arXiv:2303.02825v1 [math.GN] 6 Mar 2023

真绝对扩张体

VESKO VALOV

Abstract. 我们描述至多为 n 维空间类的真绝对（邻域）扩张体，记作 A(N)E^p(n)。例如，满足 DD^{n}P-性质的唯一局部紧 n维可分度量空间 $X \in$AE^p(n)，是去掉一个点的 n维 Menger 紧体。我们还描述了非可度量化的 A(N)E^p(n) 空间。

1. Introduction and preliminary results

在本文中，我们描述有限维空间的真绝对扩张体，参见定理 2.4 和定理 3.2。回顾一下，映射 $f\colon X \to Y$ 若对于每个紧$K \subset Y$， $f^{-1}(K)$ 都是紧的，则称其为真映射。注意，如果 X 和 Y 是局部紧的，那么 f 是真映射，当且仅当它是闭映射，且所有纤维 $f^{-1}(y)$ （ $y \in Y$ ）都是紧的。不同作者研究了映射的真延拓和闭延拓，参见 Michael[13], Nowi´nski [15]。我们的结果更接近 Chigogidze 在[4], 中的结果；正是在那里，真绝对（邻域）扩张体首次被引入并得到研究。

如果每个真映射 $f\colon A \to X$，其中 A 是局部紧 Lindel¨of 空间 Y 中维数为 $\dim Y \leq n$ 的闭子集，都可以延拓为 $\widetilde{}$ 在 A 于 Y 中某个闭邻域上的完美延拓 f，则称局部紧空间 X 是至多 n 维空间类的真绝对邻域扩张体（记作$X \in$ ANE^p(n)）。当 f 在 Y 上存在真延拓时，称 X 是至多 n 维空间类的真绝对扩张体（记作 $X \in$AE^p(n)）。由于任何能映入紧空间的空间都必为紧空间，根据定义可知不存在紧 AE^p(n) 空间。特别地， n 球面 $\mathbb{S}^n$ 是 n 维空间的绝对扩张体，但不是 AE^p(n)。

2020 年数学主题分类。主要分类 54C20；次要分类 54F45。关键词和短语：适用于 n 维空间的绝对真映射扩张子，DD^{n}P 性质， n 维门格紧致体。第二作者的研究部分由 NSERC 资助项目 261914-19 资助。

如果在上述定义中， Y 是度量空间，并且去掉要求$\tilde{}$ f 和 f 为真映射的条件，就得到至多 n 维空间类的绝对（邻域）扩张体定义（记作 A(N)E(n)）。众所周知，度量空间 X 是 ANE(n) 当且仅当 X 是 LC^{n-1}。此外，若同时 X 是 C^{n-1}，则 $X \in$ AE(n)。回忆一下，若对任意 $x \in X$ 及其在 X 中的邻域 U，都存在 x 的另一个邻域 V，使得对所有 $m \leq n$ 均有 $V \overset{m}{\hookrightarrow} U$，则称空间 X 是 LC^{n} （这里 $V \overset{m}{\hookrightarrow} U$ 意味着 $V \subset U$，且从 m 维球面 $\mathbb{S}^m$ 到 V 的每个映射都可以延拓为映射 $\mathbb{B}^{m+1} \to U$，其定义域为 $(m+1)$ 维立方体 $\mathbb{B}^{m+1}$）。若对每个点 $x \in A$ 及其在 X 中的邻域 U，都存在 x 的另一个邻域 V，使得$V \setminus A \overset{k}{\hookrightarrow} U \setminus A$，则称集合 $A \subset X$ 在 X 中为 $k-\mathrm{LCC}$。若对所有 $k \leq n$， A 在 X 中均为 $k-$ LCC，则称 A 在 X 中为 LCC^{n} 。

2. Second countable AE(n)-spaces

本节中，除非另有明确说明，空间均指局部紧可分度量空间。用 $C(Z,X)$ 表示从 Z 到 X 的所有连续映射所构成的集合，并赋予紧开拓扑。若子集 $A \subset X$ 在 X [14] 中满足集合 $C(\mathbb{B}^n, X\setminus A$ 在 $C(\mathbb{B}^n, X)$中稠密，则称 $A \subset X$ 为 X [14] 中的 Z_n-集。度量空间中 Z_n-集的以下刻画众所周知，但我们未能找到相关参考文献。

引理 2.1. 设 (X,d) 是度量 LC^{n-1}-空间，且 A 是 X中的闭无处稠密集。那么， A 是 X 中的 Z_n-集，当且仅当 A 是 LCC^{n-1}。

证明。充分性由度量 LC^{n-1}-空间的性质以及 Z_n-集的定义推出。设 A 是 LCC^{n-1}， $f\colon \mathbb{B}^n \to X$是一个给定的映射且 $\eta > 0$。我们考察每个 $x \in X$所满足的以下性质：如果 U 是 X中 x 的一个邻域，那么存在另一个邻域 $V \subset U$ 使得 $V \setminus A \overset{n-1}{\hookrightarrow} U \setminus A$。由于 A 是 LCC^{n-1}且 X 是 LC^{n-1}，每个 $x \in X$ 都具有该性质。因此，根据 [9] ，不妨设度量 d 满足以下条件：对每个$\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对于每个 $x \in X$ 和每个 $m \leq n-1$， $B_\delta(x) \setminus A \overset{m}{\hookrightarrow} B_\varepsilon(x) \setminus A$。这里， $B_\delta(x)$表示 X 中以 x 为中心、半径为 δ的开球。我们用 $\delta \overset{m}{\hookrightarrow} \varepsilon$ 表示对于每个 $x \in X$, $B_\delta(x) \setminus A \overset{m}{\hookrightarrow} B_\varepsilon(x) \setminus A$。我们选取一个有限序列$\{\varepsilon_m\}_{m\leq n}$，使得对于每个 $0 \leq m \leq n-1$ 和 $\varepsilon_n = \eta$都有 $\varepsilon_m \overset{m}{\hookrightarrow} \varepsilon_{m+1}$。接下来，定义集值映射 $\varphi_m\colon \mathbb{B}^n \rightsquigarrow X$，令 $\varphi_m(y) = B_{\varepsilon_m}(f(y)) \setminus A$， $0 \leq m \leq n$。由于 A 是 LCC^{n-1}，对于所有 $y \in \mathbb{B}^n$都有 $\varphi_m(y) \neq \varnothing$。容易

看出，每个 φ_m 都具有以下性质：如果对于某个 $y_0 \in \mathbb{B}^n$， K 是 $\varphi_m(y_0)$ 的一个紧子集，那么存在一个邻域 $O(y_0) \subset \mathbb{B}^k$，使得对于所有 $y \in O(y_0)$都有 $K \subset \varphi_m(y)$。根据 [10], ，存在一个映射 $g: \mathbb{B}^n \to X$，使得对于所有 $y \in \mathbb{B}^n$都有 $g(y) \in \varphi_n(y)$。这意味着， g将 $\mathbb{B}^n$ 映射到 $X \setminus A$ 中，并且对于每个 $y \in \mathbb{B}^n$都有 $d(f(y)\ g(y)) < \eta$。因此， A是 Z_n-集于 X中。□

对于每个局部紧空间 X，令 $\omega X = X \cup \{\omega\}$ 为 X 的一点紧化。

引理 2.2. 若 X 是 AEp(n)-空间，则 $\{\omega\}$ 是 ωX 中的一个 Z_n-集。

证明. 由于每个度量 AEp(n)-空间都是维数为 $\leq n$ 的紧空间的绝对扩张体， X 是 LC^{n-1}。因此，根据引理 2.1，我们只需证明 $\{\omega\}$ 是 LCC^{n-1}。假设存在 $k \leq n-1$ 和 ωX 中 $\{\omega\}$ 的一个邻域 U，使得对于 $\{\omega\}$ 的每个邻域 V，都存在一个映射 $g_V: \mathbb{S}^k \to V\backslash\{\omega\}$，它无法延拓为从 $\mathbb{B}^{k+1}$ 到 $U\backslash\{\omega\}$的映射。取 ωX 中 $\{\omega\}$ 的邻域局部基 $\{V_m\}$，以及相应的映射 $g_m: \mathbb{S}^k \to V_m\backslash\{\omega\}$，使得 $V_m \subset U$，且每个 g_m 都不能延拓为映射 $\widetilde{g}_m$:$\mathbb{B}^{k+1} \to U\backslash\{\omega\}$。现在，对每个 m，令 $\mathbb{S}^k_m$ 和 $\mathbb{B}^{k+1}_m$ 分别为 $\mathbb{S}^k$ 和 $\mathbb{B}^{k+1}$ 的副本。考虑它们的不交并 $Y = \biguplus_{m=1}^{\infty} \mathbb{B}^{k+1}_m$、$A = \biguplus_{m=1}^{\infty} \mathbb{S}^k_m$ 及其一点紧化 $\omega Y = Y \cup \{\omega_Y\}$。显然，
$\omega A = A \cup \{\omega_Y\}$，且存在映射 $g: A \to X$，满足$g|\mathbb{S}^k_m = g_m$。由于映射 g 是真映射，它可以真延拓为$\widetilde{g}: Y \to X$。因此， $\widetilde{g}$ 延拓为映射 $h: \omega Y \to \omega X$，使得 $h(\{\omega_Y\}) = \{\omega\}$。于是， $h^{-1}(U)$ 包含几乎所有的 $\mathbb{B}^{k+1}_m$。另一方面， $h(\mathbb{B}^{k+1}_m) = \widetilde{g}(\mathbb{B}^{k+1}_m) \subset X$。因此， $\widetilde{g}|\mathbb{B}^{k+1}_m)$ 是一个映射到 $U\backslash\{\omega\}$ 的映射，并且对包含在 $h^{-1}(U)$ 中的每个 $\mathbb{B}^{k+1}_m$，都延拓了 g_m，这就导出了矛盾。□

命题 2.3. 每个空间 X 都是 AEp(0)。

证明。设 $A \subset Y$ 为闭集，且 $f: A \to X$ 为真映射，其中 Y 是一个 0 维局部紧 Lindel¨of 空间。则 f 可延拓为映射 $f_1: \overline{A} \to \omega X$，其定义域为 A 在 βY 中的闭包，并满足 $f_1(\overline{A}\backslash A) = \{\omega\}$。接下来，考虑映射 $g: A \cup (\beta Y\backslash Y) \to \omega X$，使得对于 $y \in \overline{A}$，有 $g(y) = f_1(y)$，且对于 $y \in \beta Y\backslash Y$，有 $g(y) = \{\omega\}$。由于 $\omega X \in$ AE(0)（作为完备度量空间）， g 存在延拓 $\widetilde{g}: \beta Y \to \omega X$。集合 $\widetilde{g}(A) = f(A)$ 在 X 中是闭的，因此 $A_1 = \widetilde{g}^{-1}(f(A))$ 在 Y 中是闭的，并且 G_δ，使得 $\widetilde{g}|A_1$ 是真映射。考虑带有一致收敛拓扑的函数空间 $C(\beta Y, \omega X)$，并令 $B = A_1 \cup (\beta Y\backslash Y)$。集合 $C_B = \{h \in C(\beta Y, \omega X): \ h|B = \widetilde{g}|B\}$ 是一个完备度量空间。取由紧集 $K_i \subset$组成的序列 $\{K_i\}$

Y，其中$\bigcup_{i\geq 1} K_i = Y\backslash A_1$（这是可能的，因为 Y 是一个局部紧 Lindel¨of 空间，而 A_1 是 Y 中的闭 G_δ-集）。令 C_i 为所有满足 $h(K_i) \subset X$ 的映射 $h \in C_B$ 所成的集合。由于 $\{\omega\}$ 是 ωX 中的处处不稠密集（实际上是 ωX 中的一个 Z_0-集），且 $\omega X \in$AE(0)，我们可以证明每个 C_i 都是 C_B 的开且稠密子集。因此，$\bigcap_{i\geq 1} C_i \neq \varnothing$。于是，对于每个 $h \in \bigcap_{i\geq 1} C_i$，$h(Y) \subset X$ 且 $h(\beta Y\backslash Y) = \{\omega\}$。因此，$h|Y$ 是映入 X 且延拓 f 的真映射。□

定理 2.4. 对任意空间X 和 $n \geq 1$，以下条件等价：

(1) $X \in$AEᴘ(n)；(ii) 一点紧化 ωX 是 AE(n)，且 $\{\omega\}$是Z_n中的一个 ωX-集；~(iii) 存在 X 的一个可度量化紧化 $\widetilde{X}$，使得 $\widetilde{X}\backslash X$ 和余集 $X\backslash X$ 都是 AE(n) 空间，并且 $X\backslash X$ 是 X中的一个~ Z_n-集。

证明. 假设 $X \in$ AEᴘ(n)，并将 ωX 嵌入希尔伯特立方体 Q中。根据 Dranishnikov [7]，存在一个满的、开且 n-可逆的映射 $d_n : \mu^n \to Q$，使得对于每个$z \in Q$，$d_n^{-1}(z)$都与 μ^n 同胚，其中 μ^n 是通用的 n维 Menger 紧空间。回顾一下，d_n 的 n-可逆性意味着，对于任意维数 dim $Z \leq n$ 为 Z 的仿紧空间，以及映射 $g : Z \to Q$，存在映射$\widetilde{g} : Z \to \mu^n$，使得 $d_n \circ \widetilde{g} = g$。于是，$d_n^{-1}(\{\omega\})$在$\mu^n$ 中处处不稠密，并且 μ^n 是 $\mu^n\backslash d_n^{-1}(\{\omega\})$的一个紧化。现在，考虑限制映射 $d'_n = d_n|d_n^{-1}(X)$。显然，d'_n 是真映射，因此它存在一个真延拓 $h_n : \mu^n\backslash d_n^{-1}(\{\omega\}) \to X$。$h_n$ 是真映射这一性质意味着~ h_n 可以延拓为连续映射 $h_n : \mu^n \to \omega X$，使得 $\widetilde{h}_n(d_n^{-1}(\{\omega\})) = \{\omega\}$。于是，$h_n|(d_n^{-1}(\omega X)) = d_n|(d_n^{-1}(\omega X))$。因此，$h_n$是一个 n-可逆映射，因为 d_n也是如此。结合$\mu^n \in$ AE(n)，可得 $\omega X \in$ AE(n)。最后，根据引理 2.2，$\{\omega\}$是 ωX中的一个 Z_n-集。由此完成蕴含关系$(i) \Rightarrow (ii)$的证明。蕴含关系$(ii) \Rightarrow (iii)$显然成立。

为证明蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (i)$，我们遵循命题 2.3 的证明。设 $A \subset Y$ 为闭集，$f : A \to X$ 为真映射，其中 Y 是局部紧且 Lindel¨of 空间，其维数至多为 n。沿用命题 2.3 证明中的记号，我们~首先将 f 延拓为映射 $f_1 : \overline{A} \to X$，使得 $f_1(A\backslash A) \subset X\backslash X$。然后，~利用 $X\backslash X \in$是 AE(n) 这一事实，将 f_1延拓为映射 $g : A\cup(\beta Y\backslash Y) \to X$~，使得 $g(\beta Y\backslash Y) \subset X\backslash X$。接下来，由于 X是 AE(n)，我们找到一个~映射 $\widetilde{g} : \beta Y \to X$，它延拓了 g。于是 $\widetilde{g}|A_1 : A_1 \to X$ 是一个真

f 的延拓，其中 $A_1 \subset Y$ 是包含 A的 G_δ-子集，且为 Y 中的闭集。设 $B = A_1 \cup (\beta Y \backslash Y)$，并考虑 Y中的一列紧集 $\{K_i\}$，满足 $\bigcup_{i\geq 1} K_i = Y\backslash A_1$，以及相应的集合$\sim$ $C_B = \{h \in C(\beta Y, X) : h|B = \widetilde{g}|B\}$ 和 C_i。现在，由于 $X\backslash X$ 在 X中是 Z_n-集$\widetilde{}$，所有 C_i 在 C_B中都是开且稠密的。因此，对于每个 $h \in \bigcap_{i\geq 1} C_i$，$\bigcap_{i\geq 1} C_i \neq \varnothing$ 且$h|Y$是一个映入 X 的真映射，它延拓了 f。□

若一个空间 X 满足不交 n-圆盘性质（简称 DDⁿP 性质），则称该空间具有此性质：任意两个映射 $f, g : \mathbb{B}^n \to X$ 都可以分别逼近为映射 $f', g' : \mathbb{B}^n \to X$，使得 $f'(\mathbb{B}^n) \cap g'(\mathbb{B}^n) = \varnothing$。Bestvina [2]证明，$\mu^n$ 是唯一满足 DDⁿP 性质的 n 维度量 AE(n)-紧致空间。由于 ωX 满足 DDⁿP，只要 $X \in$ 具有 DDⁿP 且 $\{\omega\}$是 ωX中的一个 Z_n-集，Bestvina 的结果便推出以下结论：

推论 2.5. 设 $X \in$ AEᴘ(n)，且 dim $X = n$。那么，$X \in$ 具有 DDⁿP，当且仅当 ωX 与 μ^n同胚。

Chigogidze [5] 引入了 n-形状函子（n –Sh），并证明，对于 $\mu^n, n \geq 1$中的两个 Z_n-集 X和 Y，它们具有相同的（$n-1$）-形状，当且仅当 $\mu^n\backslash X$ 与 $\mu^n\backslash Y$同胚。令人意外的是，定理 2.4 推出了 Chigogidze 补集定理的一个特例。

推论2.6. 假设 X 和 Y 是 μ^n 中的两个 Z_n-集，且X、$Y \in$ 都是 AE(n)。那么 $\mu^n\backslash X$ 与 $\mu^n\backslash Y$同胚。

证明. 事实上，根据定理 2.4，$X' = \mu^n\backslash X$ 和 $Y' = \mu^n\backslash Y$ 都是 AEᴘ(n)。此外，X' 和 Y' 满足 DDⁿP，因为 X 和 Y是 μ^n中的 Z_n-集。因此，根据推论 2.5，$\omega X'$ 和 $\omega Y'$ 都与 μ^n同胚。最后，由于 μ^n 是齐性的 [2]，X' 与 Y'同胚。□

命题 2.7. 空间 X 是 AEᴘ(n)，当且仅当对某个满足 $F \in$ AE(n)的 Z_n-集 $F \subset \mu^n$，X 是 $\mu^n\backslash F$ 的真n-可逆像。

证明。设 $X \in$ AEᴘ(n)，并将 ωX 嵌入 Q。如定理 2.4 中所述，考虑 Dranishnikov 的分解 $d_n : \mu^n \to Q$ 我们得到一个真映射 $h_n : \mu^n\backslash d_n^{-1}(\{\omega\}) \to X$，它延拓了映射 $d_n|d_n^{-1}(X)$。由于 d_n 是可逆的，h_n 也是可逆的。另一方面，根据 [1],，我们可以假设 $d_n^{-1}(K)$ 对于 Z-集 $K \subset Q$ 中的每一个都是 Z_n-集。于是，$d_n^{-1}(\{\omega\}) \subset \mu^n$ 是一个 Z_n-集（回忆一下，Z-集是对所有 n 都为 Z_n-集的集合，并且每个 $z \in Q$ 都是 Q 中的 Z-集）。另一方面，$d_n^{-1}(\{\omega\})$ 与 μ^n 同胚，因此 $d_n^{-1}(\{\omega\}) \in$ AE(n)。

现在，假设存在一个真 n-可逆映射 $g : \mu^n\backslash F \to X$，其中 Z_n-集 $F \subset \mu^n$。由于 g 是 n-可逆的，因此每个真映射 $f : A \to$

X，其中 A 是空间 Y的闭子集，该空间局部紧且 Lindel¨，维数至多为 n，可以提升为真映射 $f'\colon A \to \mu^n\backslash F$。根据定理 2.4， $\mu^n\backslash F \in$ AEP(n)。因此， f' 存在真延拓$h\colon Y \to \mu^n\backslash F$。最后， $g \circ h\colon Y \to X$ 是 f的真延拓。因此， $X \in$AEP(n)。□

推论 2.8. 空间 X 是 AEP(n)，当且仅当 X 是 $\mu^n\backslash\{pt\}$的真映射n-可逆像。

证明. 根据定理 2.4，对于每个作为 μ^n中 Z_n-集的 $F \in$ AE(n)， $\mu^n\backslash F$ 都是 AEP(n)。另一方面，作为 μ^n中 Z_n-集的补集， $\mu^n\backslash F$ 满足 DDnP。因此，命题 2.7 和推论 2.5 完成了证明。□

关于 ANEP(n)，类似于命题 2.3 证明的论证给出了下面的引理。

引理 2.9. 如果空间 X 有一个度量 ANE(n) 紧化$\overline{X}$，使得 $\overline{X}\backslash X$ 是 AE(n)，那么 $X \in$是 ANEP(n)。

推论 2.10. $\mathbb{R}^n$ 是 ANEP(n) 和 AEP(n $-$ 1)，但不是 AEP(n) $-$空间。

证明. 根据定理 2.4， $\mathbb{R}^n$ 是一个 AEP(n $-$ 1)，但不是 AEP(n)-空间，因为 $\omega\mathbb{R}^n = \mathbb{S}^n$ 以及 $\mathbb{S}^n$ 中的任意一点都是 $\mathbb{S}^n$ 中的 Z_{n-1}- 点，却不是 $\mathbb{S}^n$ 中的 Z_n-点。另一方面，根据引理 2.9， $\mathbb{R}^n \in$ 是 ANEP(n)。□

3. 非可度量的 AEp(n) 空间

本节中所有空间都是局部紧且 Lindel¨of 的。若对每个 n维仿紧空间 Z、任意闭集 $A \subset Z$ 以及任意两个映射 $h\colon A \to X$ 和 $_\sim g\colon Z \to Y$，只要满足 $g|A = f \circ h$，就存在 h 的连续延拓 $h\colon Z \to \widetilde{X}$，使得 $g = f \circ h$，则称映射$f\colon X \to Y$为 n-软 [16]。我们称 $f\colon X \to Y$为具有波兰核的映射，若存在一个波兰空间（即完全可度量且可分的空间） P，使得 X 在 $Y \times P$ 中是 C-嵌入的，并且 $f = \pi_Y|X$，其中$\pi_Y\colon Y \times P \to Y$是投影。

下一个引理由相应的定义可得。

引理 3.1. 设 $f\colon X \to Y$ 是一个真 n-软映射。则 $X \in$AEP(n) 当且仅当 $Y \in$AEP(n)。

如果逆系统 $S = \{X_\alpha, p^\beta_\alpha, A\}$ 是 σ完备的，则所有 X_α 都是第二可数空间，并且每个递增序列 $\{\alpha_n\} \subset A$ 在 A 中都有一个上确界 α，使得 X_α 是该逆

序列 $\{X_{\alpha_n}, p_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}, n \geq 1\}$。如果 S 是良序的，并且对于每个极限序数 $\alpha \in A$, X_α 都是逆系统 $\{X_\beta, p_\beta^{\beta+1}, \beta < \alpha\}$ 的极限，那么 S 被称为连续逆系统。

现在，我们可以描述不可度量化的 AEP(n)-空间。

定理 3.2. 对每个 $n \geq 1$，以下条件等价:

(i) X 是权为 τ的 AEP(n)-空间；(ii) $\omega X \in$AE(n)；(iii) X 是连续逆系统 $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta, \tau\}$的极限空间，其中所有 X_α 都是 AEP(n)-空间，X_1 是局部紧可分度量空间，且投影 $p_\alpha^{\alpha+1}$是具有可度量化核的完美 n-软映射；(iv) X 是一个 σ-完备逆系统 $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$的极限空间，该系统由 AEP(n)-空间 X_α 和完美 n-软投影$p_\alpha: X \to X_\alpha$组成。

证明. 设 X 是权为 τ 的 AEP(n)-空间，并将 ωX 嵌入 Tychonoff 立方体 $\mathbb{I}^\tau$ 中。根据 [8],，存在一个维数为 n、权为 τ的紧致 $AE(n-1)$-空间 D_n^τ，以及一个 n-可逆的（$n-1$）-软映射 f_n^τ: $D_n^\tau \to \mathbb{I}^\tau$。由于 $\{\omega\}$是 ωX中的一个 G_δ-集，存在一个闭 G_δ-集$F \subset \mathbb{I}^\tau$，使得 $F \cap \omega X = \{\omega\}$。如有必要，删去 F的内部，我们可以假设 F在 $\mathbb{I}^\tau$中处处不稠密。于是，$(f_n^\tau)^{-1}(F)$是 D_n^τ 的一个闭的、处处不稠密且 G_δ-子集，因为 f_n^τ 是开映射（作为 AE(0)-空间之间的 0-软映射，见 [5]）。因此， $Y = D_n^\tau \backslash (f_n^\tau)^{-1}(F)$是$D_n^\tau$的一个稠密局部紧 Lindel¨of 子集，且包含作为闭子集的 $(f_n^\tau)^{-1}(X)$。由于 $X \in$ AEP(n)，存在一个真映射 $g: Y \to X$，它延拓了限制映射 $f_n^\tau | (f_n^\tau)^{-1}(X)$。最后，将 g延拓为映射 $\widetilde{g}$: $D_n^\tau \to \omega X$。现在，考虑集值映射 $r: \mathbb{I}^\tau \rightsquigarrow \omega X$, $r(x) = \widetilde{g}((f_n\tau)^{-1}(x))$。显然，对每个 $x \in \omega X$，都有 $r(x) = \{x\}$。由于 f_n^τ是$(n-1)$-软的， r 是 Dranishnikov [8]意义下的射影$(n-1)$-余软收缩。因此，根据 [8, 定理 4.2], ωX 是 AE(n)-空间。所以，$(i) \Rightarrow (ii)$。

如果 $\omega X \in$ AE(n)，那么 ωX 是如下连续逆系统$\widetilde{S} = \{\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{p}_\alpha^\beta, \tau\}$ 的极限： $\widetilde{X}_1$是一个点，且所有投影 $\widetilde{p}_\alpha^{\alpha+1}$都是$n$-软映射，并具有可度量化核，参见 [8, 定理 4.2]。由于$\sim\{\omega\}$ 是 ωX中的一个 G_δ-集，存在 $\alpha_0 < \tau$，使得 X_{α_0} 是可度量化的，并且$\widetilde{p}_{\alpha_0}^{-1}(\widetilde{p}_{\alpha_0}(\{\omega\})) = \{\omega\}$。因此，对于每个 $\alpha \geq \alpha_0$， $\widetilde{p}_\alpha^{-1}(X_\alpha) = X$，其中 $X_\alpha = X_\alpha \backslash \widetilde{p}_\alpha(\{\omega\})$。显然，所有限制 $p_\alpha = \widetilde{p}_\alpha | X$ 和$p_\alpha^\beta = \widetilde{p}_\alpha^\beta | X_\beta$ 都是完备的 n-软映射，而 X 是逆系统 $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta, \alpha \geq \alpha_0\}$的极限。最后，根据引理 3.1，每个 X_α 都是 AEP(n)。这就完成了蕴含关系 $(ii) \Rightarrow (iii)$。

蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (iv)$可通过类似论证得到，利用ωX（作为一个 AE(n)-紧致空间）是一个由 AE(n)-度量紧致空间 $\widetilde{X}_\alpha$ 组成的 σ-完备逆系统 $\widetilde{S} = \{\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{p}_\alpha^\beta\}$ 的极限空间，且该系统的投影 $\widetilde{p}_\alpha : X \to X_\alpha$是完备的 n-软映射，参见 $[8,$ 定理 4.2$]$。最后，由于 X 允许存在映射到 AE^p (n)-空间的 n-软完备映射，根据引理 3.1，蕴含关系 $(iv) \Rightarrow (i)$成立。□

由于每个维数为 $\leq n$ 的 AE(n)-紧致空间，其中 $n \geq 1$，都是可度量化的 $[8,$ 定理 4.4$]$,定理 3.2 导出如下结论

推论 3.3。每个具有 $n \geq 1$ 的 AE^p(n)-空间 X 都是可度量化的，只要 $\dim X \leq n$。

关于 AE^p(0)-空间，我们有如下结果：

定理 3.4。下列条件等价：

(i) X 是一个 AE^p(0)-空间；(ii) $X \in$ AE(0)；(iii) $\omega X \in$ AE(0)；(iv) X 是一个 σ-完备逆系统 $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ 的极限空间，该逆系统由局部紧可分度量空间 X_α 和完美 0-软投影 $p_\alpha : X \to X_\alpha$ 构成。

证明。设 X 是权为 τ 的 AE^p(0)-空间，并将 ωX 嵌入 Tychonoff 立方体 $\mathbb{I}^\tau$中。根据 $[12]$, $\mathbb{I}^\tau$ 是 Cantor 立方体 D^τ 在完美 0-可逆映射 f_0^τ 下的像。如定理 3.2 的证明所示，取一个闭 G_δ集 $F \subset \mathbb{I}^\tau$，使得 $F \cap \omega X = \{\omega\}$，并令 $Y = D^\tau \backslash (f_0^\tau)^{-1}(F)$。于是 Y作为 D^τ的一个局部紧 Lindel¨子集，是 AE(0)-空间。事实上，Cantor 集$D^{\aleph_0}$ 中存在一个局部紧子集 Y_0，使得 $\pi^{-1}(Y_0) = Y$，其中 $\pi : D^\tau \to D^{\aleph_0}$ 是投影。由于 π 是 0-软的，且 $Y_0 \in$ 是 AE(0)，所以 $Y \in$是 AE(0)。接下来，考虑一个真映射g: $Y \to X$，它延拓限制映射 $f_0^\tau | (f_0 \tau)^{-1}(X)$。于是 g也是 0-可逆的，因此 $X \in$ 是 AE(0)，因为 $Y \in$ 是 AE(0)。因此，$(i) \Rightarrow (ii)$。蕴含关系 $(ii) \Rightarrow (iii)$ 众所周知，见 $[6,$ 命题 3.9$]$。对于蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (iv)$，注意到 Haydon 对紧 AE(0)-空间的谱刻画蕴含 ωX 是一个 σ-完备逆系统 $\widetilde{S} = \{\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{p}_\alpha^\beta\}$ 的极限，该逆系统由紧˜度量空间 X_α 及完美 0-软投影 $\widetilde{p}_\alpha : X \to X_\alpha$组成。由于~$\{\omega\}$是 ωX的一个 G_δ子集，将 S 限制在 X 上，便得到一个 σ-完备逆系统 $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$，该系统由局部紧可分度量空间 X_α 及完美 0-软投影 $p_\alpha : X \to X_\alpha$组成，并且 X 是 S 的极限（见定理 3.2 的证明）。蕴含关系 $(iv) \Rightarrow (i)$ 可由引理 3.1 和命题 2.3 得出

因为 X 存在一个映入可分局部紧度量空间 X_α的 0-软映射。□

References

[1] S. Ageev、M. Cencelj 和 D. Repovˇs, 《通过 Dranishnikov 的分解保持 Z-集》, Topology Appl. 156 (2009), 2175–2188。[2] M. Bestvina, 《刻画 k维泛 Menger 紧空间》, Mem. Amer. math. Soc. 71 (1988), 第 380 号。[3] K. Borsuk, 《收缩理论》, 华沙, 1967。[4] A. Chigogidze, 《Stone-ˇCech 余边界和真绝对收缩子的延拓性质》, Fund. Math. 222 (2013), 155–173。[5]A. Chigogidze, 《逆谱》, North Holland 数学丛书 53, North Holland 出版公司, 阿姆斯特丹, 1996。[6] A. Chigogidze, 《维数 n中的非紧绝对扩张子、 n-软映射及其应用》, Math. USSR Izvestiiya 28 (1987), 151–174。[7] A. Dranishnikov, 《泛 Menger 紧空间与泛映射》, Math. USSR. Sb. 57 (1987), 131–149。[8] A. Dranishnikov, 《维数 n 中的绝对扩张子与升维n-软映射》, Uspekhi Mat. Nauk, 39 (1984), 55–95。[9] J. Dugundji 和 E. Michael, 《关于局部和一致局部的拓扑性质》, Proc. A mer. Math. Soc. 7 (1956), 304–307。[10] V. Gutev, 《在单纯复形的锥上逐步构造选择》, Serdica Math. J. 44 (2018), 137–154。[11] R. Haydon, 《Pelczy ´nski 的一个问题：Milutin 空间、Dugundji 空间和 $AE(0-$维数)》, Studia Math. 52 (1974), 23–31。[12] B. Hoffman, 《Dugundji 空间的满射刻画》, Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), 151–156。[13] E. Michael, 《闭收缩子和完美收缩子》, Topology Appl. 121 (2002), 451–468。[14] J. van Mill, 《无穷维拓扑：预备知识与导论》（North-Holland, 阿姆斯特丹, 1989）。[15] K. Nowi ´nski, 《闭映射的延拓》, Fund. Math. 85 (1974), 9–17。[16] E. Shchepin, 《不可数逆谱的极限空间的拓扑》, Russian Math. Surveys 31:5 (1976), 155-191。

Department of Computer Science and Mathematics, Nipissing University, 100 College Drive, P.O. Box 5002, North Bay, ON, P1B 8L7, Canada电子邮箱地址：veskov@nipissingu.ca