论几乎阿贝尔群的群环

JOAN CLARAMUNT 和 ŁUKASZ GRABOWSKI

摘要。设 Γ 为一个有限生成无挠群。我们证明，Γ 是几乎阿贝尔的这一陈述，等价于群环 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 在伴随于群冯·诺伊曼代数的（无界）算子代数中的 $*$-正则闭包是一个中心除代数这一陈述。更一般地，对任意域 k，证明了当 Γ 是几乎阿贝尔时，$k[\Gamma]$ 可嵌入一个中心除代数。我们利用这一结果，给出群环 $k[\Gamma]$ 中单位元存在性的一个判据。我们在 Γ 为 Promislow 群的特殊情形下研究了这一判据。

arXiv:2303.02823v1 [math.GR] 6 Mar 2023

目录

1 引言 .1 2 预备知识.32.1 中心除法代数.3 2.2 几乎阿贝尔群.3 2.3 冯·诺伊曼正则环和 $*$-正则环.3 2.4 交叉积和群代数.3**3 中心除法代数与几乎阿贝尔群 .4**3.1 从几乎阿贝尔群到中心除法代数.4 3.2 从中心除法代数到几乎阿贝尔群.6**4 关于几乎阿贝尔群的群环中单位元的存在性 .8 5 Promislow 群的情形 .9**5.1 一个元素的 ω-次数.13 5.2 存在具有 ω-次数 (2, 2) 的 ω-共轭的判据.19**致谢 .24 参考文献.24**

1. 引言

最近，Gardam [5] 提出了一个反例，推翻了归因于 Kaplansky 的群环领域中的著名猜想之一：单位猜想。该猜想断言：对于一个无挠群 Γ，其系数取自域 k的群环中，唯一的单位元是平凡单位元，即形如 λg 且满足 $\lambda \in k\backslash\{0\}$、$g \in \Gamma$的单位元。Gardam 通过明确展示一个群 G、一个域 k 以及一个非平凡单位元，推翻了这一猜想。他所使用的域是二阶域 $k = \mathbb{F}_2$，而群 G 则是 Promislow 群，即唯一具有有限阿贝尔化的无挠三维晶体群。后来，Murray [8] 沿用了与 [5]相同的思路，通过在任意正特征的域上使用同一个群，证明了该猜想不成立，其中 $\mathrm{char}(k) > 0$ 。

当系数域为零特征域时，单位猜想仍未解决。虽然我们针对这一情形建立了一些关于单位存在性的新颖且有趣的判据，但尚未能实现最初解决该猜想的目标，即使是在 Promislow 群的情形下也是如此。

我们研究的起点是如下观察。设 $\mathcal{R}(\Gamma)$ 是群环 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 在与群冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}(\Gamma)$ 伴随的（可能无界的）算子代数 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 中的 $*$-正则闭包。当 Γ 为无挠时，也可等价地将 $\mathcal{R}(\Gamma)$ 定义为 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 的 Ore局部化。于是 $\mathcal{R}(\Gamma)$ 是一个中心除代数，即它是一个在其中心上有限维的除法代数。鉴于此，寻找特别属于 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 的单位元这一问题，与确定有理数的有限域扩张的整数环中的单位元这一问题极为相似。

日期：星期二 7th 2023年3月。2010 数学主题分类。主要分类：16S34、20C07；次要分类：16E50。两位作者均获 ERC启动基金“代数与组合学中的结构极限”（编号 805495）资助。

对于 Promislov 群，除法代数 $\mathcal{R}(\Gamma)$ 在其中心上为 16 维，而该中心是 3 个变量的有理函数域的一个 2 维扩张。首先注意到，无论单位猜想是否成立，探究哪些群 Γ 具有如下性质都是有意义的： $\mathcal{R}(\Gamma)$ 是一个中心除代数。下面的定理回答了这个问题。

定理 (定理 3.1**). </style}如果 是一个有限生成无挠群，那么当且仅当 -正则闭包 (**$\Gamma) := \mathcal{R}(\mathbb{C}[\Gamma], \mathcal{U}(\Gamma))$ 中的 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 在 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 中是一个中心除代数时， Γ 才是几乎阿贝尔群。

现在我们简要说明，在一般情形下，当 Γ 是任意几乎阿贝尔群时，我们如何建立一个判据来确定 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 中单位元的存在性。详细内容见第 4 节。设给定一个多项式 $p(x)$，其次数为 $d \geq 2$，系数属于 Z($k[\Gamma]$)，即 $k[\Gamma]$的中心。进一步假设 $p(x)$在 Z($k[\Gamma]$)中有一个根，记作 κ。于是我们可以将 $p(x)$写成乘积 $(x-\kappa)q(x)$，其中$q(x)$是一个系数也属于 Z($k[\Gamma]$)的多项式。于是，若 $T \in k[\Gamma]$ 是满足 $p(T) = 1$的任意元素，我们得到

$$1 = (T - \kappa)q(T),$$

因此， $T - \kappa$ 是 $k[\Gamma]$中的一个单位元，它可能是平凡的，也可能不是。

我们聚焦于 Γ 是 Promislow 群 G的情形。首先，我们来初步考察 char(k) $\neq 2$时 $k[G]$ 中的单位元。正如我们在命题 5.14 和 5.15 中所展示的， $k[G]$中的非平凡单位可分为两类。记 $\mathcal{R}(\Gamma)$的中心为 $\mathcal{Z}$，并令 $k[G]$中的一个非平凡单位为 U。写作 $\omega^U = a + bs + ct + du \in k[G]$，其中 a、 b、 c、 $d \in k[\mathbb{Z}^3]$以及 s、 t、 u 是 G的标准生成元。那么，域 $\mathcal{Z}(a + bs)$和 $\mathcal{Z}(ct + du)$在 $\mathcal{Z}$ 上的次数相同，且这个公共次数为 2 或 4。前一种情形下，我们称 U 为 2 型；后一种情形下，称其为 4 型。直接检验可知，Murray 在 char(k) > 2 时于 [8] 中找到的单位元属于 2 型（命题 5.21）。因此，探讨 char(k) $= 0$时 2 型单位的存在性判据是有意义的。

有鉴于此，我们来陈述 $\mathbb{C}[G]$ 中存在 2 型单位的判据。

定理 (定理 5.24**)。** 设 G 为 *Promislow* 群。那么， $\mathbb{C}[G]$中存在非平凡的 *2* 型单位，当且仅当以下关于 9 个变量、系数属于 $\mathcal{Z}$ 的二次方程组在 $\mathcal{Z}$中有非平凡解：

$$\begin{aligned}
&\diamond\ (A^2-1)\omega_x^2 + C_1^2(\kappa_x+1)(\kappa_y-1) - C_2^2(\kappa_x-1)(\kappa_y+1) + C_3^2(\kappa_x+1)(\kappa_y+1) - C_4^2(\kappa_x-1)(\kappa_y-1) \\
&\qquad + 2D_1^2(\kappa_z-1) - 2D_2^2\omega_x^2(\kappa_z+1) + 2D_3^2(\kappa_z+1) - 2D_4^2\omega_x^2(\kappa_z-1) = 0, \\
&\diamond\ (\kappa_x-1)C_2C_4 - (\kappa_x+1)C_1C_3 = 0, \\
&\diamond\ (\kappa_x-1)C_2D_2 + C_3D_3 = 0, \\
&\diamond\ (\kappa_x+1)C_1D_2 + C_4D_3 = 0, \\
&\diamond\ (\kappa_x-1)C_4D_4 + C_1D_1 = 0, \\
&\diamond\ (\kappa_x+1)C_3D_4 + C_2D_1 = 0.
\end{aligned}$$

这里， $\kappa_g = \frac{1}{2}(g + g^{-1}) \in \mathbb{C}[G]$，且 $\omega_g = \frac{1}{2}(g - g^{-1}) \in \mathbb{C}[G]$，其中 $g \in G$。

应将此判据与 [2], 中陈述的行列式条件作比较；后者给出一个含 16 个变量、次数为 4 的单个多项式方程。从这个意义上说，相较于行列式条件，我们的判据给出了一个“更简单的”多项式方程。

备注。 目前尚不清楚 Promislow 群的群环 $\mathbb{C}[G]$ 中是否含有任何非平凡酉元。定理 5.26 将陈述一个与上述定理类似的、关于酉元存在性的充要判据。

本文的组织结构如下。第 2 节汇集冯·诺伊曼正则的定义以及
$*$-正则环，以及在一个 $*$-正则环中子环的 $*$-正则闭包的定义。我们还回顾环与群的交叉积构造，环的群环是这一构造的一个特例。第 3 节中，我们陈述并证明第一个主要结果，即通过群环在 $\mathcal{U}(\Gamma)$中的 $*$-正则闭包的代数性质来刻画几乎阿贝尔群 Γ ； 其中 $\mathcal{U}(\Gamma)$是伴随于群冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}(\Gamma)$的（无界）算子代数。第 4 节中，我们利用这一刻画的部分内容，简要介绍一种在几乎阿贝尔群的群代数中寻找单位元的一般过程。我们进一步将此过程具体用于 Γ 为 Promislow 群 G的情形，并对其进行分析，最终得出定理 5.24 和 5.26 中给出的判据。这些判据为在 G的群环中寻找非平凡单位（分别为酉元）提供了充要条件。相关内容在第 5 节中完成。

2. 预备知识

2.1. 中心除法代数。 设 k 为任意域。在本节及本文其余部分，k-代数均指域 k上的含幺结合代数 A 。其中心记作 Z(A)。总有 $k \subseteq$ Z(A)。若 k-代数 A 满足这一包含关系实际上是等式，即 $k =$Z(A)，则称其为中心的 。

k-代数 A 称为除法代数，如果每个非零元素 $a \in A$ 都双侧可逆，也就是说，存在元素 $b, c \in A$ ，使得 $ab = 1$ 且 $ca = 1$。在这种情况下，必有 $b = c$ ，而这个公共元素是满足两个方程 $ax = 1, ya = 1$的唯一元素。我们将其记为 a^{-1}，称为 a的逆元 。因此， k 上的除法代数是一个同时也是 k上代数的除环。

本文采用以下约定。

定义 2.1. k-代数 A 称为中心除代数，如果

a) A 是中心的；b) A 是除法代数；c) A 在 Z(A) $= k$上有限维。

我们用 $[A\colon k]$ 表示 A 在 k上的维数。

更一般地，若 $\mathcal{R}$ 表示任意除环，且 V 是一个左 $\mathcal{R}$-模，则 $[V\colon \mathcal{R}]$ 表示 V 在 $\mathcal{R}$上的维数。

2.2. 几乎阿贝尔群。 若存在一个有限指数的阿贝尔子群，则称群 Γ 为几乎阿贝尔的 。等价地，若存在一个有限指数的正规阿贝尔子群。

本文只讨论有限生成群。在这种情况下，有限生成的几乎阿贝尔群 Γ 包含一个有限生成的正规阿贝尔子群 N ，且其指数有限。此外，若假设 Γ 无挠，则必有 N 同构于某个 $\mathbb{Z}^n$ ，其中 $n \geq 1$。

2.3. 冯·诺伊曼正则与 $*$-正则环。 若对每个元素 $x \in R$ ，都存在 $y \in R$ 使得 $xyx = x$，则称含幺环 R （冯·诺伊曼）正则 。注意，元素 $e = xy$ 是 R中的幂等元，即 $e^2 = e$。

称 $*$-正则环 是一个正则环 R ，并带有适当对合 $*\colon R \to R$；适当是指$x^*x = 0$ 蕴含 $x = 0$。不难证明，在 $*$-正则环中，下列性质成立。对每个元素 $x \in R$ ，都存在唯一的投影元 $e, f \in R$ （即满足 $p^2 = p^* = p$ 的元素 $p \in R$ ），使得 $xR = eR$且 $Rx = Rf$；此外，还存在唯一的元素 $y \in fRe$，称为 x 的相对逆元，记作$\overline{x}$，使得 $xy = e$ 且 $yx = f$。我们用 LP(x) 表示投影元 e，称为 x 的左投影；用 RP(x) 表示投影元 f，称为 x 的右投影 。

对于 $*$-正则环 R 的任意子集 S，存在包含 S 的最小 $*$-正则子环 R，记作$\mathcal{R}(S, R)$，称为 R [1, 中 S 的 $*$-正则闭包 命题 6.2]。它总是包含除法闭包$\mathcal{D}(S, R)$。回顾一下，除法闭包定义为包含 S 的 R 的最小子环，并且在 R 中元素的逆元存在时对取逆运算封闭（因此，若 $x \in \mathcal{D}(S, R)$ 在 R 中可逆，且其逆元为 x^{-1}，则 $x^{-1} \in \mathcal{D}(S, R)$）。

2.4. 交叉积与群代数。 设 R 是一个含幺环， Γ 是任意可数群。交叉积，记作 $R * \Gamma$，是一个含幺环，其中每个元素都可以唯一地写成有限和

$$\sum_{g \in \Gamma} r_g g$$

其中 $r_g \in R$。求和按分量进行，乘法则由以下规则描述

$$(rg) \cdot (sh) = r\ \sigma_g(s)\ \tau(g, h)\ gh$$

对于 r、 $s \in R$ 以及 g、 $h \in \Gamma$，其中 $\tau\colon \Gamma \times \Gamma \to R^\times$ 且 $\sigma\colon \Gamma \to$ Aut(R)是满足以下性质的映射:

a) $\sigma_1 =$id$_R$，且对所有 g、 $h \in \Gamma$， $\tau(1, h) = \tau(g, 1) = 1$；b) 对所有 g、 h、 $f \in \Gamma$， $\tau(g, h)\tau(gh, f) = \sigma_g(\tau(h, f))\tau(g, hf)$（因此 τ是 σ的2-余循环）；c) 对所有 g、 $h \in \Gamma$、 $r \in R$， $\tau(g, h)\sigma_{gh}(r) = \sigma_g(\sigma_h(r))\tau(g, h)$。

这里， $R^\times$ 是 R的单位群。

在 τ 和 σ 是平凡映射的特殊情况下，我们得到群环 $R[\Gamma]$。我们尤其关注 $R = k$ 是域的情形。此外，如果 $R = k$ 是带有对合的域
$*$，它通过以下规则线性扩张为 $k[\Gamma]$ 上的一个对合

$$(\lambda g)^* = \lambda^* g^{-1}$$

对于 $\lambda \in k$, $g \in \Gamma$。

定义 2.2. 若存在 $v \in k[\Gamma]$ 使得 $1 = uv = vu$, 则称元素 $u \in k[\Gamma]$ 为单位元。若对于某个 $\lambda \in k\backslash\{0\}$ 和 $g \in \Gamma$, 有 $u = \lambda g$, 则称其为平凡单位元; 否则称其为非平凡单位元。

现在取带有复共轭对合作为对合的 $k = \mathbb{C}$。令 $l^2(\Gamma)$ 表示以 Γ 中的元素为标准正交基的希尔伯特空间。于是, $\mathbb{C}[\Gamma]$ 通过左乘法忠实地作用于 $l^2(\Gamma)$, 因此我们可以将 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 视为 $\mathcal{B}(l^2(\Gamma))$ 的子集, 也就是 $l^2(\Gamma)$ 上的有界算子。Γ 的群冯·诺伊曼代数 记为$\mathcal{N}(\Gamma)$, 定义为 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 在 $\mathcal{B}(l^2(\Gamma))$ 中的弱闭包。从代数角度看, 它的特征如下: $\mathcal{N}(\Gamma)$ 由所有与 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 在 $l^2(\Gamma)$ 上通过右乘法给出的作用相交换的有界算子 $T \in \mathcal{B}(l^2(\Gamma))$ 构成。

此外, 我们用 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 表示伴随于冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}(\Gamma)$ 的（可能无界）算子代数。我们同样可以给出其代数刻画: $\mathcal{N}(\Gamma)$ 是一个 Ore整环, 并且 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 与 $\mathcal{N}(\Gamma)$ 的经典商环一致 [9, 命题 2.8]。

我们用 $\mathcal{D}(\Gamma) := \mathcal{D}(\mathbb{C}[\Gamma],\mathcal{U}(\Gamma))$ 表示 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 在 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 中的除法闭包, 并用 $\mathcal{R}(\Gamma) := \mathcal{R}(\mathbb{C}[\Gamma],\mathcal{U}(\Gamma))$ 表示 $*$-正则闭包 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 在 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 中的闭包。后者存在, 因为 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 是 $*$-正则的 [9, 注 2.11]。我们有以下包含关系

$$\mathbb{C}[\Gamma] \subseteq \mathcal{D}(\Gamma) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma) \subseteq \mathcal{U}(\Gamma).$$

注意, 对于 $H \leq \Gamma$ Γ 的一个子群, 包含关系 $\mathbb{C}[H] \hookrightarrow \mathbb{C}[\Gamma]$ 诱导出自然嵌入 $\mathcal{N}(H) \hookrightarrow \mathcal{N}(\Gamma)$、$\mathcal{U}(H) \hookrightarrow \mathcal{U}(\Gamma)$ 以及 $\mathcal{R}(H) \hookrightarrow \mathcal{R}(\Gamma)$。

3. 中心除法代数与几乎阿贝尔群

设 Γ 是一个有限生成无挠群。本节给出关于 $*$-正则闭包 $\mathcal{R}(\Gamma)$ 的一个充要条件, 以保证 Γ 是几乎阿贝尔群。主要定理如下。

定理 3.1. 设 Γ 是一个有限生成无挠群。以下陈述等价。

(1) Γ 是几乎阿贝尔群。*(2)* $\mathcal{R}(\Gamma)$ 是一个中心除法代数。

本节余下部分旨在证明上述定理 3.1, 同时也将得到一些旁支结果。

3.1. 从几乎阿贝尔群到中心除法代数。

首先设 Γ 是一个有限生成、无挠且几乎阿贝尔的群。我们的共轭约定是: 对于 g、$h \in \Gamma$, $h^g := ghg^{-1}$。

设 $N \leq \Gamma$ 是一个有限指数的极大正规阿贝尔子群, 因此对某个 $n \geq 1$ 有 $N \cong \mathbb{Z}^n$。令 $F := \Gamma/N$, 这是有限的。F 通过共轭在 N 上自然作用, 即 $n \mapsto n^f$, $f \in F$; 该作用线性延拓为 F 在 $k[N]$ 上的作用, 仍记为 $p \mapsto p^f$, $f \in F$。取 $\tilde{F}$ 为 N 在 Γ 中的一个固定右陪集代表系。为简单起见, 我们取 N 的代表为单位元 $1 \in \Gamma$, 即 $\tilde{1} = 1$。若 $\pi: \Gamma \to F$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ 表示自然商映射, 则元素 $f \in F$ 的像简记为 $\tilde{f}$, 即 $\tilde{f} = \pi(f)$。$\tilde{}$ $\tilde{}$ 因此, 对于 $p \in k[N]$ 和 $f \in F$,

$$p^{\tilde{f}} = p^f.$$

现在固定一个带有对合 $*$ 的域 k。注意, 群代数 $k[\Gamma]$ 中的每个元素都可以唯一地写成

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} p_{\tilde{f}} \tilde{f}$$

对某些 Laurent多项式 $p_{\tilde{f}} \in k[N] \cong k[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$。因此, $k[\Gamma]$ 是一个交叉积

$$k[\Gamma] = k[N] * \tilde{F}$$

其乘法结构由下式给出

$$(p\tilde{f}) \cdot (q\tilde{g}) = p\, q^f\, \tau(f,g)\, \widetilde{fg},$$

其中 τ: $F \times F \to N$是由 $\tau(f,g) = \tilde{f}\,\tilde{g}\,\widetilde{fg}^{-1}$给出的 2-余循环。特别地, 我们看到映射$F \to \mathrm{Aut}(k[N])$ $f \mapsto {}^{\cdot f}$是一个群同态。

由于 Γ 是几乎阿贝尔群, 群环 $k[\Gamma]$ 满足 Kaplansky零因子猜想, 即它是一个整环 [6, 定理 1.4]。事实上, 它是一个*Ore*整环。我们用 $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(k[\Gamma])$ 表示它的 Ore分式域, 该分式域是 k上的一个除法代数。

本节将始终使用以下记号。

记号 3.2。

a) 我们用 $\mathcal{Z}$ 表示 $\mathcal{Q}$ 的中心，它是一个域。b) 对于子集 $A \subseteq \mathcal{Q}$，我们用 $\mathcal{Z}(A)$ 表示包含 $\mathcal{Z}$ 及 A 中各元素的、在 k 上的最小除法代数。c) 对于任意除环 $\mathcal{R}$ 以及任意满足 $\beta \neq 0$ 的 α、$\beta \in \mathcal{R}$，用 $\alpha^\beta := \beta\alpha\beta^{-1}$ 表示 β 对 α 的共轭。

首先，在 $k = \mathbb{C}$ 的情形下，我们用 $\mathcal{Q}$ 来计算除法闭包 $\mathcal{D}(\Gamma)$ 和 $*$ 正则闭包 $\mathcal{R}(\Gamma)$。结果发现，这三个环彼此相同。

命题 3.3。对于 $k = \mathbb{C}$，有

$$\mathcal{Q} = \mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{R}(\Gamma).$$

证明。包含关系 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{D}(\Gamma) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma)$ 显然。现在，$\mathcal{Q}$ 是一个除法代数，因此它是冯·诺伊曼正则的。它也是 $*$-闭的，且包含 $k[\Gamma]$，所以 $\mathcal{R}(\Gamma) \subseteq \mathcal{Q}$，命题得证。□

让我们回到一般情形，其中 k 是带有对合 $*$ 的任意域。我们定义 $\mathcal{L}$ 为 $k[N] \cong k[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$ 的分式域，它可以看作 $\mathcal{Q}$ 的一个子域。事实上，它可以被识别为 $k(x_1, ..., x_n)$，即关于 n 个变量 $x_1, ..., x_n$ 的有理函数域，本文中我们始终作此识别。每个元素 $f \in F$ 都通过共轭作用于 $\mathcal{L}$，因而自然诱导出 $\mathrm{Autl}(\mathcal{L}/k)$ 的一个元素，我们将其记为 α_f。利用阿贝尔子群 N 的极大性，很容易看出映射 $\alpha\colon F \to \mathrm{Aut}(\mathcal{L}/k)$ $f \mapsto \alpha_f$ 是一个单射群同态，因此我们将 F 与子群 $H := \mathrm{im}(\alpha)$ 认同。

命题 3.4。下列陈述成立。

(i) 环 $\mathcal{Q}$ 是阿廷的，并且此外

$$\mathcal{Q} = \mathcal{L} * \tilde{F}$$

~对于一个合适的交叉积。特别地，F 是 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{L}$上的一组基，其中 $\mathcal{L}$的乘法从左侧定义。因此 $[\mathcal{Q}:\ \mathcal{L}] = |F|$。

(ii) 若记 $\mathcal{L}^H$ 为与子群 $H \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{L}/k)$相关联的 $\mathcal{L}$ 的不变子域，则

$$\mathcal{Z} = \mathcal{L}^H.$$

特别地，$\mathcal{Q}$在 $\mathcal{Z}$上是有限维的，事实上 $[\mathcal{Q}:\ \mathcal{Z}] = |F|^2$。

证明。(i) 记 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathcal{L}$ 和 Γ生成的 $\mathcal{Q}$ 的子环。$\mathcal{A}$ 的每个元素都可以表示为单项式的有限和

$$x_1 x_2 \cdots x_r$$

~其中要么 $x_i \in \mathcal{L}$，要么 $x_i \in F$。注意，若 $x \in \mathcal{L}$且 $g = nf \in \Gamma$，对应于唯一元素 $n \in N$、$f \in F$，则

$$gx = n\tilde{f}x = n\tilde{f}x\tilde{f}^{-1}\tilde{f} = nx^{\tilde{f}}\tilde{f} \in \sum_{\tilde{f}\in\tilde{F}} \mathcal{L}\tilde{f}.$$

~由此可得 $\mathcal{A} = \sum_{\tilde{f}\in\tilde{F}} \mathcal{L}f$。为证明这个和是直和，假设有

$$\sum_{\tilde{f}\in\tilde{F}} x_{\tilde{f}}\tilde{f} = \sum_{\tilde{f}\in\tilde{F}} y_{\tilde{f}}\tilde{f} \tag{3.1}$$

对于某些 $x_{\tilde{f}}, y_{\tilde{f}} \in \mathcal{L}$。记

$$x_{\tilde{f}} = p_{\tilde{f}} q_{\tilde{f}}^{-1}, \quad y_{\tilde{f}} = r_{\tilde{f}} s_{\tilde{f}}^{-1}$$

其中每个 $p_{\tilde{f}}, q_{\tilde{f}}, r_{\tilde{f}}, s_{\tilde{f}} \in k[N]$, $q_{\tilde{f}}, s_{\tilde{f}} \neq 0$。在左侧用元素 $h = \prod_{\tilde{f}\in\tilde{F}} q_{\tilde{f}} s_{\tilde{f}} \neq 0$ 乘以 (3.1)，得到

$$\sum_{\tilde{f}\in\tilde{F}} x_{\tilde{f}} h \tilde{f} = \sum_{\tilde{f}\in\tilde{F}} y_{\tilde{f}} h \tilde{f},$$

~ ~ ~这是 $k[\Gamma]$ 中的一个等式。但 $k[\Gamma] = k[N] * F$，因此对每个 $f \in F$，必然有 $x_{\tilde{f}} h = y_{\tilde{f}} h$，这~ ~意味着 $x_{\tilde{f}} = y_{\tilde{f}}$，因为 $h \neq 0$。这证明和 $\sum_{\tilde{f}\in\tilde{F}} \mathcal{L}f$ 是直和，因此对于某个适当的交叉积，有 $\mathcal{A} = \mathcal{L} * F$。特别地，$\mathcal{A}$ 是阿廷的，由此可得 $\mathcal{A} = \mathcal{Q}$。事实上，给定满足$a$、$b \in k[\Gamma]$、$b \neq 0$的 $ab^{-1} \in \mathcal{Q}$，则理想链

$$b\mathcal{A} \supseteq b^2\mathcal{Q} \supseteq \cdots \supseteq b^n\mathcal{A} \supseteq \cdots$$

稳定，因此我们可以找到一个正整数 $k \geq 1$ 和 $c \in \mathcal{A}$，使得 $b^k = b^{k+1}c$。这意味着$b^{-1} = c \in \mathcal{A}$，因此 $ab^{-1} \in \mathcal{A}$，从而证明等式 $\mathcal{Q} = \mathcal{A} = \mathcal{L} * \tilde{F}$。

第二部分现在很容易得出。

(ii) 我们先证明包含关系 $\mathcal{L}^H \subseteq \mathcal{Z}$。给定 $x \in \mathcal{L}^H$，显然 x与任意 $n \in N$都可交换。现在取$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $f \in F$。我们计算得

$$\tilde{f}x\tilde{f}^{-1} = x^{\tilde{f}} = x^f = \alpha_f(x) = x,$$

$\tilde{\ }$因此 x 也与 F可交换。于是 x 在 $k[\Gamma]$中是中心的，因此在 $\mathcal{Q}$中也同样是中心的。

对于另一个包含关系 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{L}^H$，我们先注意到以下事实。由于 $N \trianglelefteq \Gamma$的极大性，对于任意 $f \in F\backslash\{1\}$，都有 $\ker(N \xrightarrow{\cdot^f} N) \neq N$。这说明，对于任意 $\tilde{f} \in \tilde{F}\backslash\{1\}$，存在 $n \in N$使得 $n^f \neq n$。

取 $x \in \mathcal{Z}$。利用 (i) 部分，我们可以将其唯一地写成

$$x = \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} l_{\tilde{f}}\tilde{f}$$

$\tilde{\ }$，其中某个 $l_{\tilde{f}} \in \mathcal{L}$。固定 $\tilde{g} \in F\backslash\{1\}$，并考虑满足 $n^g \neq n$的 $n \in N$。那么 x与 n可交换，因此我们有等式

$$\sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} l_{\tilde{f}} n^f \tilde{f} = \sum_{\tilde{f} \in \tilde{F}} l_{\tilde{f}} n \tilde{f}.$$

由唯一性，必然有

$$l_{\tilde{f}}(n^f - n) = 0$$

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$对所有 $f \in F$均成立。特别地，$l_{\tilde{g}} = 0$。因此我们得出，$x = l_{\tilde{1}}1 = l_1 \in \mathcal{L}$。现在，给定任意 $f \in F$，我们计算

$$\alpha_f(x) = \tilde{f}x\tilde{f}^{-1} = x$$

因为 $x \in \mathcal{Z}$。这说明 $x \in \mathcal{L}^H$，从而证明了另一个包含关系。最后一个结论现由上述命题的 (i) 部分以及 $\mathcal{L}/\mathcal{L}^H$ 是一个伽罗瓦群为 H的有限伽罗瓦扩张这一事实得到。

□

作为上述命题 (ii) 部分的推论，我们看到，$\mathcal{Q}$ 在其中心 $\mathcal{Z}$上是有限维的。将 $\mathcal{Q}$ 视为 $\mathcal{Z}$上的代数时，它便成为一个中心除法代数。现在，定理 3.1 的蕴含之一是显然的。

定理 *3.1* 的 (1) $\implies$ (2) 证明。只需使用命题 3.3 以及上面的结论即可。 □

3.2. **从中心除法代数到几乎阿贝尔群**。我们首先陈述以下定理。

定理 3.5. 设 Γ是一个有限生成无挠群，且 $\mathcal{R}(\Gamma)$ 是一个半单环。假设 $\mathcal{R}(\Gamma)$ 作为 $(\mathcal{R}(\Gamma))$-模是有限生成的。那么 Γ 是几乎阿贝尔的。

在证明它之前，我们需要几个技术引理。

引理 3.6. 设 G 是一个群，且 $\mathcal{R}(G)$ 是一个半单环。设 $H \leq G$ 是一个子群，并定义$\mathcal{K} := \mathcal{R}(G) \cap \mathcal{U}(H)$。那么 $\mathcal{K}$ 是一个正则环。

此外，$\mathcal{R}(G)$ 成为一个 $\mathcal{K}$-模；若 $\mathcal{R}(G)$ 作为一个 $\mathcal{K}$-模是有限生成的，则 $[G : H] < +\infty$.

证明。首先，注意到由于嵌入 $\mathcal{U}(H) \hookrightarrow \mathcal{U}(G)$，$\mathcal{K}$ 可以视为 $\mathcal{U}(G)$ 的一个子环。另外，注意到这三个环 $\mathcal{R}(G)$、$\mathcal{U}(H)$ 和 $\mathcal{U}(G)$ 都是 $*$-正则的。

我们首先证明 $\mathcal{K}$ 是正则的。设给定 $x \in \mathcal{K}$。由于 $x \in \mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{U}(G)$ 且 $x \in \mathcal{U}(H)$，存在唯一的投影 e_1, $f_1 \in \mathcal{R}(G)$、$e_2, f_2 \in \mathcal{U}(G)$ 和 $e_3, f_3 \in \mathcal{U}(H)$，使得

$$x\mathcal{R}(G) = e_1\mathcal{R}(G), \quad x\mathcal{U}(G) = e_2\mathcal{U}(G), \quad x\mathcal{U}(H) = e_3\mathcal{U}(H)$$

and

$$\mathcal{R}(G)x = \mathcal{R}(G)f_1, \quad \mathcal{U}(G)x = \mathcal{U}(G)f_2, \quad \mathcal{U}(H)x = \mathcal{U}(H)f_3,$$

而且，存在唯一元素 $\overline{x}_1 \in \mathcal{R}(G)$ $\overline{x}_2 \in \mathcal{U}(G)$ 和 $\overline{x}_3 \in \mathcal{U}(H)$，使得 $x\overline{x}_i = e_i$ and$\overline{x}_i x = f_i$ 对所有 $i = 1$、2、3 均成立。特别要注意，$e_i x = x = x f_i$ 对所有 $i = 1$、2、3 均成立。但现在我们有

$$e_1\mathcal{U}(G) = x\overline{x}_1\mathcal{U}(G) \subseteq x\mathcal{U}(G) = e_1 x\mathcal{U}(G) \subseteq e_1\mathcal{U}(G),$$
$$e_3\mathcal{U}(G) = x\overline{x}_3\mathcal{U}(G) \subseteq x\mathcal{U}(G) = e_3 x\mathcal{U}(G) \subseteq e_3\mathcal{U}(G),$$

因此 $e_1\mathcal{U}(G) = e_3\mathcal{U}(G) = x\mathcal{U}(G) = e_2\mathcal{U}(G)$。根据唯一性， $e := e_1 = e_2 = e_3$。类似地， $f := f_1 = f_2 = f_3$。但现在，根据元素 $\overline{x}_i$ 的唯一性，我们还可以得出 $\overline{x} := \overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 \in \mathcal{R}(G) \cap \mathcal{U}(H) = \mathcal{K}$。这证明 $\mathcal{K}$ 是一个正则环，因为

$$x\overline{x}x = ex = x.$$

显然， $\mathcal{R}(G)$ 是一个（右） $\mathcal{K}$-模。现在假设 $\mathcal{R}(G)$ 作为 $\mathcal{K}$-模由 n 个元素生成，例如由 $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq \mathcal{R}(G)$ 生成。这给出了一个满射的 $\mathcal{K}$-模映射

$$\alpha \colon \mathcal{K}^n \twoheadrightarrow \mathcal{R}(G), \quad (u_1, ..., u_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} r_i u_i.$$

反设 $[G \colon H] = +\infty$，并取 $S = \{s_1, ..., s_{n+1}\}$ 一个由 $n+1$ 个元素组成的 H 的陪集代表元集合。这个集合给出了一个 $\mathcal{K}$-模映射

$$\beta \colon \mathcal{K}^{n+1} \to \mathcal{R}(G), \quad (u_1, ..., u_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} s_i u_i.$$

但是，由于自由模是投射的，我们可以将 β 提升为一个 $\mathcal{K}$-模映射 $\gamma \colon \mathcal{K}^{n+1} \to \mathcal{K}$，使得

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{K}^{n+1} \\ & \overset{\gamma}{\swarrow} & \downarrow \beta \\ \mathcal{K}^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{R}(G) \end{array}$$

如果 β 是单射，那么 γ 也会是单射。但正则环是绝对平坦的，因此将 γ 与 $\mathrm{id}^{\mathcal{R}(G)}$ 作张量积会得到一个单射的 $\mathcal{R}(G)$-模映射

$$\gamma \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}(G)} \colon \mathcal{R}(G)^{n+1} \to \mathcal{R}(G)^n.$$

这是不可能的，因为 $\mathcal{R}(G)$ 是一个半单环，因此是阿廷环。

由此可知， β 不是单射，这意味着存在一些元素 $u_1, ..., u_{n+1} \in \mathcal{K}$，它们不全为零，使得

$$u := \sum_{i=1}^{n+1} s_i u_i = 0.$$

现在，我们将每个 $u_i \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}(H)$ 视为一个稠定闭算子 $u_i \colon D_i \to l^2(H)$，它与 H 的右作用相交换，其中 $D_i \subseteq l^2(H)$ 在 $l^2(H)$ 中稠密，并且在 H 的右作用下不变。算子 $u \colon D \to l^2(H)$ 定义在 $D := \bigcap_{i=1}^{n+1} D_i$ 上；由于每个 D_i 都是本质稠密的，这个子空间在 $l^2(H)$ 中稠密（见[7, 引理 8.3]）。现在，对每个 $l \in D$，我们计算

$$0 = u(l) = \sum_{i=1}^{n+1} s_i u_i(l),$$

其中每个 $s_i u_i(l) \in s_i l^2(H) \subseteq l^2(G)$。但是，由于 $S = \{s_1, ..., s_{n+1}\}$ 是 G 中 H 的陪集代表元集合，希尔伯特子空间 $s_1 l^2(H)$ ..., $s_{n+1} l^2(H)$ 两两正交。因此我们推得，每个 $s_i u_i(l) = 0$，也就是说 $u_i(l) = 0$。由此可知，每个算子 u_i 在稠密子空间 D 上为零。由于每个 u_i 都是闭的，这意味着 $u_i \equiv 0$。这与至少有一个元素 u_1,..., u_{n+1} 非零这一事实矛盾。因此必有 $[G \colon H] < +\infty$，事实上我们证明了更强的结论 $[G \colon H] \leq n$。□

引理 3.7。设 G 为一个群，并考虑 $\Delta(G)$ 为 G 的子群，它由所有在 G中的共轭类有限的元素组成。则

$$\mathrm{Z}(\mathcal{U}(G)) \subseteq \mathcal{U}(\Delta(G)).$$

证明。取 $x \in \mathrm{Z}(\mathcal{U}(G))$，于是我们可以将其写成 $x = ab^{-1}$，其中 $a, b \in \mathcal{N}(G)$。事实上，利用 $\mathcal{U}(G)$中元素的极分解和谱定理，我们甚至可以取 a, b 为$\mathcal{N}(G)$的中心中的元素。因此，为了证明该引理，只需证明包含关系 $\mathrm{Z}(\mathcal{N}(G)) \subseteq \mathcal{N}(\Delta(G))$。为此，我们将使用如下将 $\mathcal{N}(G)$识别为 $l^2(G)$的一个子空间的方式

$$\mathcal{N}(G) \hookrightarrow l^2(G), \quad T \mapsto T(1).$$

因此，取 $T \in \mathrm{Z}(\mathcal{N}(G))$，并将其写作 $T = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in l^2(G)$。特别地， T与每个 $h \in G$都可交换，因此我们推得，对所有 $g, h \in G$，都有 $\lambda_{hgh^{-1}} = \lambda_g$。所以，如果 g 在 G 中具有无限共轭类，那么 T 的 l^2-可和性必然意味着 $\lambda_g = 0$。这表明 T 的支集包含于 $\Delta(G)$ 中，这正是我们要证明的。□

现在我们可以证明定理 3.5 了。

定理 *3.5* 的证明。记 $\mathcal{Z}$:=Z($\mathcal{R}$(Γ)) 为 $\mathcal{R}$(Γ) 的中心。令 Δ(Γ) 为 Γ 的子群，由所有 $g \in G$ 在 Γ 中共轭类有限的元素组成。考虑

$$\mathcal{K} := \mathcal{R}(\Gamma) \cap \mathcal{U}(\Delta(\Gamma)).$$

我们断言 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K}$。为此，令 $z \in \mathcal{Z}$ =Z($\mathcal{R}$(Γ))。特别地， z 与每个 $g \in \Gamma$ 交换，因此它与 $\mathcal{N}$(Γ) 的每个元素交换。由于 $\mathcal{U}$(Γ) 是 $\mathcal{N}$(Γ) 的经典商环，我们得出 z 也与 $\mathcal{U}$(Γ) 的每个元素交换。这表明

$$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{R}(\Gamma) \cap \mathrm{Z}(\mathcal{U}(\Gamma)).$$

根据引理 3.7，断言得证。

现在，由于 $\mathcal{R}$(Γ) 作为 $\mathcal{Z}$-模是有限生成的，而 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K}$，所以它作为 $\mathcal{K}$-模也是有限生成的。因此，引理 3.6 告诉我们， $[\Gamma : \Delta(\Gamma)] < +\infty$。特别地，由于 Γ 是有限生成的，且 Δ(Γ) 是有限指数子群，因此 Δ(Γ) 也是如此。取 $S = \{g_1, .., g_r\}$ 为 Δ(Γ) 的有限生成子集，并考虑 S 在 Δ(Γ) 中的中心化子，即

$$C_{\Delta(\Gamma)}(S) = \{h \in \Delta(\Gamma) \mid hgh^{-1} = g \text{ for all } g \in S\}.$$

注意

$$C_{\Delta(\Gamma)}(S) = \bigcap_{i=1}^{r} C_{\Delta(\Gamma)}(\{g_i\}).$$

对于每个 $g_i \in S$，由 于其共轭类是有限的，设其包含 $n_i \in \mathbb{N}$ 个元素，我们可以选取 h_{i1}、...、 $h_{in_i} \in \Gamma$，使得共轭类 of g_i 由以下元素构成

$$\{h_{i1} g_i h_{i1}^{-1}, ..., h_{in_i} g_i h_{in_i}^{-1}\}.$$

在此情形下，集合 J_i:= $\{h_{i1}, ..., h_{in_i}\}$ 包含 Δ(Γ) 中 $C_{\Delta(\Gamma)}$({g_i}) 的一个横截集。特别地， [Δ(Γ) :$C_{\Delta(\Gamma)}$({g_i})] $< +\infty$。由于有限指数子群的交仍是有限指数子群，我们得出

$$[\Delta(\Gamma) : C_{\Delta(\Gamma)}(S)] < +\infty.$$

但作为 S Δ(Γ) 的生成集，这意味着子群 $C_{\Delta(\Gamma)}$(S) 是中心的，因而是阿贝尔的。最后，

$$[\Gamma : C_{\Delta(\Gamma)}(S)] = [\Gamma : \Delta(\Gamma)] \cdot [\Delta(\Gamma) : C_{\Delta(\Gamma)}(S)] < +\infty,$$

因此 $C_{\Delta(\Gamma)}$(S) 是 Γ 的一个有限指数阿贝尔子群。这恰好证明了 Γ 是几乎阿贝尔的，正如所要求的那样。□

我们现在终于可以证明定理 3.1 的另一个蕴含。

证明 2) $\implies$ 1) 定理 *3.1* 的证明。 这是定理 3.5 的一个特殊情形。 □

4. 关于几乎阿贝尔群的群环中单位元的存在性

在本节中，我们将介绍一个一般过程，有助于理解几乎阿贝尔群的群环中的单位元。该过程将在第 5 节应用于 Promislow 群的情形。我们将沿用第 3.1 节中的相同记号。由于我们已经证明 $\mathcal{Q}$ 是一个中心除法代数，所以下面的中心除法代数理论结果将在后文中对我们有所帮助。

定理 4.1。 设 $\mathcal{R}$ 是一个除法代数，且作为其中心Z($\mathcal{R}$)上的代数是有限维的。以下陈述成立。

(1) $[\mathcal{R} : \mathrm{Z}(\mathcal{R})] = n^2$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}$成立。此外，如果 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$ 是一个极大子域，则 $[\mathcal{K} : \mathrm{Z}(\mathcal{R})] = n$。*(2)*（*Skolem-Noether*）设 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{R}$ 是两个同构的 Z($\mathcal{R}$)-子代数。那么对于任意 Z($\mathcal{R}$)-代数同态 h *homomorphism* ϕ: $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ 存在一个元素 $b \in \mathcal{R}$ ，使得 ϕ 由对 b作共轭给出。用符号表示

$$\phi(a) = a^b$$

对所有 $a \in \mathcal{A}_1$成立。

证明。 （1）由 [4, 定理 3.10 和推论 3.17] 得出。（2）是 [4, 定理 3.14] 的一个特例。□

由定理 4.1 (1) 和命题 3.4 (ii) 可立即得出，$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{Q}$ 的一个极大子域，且包含其中心 $\mathcal{Z} = \mathcal{L}^H$。

现在我们阐述在 $k[\Gamma]$ 中构造单位元的关键思想。设 $p(x) \in \mathsf{Z}(k[\Gamma])[x]$ 是一个系数属于环 $\mathsf{Z}(k[\Gamma]) \subseteq \mathcal{Z}$ 的多项式，并假设 $1 - p(x)$ 在 $\mathsf{Z}(k[\Gamma])$ 上不可约，因此我们可以写成

$$1 - p(x) = q_1(x)q_2(x)$$

其中 $q_1(x)\ q_2(x) \in \mathsf{Z}(k[\Gamma])[x]$ 为某些非平凡的多项式。于是我们注意到，若 $T \in k[\Gamma]$ 是多项式 $p(x)$的一个根，则

$$1 = q_1(T)q_2(T),$$

因此 $q_1(T)$ 是 $k[\Gamma]$ 中的一个单位元，它可以是平凡的，也可以是非平凡的。

我们将着重研究如下形式的多项式

$$P_{\kappa,d}(x) = x^d - \kappa^d + 1$$

其中 $\kappa \in \mathsf{Z}(k[\Gamma])$ 且 $d \in \mathbb{N}$，在这种情形下

$$1 - P_{\kappa,d}(x) = \kappa^d - x^d = (\kappa - x)(x^{d-1} + \kappa x^{d-2} + \cdots + \kappa^{d-2}x + \kappa^{d-1}).$$

定义 4.2。设 $\omega \in k[\Gamma]$ 是 $P_{\kappa,\ d}(x)$ 的一个根。若 $T^d = \omega^d$，则称元素 $T \in \mathcal{Q}$ 为次数 d 的一个 ω-共轭。如果这样的 T 具有形式 $\xi\omega$，其中 $\xi \in k$ 是一个 d^{th} 单位根，则称其为平凡的。如果 T 不是平凡的，则称其为非平凡的。

对于 $\omega \neq 0$，定理 4.1 (2) 表明，每个 ω-共轭元在 $\mathcal{Q}$ 中都与 ω 共轭。因此，上述定义是一致的。

下面的命题总结了先前关于在 $k[\Gamma]$ 中寻找单位元的思路。

命题 4.3。设 $\omega \in k[\Gamma]$ 是 $P_{\kappa,\ d}(x)$ 的一个非零根，并设 $T \in \mathcal{Q}$ 是一个次数为 d 的 ω-共轭元。

(i) 元素 $U_T := \kappa - T$ 是 $\mathcal{Q}$ 中的单位元，其逆元为 $U_T^{-1} = T^{d-1} + \kappa T^{d-2} + \cdots + \kappa^{d-2}T + \kappa^{d-1}$。

(ii) $T \in k[\Gamma]$ 当且仅当 $U_T \in k[\Gamma]$，此时 U_T^{-1} 也属于 $k[\Gamma]$。

反过来，设 $U \in \mathcal{Q}\backslash\{0\}$，并定义 $T_U := \omega^U = U\omega U^{-1}$。

(i) 元素 T_U 是一个次数为 d 的 ω-共轭。*(ii)* 此外，若 U，$U^{-1} \in k[\Gamma]$，则 $T_U \in k[\Gamma]$。

证明。第一部分是一个简单的计算：

$$U_T U_T^{-1} = (\kappa - T)(T^{d-1} + \kappa T^{d-2} + \cdots + \kappa^{d-2}T + \kappa^{d-1}) = \kappa^d - T^d = \kappa^d - \omega^d = 1.$$

类似地，$U_T^{-1}U_T = 1$。此外，根据定义 $U_T = \kappa - T$，显然 $T \in k[\Gamma]$ 当且仅当 $U_T \in k[\Gamma]$，此时

$$U_T^{-1} = T^{d-1} + \kappa T^{d-2} + \cdots + \kappa^{d-2}T + \kappa^{d-1} \in k[\Gamma]$$

也一样。

反过来，令 $U \in \mathcal{Q}\backslash\{0\}$ 并定义 $T_U := \omega^U$。我们计算

$$T_U^d = U\omega^d U^{-1} = \omega^d$$

由于 $\omega^d = \kappa^d - 1 \in \mathcal{Z}$。因此，$T_U$是一个次数为 d的 ω-共轭。由于 $\omega \in k[\Gamma]$，显然若 $U, U^{-1} \in k[\Gamma]$，那么 $T_U \in k[\Gamma]$ 也成立。□

命题 4.3 并未给出当单位元 U_T, U_T^{-1}属于 $k[\Gamma]$时其非平凡性的条件。不过，我们将在下一节证明，若 Γ 是 Promislow 群，则 $U_T, U_T^{-1} \in k[\Gamma]$ 的非平凡性等价于 ω-共轭 T的非平凡性；同理，T_U的非平凡性也可用 $U, U^{-1} \in k[\Gamma]$的非平凡性来刻画。

5. Promislow 群的情形

对于群 Γ，我们将方便地用 $\overline{g}$ 表示 $g \in \Gamma$ 的逆元。

本节将把第 4 节中展示的一般过程应用于 Promislow 群的情形。该群记作 G，其表示为

$$G = \langle s, t \mid ts^2\overline{t} = \overline{s}^2, st^2\overline{s} = \overline{t}^2 \rangle.$$

我们定义 $u := st$，以及 $x := s^2$、$y := t^2$ 和 $z := u^2$。于是可以将上述群的表示写为

$$G = \langle s, t, x, y \mid x^t = \overline{x}, y^s = \overline{y}, x = s^2, y = t^2 \rangle.$$

由此可知， G 由 amalgam $G_1 *_H G_2$ 给出，其中 $G_1 = \langle t、\ x \mid x^t = \overline{x}\rangle$、$G_2 = \langle s、\ y \mid y^s = \overline{y}\rangle$ 和 $H = \langle x、\ t^2\rangle = \langle s^2、\ y\rangle$。注意到 $H \cong \mathbb{Z}^2$ 和 $G_1 \cong G_2 \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$，其中实现交叉积的自同构是求逆自同构。这表明 G 是一个无挠群。

另一个重要性质是， G 属于一个非分裂短正合列

$$1 \to \mathbb{Z}^3 \to G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1,$$

其中， $\mathbb{Z}^3$ 被视为极大阿贝尔正规子群 $N = \langle x, y, z\rangle$，且 $F = G/N = \{N, Ns, Nt, Nu\} \cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。特别地， G 是一个几乎阿贝尔群。 F通过共轭在 N 上的自然作用在下表 1 中有明确描述。

conj	x	y	z
N	x	y	z
Ns	x	$\overline{y}$	$\overline{z}$
Nt	$\overline{x}$	y	$\overline{z}$
Nu	$\overline{x}$	$\overline{y}$	z

表 1. 第一列中的元素通过共轭作用于第一行中的元素。

˜我们将固定 N在 G中的右陪集代表系为 $F = \{1, s, t, u\}$。相应的 2-余循环在表 2 中明确列出。

$\tau(a, b)$	1	s	t	u
1	1	1	1	1
s	1	x	1	x
t	1	$\bar{x}y\bar{z}$	y	$\bar{x}\bar{z}$
u	1	$\bar{y}z$	$\bar{y}$	z

表 2. 第一列对应于 a的不同取值，第一行对应于 b的不同取值。

在接下来的讨论中，我们取 k 为任意一个带对合 $*$、特征不等于 2 的域。对于 $g \in \{x, y, z\}$，我们令

$$\kappa_g := \frac{1}{2}(g + \overline{g}),\ \omega_g := \frac{1}{2}(g - \overline{g}) \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}].$$

注意到

$$\kappa_g^2 - \omega_g^2 = 1. \tag{5.1}$$

按照第3.1节和第4节的记法，我们用 $\mathcal{Q}$ 表示 $k[G]$的 Ore分式域，用 $\mathcal{L}$ 表示 $k[N]$的 Ore分式域，即 $\mathcal{L} = k(x, y, z)$; 群 F作为 Aut($\mathcal{L}/k$) 的子群，与$H = \{\mathrm{id}\ \alpha_s, \alpha_t, \alpha_u\}$相对应。除了 H中的自同构外， $\mathcal{L}$还有三个自然的自同构，即

$$\begin{aligned}
\iota_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}, &\quad \iota_x(x) = \overline{x}, \iota_x(y) = y, \iota_x(z) = z;\\
\iota_y : \mathcal{L} \to \mathcal{L}, &\quad \iota_y(x) = x, \iota_y(y) = \overline{y}, \iota_y(z) = z;\\
\iota_z : \mathcal{L} \to \mathcal{L}, &\quad \iota_z(x) = x, \iota_z(y) = y, \iota_z(z) = \overline{z}.
\end{aligned}$$

也就是说，对于 $g \in \{x, y, z\}$， ι_g是关于 g的求逆映射所诱导的自同构。接下来的命题是命题 3.4 在 Pro mislow 群这一特定情形下的推广。

命题 5.1. 以下陈述成立。

(i) 集合 $\{1, s, t, u\}$ 是 $\mathcal{L}$上的 $\mathcal{Q}$ 的一组基，其中 $\mathcal{L}$ 的乘法从左侧定义。因此 $[\mathcal{Q} : \mathcal{L}] = 4$。*(ii)* 将元素 $\alpha \in \mathcal{Q}$ 写成 $\alpha = a + bs + ct + du$，其中 a， b， c， $d \in \mathcal{L}$，可得公式

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{4}(\alpha + \alpha^{\omega_x} + \alpha^{\omega_y} + \alpha^{\omega_z}), \qquad bs = \frac{1}{4}(\alpha + \alpha^{\omega_x} - \alpha^{\omega_y} - \alpha^{\omega_z}),\\
ct &= \frac{1}{4}(\alpha - \alpha^{\omega_x} + \alpha^{\omega_y} - \alpha^{\omega_z}), \qquad du = \frac{1}{4}(\alpha - \alpha^{\omega_x} - \alpha^{\omega_y} + \alpha^{\omega_z}).
\end{aligned}$$

(iii) 子群 H 的不动域恰为 $k(\kappa_x,\ \kappa_y,\ \kappa_z,\ \xi)$，其中 $\xi := \omega_x\omega_y\omega_z$ 是 $\mathcal{K} := k(\kappa_x,\ \kappa_y,\ \kappa_z)$ 的一个 *2* 阶扩张。特别地，$\mathcal{Z} = \mathcal{K}(\xi)$。

(iv) 我们有 $[\mathcal{Q} :\ \mathcal{Z}] = 16$，且 $\mathcal{L}$ 是包含 $\mathcal{Z}$ 的 $\mathcal{Q}$ 的极大子域。

证明。 (i) 这是命题 3.4 的第 (i) 部分。

(ii) 我们用元素 ω_x、ω_y、ω_z 共轭 $\alpha = a + bs + ct + du$，得到

$$\begin{aligned}\alpha^{\omega_x} &= a + bs - ct - du,\\ \alpha^{\omega_y} &= a - bs + ct - du,\\ \alpha^{\omega_z} &= a - bs - ct + du.\end{aligned}$$

由此可得所示公式。

(iii) 显然，元素 κ_x、κ_y、κ_z 和 $\xi = \omega_x\omega_y\omega_z$ 在 H 下保持不变，因此 $\mathcal{K}(\xi) = k(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi) \subseteq \mathcal{L}^H$。现在考虑域扩张

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\omega_x) \subseteq \mathcal{K}(\omega_x, \omega_y) \subseteq \mathcal{K}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \mathcal{L}.$$

由于对任意 $g \in \{x, y, z\}$，$\omega_g^2 = \kappa_g^2 - 1 \in \mathcal{K}$，这三个包含关系的次数都至多为 2。我们通过证明 $\omega_x \notin \mathcal{K}$，来说明第一个包含关系的次数恰为 2。这显然成立，因为 $\iota_x(\omega_x) = -\omega_x$，且 ι_x 在 $\mathcal{K}$ 上限制为恒等映射。利用其他自同构 $\{\iota_y, \iota_z\}$，可以类似地证明其余包含关系也都是严格的。因此 $[\mathcal{L} : \mathcal{K}] = 8$。另一方面，我们注意到，$\mathcal{K}(\xi)$ 是 $\mathcal{K}$ 的一个二阶扩张，因为 $\xi^2 = (\kappa_x^2 - 1)(\kappa_y^2 - 1)(\kappa_z^2 - 1) \in \mathcal{K}$，但例如 $\iota_x(\xi) = -\xi$，所以 $\xi \notin \mathcal{K}$。

现在我们推导出 $[\mathcal{L} : \mathcal{K}(\xi)] = 4$。但 $[\mathcal{L} : \mathcal{L}^H] = |H| = 4$，因此 $\mathcal{L}^H = \mathcal{K}(\xi)$。该结论现在由命题 3.4 的 (ii) 部分推出，该部分告诉我们 $\mathcal{Z} = \mathcal{L}^H$。

(iv) 这是命题 3.4 的 (ii) 部分与定理 4.1 (1) 的结论。

□

对于 $g, h, j \in \{x, y, z\}$，我们将复合 $\iota_g\iota_h$记作 ι_{gh}，将复合 $\iota_g\iota_h\iota_j$记作 ι_{ghj}。我们注意到，由 s 给出的共轭在 $\mathcal{L}$上等于 ι_{yz}，即 $\alpha_s = \iota_{yz}$。事实上，$\alpha_t = \iota_{xz}$ 且 $\alpha_u = \iota_{xy}$，所以 $H = \{\mathrm{id}\ \iota_{xy}, \iota_{xz}, \iota_{yz}\}$（见表 1）。

推论 5.2. 集合 $\{1, \omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ 是 $\mathcal{L}$的一个 $\mathcal{Z}$-基。

证明。 由命题 3.4 可知 $\mathcal{Z} = \mathcal{L}^H$，因此我们有 $[\mathcal{L} : \mathcal{Z}] = [\mathcal{L} : \mathcal{L}^H] = |H| = 4$，且 $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\mathcal{Z}) = H = \{\mathrm{id}\ \iota_{xy}, \iota_{xz}, \iota_{yz}\}$。现在，对集合 $\{1, \omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ 应用伽罗瓦自同构，可得其线性无关性：将一个 $\mathcal{Z}$-线性组合 $a + b\omega_x + c\omega_y + d\omega_z = 0$，从而推出 $a = b = c = d = 0$。□

因此，给定一个元素 $\alpha \in \mathcal{L}$，它可以唯一地写成

$$\alpha = a + b\omega_x + c\omega_y + d\omega_z \tag{5.2}$$

其中系数 $a, b, c, d \in \mathcal{Z}$ 明确地由下式给出

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}(\alpha + \iota_{xy}(\alpha) + \iota_{xz}(\alpha) + \iota_{yz}(\alpha)), \quad b = \frac{1}{4\omega_x}(\alpha - \iota_{xy}(\alpha) - \iota_{xz}(\alpha) + \iota_{yz}(\alpha)),\\ c &= \frac{1}{4\omega_y}(\alpha - \iota_{xy}(\alpha) + \iota_{xz}(\alpha) - \iota_{yz}(\alpha)), \quad d = \frac{1}{4\omega_z}(\alpha + \iota_{xy}(\alpha) - \iota_{xz}(\alpha) - \iota_{yz}(\alpha)).\end{aligned} \tag{5.3}$$

在下一个引理中，我们计算 $k[G]$的中心。

引理 5.3. 我们有 $\mathrm{Z}(k[G]) = k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$.

证明。 注意，由命题 5.1 (iv) 可知 $\mathrm{Z}(k[G]) = \mathcal{K}(\xi) \cap k[x^{\pm1}, y^{\pm1}, z^{\pm1}]$，这看起来与我们要证明的结论“几乎”一致，但尽管如此，本证明并未使用命题 5.1。

我们注意到，给定 $p \in k[x^{\pm1}, y^{\pm1}, z^{\pm1}]$，组合

$$p + p^s + p^t + p^u = p + \iota_{yz}(p) + \iota_{xz}(p) + \iota_{xy}(p) = \sum_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\mathcal{Z})} \gamma(p)$$

属于 $\mathrm{Z}(k[G])$。因此，我们考虑满射线性映射

$$P\colon k[x^{\pm1}, y^{\pm1}, z^{\pm1}] \to \mathrm{Z}(k[G]), \quad P(p) = \frac{1}{4}\sum_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\mathcal{Z})} \gamma(p).$$

因此，只需证明 P 的像等于 $k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$。我们首先验证，当 $m \in k[x^{\pm1}, y^{\pm1}, z^{\pm1}]$ 是单项式时，$P(m) \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$。此外，由于 P 与 ι_x、ι_y、ι_z 对易，我们可以假设 $m \in k[x, y, z]$。

令 Γ_+ 为由 ι_x、ι_y、ι_z 生成的 Aut($\mathcal{L}/k$) 的子群，并令 Γ_- 为由线性映射 $-\iota_x$、$-\iota_y$、$-\iota_z$ 生成的群。令

$$Q(m) := \frac{1}{8}\sum_{\gamma\in\Gamma_+}\gamma(m), \quad R(m) := \frac{1}{8}\sum_{\gamma\in\Gamma_-}\gamma(m),$$

并注意到 $P(m) = Q(m) + R(m)$。

我们先考虑 m 依赖于单个变量的情形，例如 x，因此 $m = x^d$ 满足 $d \geq 1$。我们对指数使用强归纳法。对于 $d = 1$，有 $P(m) = \kappa_x$，结论成立。现在假设该结果对所有不超过 $d \geq 1$ 次的情形都成立，并计算

$$2^{d+1}\kappa_x^{d+1} = \sum_{k=0}^{d+1}\binom{d+1}{k}x^{2k-(d+1)} = \sum_{k=0}^{d+1}\binom{d+1}{k}x^{d+1-2k}.$$

将这两个表达式相加并除以 2，得到

$$\begin{aligned}
2^{d+1}\kappa_x^{d+1} &= \sum_{k=0}^{d+1}\binom{d+1}{k}P(x^{d+1-2k}) \\
&= 2P(x^{d+1}) + \sum_{k=1}^{d}\binom{d+1}{k}P(x^{d+1-2k}) \\
&= 2P(x^{d+1}) + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor}\binom{d+1}{k}P(x^{d+1-2k}) + \sum_{k=\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor+1}^{d}\binom{d+1}{k}\iota_x P(x^{2k-d-1}).
\end{aligned}$$

现在我们用强归纳法推出 $P(x^{d+1}) \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$。对变量作相应调整 y、z，同样的论证也成立。

现在考虑 m 依赖于两个变量的情形，例如 x 和 y。因此取满足 d、$e \geq 1$的 $m = x^d y^e$。于是

$$P(m) = \frac{1}{4}(x^d y^e + x^d\bar{y}^e + \bar{x}^d y^e + \bar{x}^d\bar{y}^e) = \frac{1}{4}(x^d + \bar{x}^d)(y^e + \bar{y}^e) = P(x^d)P(y^e),$$

因此，利用单个变量的情形即可完成证明。变量 x、z 以及 y、z 的情形可类似处理。

最后，我们来考虑三个变量 $m = x^d y^e z^f$ 的情形，其中 d、e、$f \geq 1$。注意到

$$Q(m) = \frac{1}{8}(x^d + \bar{x}^d)(y^e + \bar{y}^e)(z^f + \bar{z}^f) = P(x^d)P(y^e)P(z^f), \quad R(m) = \frac{1}{8}(x^d - \bar{x}^d)(y^e - \bar{y}^e)(z^f - \bar{z}^f).$$

由于 $P(m) = Q(m) + R(m)$，我们只需处理 $R(m)$。注意，商

$$\alpha := \frac{x^d - \bar{x}^d}{x - \bar{x}}\frac{y^e - \bar{y}^e}{y - \bar{y}}\frac{z^f - \bar{z}^f}{z - \bar{z}}$$

在整个群 Gal($\mathcal{L}/\mathcal{K}$) $= \Gamma_+$ 的作用下是不变的，因此属于 $\mathcal{K} = k(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$。实际上，可以将此商显式计算为

$$\alpha = \sum_{i=-d+1}^{d-1}x^i\sum_{j=-e+1}^{e-1}y^j\sum_{k=-f+1}^{f-1}z^k = \Big(1 + 2\sum_{i=1}^{d-1}P(x^i)\Big)\Big(1 + 2\sum_{j=1}^{e-1}P(y^j)\Big)\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{f-1}P(z^k)\Big) \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi].$$

因此 $R(m) = \xi\alpha \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$。

这一分析证明了包含关系 im(P) $\subseteq k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$。另一个包含关系显然成立，因为 κ_x、κ_y、κ_z、$\xi \in \mathcal{Z} \cap k[G]$。□

备注 5.4. 引理 5.3 也可以通过另一种方式证明：注意到 κ_x、κ_y、κ_z、ξ 是不变函数，然后利用 Molien公式验证它们生成了整个不变函数代数。

我们注意到，引理 5.3 有以下一个简单的推论。

引理 5.5. 设 $f, g \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z]$ 满足 $\frac{f}{g} \in k[x^{\pm1}, y^{\pm1}, z^{\pm1}]$。则 $\frac{f}{g} \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z]$。通俗地说，如果 $g|f$ 属于 $k[x^{\pm1}, y^{\pm1}, z^{\pm1}]$，那么 $g|f$ 属于 $k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z]$。

证明。由于 $\frac{f}{g} \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}$，我们推得 $\frac{f}{g} \in \mathrm{Z}(k[G])$，因此由引理 5.3 可知，存在 $\frac{f}{g} = p + q\xi$，使得 $p, q \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z]$。注意到 $\frac{f}{g} = \iota_x(\frac{f}{g}) = p - q\xi$，这表明 $q = 0$。因此 $\frac{f}{g} = p \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z]$，证明完毕。□

我们来汇总一下前面几个引理中的一些信息。

命题 5.6. 我们有以下等式

$$\begin{aligned} k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}] &= k(x, y, z) \cap k[G]; \\ k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi] &= \mathrm{Z}(k[G]) = k(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)(\xi) \cap k[G]; \\ k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z] &= k(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) \cap k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]. \end{aligned}$$

证明. 第一个展示的等式显然成立，第二个等式是引理 5.3 的内容，第三个等式则由引理 5.5 得出。□

5.1. **元素的 ω-次数**。关于第 4 节，我们将着重研究 ω_x-共轭。为简便起见，我们将 $\omega_x = \frac{1}{2}(x - \overline{x})$ 记作元素 ω，将 $\kappa_x = \frac{1}{2}(x + \overline{x})$ 记作元素 κ。注意，这里的关键关系是公式 (5.1)，即

$$\kappa^2 - \omega^2 = 1.$$

我们在此情境下具体化定义 4.2。

定义 5.7. 若元素 $T \in \mathcal{Q}$ 满足 $T^2 = \omega^2$，则称其为 ω-共轭 。若 T 满足$T \neq \pm\omega$，则称其为非平凡的 。

根据定理 4.1 (2)，T 是一个 ω-共轭，当且仅当对于某个 $U \in \mathcal{Q}\backslash\{0\}$，$T = \omega^U$；因此，名称 ω-共轭 是恰当的。

以下 命题是命题 4.3 在 Promislow 群这一特例下的推广 p.

命题 5.8. 设 $T \in \mathcal{Q}$ 是一个 ω-共轭，并定义 $U_T :=\kappa - T$。

(i) 元素 U_T 是 $\mathcal{Q}$中的一个单位元，其逆元为 $U_{-T} = \kappa + T$。*(ii)* $T \in k[G]$ 当且仅当 $U_T \in k[G]$，此时 U_{-T} 也属于 $k[G]$。*(iii)* T 是一个非平凡的 ω-共轭，当且仅当 U_T 是一个非平凡单位。*(iv)* 若 k 的对合在其素子域上限制为恒等映射，则 $T^* = -T$ 当且仅当 U_T 是酉元。

反过来，令 $U \in \mathcal{Q}\backslash\{0\}$，并定义 $T_U :=\omega^U = U\omega U^{-1}$。

(i) 元素 T_U 是一个 ω-共轭。*(ii)* 若两者均为 U，$U^{-1} \in k[G]$，则 $T_U \in k[G]$。*(iii)* 若 T_U 是一个非平凡的 ω-共轭，则 U 是一个非平凡单位元。若假设$U \in k[G]$，逆命题也成立。*(iv)* 若 U是酉元，则 $T_U^* = -T_U$。

这基本上就是命题 4.3。不过，由于命题 5.8 给出了单位元非平凡性的充要条件，我们还是倾向于给出完整而详细的证明。

命题 *5.8* 的证明。由于 $\kappa \in \mathcal{Z}$ 我们有

$$U_T U_{-T} = (\kappa - T)(\kappa + T) = \kappa^2 - T^2 = \kappa^2 - \omega^2 = 1,$$

这表明 U_T 是 $\mathcal{Q}$ 中的一个单位元，其逆元为 U_{-T}。此外，由于 $\kappa \in k[G]$，显然 $T \in k[G]$ 当且仅当 $U_T \in k[G]$，此时 $U_{-T} \in k[G]$ 也成立。此外，若对合 $*$ 在 k的素子域上为恒等映射，则经过计算可得 $U_T^* = \kappa - T^*$，因此 $U_T^* = U_T^{-1}$当且仅当 $T^* = -T$。

现在证明，当 T 是非平凡的 ω-共轭时，U_T 是一个非平凡单位元。反设 $U_T = \lambda g$，其中 $\lambda \in k\backslash\{0\}$ 且 $g \in G$。在方程 $U_T = \lambda g$ 中分离出 T 并平方后，我们得到方程

$$\lambda^2 g^2 - \lambda x g - \lambda \overline{x} g + 1 = 0.$$

这个方程是 不相容的，除非 g 等于 x 或 $\overline{x}$。但在这些情况下，我们得到 $\lambda = 1$，因此 $U_T = x^{\pm 1}$。

这导致 $T = \pm\omega$。它们是平凡的 ω-共轭，这就产生了矛盾。反过来，若 $T = \pm\omega$，则

$$U_T = \kappa - T = \kappa \mp \omega = x^{\mp 1},$$

因此 U_T 是平凡单位元。

对于第二部分，我们定义 $T_U := U\omega U^{-1}$并计算

$$T_U^2 = U\omega^2 U^{-1} = \omega^2$$

为 $\omega^2 \in \mathcal{Z}$。因此， T_U是一个 ω-共轭。显然，若 $U, U^{-1} \in k[G]$同时成立，则 $T_U \in k[G]$。此外，若 U是一个酉元，则 $T_U = U\omega U^*$，又由于 $\omega^* = -\omega$，我们得到

$$T_U^* = U\omega^* U^* = -U\omega U^* = -T_U.$$

现在证明，当 T_U 是一个非平凡的 ω-共轭时， U 是一个非平凡单位元。反设， $U = \lambda g$对某个 $\lambda \in k\backslash\{0\}$和 $g \in G$成立。将 $g = nf$记作 $n \in N$和 $f \in F = \{1, s, t, u\}$。那么

$$T_U = U\omega U^{-1} = n\omega^{\tilde{f}}\overline{n} \in \{\omega, -\omega\}$$

˜为 $\omega^f \in \{\omega, -\omega\}$。因此， T_U 是一个平凡的 ω-共轭，矛盾。反过来，假设 $U \in k[G]$ 且 $T_U = \pm\omega$。将 U 写作

$$U = a + bs + ct + du$$

其中 $a, b, c, d \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。情形 $T_U = \omega$意味着 $U^\omega = U$，因此 $U = a + bs$。对于U^{-1}也同样成立，因此U最终是 $k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}][s]$中的一个单位元。后一个环是 $k[\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}]$的子环，而已知这类群不含非平凡单位。因此 U 是一个平凡单位元，矛盾。

情形 $T_U = -\omega$ 意味着 $U^\omega = -U$，因此 $U = ct + du = (c + ds)t$。这意味着 $c + ds$ 仍然是 $k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}][s]$ 中的一个单位元；根据与上文相同的论证， U 必定是一个平凡单位元，再次导出矛盾。至此，证明完成。□

作为推论，我们得到：

推论 5.9. 群环 $k[G]$ 中存在非平凡单位元，当且仅当 $k[G]$中存在非平凡的 ω-共轭元。

此外，若 k 的对合在其素子域上限制为恒等映射，那么 $k[G]$ 中存在非平凡酉元，当且仅当 $k[G]$ 中存在反自伴的非平凡 ω-共轭元，即存在满足 $T^* = -T$的 ω-共轭元 $T \in k[G]$。

推论 5.9 给出了一个与单位元存在性等价的条件，或许可以认为它比 [2], 中证明的行列式条件更简单，原因如下：写成关于 $\mathcal{Z}$ 的方程时，行列式条件是一个含 16 个变量的四次方程，而成为 ω-共轭元的条件则是一个含 16 个变量的二次方程。

注记 5.10. 设 U 是 $k[G]$中的一个非平凡单位元。那么由上述命题可知， $k[G]$中有一个非平凡的 ω-共轭元 T_U。因此，$k[G]$中的 $V := \kappa - T_U$ 仍是一个非平凡单位元。此外，它的逆元由 $V^{-1} = \kappa + T_U = 2\kappa - V$给出。因此， V满足

$$2\kappa V - V^2 = 1.$$

由此可得， $k[G]$ 中存在非平凡单位元，当且仅当 $k[G]$中存在满足方程的非平凡单位元

$$X^2 - 2\kappa X + 1 = 0.$$

现在我们将更仔细地研究 ω-共轭。取 ϕ： $\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{Q}$ 的任意一个固定 ω^2且阶为 2 的 k-自同构，即 $\phi(\omega^2) = \omega^2$。那么任意元素 $\alpha \in \mathcal{Q}$ 都可以唯一地写成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_{-1}$$

其中， α_1、 $\alpha_{-1} \in \mathcal{Q}$ 是 ϕ 的特征向量，其特征值分别为 1 和 -1。事实上，它们可明确表示为

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \phi(\alpha)), \quad \alpha_{-1} = \frac{1}{2}(\alpha - \phi(\alpha)).$$

此外， ϕ 保持 ω-共轭性，也就是说，若它是一个 ω-共轭，则 $\phi(T)$也同样是一个 ω-共轭，因为

$$\phi(T)^2 = \phi(T^2) = \phi(\omega^2) = \omega^2.$$

定义 5.11. 元素 $\alpha \in \mathcal{Q}$ 的-次数 是由以下自然数组成的有序对

$$\deg_\phi(\alpha) := ([\mathcal{Z}(\alpha_1) : \mathcal{Z}], [\mathcal{Z}(\alpha_{-1}) : \mathcal{Z}]) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

其中， α_1、 α_{-1} 是确定 α的 ϕ-分解的元素。

注意，对于任意 $D \in \mathcal{Q}$，除法代数 $\mathcal{Z}(D)$实际上是包含 $\mathcal{Z}$的 $\mathcal{Q}$ 的一个子域。因此，我们可以利用定理 4.1 (1) 得出 $[\mathcal{Z}(D):\ \mathcal{Z}] \leq 4$，其中回顾一下，$[\mathcal{Q}:\ \mathcal{Z}] = 16$。此外，由于

$$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}(D) \subseteq \mathcal{Q}$$

必然地 $[\mathcal{Z}(D):\ \mathcal{Z}]$必须被 $[\mathcal{Q}:\ \mathcal{Z}] = 16$整除。因此，元素 $\alpha \in \mathcal{Q}$ 的 ϕ 次数只有有限种可能，即

$$\deg_\phi(\alpha) \in \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}.$$

在命题 5.14 中，我们进一步限制了 $T_1, T_{-1} \neq 0$ 情况下 ϕ 的次数，即 ω-共轭 $T \in \mathcal{Q}$ 的次数。首先，我们建立一个技术引理。

引理 5.12. 设 $T \in \mathcal{Q}$ 是一个 ω-共轭，$\phi:\ \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ 是一个固定 ω^2 的 k-自同构，且 $T = T_1 + T_{-1}$ 是它的 ϕ-分解。那么 $T_1 T_{-1} = -T_{-1} T_1$；此外，若 $T_1,\ T_{-1} \neq 0$，我们还有以下等式

$$\mathrm{Z}(\mathcal{Z}[T, T_{-1}]) = \mathcal{Z}(T_1^2) = \mathcal{Z}(T_{-1}^2)$$

and

$$[\mathcal{Z}(T_1) : \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}(T_{-1}) : \mathcal{Z}].$$

这里，$\mathcal{Z}[T_1, T_{-1}]$ 是由 T_1 和 T_{-1} 在 $\mathcal{Z}$ 上生成的 $\mathcal{Q}$ 的子代数。因此，若 $T_1,\ T_{-1} \neq 0$，则

$$\deg_\phi(T) \in \{(1,1),(2,2),(4,4)\}.$$

证明。记 $\mathcal{R} := \mathcal{Z}[T_1, T_{-1}]$。我们计算

$$\begin{aligned} T_1 T_{-1} + T_{-1} T_1 &= \frac{1}{4}\big[(T+\phi(T))(T-\phi(T)) + (T-\phi(T))(T+\phi(T))\big] \\ &= \frac{1}{2}(T^2 - \phi(T)^2) \\ &= \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega^2) = 0. \end{aligned}$$

特别地，$T^2 = T_1^2 + T_{-1}^2 = \omega^2 \in \mathcal{Z}$，因此 $\mathcal{Z}(T_1^2) = \mathcal{Z}(T_{-1}^2)$。

现在我们假设 $T_1, T_{-1} \neq 0$，因此特别地 $\mathcal{R}$ 不是交换的。直接计算可得，T_1^2与 T_{-1}交换，且 T_{-1}^2 与 T_1交换，因此 $T_1^2, T_{-1}^2 \in \mathrm{Z}(\mathcal{R})$。这表明包含关系

$$\mathcal{Z}(T_1^2) \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{R}). \tag{5.4}$$

断言 5.13。如果 $T_1^2 \in \mathcal{Z}$或 $T_{-1}^2 \in \mathcal{Z}$，那么 $[\mathcal{R}:\ \mathcal{Z}] \leq 4$。

断言的证明。由关系 $T_1^2 + T_{-1}^2 = \omega^2 \in \mathcal{Z}$，可知 $T_1^2, T_{-1}^2 \in \mathcal{Z}$都成立。因此，$\mathcal{R}$ 的每个元素都可以写成如下组合

$$z_1 + z_2 T_1 + z_3 T_{-1} + z_4 T_1 T_{-1}, \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{Z}.$$

该断言得证。 □

现在 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$，因此 $[\mathcal{R}$ 的唯一可能取值实际上是 1、2、4、8 和 16：$\mathcal{Z}]$。下面逐一讨论引理中的情形。

1) 若 $[\mathcal{R}:\ \mathcal{Z}] = 16$，则 $\mathcal{R} = \mathcal{Q}$，因此 $\mathrm{Z}(\mathcal{R}) = \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}(T_1^2)$。由 (5.4) 即得。 2) 若 $[\mathcal{R}:\ \mathcal{Z}] = 8$，则由定理 4.1 (1)，量 $[\mathcal{R} : \mathrm{Z}(\mathcal{R})]$ 必须是一个整除 8 的平方数，故只能是 1 或 4。但 $\mathcal{R}$ 不是交换的，所以必有 $[\mathcal{R} : \mathrm{Z}(\mathcal{R})] = 4$，从而 $[\mathrm{Z}(\mathcal{R}) :\ \mathcal{Z}] = 2$。因此，由 (5.4)，只需证明 $T_1^2 \notin \mathcal{Z}$。而这由断言 5.13 得出。

3）若 $[\mathcal{R}:\ \mathcal{Z}] = 4$，则定理 4.1 (1) 再次推出 $\mathrm{Z}(\mathcal{R}) = \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}(T_1^2)$。由 (5.4) 可知，我们再次得证。4）情形 $[\mathcal{R}:\ \mathcal{Z}] = 1$ 和 2 导出结论：$\mathcal{R}$ 是交换的，这构成矛盾。

该分析完成了第一个等式。对于第二个等式，只需注意到

$$[\mathcal{Z}(T_1) : \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}(T_1) : \mathcal{Z}(T_1^2)][\mathcal{Z}(T_1^2) : \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}(T_1) : \mathcal{Z}(T_1^2)][\mathrm{Z}(\mathcal{R}) : \mathcal{Z}],$$

$$[\mathcal{Z}(T_{-1}) : \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}(T_{-1}) : \mathcal{Z}(T_{-1}^2)][\mathcal{Z}(T_{-1}^2) : \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}(T_{-1}) : \mathcal{Z}(T_{-1}^2)][\mathrm{Z}(\mathcal{R}) : \mathcal{Z}],$$

此外，$[\mathcal{Z}(T_1):\ \mathcal{Z}(T_1^2)] = [\mathcal{Z}(T_{-1}):\ \mathcal{Z}(T_{-1}^2)] = 2$，因为 $\mathcal{Z}(T_1^2) = \mathcal{Z}(T_{-1}^2) = \mathrm{Z}(\mathcal{R})$ 且 T_1不与 T_{-1} 交换。因此我们得出

$$[\mathcal{Z}(T_1) : \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}(T_{-1}) : \mathcal{Z}].$$

ϕ-次数的表述现在就得出了。 □

下面命题的第一部分表明，在假设 T_1、$T_{-1}\neq 0$ 均成立的情况下，非平凡的 ω-共轭自然分为两组。

命题 5.14. 设 $T\in\mathcal{Q}$ 是一个 ω-共轭，$\phi:\ \mathcal{Q}\to\mathcal{Q}$ 是一个固定 ω^2 的 k-自同构，且 $T=T_1+T_{-1}$ 是它的 ϕ-分解。假设 $T_1,\ T_{-1}\neq 0$。

那么，要么 T 是一个平凡的 ω-共轭，要么 $\deg_\phi(T)\in\{(2,\ 2),\ (4,\ 4)\}$。此外，在 T 非平凡的特殊情形下，以下各项等价。

(i) $\deg_\phi(T)=(2,\ 2)$。

(ii) $T_1^2,\ T_{-1}^2\in\mathcal{Z}$。*(iii)* $[\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]:\ \mathcal{Z}]=4$。

证明。由引理 5.12，$\deg_\phi(T)\in\{(1,1),(2,2),(4,4)\}$。因此，要证明命题的第一部分，只需说明在 T 是一个非平凡的 ω-共轭时，$\deg_\phi(T)\neq(1,1)$。然而，若 $\deg_\phi(T)=(1,1)$，则 $T\in\mathcal{Z}$，且方程 $X^2=\omega^2$ 在域 $\mathcal{Z}(\omega)$ 中会有多于两个解，即 $\{\pm\omega,\pm T\}$，这是不可能的。至此，命题的第一部分得证。

对于该命题的第二部分，设 T 是非平凡的 ω-共轭。我们先证明 (i) $\Rightarrow$ (ii)。注意到 $\deg_\phi(T)=(2,2)$，这意味着我们可以找到 $\alpha,\beta\in\mathcal{Z}$ 使得 $T_1^2=\alpha T_1+\beta$。由于 T_1^2 与 T_{-1} 可交换，我们推得

$$\alpha T_1+\beta=(\alpha T_1+\beta)^{T_{-1}}=-\alpha T_1+\beta,$$

即 $T_1^2=\beta\in\mathcal{Z}$。因此 $T_{-1}^2=\omega^2-T_1^2\in\mathcal{Z}$ 也成立，这就证明了 (ii)。

为证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii)，设 $T_1^2,T_{-1}^2\in\mathcal{Z}$ 均成立。由断言 5.13 可得 $[\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]:\ \mathcal{Z}]\in\{1,2,4\}$。根据假设，$T_1,T_{-1}\neq 0$，因此 $\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]$ 不是交换的。所以必有 $[\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]:\mathcal{Z}]=4$。

最后我们证明 (iii) $\Rightarrow$ (i)，因此假设 $[\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]:\ \mathcal{Z}]=4$。于是由引理 5.12 可得

$$4=[\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]:\mathcal{Z}]=[\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]:\mathrm{Z}(\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}])][\mathcal{Z}(T_1^2):\mathcal{Z}].$$

由于 $\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]$ 不是交换的，利用定理 4.1 (1) 可推出 $[\mathcal{Z}(T_1^2):\ \mathcal{Z}]=1$，即 $T_1^2\in\mathcal{Z}$。由于 $T_1\notin\mathcal{Z}$，必然有 $[\mathcal{Z}(T_1):\ \mathcal{Z}]=2$，因此根据命题的第一部分，必有 $\deg_\phi(T)=(2,2)$。证明至此完成。□

我们指出命题 5.14 在某个特殊情形下有一项重要改进。回顾一下，由ω 作用的共轭是 $\mathcal{Q}$ 的一个二阶自同构，并且保持 $k[G]$不变。具体而言，有

$$(a+bs+ct+du)^\omega=a+bs-ct-du$$

对于 $a,b,c,d\in\mathcal{L}=k(x,y,z)$。我们用 ω 本身表示由 ω共轭所定义的 $\mathcal{Q}$ 的自同构。$T=a+bs+ct+du$ 的 ω-分解明确地由 $T_1=a+bs$ 和 $T_{-1}=ct+du$给出。

命题 5.15。 设 $T\in\mathcal{Q}$ 是一个 ω-共轭，$T=T_1+T_{-1}$ 是它的 ω-分解。若 T非平凡，则必有 $T_1,\ T_{-1}\neq 0$。

结合命题 5.15 和命题 5.14，我们得出，ω-共轭 $T\in\mathcal{Q}$ 要么是平凡的，要么满足 $\deg_\omega(T)\in\{(2,2),(4,4)\}$，此时适用以下等价关系：

(1) $\deg_\omega(T)=(2,2)$. (2)

$T_1^2,T_{-1}^2\in\mathcal{Z}$. (3)

$[\mathcal{Z}[T_1,T_{-1}]:\ \mathcal{Z}]=4$.

命题 *5.15* 的证明。若记 $\overline{k}$ 为 k的代数闭包，则包含关系 $k\subseteq\overline{k}$ 给出一个包含关系 $k[G]\hookrightarrow\overline{k}[G]$，进而可扩张为相应 Ore 分式域的包含关系。因此，不失一般性，我们可以假设 k 是代数闭的。

我们首先证明，绝不可能有 $T_1=0$。为导出矛盾，假设 $T_1=0$。我们有 $\omega T_{-1}=-T_{-1}\omega$ 和 $T_{-1}^2=\omega^2$，因此 $k(\omega^2)[\omega,T_{-1}]$ 是一个除法代数，其 $[k(\omega^2)[\omega,T_{-1}]:\ k(\omega^2)]=4$，且其中心为 $k(\omega^2)$。然而，Tsen 定理（见 [3]）表明，代数闭域上一元有理函数域不可能是有限维除法代数的中心。这个矛盾说明 $T_1\neq 0$。

现在，若 $T_{-1}=0$和 $T=T_1\neq\pm\omega$，那么 $\mathcal{Z}[\omega,T_1]$ 是一个域，其中方程 $X^2=\omega^2$ 至少有 4 个不同的解，即 $\{\pm\omega,\pm T_1\}$，这就产生了矛盾。命题的证明至此完成。□

定义 5.16. 非平凡单位元 $U\in k[G]$ 若满足 $\deg_\omega(\omega^U)=(2,2)$，则称其为类型 *2* 。否则称其为 4 型，即 $\deg_\omega(\omega^U)=(4,4)$ 的情形。

注记 5.17。

1) 下面说明在 $\mathcal{Q}$ 中存在 ω-共轭元，其 ω-次数为 (4, 4)。事实上，令 $k=\mathbb{Q}$，并令 $U:=(1+x)+u$。直接检验可得

$$U^{-1}=\frac{1+\bar{x}}{2+x+\bar{x}-z}-\frac{1}{2+x+\bar{x}-z}u,$$

因此

$$T:=\omega^U=\frac{2+x+\bar{x}+z}{2+x+\bar{x}-z}\omega-\frac{2(1+x)\omega}{2+x+\bar{x}-z}u.$$

注意，此处若 $T=T_1+T_{-1}$ 表示 T 的 ω 分解，我们得到

$$T_1=\frac{2+x+\bar{x}+z}{2+x+\bar{x}-z}\omega$$

另一次计算表明，T_1^2 在 ι_z 下不变，因此 $T_1^2\notin\mathcal{Z}$。

2）另一方面，根据利用唯一积性质的熟知论证，在 $k[G]$ 中不存在形如 $T=a+bt$ 的非平凡 ω-共轭，其中 a、$b\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$。事实上，我们可以将每个 y 替换为 t^2，从而将 T 表示为一个以 $k[x^{\pm1},z^{\pm}]$ 中的元素为系数、关于 t 的多项式；并且不难论证，$T^2\in k[x^{\pm1}]$ 意味着实际上 $T\in k[x^{\pm1}]$，进而推出 $T=\pm\omega$。

3）在下面的命题 5.21 中，只要 char(k) >2，我们就利用 [8] 中的结果，在 $k[G]$ 中找到 ω 次数为 (2, 2) 的非平凡 ω-共轭。不过，我们未能在 $k[G]$ 中找到 ω 次数为 (4, 4) 的 ω-共轭。

为了寻找 ω-共轭，假设系数满足一些额外条件会更方便。以下命题表明，如果在 $k[G]$ 中存在次数为 (2, 2) 的非平凡 ω-共轭，那么也存在次数相同的非平凡 ω-共轭，但其 ω-分解 T_1+T_{-1}满足 $T_1\omega\in\mathcal{Z}$。

命题 5.18. 设 $T\in\mathcal{Q}$ 是一个 ω-共轭，其次数$\omega(T)=(2,2)$，并考虑命题 *5.8* 中给出的单位元$U_T=\kappa-T$。则元素

$$S:=\omega^{U_T}$$

具有以下性质：

(i) S 是一个 ω-共轭，其次数$\omega(S)=(2,2)$。

(ii) 若 $S=S_1+S_{-1}$ 是 S的 ω-分解，则 $S_1=\alpha\omega$，其中某个 $\alpha\in\mathcal{Z}$。此外，若 $T\in k[G]$，则我们可以取 $\alpha\in k[G]$。

(iii) 如果 k 的对合在其素子域和 $T^*=-T$ 上限制为恒等映射，那么 $S^*=-S$ 也成立。

证明。令 $T=T_1+T_{-1}$ 为 T 的 ω-分解。我们有

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}(S+S^\omega)\\&=\frac{1}{2}(\omega^{U_T}+\omega^{\omega U_T})\\&=\frac{1}{2}\Big((\kappa-T_1-T_{-1})(\kappa+T_1-T_{-1})+(\kappa-T_1+T_{-1})(\kappa+T_1+T_{-1})\Big)\omega\\&=(\kappa^2-T_1^2+T_{-1}^2)\omega\\&=(\kappa^2-\omega^2+2T_{-1}^2)\omega=(1+2T_{-1}^2)\omega\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}S_{-1}&=\frac{1}{2}(S-S^\omega)\\&=\frac{1}{2}(\omega^{U_T}-\omega^{\omega U_T})\\&=\frac{1}{2}\Big((\kappa-T_1-T_{-1})(\kappa+T_1-T_{-1})-(\kappa-T_1+T_{-1})(\kappa+T_1+T_{-1})\Big)\omega\\&=2(T_1T_{-1}-\kappa T_{-1})\omega=2(T_1-\kappa)T_{-1}\omega.\end{aligned}$$

由于 $\deg_\omega(T)=(2,2)$，可知 $T_1-\kappa\neq0$，因此 $S_{-1}\neq0$，进而 $\deg_\omega(S)$ 不是 (2, 2) 就是 (4, 4)。由命题 5.14 和 5.15，$1+2T_{-1}^2\in\mathcal{Z}$，因此 $[\mathcal{Z}(S_1):\mathcal{Z}]\leq2$。这就用 $\alpha=1+2T_{-1}^2$ 证明了 (i) 和 (ii)。注意，如果 $T\in k[G]$，那么 $T^\omega\in k[G]$ 也成立，因此 $T_{-1}\in k[G]$ 且 $\alpha\in k[G]$。

至于 (iii)，我们回顾一下（参见推论 5.9 的证明）：若 T 是反自伴的，则 U_T 是酉元。在这种情况下，我们计算

$$S^*=(\omega^{U_T})^*=(U_T\omega U_T^*)^*=U_T\omega^*U_T^*.$$

由于 $\omega^* = -\omega$，这就完成了对 $S^* = -S$ 的证明，也完成了命题的证明。 □

作为推论，我们得到以下结果。

推论 5.19。以下结论成立：

(a) 存在一个类型为 2 的非平凡单位元 $U \in k[G]$，当且仅当存在一个非平凡的 ω-共轭$S \in k[G]$，其次数$\omega(S) = (2,2)$ 具有如下形式

$$S = \alpha\omega + ct + du,$$

其中 $\alpha \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$ 和 $c,\ d \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。

(b) 假设 k 上的对合在其素子域上限制为恒等映射，则存在一个类型为 2 的非平凡酉元 $U \in k[G]$，当且仅当存在一个非平凡反自伴 ω-共轭 $S \in k[G]$，其次数$\omega(S) = (2,2)$ 具有如下形式

$$S = \alpha\omega + ct + du,$$

其中 $\alpha \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$ 和 $c,\ d \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。

证明。给定这样一个类型 2 的单位元 U，令 $T := \omega^U$。根据假设，它的 ω-次数为 (2, 2)。特别地，$T \in k[G]$ 是非平凡的，因此单位元 $U_T := \kappa - T$ 是 $k[G]$ 中的非平凡单位元（由命题 5.8）。因此，根据同一命题，$S := \omega^{U_T}$ 也是 $k[G]$ 中的一个非平凡 ω-共轭元；它的 ω-次数为 (2, 2)，且由命题 5.18 和 5.6 可知，它具有所需形式。

反过来，设 $S \in k[G]$ 是所述形式的一个非平凡 ω-共轭元，其 ω-次数为 (2, 2)。那么，由命题 5.8 和 5.18，关联的单位元 $U_S := \kappa - S$ 是 $k[G]$ 中一个类型 2 的非平凡单位元。这就证明了 (a) 部分。

(b) 部分完全类似，只需考虑关于 U_T 的酉性与 T 的反自伴性之间关系的相应结论。□

推论 5.20. 存在一个类型 2 的非平凡单位元 $U \in k[G]$，当且仅当存在一个形式如下的非平凡单位元$V \in k[G]$

$$V = (\kappa - \alpha\omega) - ct - du$$

where $\alpha \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$ 和 $c,\ d \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$，其逆元为 $V^{-1} = (\kappa + \alpha\omega) + ct + du$.

证明. 如果 $U \in k[G]$ 是一个类型 2 的非平凡单位元，那么由推论 5.19 可知，存在一个形式为 $S = \alpha\omega + ct + du$ 的非平凡的 ω-共轭 $S \in k[G]$，其中 $\alpha \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$ 且 $c, d \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。由命题 5.8，单位元 $V := \kappa - S$ 在 $k[G]$ 中是非平凡的，其逆元为 $V^{-1} = \kappa + S$，符合所需形式。

反过来，假设 $V = (\kappa - \alpha\omega) - ct - du$ 是 $k[G]$ 中的一个非平凡单位元，其逆元为 $V^{-1} = (\kappa + \alpha\omega) + ct + du$。我们计算

$$\begin{aligned}
\omega^V &= V\omega V^{-1} \\
&= ((\kappa^2 - \alpha^2\omega^2) + cc^t y + dd^u z)\omega + (cd^t\overline{xz} + c^u d\overline{y})\omega s + 2(\kappa - \alpha\omega)\omega ct + 2(\kappa - \alpha\omega)\omega dt \\
&= (1 + 2\omega^2(1 - \alpha^2))\omega + 2(\kappa - \alpha\omega)\omega ct + 2(\kappa - \alpha\omega)\omega dt,
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $VV^{-1} = 1$。由此可得 $(\omega^V)_1^2 \in \mathcal{Z}$，因此根据命题 5.15，$\deg_\omega(\omega^V) = (2, 2)$。□

下面的命题利用了 $k[G]$ 中非平凡单位元的存在性（当 $\mathrm{char}(k) \neq 0$时，这一点最近已在 [5, 8], 中得到证明），证明了存在第一类的非平凡 ω-共轭元，即具有 ω-次数 (2, 2) 的共轭元。

命题 5.21. 设 $\Gamma = G$ 是 *Promislow* 群。若 特征$(k) > 2$，则 $k[G]$ 中存在一个类型为2的非平凡单位元。

证明。设 $p := \mathrm{char}(k) > 2$。在 [8, 定理 3] 中，作者构造了 $k[G]$ 中的非平凡单位元。具体而言，这些单位元如下所示。

对于参数 $m, n \in \mathbb{Z}$ 的任意取值，定义 $h := (1 - z^{1-2n})^{p-2} \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ 以及元素 $a, b, c, d \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ 如下

$$\begin{aligned}
a &:= (1 + x)(1 + y)(z^n + z^{1-n})h, \\
b &:= z^m[(1 + x)(\overline{x} + \overline{y}) + (1 + \overline{y})(1 + z^{2n-1})]h, \\
c &:= z^m[(1 + \overline{y})(x + y)z^n + (1 + x)(z^n + z^{1-n})]h, \\
d &:= z^{2n-1} + (4 + x + \overline{x} + y + \overline{y})h.
\end{aligned}$$

那么 $U := a + bs + ct + du$ 是 $k[G]$ 中的一个非平凡单位元，其逆元为

$$U^{-1} = a' + b's + c't + d'u,$$

其中

$$a' = \overline{x}a^s, \quad b' = -\overline{x}b, \quad c' = -\overline{y}c, \quad d' = \overline{z}d^s.$$

根据命题 5.8，元素 $T := \omega^U$ 是 $k[G]$ 中一个非平凡的 ω-共轭元。我们将证明 $\deg_\omega(T) = (2, 2)$，从而证明该命题。首先，我们得到 T 的 ω-分解：

$$T = \omega^U = U\omega U^{-1} = (a + bs + ct + du)(a' + b's - c't - d'u)\omega,$$

因此

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{1}{2}(T + T^\omega) = \Big[&(aa' + xb(b')^s - yc(c')^t - zd(d')^u) \\ &+ (ab' + b(a')^s - \overline{x}\,\overline{z}c(d')^t - \overline{y}d(c')^u)s\Big]\omega, \\ T_{-1} = \frac{1}{2}(T - T^\omega) = \Big[&(-ac' - xb(d')^s + c(a')^t + \overline{y}zd(b')^u)t \\ &+ (-ad' - b(c')^s + \overline{x}y\overline{z}c(b')^t + d(a')^u)u\Big]\omega. \end{aligned}$$

由于 $(a')^s = \overline{x}a$、$(c')^u = -\bar{x}yc$ 和 $(d')^t = zd$，我们看到

$$ab' + b(a')^s = -\overline{x}ab + \overline{x}ba = 0$$

此外

$$\overline{x}\,\overline{z}c(d')^t + \overline{y}d(c')^u = \overline{x}cd - \overline{x}dc = 0.$$

因此 t 在 T_1 的表达式中，与元素 s 相伴的表达式恰好为 0，这导致 to

$$T_1 = (aa' + xb(b')^s - yc(c')^t - zd(d')^u)\omega =: \alpha\omega.$$

我们使用公式 (5.3)，将 $\alpha \in \mathcal{L}$ 的表达式 (5.2) 计算为一个 $\mathcal{Z}$-线性组合。事实上，直接计算可得

$$\begin{aligned} \alpha - \iota_{xy}(\alpha) - \iota_{xz}(\alpha) + \iota_{yz}(\alpha) = 0, \\ \alpha - \iota_{xy}(\alpha) + \iota_{xz}(\alpha) - \iota_{yz}(\alpha) = 0, \\ \alpha + \iota_{xy}(\alpha) - \iota_{xz}(\alpha) - \iota_{yz}(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

由此我们得出，α 是 $\mathcal{Q}$ 中的一个中心元。因此 $T_1^2 = \alpha^2\omega^2 \in \mathcal{Z}$，而这已足以根据命题 5.15 推出 $\deg_\omega(T) = (2, 2)$。证明至此完成。□

当 $\mathrm{char}(k) = 0$ 时，能否在 $k[G]$ 中找到类型 2 的非平凡单位元，是一个有趣的问题。此外，当 k 的对合在其素子域上限制为恒等映射时，探讨 $k[G]$ 中类型 2 的非平凡酉元也很有意思。这些问题将在下一节中讨论。

5.2. 存在 ω-共轭元的判据，其 ω-次数为 (2,2)。 本节给出 $k[G]$ 中存在类型 2 非平凡单位元的判据。我们将在 $\mathrm{char}(k) \neq 2$ 的任意域 k 上陈述这些判据，不过鉴于命题 5.21，只有在 $\mathrm{char}(k) = 0$ 时它们才有意义。

鉴于推论 5.19，我们将研究如下形式的非平凡 ω-共轭 $T \in \mathcal{Q}$

$$T = a\omega + ct + du, \tag{5.5}$$

其中 $a \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi] \subseteq \mathcal{Z}$ 和 $c, t \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}] \subseteq \mathcal{L}$。$T$的非平凡性意味着 $c, d \neq 0$。事实上，若 $c = 0$，则 $T = a\omega + du$ 且 $U_T := \kappa - T = (\kappa - a\omega) - du$ 将是$k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}][u]$中的一个非平凡单位元。类似于命题 5.8 证明中的论证表明，U_T 不可能是非平凡的，这就产生了矛盾。同理，我们可以证明 $d \neq 0$。通过考虑方程

$$T^2 = \omega^2$$

并利用 $\mathcal{Q}$ 在 $\mathcal{Z}$ 上的显式基来书写它，这些基便于计算。我们先来介绍这类基。

下表的第一列介绍了一个方便研究系数c的 $\mathcal{Z}$ 上的基 $\mathcal{L}$。

表 3 的第 2 至第 4 列展示了共轭对基中元素的作用，例如 $\gamma_1^s = -y \cdot \gamma_1$。注意，这些共轭关系实际上证明了 γ_i 构成一个基。最后两列供将来参考。简要指出，y、$\bar{x}$ 和 $\bar{x}y$ 是非中心元。

用于研究系数 d 的第二基列于下表。

	s	t	u	$\gamma_i^2\bar{x}y$	$(\gamma_i t)^*$
$\gamma_1 := (1+x)(1-\bar{y})$	$-y$	$\bar{x}$	$-\bar{x}y$	$4(\kappa_x+1)(\kappa_y-1)$	$-\gamma_1 t$
$\gamma_2 := (1-x)(1+\bar{y})$	y	$-\bar{x}$	$-\bar{x}y$	$4(\kappa_x-1)(\kappa_y+1)$	$\gamma_2 t$
$\gamma_3 := (1+x)(1+\bar{y})$	y	$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$4(\kappa_x+1)(\kappa_y+1)$	$\gamma_3 t$
$\gamma_4 := (1-x)(1-\bar{y})$	$-y$	$-\bar{x}$	$\bar{x}y$	$4(\kappa_x-1)(\kappa_y-1)$	$-\gamma_4 t$

表 3. 第一组基： γ-元素。

	s	t	u	$\delta_i^2 z$	$(\delta_i u)^*$
$\delta_1 := (1-\bar{z})$	$-z$	$-z$	1	$2(\kappa_z-1)$	$-\delta_1 u$
$\delta_2 := (x-\bar{x})(1+\bar{z})$	z	$-z$	-1	$8\omega_x^2(\kappa_z+1)$	$\delta_2 u$
$\delta_3 := (1+\bar{z})$	z	z	1	$2(\kappa_z+1)$	$\delta_3 u$
$\delta_4 := (x-\bar{x})(1-\bar{z})$	$-z$	z	-1	$8\omega_x^2(\kappa_z-1)$	$-\delta_4 u$

表4。第二基： δ-元素。

我们还记下以下关系，以供日后参考。

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma_2\delta_2}{\gamma_3\delta_3}=\frac{\gamma_4\delta_4}{\gamma_1\delta_1}=\frac{2\omega_x(1-x)}{(1+x)}=\frac{2\omega_x(1-x^2)}{1+2x+x^2}=\frac{-4\omega_x^2}{2\kappa_x+2}=-2(\kappa_x-1),\\&\frac{\gamma_1\delta_2}{\gamma_4\delta_3}=\frac{\gamma_3\delta_4}{\gamma_2\delta_1}=\frac{2\omega_x(1+x)}{1-x}=-2(\kappa_x+1).\end{aligned}\tag{5.6}$$

从现在起，我们记

$$c=c_1+c_2+c_3+c_4,\quad d=d_1+d_2+d_3+d_4,$$

其中，对所有 $1\le i\le 4$，都有 $c_i=C_i\gamma_i$, $d_i=D_i\delta_i$，其中某些 $C_i, D_i\in\mathcal{Z}$。我们先给出一个技术引理。

引理 5.22。当且仅当每个 $c_i\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$都满足 $c\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$ 时， $c\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$ 成立。类似地，当且仅当每个 $d_i\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$都满足 $d\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$ 时， $d\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$ 成立。

证明。 我们将处理系数 c，另一个系数 d 的处理完全类似。经s共轭后，得到t,u

$$\begin{cases}c=c_1+c_2+c_3+c_4,\\ c^s=y(-c_1+c_2+c_3-c_4),\\ c^t=\bar{x}(c_1-c_2+c_3-c_4),\\ c^u=\bar{x}y(-c_1-c_2+c_3+c_4).\end{cases}$$

因此我们得到以下公式

$$\begin{aligned}&c_1=\frac{c-\bar{y}c^s+xc^t-x\bar{y}c^u}{4},\quad c_2=\frac{c+\bar{y}c^s-xc^t-x\bar{y}c^u}{4},\\&c_3=\frac{c+\bar{y}c^s+xc^t+x\bar{y}c^u}{4},\quad c_4=\frac{c-\bar{y}c^s-xc^t+x\bar{y}c^u}{4}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

由此 该引理很容易得出，因为 $c\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$ 当且仅当 c^s、 c^t、 $c^u\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}$]. □

T下一个命题给出了 T（如 (5.5) 中所示）从而使得 $T^2\in\mathcal{Z}$ 的充要条件 .

命题 5.23。 令 T 如(5.5)所示。以下条件等价。

(i) $T^2\in\mathcal{Z}$。

(ii) 我们有

$$cd^t\bar{x}\bar{z}+c^ud\bar{y}=0.\tag{5.8}$$

(iii) 方程

$$(\kappa-1)C_2C_4-(\kappa+1)C_1C_3=0$$

得到满足，并且以下至少一项成立：

(*I*) 在 $C_1 \neq 0$ 或 $C_4 \neq 0$ 的情况下，存在 α，$\beta \in \mathcal{Z}$ 使得

$$D_1 = -2\beta(\kappa-1)C_4, \qquad D_4 = \beta C_1, \qquad D_2 = \alpha C_4, \qquad D_3 = -2\alpha(\kappa+1)C_1;$$

(II) 若 $C_2 \neq 0$ 或 $C_3 \neq 0$中任一条件成立，则存在 α，$\beta \in \mathcal{Z}$ 使得

$$D_1 = -2\beta(\kappa+1)C_3, \qquad D_4 = \beta C_2, \qquad D_2 = \alpha C_3, \qquad D_3 = -2\alpha(\kappa-1)C_2 \quad .$$

若这些条件中任一条件成立，则

$$T^2 = a^2\omega^2 + (c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 - c_4^2)\bar{x}y + (d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - d_4^2)z$$

而且所有九个加项都属于 $\mathcal{Z}$。

证明。 在此证明中，我们将不拘一格地使用共轭表（3）和（4）。

对于蕴含 $(i) \Rightarrow (ii)$，我们只需计算

$$T^2 = (a\omega + ct + du)^2 = (a^2\omega^2 + cc^t y + dd^u z) + (cd^t \bar{x}\bar{z} + c^u d\bar{y})s.$$

如果我们要求 $T^2 \in \mathcal{Z}$，就必然需要

$$cd^t \bar{x}\bar{z} + c^u d\bar{y} = 0,$$

这就是 (ii) 中的陈述。

现在我们证明等价性 $(ii) \Leftrightarrow (iii)$。我们有

$$c^u = \bar{x}y(-c_1 - c_2 + c_3 + c_4),$$
$$d^t = z(-d_1 - d_2 + d_3 + d_4),$$

因此，方程 (5.8) 变为

$$\begin{aligned} 0 &= cd^t \bar{x}y\bar{z} + c^u d \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)(-d_1 - d_2 + d_3 + d_4)\bar{x}y + (-c_1 - c_2 + c_3 + c_4)(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)\bar{x}y \\ &= 2\bar{x}y[(c_3 + c_4)(d_3 + d_4) - (c_1 + c_2)(d_1 + d_2)]. \end{aligned}$$

这等价于方程

$$(c_1 + c_2)(d_1 + d_2) = (c_3 + c_4)(d_3 + d_4).$$

通过共轭 将这个最后的方程分别与 s、 t 和 u 相乘，我们得到以下非线性方程组 ：

$$\begin{cases} (c_1 + c_2)(d_1 + d_2) = (c_3 + c_4)(d_3 + d_4), \\ (c_1 - c_2)(d_1 - d_2) = (c_3 - c_4)(d_3 - d_4), \\ (-c_1 + c_2)(d_1 + d_2) = (c_3 - c_4)(d_3 + d_4), \\ (c_1 + c_2)(-d_1 + d_2) = (c_3 + c_4)(d_3 - d_4). \end{cases}$$

这个方程组等价于以下方程组:

$$\begin{cases} c_1 d_1 - c_4 d_4 = 0, \\ c_1 d_2 - c_4 d_3 = 0, \\ c_2 d_1 - c_3 d_4 = 0, \\ c_2 d_2 - c_3 d_3 = 0. \end{cases}$$

利用 c_i 和 d_i 的定义以及关系式 (5.6)，这些方程等价于以下方程:

$$2(\kappa-1)C_2 D_2 + C_3 D_3 = 0 \qquad C_1 D_1 + 2(\kappa-1)C_4 D_4 = 0$$
$$2(\kappa+1)C_1 D_2 + C_4 D_3 = 0 \qquad C_2 D_1 + 2(\kappa+1)C_3 D_4 = 0$$

注意，给定 C_1、 C_2、 C_3、 C_4 后，实际上这里有两个方程组：第一个方程组用于确定 D_2、 D_3，另一个方程组用于确定 D_1、 D_4。因此，结论是方程 (5.8) 等价于上述方程组的行列式为零这一条件，即

$$(\kappa-1)C_2 C_4 - (\kappa+1)C_1 C_3 = 0,$$

并且还需满足命题中的陈述 (I) 和 (II)，具体取决于 C_i 是否非零。

最后，我们将ow $(iii) \Rightarrow (i)$。我们已经证明，(iii) 意味着第二项消失于

$$T^2 = (a\omega + ct + du)^2 = (a^2\omega^2 + cc^t y + dd^u z) + (cd^t \bar{x}\bar{z} + c^u d\bar{y})s.$$

T因此，只需证明 (iii) 也意味着项 cc^ty+dd^uz 是中心的。我们有 e

$$c^t=\bar{x}(c_1-c_2+c_3-c_4),$$
$$d^u=d_1-d_2+d_3-d_4,$$

因此

$$\begin{aligned}cc^ty+dd^uz&=(c_1+c_2+c_3+c_4)(c_1-c_2+c_3-c_4)\bar{x}y+(d_1+d_2+d_3+d_4)(d_1-d_2+d_3-d_4)z\\&=\bar{x}y(c_1^2-c_2^2+c_3^2-c_4^2)+z(d_1^2-d_2^2+d_3^2-d_4^2)+2\bar{x}y(c_1c_3-c_2c_4)+2z(d_1d_3-d_2d_4).\end{aligned}$$

现在我们来论证 $c_1c_3-c_2c_4=d_1d_3-d_2d_4=0$。一方面，我们有：

$$\begin{aligned}c_1c_3-c_2c_4&=C_1C_3\gamma_1\gamma_3-C_2C_4\gamma_2\gamma_4\\&=(1-\bar{y}^2)[(1+x^2+2x)C_1C_3-(1+x^2-2x)C_2C_4]\\&=2x(1-\bar{y}^2)[(\kappa+1)C_1C_3-(\kappa-1)C_2C_4]=0.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}d_1d_3-d_2d_4&=D_1D_3\delta_1\delta_3-D_2D_4\delta_2\delta_4\\&=(1-\bar{z}^2)(D_1D_3-4\omega^2D_2D_4).\end{aligned}$$

在情形 (I) 中，这等于

$$4(1-\bar{z}^2)\alpha\beta C_1C_4[(\kappa+1)(\kappa-1)-\omega^2]=0,$$

而在情形 (II) 中，我们得到

$$4(1-\bar{z}^2)\alpha\beta C_2C_3[(\kappa+1)(\kappa-1)-\omega^2]=0.$$

由此得到表达式

$$T^2=a^2\omega^2+(c_1^2-c_2^2+c_3^2-c_4^2)\bar{x}y+(d_1^2-d_2^2+d_3^2-d_4^2)z.$$

所有九个加项都属于 $\mathcal{Z}$ 这一事实，即每个 $\gamma_i^2\bar{x}y,\delta_i^2z\in\mathcal{Z}$，可由查看表（3）和（4）的倒数第二列得出。这证明了蕴含 $(iii)\Rightarrow(i)$，也证明了该命题。□

现在我们可以陈述主要定理了。

定理 5.24。存在一个类型为 2 的非平凡单位元 $U\in k[G]$，当且仅当下面给出的方程组有解

$$(A,C_1,C_2,C_3,C_4,D_1,D_2,D_3,D_4,\alpha,\beta)\in\mathcal{Z}^{11}$$

且该解不同于 $(\pm1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$，使得 $A\in k[\kappa_x,\kappa_y,\kappa_z,\xi]$ 且 $C_i\gamma_i,\ \ D_i\delta_i\in k[x^{\pm1},y^{\pm1},z^{\pm1}]$。

$\diamond$ $(A^2-1)\omega_x^2+C_1^2(\kappa_x+1)(\kappa_y-1)-C_2^2(\kappa_x-1)(\kappa_y+1)+C_3^2(\kappa_x+1)(\kappa_y+1)-C_4^2(\kappa_x-1)(\kappa_y-1)$
$+2D_1^2(\kappa_z-1)-2D_2^2\omega_x^2(\kappa_z+1)+2D_3^2(\kappa_z+1)-2D_4^2\omega_x^2(\kappa_z-1)=0,$

$\diamond$ $(\kappa_x-1)C_2C_4-(\kappa_x+1)C_1C_3=0,$

$\diamond$ *In case* $C_1\neq0$ *or* $C_4\neq0$, $\begin{cases}D_1=\beta(1-\kappa_x)C_4,\\D_2=\alpha C_4,\\D_3=-\alpha(1+\kappa_x)C_1,\\D_4=\beta C_1.\end{cases}$ *In case* $C_2\neq0$ *or* $C_3\neq0$, $\begin{cases}D_1=-\beta(1+\kappa_x)C_3,\\D_2=\alpha C_3,\\D_3=\alpha(1-\kappa_x)C_2,\\D_4=\beta C_2.\end{cases}$

注记 5.25。

1) 我们倾向于用旧记号 ω_x,κ_x 表示这些方程，因为与其他元素 κ_y,κ_z 相比，这种写法似乎最便于体现这些项的显式出现。不过，在定理的证明中，我们仍将继续使用记号 ω,κ。

2) 如前所述，定理 5.24 中的判据包含 6 个方程和 11 个变量。然而，最后 4 个方程给出的代换可将其化简为一个含 7 个变量（$A,C_1,C_2,C_3,C_4,\alpha,\beta$）的 2 方程组。第二个方程还可用于进一步化简，得到一个含 6 个变量的单个方程。我们选择以“扩展”形式陈述该判据，因为这种形式似乎最便于进一步分析。

3) 也可以利用推论 5.20 的结论来证明定理 5.24。

定理的证明 *5.24.* 根据推论 5.19，类型 2 的非平凡单位元 $U\in k[G]$ 的存在等价于于存在

具有 ω-次数 (2, 2) 的非平凡 ω-共轭 $T\in k[G]$，其形式为

(5.9) $$T=A\omega+ct+du,$$

其中 $A \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$ 和 c、$d \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。我们已经注意到，$T$的非平凡性意味着 c和 $d \neq 0$。

那么首先假设这样的 T存在。特别地，$T^2 = \omega^2 \in \mathcal{Z}$，因此命题 5.23 告诉我们，定理陈述中的所有方程（除第一个外）都成立。但第一个方程也成立，因为

$$\begin{aligned}\omega^2 = T^2 &= A^2\omega^2 + (c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 - c_4^2)\bar{x}y + (d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - d_4^2)z \\ &= A^2\omega^2 + C_1^2\gamma_1^2\bar{x}y - C_2^2\gamma_2^2\bar{x}y + C_3^2\gamma_3^2\bar{x}y - C_4^2\gamma_4^2\bar{x}y \\ &\quad + D_1^2\delta_1^2 z - D_2^2\delta_2^2 z + D_3^2\delta_3^2 z - D_4^2\delta_4^2 z \\ &= A^2\omega^2 + 4C_1^2(\kappa+1)(\kappa_y - 1) - 4C_2^2(\kappa-1)(\kappa_y+1) + 4C_3^2(\kappa+1)(\kappa_y+1) - 4C_4^2(\kappa-1)(\kappa_y-1) \\ &\quad + 2D_1^2(\kappa_z - 1) - 8D_2^2\omega^2(\kappa_z+1) + 2D_3^2(\kappa_z+1) - 8D_4^2\omega^2(\kappa_z - 1),\end{aligned}$$

这是经过变量替换 $2C_i \to C_i$ 和 $2D_2 \to D_2, 2D_4 \to D_4$后得到的第一个方程。注意，定理中的其余方程也已随这些变量替换作相应变换。最后，所有变量 $A, C_i, D_i, \alpha, \beta$都属于 $\mathcal{Z}$，而且由引理 5.22，$A \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z, \xi]$，并且每个 $c_i = C_i\gamma_i, d_i = D_i\delta_i \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。最后，由于 $c, d \neq 0$，至少有一些 c_i，$d_j \neq 0$，因此得到的解不同于解(±1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)。

反之，若所述方程组存在这样的解，则元素

$$T = A\omega + \Big(\frac{C_1}{2}\gamma_1 + \frac{C_2}{2}\gamma_2 + \frac{C_3}{2}\gamma_3 + \frac{C_4}{2}\gamma_4\Big)t + \Big(D_1\delta_1 + \frac{D_2}{2}\delta_2 + D_3\delta_3 + \frac{D_4}{2}\delta_4\Big)u$$

属于 $k[G]$，并且利用定理陈述中的方程进行直接计算可得 $T^2 = \omega^2$，因此它是中心的。显然，T 的 ω 次数为 (2, 2)，而 T 的非平凡性则由所得解的非平凡性可知，即该解不同于 (±1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)。□

现在，我们针对反自伴的 ω-共轭给出前一定理的一个变体，适用于 k 的对合在其素子域上限制为恒等映射的情形。

定理 5.26. 设 k 的对合在其素子域上限制为恒等映射。则存在一个类型为 2 的非平凡酉元 $U \in k[G]$，当且仅当定理 *5.24* 中的方程组有解

$$(A, C_1, C_2\xi, C_3\xi, C_4, D_1, D_2\xi, D_3\xi, D_4, \alpha, \beta) \in \mathcal{K}^9 \times \mathcal{Z}^2$$

不同于 $(\pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$，使得 $A \in k[\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z]$ 和 $C_i\gamma_i, D_i\delta_i \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$。

为了证明这一点，我们首先需要一些观察结果，并将其归纳为以下引理。回想一下，$\mathcal{Z} = \mathcal{K}(\xi)$ 是 $\mathcal{K} = k(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ 上的二次扩张。

引理 5.27. 假设 k 的对合是恒等映射。那么 $\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}$，并且对任意 $z \in \mathcal{K}$，还有 $z^* = z$。此外，以下结论成立。

i) 元素 z 属于 $\mathcal{K}$ 当且仅当 $z^* = z$。*ii)* 元素 $z\xi$ 属于 $\mathcal{K}$ 当且仅当 $z^* = -z$。

证明。该陈述 $\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}$显然。注意，对任意 $z \in \mathcal{K} = k$，都有 $z^* = z(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$，因为 $\kappa_x^* = \kappa_x$、$\kappa_y^* = \kappa_y$和 $\kappa_z^* = \kappa_z$。

现在给定 $z \in \mathcal{Z}$，将其写成 $z = z_1 + \xi z_2$，其中 z_1、$z_2 \in \mathcal{K}$。于是 $z^* = z_1 - \xi z_2$，因此引理的其余部分便可直接得出。□

最后，我们可以证明定理 5.26。

定理 *5.26* 的证明。这是定理 5.24 的一个特例，唯一需要进一步研究的是条件 $T^* = -T$。我们写作

$$T = A\omega + C_1\gamma_1 t + C_2\gamma_2 t + C_3\gamma_3 t + C_4\gamma_4 t + D_1\delta_1 u + D_2\delta_2 u + D_3\delta_3 u + D_4\delta_4 u,$$

并使用表（3）和（4）的最后几列：

$$\begin{aligned}T^* &= A^*\omega^* + C_1^*(\gamma_1 t)^* + C_2^*(\gamma_2 t)^* + C_3^*(\gamma_3 t)^* + C_4^*(\gamma_4 t)^* + D_1^*(\delta_1 u)^* + D_2^*(\delta_2 u)^* + D_3^*(\delta_3 u)^* + D_4^*(\delta_4 u)^* \\ &= -A^*\omega - C_1^*\gamma_1 t + C_2^*\gamma_2 t + C_3^*\gamma_3 t - C_4^*\gamma_4 t - D_1^*\delta_1 u + D_2^*\delta_2 u + D_3^*\delta_3 u - D_4^*\delta_4 u\end{aligned}$$

因此，根据引理 5.27，条件 $T^* = -T$ 等价于以下条件

$$A, C_1, C_2\xi, C_3\xi, C_4, D_1, D_2\xi, D_3\xi, D_4 \in \mathcal{K}.$$

这些恰好是定理 5.26 的陈述中与定理 5.24 的陈述不同的条件。证明完毕。□

致谢

作者　　谨此感谢 Dawid Kielak 对论文第一部分提出的宝贵意见。

参考文献

[1] P. Ara 和 K. R. Goodearl. 某些野幺半群的实现问题与 Atiyah 问题. 美国数学会汇刊, 369(8):5665–5710, 2017. [2] D. A. Craven 和 P. Pappas. 关于超可解群代数的单位猜想. 代数杂志, 394:310–356, 2013. [3] S. Ding, M.-C. Kang 和 E.-T. Tan. Chiungtze C. Tsen（1898–1940）与 Tsen 定理. 落基山数学杂志, 29(4):1237–1269, 1999. [4] B. Farb 和 R. K. Dennis. 非交换代数，第 144 卷，*Graduate Texts in Mathematics*丛书. Springer-Verlag，纽约，1993. [5] G. Gardam. 群环单位猜想的一个反例. 数学年刊（第二辑）, 194(3):967–979, 2021. [6] P. H. Kropholler、P. A. Linnell 和 J. A. Moody. 一个新的 K-理论定理在可解群环中的应用. 美国数学会会刊, 104(3):675–684, 1988. [7] W. Lück. L^2-不变量：理论及其在几何和 K-理论中的应用，第 44 卷，数学及其边缘领域成果。第三辑。现代数学综述丛书 /数学及相关领域成果。第三辑。现代数学综述丛书/. Springer-Verlag，柏林，2002. [8] A. G. Murray. 群环单位猜想的更多反例. *arXiv* 预印本, 第 arXiv:2106.02147 页，2021年6月. [9] Holger Reich. 群冯·诺伊曼代数及相关代数. 博士论文，哥廷根乔治-奥古斯特大学，1998.

(J. Claramunt) 数学与计算机科学学院，莱比锡大学，奥古斯都广场 10 号，04109 莱比锡，德国。电子邮箱: Joan.Claramunt@math.uni-leipzig.de (Ł. Grabowski) 数学与计算机科学学院，莱比锡大学，奥古斯都广场 10 号，04109 莱比锡，德国。电子邮箱: Lukasz.Grabowski@math.uni-leipzig.de