\mathcal{U}}}$也都是初等的，从而 $Q \equiv P$亦然。因此，只需证明 Q 是一致超 McDuff。

令 G 为 N 的一个有限 Kazhdan 集，其 Kazhdan 常数为 K。

断言： 固定 $\epsilon > 0$。对于所有 $k \geq 1$ 以及所有 $(p, q) \in \mathcal{P}_2(P^{k\mathcal{U}})$，若对所有 $x \in G$ 都有 $\|[x,p]\|_2, \|[x,q]\|_2 < \alpha_K(\frac{\epsilon}{2})$（以显然的方式视为 $P^{k\mathcal{U}}$ 的元素），则存在 $u \in U((N^{(k-1)^{\mathcal{U}}})' \cap P^{k\mathcal{U}})$ 使得 $\|upu^* - q\|_2 \leq \epsilon$。

我们对 k 使用归纳法证明该断言。首先假设 $k = 1$。若

$$\max_{x \in G} \max(\|[x,p]\|_2, \|[x,q]\|_2) < \alpha_K\left(\frac{\epsilon}{2}\right),$$

那么存在 $(p', q') \in \mathcal{P}_2(N' \cap P^{\mathcal{U}})$，使得 $\|p - p'\|_2, \|q - q'\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$。由于 $N' \cap P^{\mathcal{U}}$ 是一个因子，存在 $u \in U(N' \cap P^{\mathcal{U}})$ 使得 $up'u^* = q'$。由此可得 $\|upu^* - q\|_2 \leq \epsilon$。因此，$k = 1$ 的情形得证。

现在证明归纳步骤。假设结论对 k 成立，并考虑满足对所有 $x \in G$ 均有 $\|[x,p]\|_2, \|[x,q]\|_2 < \alpha_K(\frac{\epsilon}{2})$ 的 $(p, q) \in \mathcal{P}_2(P^{(k+1)^{\mathcal{U}}})$。写作 $p = (p_n)_{\mathcal{U}}$ 和 $q = (q_n)_{\mathcal{U}}$，其中 $(p_n, q_n) \in \mathcal{P}_2(P^{k\mathcal{U}})$。由此可知，对于几乎所有 $\mathcal{U}$，对所有 $x \in G$ 都有 $\|[x,p_n]\|_2, \|[x,q_n]\|_2 < \alpha_K(\frac{\epsilon}{2})$；因此，根据归纳法，对于这些 n，存在 $u_n \in U((N^{(k-1)^{\mathcal{U}}})' \cap P^{k\mathcal{U}})$，使得 $\|u_n p_n u_n^* - q_n\|_2 \leq \epsilon$。令 $u = (u_n)_{\mathcal{U}} \in U((N^{k\mathcal{U}})' \cap P^{(k+1)^{\mathcal{U}}})$，便可得出所需的 $\|upu^* - q\|_2 \leq \epsilon$。至此，断言得证。

现在验证 Q 是一致超 McDuff。固定 $\epsilon > 0$，并取断言中关于 ϵ 的 δ。固定有限的 $F \subseteq Q$。取 $k \geq 1$ 使得 $F \subseteq_{\frac{\epsilon}{2}} N^{(k-1)^{\mathcal{U}}}$。现在假设 $(p, q) \in \mathcal{P}_2(Q)$ 满足 $\max_{x \in G} \max(\|[x,p]\|_2, \|[x,q]\|_2) < \rho$（其中 $\rho > 0$ 待定）。取 $l \geq k$，使得存在 $(p', q') \in \mathcal{P}_2(P^{l\mathcal{U}})$，且 $\|p - p'\|_2, \|q - q'\|_2 < \rho$。那么，如果 ρ 足够小，就有 $\max_{x \in G} \max(\|[x,p']\|_2, \|[x,q']\|_2) < \alpha_K(\frac{\epsilon}{4})$；因此由断言可知，存在 $u \in U((N^{(l-1)^{\mathcal{U}}})' \cap P^{l\mathcal{U}})$，满足 $\|up'u^* - q'\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2}$。由此可得，对所有 $x \in F$，都有 $\|upu^* - q\|_2 < \epsilon$ 和 $\|[u,x]\|_2 < \epsilon$。□

注 5.5. 注意，在前一个命题中，利用 [AGE22，定理 3.2.2]，可以得到较弱的结论：P 是超 McDuff。

5.2. **（T）-FRC 性质**。要将命题 5.4 应用于有限泛型的 P，我们需要一个包含 P、且能够嵌入 $P^{\mathcal{U}}$ 并具有因子相对交换子的性质（T）因子 N。事实上，我们可以进一步问，是否每个性质（T）因子 N 都存在这样的嵌入；这引出了以下定义。

定义 5.6. 若每个具有性质（T）的 II_1 因子都能嵌入 $M^{\mathcal{U}}$，且其相对交换子为因子，我们就称可分 II_1 因子 M 具有 **（T）-FRC 性质**。

下文的命题 5.12 将推得：给定的性质（T）因子能否嵌入 $M^{\mathcal{U}}$ 并具有因子相对交换子，与超滤子的选择无关，因此（T）-FRC 是定义良好的。命题 5.12 的另一推论是，（T）-FRC 性质在初等等价下保持不变。

我们可以 因此，将 (T)-FRC 性质相对化到 Connes 可嵌入因子的情形 :

定义 5.7。一个 Connes 可嵌入的可分 II_1 因子 M 具有**可嵌入的 (T)-FRC 性质**，如果每个 Connes 可嵌入的性质 (T) 因子都能嵌入到 $M^{\mathcal{U}}$ 中，且其相对交换子为因子。

一个著名的 Popa 的问题是，$\mathcal{R}$ 是否具有可嵌入的 (T)-FRC 性质 y.
命题 5.4 与性质 (T) 因子的嵌入普适性共同推出以下结论：

推论 5.8。 如果有限泛型因子具有 *(T)-FRC* 性质，那么它们也一致超 *McDuff*。

推论 5.9。 如果 *(T)-FRC* 性质是可强制的，那么一致超 *McDuff* 也是可强制的。特别是，如果可强制因子存在且具有 *(T)-FRC* 性质，那么它就是一致超 *McDuff*。

注释 5.10。

(1) 推论 5.8 的结论在 Connes 可嵌入的情形下同样成立。如上所述，$\mathcal{R}$ 是唯一的可分有限泛型 Connes 可嵌入因子。因此，如果 $\mathcal{R}$ 具有可嵌入的 (T)-FRC 性质，那么这将提供另一种论证，说明 $\mathcal{R}$ 是一致超 McDuff 的（公平地说，这不如 Brown 最初证明 $\mathcal{R}$具有 Brown 性质来得信息丰富，因为后者指出了哪个中间子因子具有因子交换子；也不如我们上文使用量子扩张子的证明）。(2) 值得注意的是，在 Connes 可嵌入的情形下，有限泛型因子是一致超 McDuff 的，尽管我们不知道无限泛型因子是否一致超 McDuff。（ $\mathcal{R}$ 是否为无限泛型可嵌入因子，仍是一个开放问题。）另一方面，在不加限制的情形下，如定理 4.13 所示，无限泛型因子是一致超 McDuff 的，而我们尚不确定有限泛型因子是否一致超 McDuff。

由推论 5.8，自然会提出这样一个问题：

问题 5.11. 有限泛型因子是否具有 (T)-FRC 性质?

在 [Gol20], 中，已证明无限泛型因子具有 (T)-FRC 性质。因此，如果有限泛型因子与无限泛型因子初等等价，那么有限泛型因子也具有 (T)-FRC 性质。

5.3. **(T)-FRC 性质的模型论方面**。 本节将说明，为无限泛型因子证明 (T)-FRC 性质，比为任意存在闭因子证明该性质容易；而为任意存在闭因子证明该性质，又比为有限泛型因子证明该性质容易。我们首先注意到：

命题 5.12. 对于任意性质 *(T)* 因子 N，存在一个由$(\sigma_{N,m})_{m\geq 1}$ 个 $\exists_3$-句子组成的族，使得对于任意 II_1 因子 M，以下条件等价：

(1) $\sigma_{N,\,m}^{M}=0$ 对所有 $m\geq 1$ 均成立。*(2)* 对每个超滤子 $\mathcal{U}$，N 都嵌入到 $M^{\mathcal{U}}$，且其因子相对交换子为因子。*(3)* 对某个超滤子 $\mathcal{U}$，N 嵌入到 $M^{\mathcal{U}}$，且其因子相对交换子为因子。

证明。 固定一个性质 (T) 因子 N，其生成集 F 的基数为 n，Kazhdan 常数为K。对于每个 $m \geq 1$, 考虑自由变量 $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 中的如下公式 $\psi_{N,\,m}(\vec{x})$:

$$\sup_{(p,q)\in\mathcal{P}_2} \min\Bigg(\alpha_K\left(\frac{1}{2m}\right) \dot{-} \max_{i=1,\ldots,n} \max(\|[x_i,p]\|_2, \|[x_i,q]\|_2),$$
$$(\inf_{u\in U} \max(\|upu^* - q\|_2, \max_{i=1,\ldots,n} \|[u,x_i]\|_2) \dot{-} \frac{1}{m})\Bigg) = 0,$$

其中 α_K与引理 5.3 中的相同。将 $\mathrm{qftp}^N(F)$ 的一个可数稠密子集枚举为 $\{\theta_{N,i}(\vec{x}) : i \in \omega\}$，并令 $\sigma_{N,\,m}$ 为 $\inf_x \max(\max_{i=1,\,m} \theta_i(x)\psi_{N,\,m}(x))$。注意，$\psi_{N,\,m}(\vec{x})$ 是一个 $\forall_2$-公式，因此 $\sigma_{N,\,m}$ 是一个 $\exists_3$-句子。我们断言这些就是所需的句子。

首先，假设对所有 $m \geq 1$，都有 $\sigma^M_{N,\,m} = 0$。那么由饱和性可知，存在一个元组 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$，属于 $M^{\mathcal{U}}$，满足 $\mathrm{qftp}^N(F)$，且对所有 $m \geq 1$，都有 $\psi^{M^{\mathcal{U}}}_{N\,,\,m}(\vec{a}) = 0$。因此，存在一个嵌入$N \hookrightarrow M^{\mathcal{U}}$，它将 F 的元素映射到 a_i。我们断言这个嵌入的因子相对交换子是因子。为此，固定 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(N' \cap M^{\mathcal{U}})$ 和 $m \geq 1$。那么，$\psi_{N,\,m}$中出现的最小值的第一部分是 $\alpha_K(\frac{1}{2m})$，因此最小值的第二部分必为 0。于是，存在 $u \in U(M^{\mathcal{U}})$，使得$\|upu^* - q\|_2 \leq \frac{1}{m}$且 $\|[u,a_i]\|_2 \leq \frac{1}{m}$。由于对所有 $m \geq 1$，这样的酉元都存在，由饱和性可知，存在 $u \in U(N' \cap M^{\mathcal{U}})$ 将 p共轭到 q，如所需。

现在假设，对于某个超滤子 $\mathcal{U}$，N 可嵌入到 $M^{\mathcal{U}}$ 中，且其因子相对交换子是因子。令 $a_1, \ldots, a_n \in M^{\mathcal{U}}$ 为嵌入下 F 中各元素的像。固定 $m \geq 1$。我们证明 $\psi^{M^{\mathcal{U}}}_{N\,,m}(\vec{a}) = 0$，从而 $\sigma^M_{N,m} = \sigma^{M^{\mathcal{U}}}_{N\,,\,m} = 0$。为此，固定 $(p,q) \in \mathcal{P}_2(M^{\mathcal{U}})$，并假设对所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $\|[a_i,p]\|_2, \|[a_i,q]\|_2 < \alpha_K(\frac{1}{2m})$。按照命题 5.4 的证明逐步论证，可得满足 $\|upu^* - q\|_2 \leq \frac{1}{m}$的 $u \in U(N' \cap M^{\mathcal{U}})$。这个 u 实现了 $\psi_{N,m}$ 中的内层下确界。□

推论 5.13。 *(T)-FRC* 性质和可嵌入的 *(T)-FRC* 性质都是可分 II_1 因子的 $\exists_3$-公理化性质。

注记 5.14。

(1) 可以使用命题 5.12 中的句子来定义任意 II_1 因子的 (T)-FRC 性质。(2) 值得指出的是，(T)-FRC 性质是可公理化的，而目前我们只知道 Brown 性质是局部的$local$，也就是说，它在初等等价下保持不变。

我们来回顾关于存在闭结构中 $\exists_3$ 句子真值的以下若干事实。为简便起见，我们只针对 II_1 因子陈述这些事实（尽管第一条普遍成立，而第二条和第三条在任何具有联合嵌入性质的 $\forall_2$ 理论中都成立）。这些结果的经典版本见 [Hod06，推论 3.2.5、练习 5.3.12、定理 4.3.4]。

事实 5.15. S 假设 σ 是带迹冯·诺伊曼代数语言中的一个 $\exists_3$ 句子 .

(1) 如果 $M \subseteq N$ 是存在闭因子且 $\sigma^M = 0$，那么 $\sigma^N = 0$。（这里，σ 甚至可以包含来自 M 的参数。）*(2)* 如果 $\sigma^M = 0$ 对某个存在闭因子成立，那么 $\sigma^N = 0$ 对所有无限泛型因子成立。

（*3*）如果 $\sigma^M = 0$ 对某个有限泛型因子成立，那么对所有 ***e.c.*** 因子都有 $\sigma^N = 0$.

(1) 和 ***(2)*** 的证明。对于 (1)，固定一个嵌入 $i\colon N \hookrightarrow M^{\mathcal{U}}$，其限制为对角嵌入$M \hookrightarrow M^{\mathcal{U}}$。将 $\sigma =$ 写作 $\inf_x \sup_y \inf_z \varphi(x,y,z)$，其中 φ 是一个带有来自 M 的参数的无量词公式。由于 $\sigma^M = 0$，存在 $a \in M$ 使得 $(\sup_y \inf_z \varphi(a,y,z))^M = 0$。固定 $b \in N$；我们需要 $(\inf_z \varphi(a,b,z))^N = 0$。然而，由于 N 是存在闭的，这可由 $(\inf_z \varphi(a,i(b)\ z))^{M^{\mathcal{U}}} = 0$ 推出，而后者又由以下事实推出：$(\sup_y \inf_z \varphi(a,y,z))^{M^{\mathcal{U}}} = 0$。

（2）由（1）以及以下事实推出：无限泛型因子是存在闭的、嵌入普适的，并且彼此初等等价。□

上述命题的第三项可以像经典情形中那样证明，只需使用在 [Gol21] 中建立的必要组成部分的连续版本。

前述事实的第二项说明，证明无限泛型因子具有 (T)-FRC 性质是可能的“最容易”的情形；而第三项说明，证明 $\mathcal{R}$ 具有可嵌入的 (T)-FRC 性质，以及证明有限泛型因子具有 (T)-FRC 性质，是可能的“最困难”的情形。

上述事实的第（1）项还给出以下事实：

推论5.16。如果 M 是一个包含无限泛型因子的存在闭因子，那么 M 具有***(T)-FRC*** 性质。

我们指出，所有存在闭因子都有可能是无限泛型的；如此一来，前一个推论便会退化为 [Gol20]的主要结果。

参考文献

[AGE22] Scott Atkinson、Isaac Goldbring 和 Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli。《相对交换子因子性与 II_1 因子的广义荣格性质》。载于：《数学进展》396（2022），第 108107 页。[AK21] Scott Atkinson 和 Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli。《带迹冯·诺伊曼代数的超积嵌入与可和性》。载于：《国际数学研究通知》4（2021），第 2882–2918 页。ISSN：1073-7928。DOI：10.1093/imrn/rnaa257。[BCI17] Rémi Boutonnet、Ionuţ Chifan 和 Adrian Ioana。《具有非同构超幂的 II_1 因子》。载于：《杜克数学杂志》166.11（2017），第 2023–2051 页。ISSN：0012-7094。DOI：10.1215/00127094-0000017X。[CDI22] Ionut Chifan、Daniel Drimbe 和 Adrian Ioana。《具有性质（T）的 II_1 因子的嵌入普适性》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2205.07442*（2022）。[CIE22] Ionut Chifan、Adrian Ioana 和 Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli。两个不初等等价且不具有 *Gamma* 性质的 II_1 因子。2022。DOI：10.48550/ARXIV.2209.10645。[CJ85] Alain Connes 和 Vaughan Jones。《冯·诺伊曼代数的T性质》。载于：《伦敦数学会通报》17.1（1985），第 57–62 页。[CK13] C.C. Chang 和 H.J. Keisler。模型论：第三版。《多佛数学丛书》。多佛出版社，2013。ISBN：9780486310954。

[Con76] Alain Connes。《内射因子的分类。情形 II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$》。载于：《数学年刊》（第 2 辑）104.1（1976），第 73–115 页。ISSN：0003-486X。DOI：10.2307/1971057。[DL69] Jacques Dixmier 和 E Christopher Lance。《两个新的 II_1 型因子》。载于：Inventiones mathematicae 7.3（1969），第 226–234 页。[Far+16] Ilijas Farah 等。《存在闭 II_1 因子》。载于：Fundamenta Mathematicae 233（2016），第 173–196 页。[FGL06] Junsheng Fang、Liming Ge 和 Weihua Li。《von Neumann 代数的中心序列代数》。载于：Taiwanese J. Math. 10.1（2006），第 187–200 页。ISSN：1027-5487。DOI：10.11650/twjm/1500403810。[FHS13] Ilias Farah、Bradd Hart 和 David Sherman。《算子代数模型论 I：稳定性》。载于：《伦敦数学会通报》45.4（2013），第 825–838 页。[FHS14a] Ilias Farah、Bradd Hart 和 David Sherman。《算子代数模型论 II：模型论》。载于：Israel Journal of Mathematics 201.1（2014），第 477–505 页。[FHS14b] Ilias Farah、Bradd Hart 和 David Sherman。《算子代数模型论 III：初等等价与 II_1 因子》。载于：《伦敦数学会通报》46.3（2014），第 609–628 页。[GH17] Isaac Goldbring 和 Bradd Hart。《关于 McDuff 的 II_1 因子理论》。载于：International Mathematics Research Notices 2017.18（2017），第 5609–5628 页。[GH20a] Isaac Goldbring 和 Bradd Hart。《超有限 II_1 因子理论的小片段可表达的性质》。载于：Confluentes Mathematici 12.2（2020），第 37–47 页。[GH20b] Isaac Goldbring 和 Bradd Hart。《超有限 II_1 因子的普适理论不可计算》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2006.05629（2020）。[GH22] Isaac Goldbring 和 Bradd Hart。《带迹冯·诺伊曼代数模型论综述》。2022。DOI：10.48550/ARXIV.2210.15508。[GHS13] Isaac Goldbring、Bradd Hart 和 Thomas Sinclair。《带迹冯·诺伊曼代数理论没有模型伴侣》。载于：Journal of Symbolic Logic 78.3（2013），第 1000–1004 页。[Gol18] Isaac Goldbring。《谱隙与可定义性》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1805.02752（2018）。[Gol20] Isaac Goldbring。《关于 Popa因子交换子嵌入问题》。载于：Proceedings of the American Mathematical Society 148.11（2020），第 5007–5012 页。[Gol21] Isaac Goldbring。《可强制算子代数》。载于：Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 20（2021），第 31–63 页。[Has07] M. B. Hastings。《随机酉元产生量子扩张子》。载于：Phys. Rev. A 76（3，2007 年 9 月），第 032315 页。DOI：10.1103/PhysRevA.76.032315。[Hod06] Wilfrid Hodges。《通过博弈构造模型》。Courier Corporation，2006。[IS21] Adrian Ioana 和 Pieter Spaas。《具有奇异中心序列代数的 II_1 因子》。载于：J. Inst. Math. Jussieu 20.5（2021），第 1671–1696 页。ISSN：1474-7480。DOI：10.1017/S14747480
19000653。
[Ji+21] Zhengfeng Ji 等人。“MIP*= RE”。载于：美国计算机协会通讯64.11（2021），第 131–138 页。[Jun07] Kenley Jung。“可和性、管状性以及嵌入 $\mathcal{R}^\omega$”。载于：数学年刊338.1（2007），第 241–248 页。issn：0025-5831。doi：10.1007/s00208-006-0074-y。[Mar18] Amine Marrakchi。“等价关系的乘积的稳定性”。载于：组合数学154.9（2018），第 2005–2019 页。issn：0010-437X。doi：10.1112/s0010437x18007388。

[McD69] DusaMcDuff。“不可数多个 II_1 因子”。载于：《数学年刊》（*2*）90（1969），第 372–377 页。issn：0003-486X。doi：10.2307/1970730。[McD70] Dusa McDuff。“中心序列与超有限因子”。载于：《伦敦数学会会刊》（*3*）21（1970），第 443–461 页。issn：0024-6115。doi：10.1112/plms/s3-21.3.443。[MN43] F. J. Murray 和 J. von Neumann。“关于算子环。IV”。载于：《数学年刊》（*2*）44（1943），第 716–808 页。issn：0003-486X。doi：10.2307/1969107。[Pop12] S. Popa。“具有谱隙的 II_1 因子的归纳极限的分类”。载于：《美国数学会汇刊》364.6（2012），第 2987–3000 页。[Tan22] Hui Tan。“II_1, 因子的性质（T）的谱隙刻画”。预印本，arXiv:2202.06089。2022。[Zel69] G. Zeller-Meier。“两类新的 II_1型因子”。载于：《数学发明》7（1969），第 235–242 页。issn：0020-9910。doi：10.1007/BF01404308。

加利福尼亚大学欧文分校数学系，Rowland Hall 340 室（400 号楼），
欧文 ，加利福尼亚州 92697-3875
电子邮件地址: isaac@math.uci.edu
网址: http://www.math.uci.edu/~isaac

加利福尼亚大学欧文分校数学系，Rowland Hall 410 室（400 号楼），欧文，加利福尼亚州 92697-3875

电子邮箱：jspi@math.uci.edu
网址：https://sites.uci.edu/jpi314/

加利福尼亚大学圣迭戈分校数学系，Gilman Dr 9500 号，拉霍亚，加利福尼亚州 92093

电子邮箱：djekel@ucsd.edu
网址：https://davidjekel.com/

纯粹与应用数学研究所，加州大学洛杉矶分校，波托拉广场460号，洛杉矶，加利福尼亚州90095，美国电子邮箱: srivatsav.kunnawalkam.elayavalli@vanderbilt.edu网址: https://sites.google.com/view/srivatsavke/home