arXiv:2303.02827v1 [math.NA] 6 Mar 2023

斯威夫特–霍恩伯格方程的能量稳定且在 L^2 范数下收敛的BDF3格式

Xuan Zhao* Ran Yang† Zhongqin Xue ‡ Hong Sun§

摘要

针对斯威夫特–霍恩伯格模型，提出了一种全离散隐式格式，该格式结合了用于时间离散的三阶后向差分公式（BDF3）和用于空间离散的二阶有限差分格式。利用布劳威尔不动点定理以及BDF3卷积系数的正定性，证明所提出的数值算法存在唯一解且无条件能量稳定；进一步证明数值解在最大范数下有界。借助离散正交卷积（DOC）核，严格证明了所提出格式在 L^2 范数下收敛。该卷积核将用于近似时间导数的四层解形式转化为三层梯度形式。因此，利用离散格朗沃尔不等式，得到了数值解的误差估计。通过二维和三维情形下的数值算例，验证了理论结果。

关键词：Swift-Hohenberg方程；BDF3格式；能量稳定性；收敛性；

1 引言

本文针对具有周期性边界条件的以下Swift-Hohenberg方程，提出了一种全离散隐式格式

$$u_t = -(1+\Delta)^2 u - f(u), \tag{1.1}$$

其中，$f(u) = u^3 - \mathrm{g}u^2 - \epsilon u$，$\epsilon$ 以及g是具有物理意义的正常数。理论分析考虑了一个闭二维区域$\Omega \subset \mathbb{R}^2$。

Swift-Hohenberg方程是一种非线性四阶偏微分方程，用于描述热涨落对Rayleigh-B´énard不稳定性的影响 [1]。作为非线性动力系统的典型范例，Swift-Hohenberg方程已广泛应用于物理学 [2], 、材料科学 [3], 、生态系统动力学 [4], 以及许多其他非线性领域 [5–7]。

*通讯作者。东南大学数学学院，南京210096，中国（xu- anzhao11@seu.edu.cn）。

†东南大学数学学院，南京210096，中国（220191527@seu.edu.cn）。

‡中国南京 210096，东南大学数学学院。（zqxue@seu.edu.cn）§中国南京 210096，东南大学数学学院；中国南京 211167，南京工程学院数学与物理学部。（sunhongzhal@126.com）。

方程(1.1)的能量由Lyapunov能量泛函定义

$$E(u) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} u(1+\Delta)^2 u + \frac{1}{4} u^4 - \frac{\mathrm{g}}{3} u^3 - \frac{\epsilon}{2} u^2 \right) \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{1.2}$$

并且随时间单调不增

$$\frac{d}{dt} E(u) = - \int_{\Omega} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \leq 0. \tag{1.3}$$

对Swift-Hohenberg方程平衡解的分岔分析 [8] 和图案选择 [9] 进行了理论研究。Shi和Han [10] 得到了一个趋近于Swift-Hohenberg方程周期解的可逆同宿解，而Lai和Zhang [11] 证明了非平凡周期解的存在性。文献 [12], 研究了强迫项快速振荡对解长期行为的影响。关于非定常情形，读者还可参阅近期文章 [13] 及其中的参考文献。

近年来，由于通常无法获得解析解，人们开始研究Swift-Hohenberg方程的高效数值方法。文献 [14], 提出了一种全离散间断Galerkin格式，其中时间步长和网格尺寸彼此独立。该格式被证明具有唯一可解性且无条件能量稳定。Sarmiento等人 [15] 提出了一种能够抑制数值不稳定性的二阶能量稳定时间积分方法，并给出了无条件能量稳定性的详细证明。Liu [16] 通过线性不变能量二次化方法和修正标量辅助变量方法，研究了两种线性、二阶且无条件能量稳定的格式。Dehghan等人 [17] 结合本征正交分解方法与局部间断Galerkin技术，并讨论了能量稳定性。Sun等人 [21] 提出了一种用于Swift-Hohenberg方程的自适应BDF2格式，并证明了其能量稳定性和收敛性。此外，读者可参阅参考文献 [22–30] 了解一些相关数值方法。然而，在现有的大多数研究中，很少考虑Swift-Hohenberg方程数值算法的收敛性。

众所周知，Swift-Hohenberg方程需要较长时间才能达到稳态，因此，设计数值方法时面临的关键挑战是提高数值格式的计算效率。高阶时间步进策略和自适应时间步进算法始终是开发高效数值格式的合适选择。为简明起见，文献中将以下方法称为 Swift-Hohenberg 方程在时间方向上的离散格式:

1) Crank-Nicolson型格式（二阶） [18]

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = D \left(-\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - k^4 \right) \frac{u^{k+1} + u^k}{2} \\ - \frac{U(u^{n+1}) - U(u^n)}{u^{n+1} - u^n} \end{aligned}$$

其中， $U(u)$ 表示作用于系统的非线性力的势能。

2）凸分裂方法（一阶/二阶） [19]

- 一阶凸分裂

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau} = -(u^{k+1})^3 + \mathrm{g}(u^{k+1})^2 - (A+(1+\Delta)^2)u^{k+1} + (A+\epsilon)u^k,$$

- 二阶凸分裂

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau} = -\left(\chi(u^{k+1},u^k) + (A+(1+\Delta)^2)\left(\frac{u^{k+1}+u^k}{2}\right) - (A+\epsilon)\frac{3u^k-u^{n-1}}{2}\right),$$

where $\chi(u,v) = \dfrac{u^2+v^2}{2}\dfrac{u+v}{2} - \mathrm{g}\dfrac{u^2+uv+v^2}{3}$.

3) 半隐式欧拉格式（一级） [20]

$$\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau} + A(u^{k+1}-u^k) = 2\Delta u^k - \Delta^2 u^{k+1} - (1-\epsilon)u^{k+1} - (u^k)^3,$$

w其中， $A(u^{k+1}-u^k)$ 是用于保持能量稳定性的额外人工项。

4) 基于 Crank-Nicolson方法的多重SAV格式（二阶） [16]

$$\begin{aligned}
\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau} &= M\Delta\mu^{k+\frac{1}{2}},\\
\mu^{k+\frac{1}{2}} &= (1+\Delta)^2\left(\frac{u^{k+1}+u^k}{2}\right) + \frac{r^{k+1}+r^k}{2\sqrt{\tilde{E}(\tilde{u}^{k+1/2})}}U(\tilde{u}^{k+1/2})\\
&\quad - \frac{m^{k+1}+m^k}{2\sqrt{E_0(\tilde{u}^{k+1/2})}}V(\tilde{u}^{k+1/2}),\\
\frac{r^{k+1}-r^k}{\tau} &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{E}(\tilde{u}^{k+1/2})}}\int_\Omega U(\tilde{u}^{k+1/2})\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau}\,\mathrm{d}\mathbf{x},\\
\frac{m^{k+1}-m^k}{\tau} &= \frac{1}{2\sqrt{E_0(\tilde{u}^{k+1/2})}}\int_\Omega V(\tilde{u}^{k+1/2})\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau}\,\mathrm{d}\mathbf{x},
\end{aligned}$$

~其中 $E_0(u) = \int_\Omega \mathrm{g}\ \frac{}{6}u^4 + \mathrm{g}\frac{}{6}u^2 + \frac{\epsilon}{6}u^4 > 0$， $\tilde{E}(u) = \int_\Omega\ \frac{1}{4}u^4 - \mathrm{g}\frac{}{3}u^3 + \mathrm{g}\frac{}{6}u^4 + \mathrm{g}\frac{}{6}u^2 > 0$，
$U(u) = \frac{\delta E}{\delta u}$， $V(u) = \frac{\delta E_0}{\delta u}$， $r(t) = \sqrt{\tilde{E}(u)}$ 和 $m(t) = \sqrt{E_0(u)}$ 是两个标量辅助变量，
$\tilde{u}^{k+1/2}$是 $u(t^{k+1/2})$ 的任意显式 $O(\tau^2)$ 近似。

5）不变能量二次化（IEQ）方法（一阶/二阶） [14]

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u_h^{k+1}-u_h^k}{\tau},\phi\right) &= -A(\phi,q_h^{k+1}) - (H(u_h^k)U^{k+1},\phi),\\
(q_h^k,\psi) &= A(u_h^k,\psi), \qquad \text{for } \forall\phi,\psi \text{ in the space of piecewise polynomials,}
\end{aligned}$$

其中，对于常数 $B > 0$，$H(u) = \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{\Phi(u) + B}}$，$\Phi = \frac{1}{4}u^4 - \frac{g}{3}u^3 - \frac{\epsilon}{2}u^2$，$U = \sqrt{\Phi(u) + B}$；此外，$A(\cdot,\cdot)$ 是与算子 $-(\Delta + \frac{a}{2})$ 对应的双线性算子。一旦将 q_h^{k+1}、U^{k+1} 和 $H(u_h^k)$ 分别替换为 $(q_h^{k+1} + q_h^k)/2$、$(U^{k+1} + U_h^k)/2$ 和 $H(u^{k,*}_h)$，其中 $u^{k,*}_h = \frac{3}{2}u_h^k - \frac{1}{2}u_h^{k-1}$，即可得到时间二阶离散化。

6) 自适应 BDF2 格式（二阶） [21]

$$\frac{1+2r_k}{\tau_k(1+r_k)}(u^k - u^{k-1}) - \frac{r_k^2}{\tau_k(1+r_k)}(u^{k-1} - u^{k-2}) = -(1+\Delta)^2 u^k - f(u^k)$$

其中，$\tau_k = t_k - t_{k-1}$ 为时间步长，且 $r_k = \tau_k - \tau_{k-1}$。自适应时间步长允许采用比均匀时间离散更大的时间步长。

可以看出，文献中提出的大多数现有方法在时间方向上仅具有一阶或二阶精度。而我们考虑一种三阶时间积分方法，即 BDF3公式 [31], ，并将其用于Swift-Hohenberg方程的时间离散，同时在空间上采用中心差分近似。该三阶精度方法具有非常令人满意的稳定性 [32], ，与低阶格式相比，在给定精度下计算成本最低 [33]。然而，众所周知，由于BDF3公式并非A稳定，要获得其 L^2-范数稳定性和收敛性并不容易。基于A稳定性与G-稳定性之间的等价关系 [34], ，人们提出了一些用于BDF3格式数值分析的有效工具 [35, 36]。此外，Liao等人 [37] 利用离散正交卷积（DOC）核技术，对BDF3格式进行了新颖而直接的离散能量分析，并已严格证明该格式对于线性反应扩散方程具有 L^2-范数稳定性和收敛性。

我们致力于为 Swift-Hohenberg方程构造一种全离散隐式格式。借助 DOC核，我们对所提出的格式给出了最优的 L^2 误差估计，并严格证明了该格式在时间上具有三阶精度。据我们所知，这是首次获得 Swift-Hohenberg方程的 BDF3方法的 L^2 范数收敛性。此外，通过应用布劳威尔不动点定理及其他分析方法，还证明了所提出格式的唯一可解性和能量稳定性。

本文其余部分安排如下。第2节引入一些记号，并详细展示 Swift-Hohenberg方程 (1.1) 的 BDF3 差分格式的构造。第 3 节给出所提出格式具有唯一可解性并保持全局能量稳定性的结果。在第4节中，利用 [38], 提出的 DOC 核，严格证明了 BDF3格式的 L^2-范数收敛性。第5节通过二维和三维数值测试，验证所提出格式的精度、稳定性和效率。第6节给出总结。

2 BDF3差分格式的构造

本节为如下所述的 Swift-Hohenberg方程建立一个全离散格式

$$u_t = -(1+\Delta)^2 u - f(u), \qquad (x,y) \in \Omega,\ 0 < t \le T, \tag{2.1}$$
$$u(0,y,t) = u(1,y,t),\ u(x,0,t) = u(x,1,t), \qquad (x,y) \in \Omega,\ 0 < t \le T, \tag{2.2}$$
$$u(x,y,0) = \varphi_0(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{2.3}$$

其中 $\Omega = (0,1)^2, \overline{\Omega} = [0,1]^2$，非线性项 $f(u) = u^3 - gu^2 - \epsilon u$ 含有两个正的物理参数 g 和 ϵ，而 φ_0 是已知的光滑函数。

现在考虑 (2.1)-(2.3) 的差分格式。对于时间方向的离散化，采用 BDF3公式。取正整数 N，并记 $\tau = \frac{T}{N}$, $t_k = \tau k$ for $0 \le k \le N$，则众所周知的 BDF3公式可表示为

$$D_3 v^k := \frac{11}{6\tau}\nabla_\tau v^k - \frac{7}{6\tau}\nabla_\tau v^{k-1} + \frac{1}{3\tau}\nabla_\tau v^{k-2}, \qquad \text{for } k \ge 3, \tag{2.4}$$

其中 $\nabla_\tau v^k := v^k - v^{k-1}$ 适用于任意序列 $v^k = v(t_k)$。参照 [38], ，公式 (2.4) 可改写为离散卷积求和,

$$D_3 v^k := \sum_{j=1}^{k} b_{k-j}\nabla_\tau v^j, \qquad k \ge 3, \tag{2.5}$$

其中卷积核 b_{k-j} 定义为

$$b_0 := \frac{11}{6\tau}, \quad b_1 := -\frac{7}{6\tau} \quad \text{and} \quad b_2 := \frac{1}{3\tau}, \quad \text{togeter with} \quad b_j := 0, \quad \text{for} \quad 3 \le j \le k-1. \tag{2.6}$$

由于 BDF3公式需要三个先前层级的未知量，因此应采用额外的格式来计算 u^1 和 u^2。泰勒展开得

$$\frac{1}{2}[u_t(t_1) + u_t(t_0)] = \frac{1}{\tau}[u(t_1) - u(t_0)] + O(\tau^2),$$

因此，可以得到一个二阶格式

$$D_3 u^1 = \frac{2}{\tau}\nabla_\tau u^1, \tag{2.7}$$

其中 $u^0 := u(t_0) + \frac{\tau}{2}u_t(t_0)$。然后，使用 BDF2公式计算 u^2，如下

$$D_3 u^2 = -\frac{1}{2\tau}\nabla_\tau u^1 + \frac{3}{2\tau}\nabla_\tau u^2. \tag{2.8}$$

对于空间方向离散化，令 M 为正整数，空间长度为 $h_x = h_y = h := L/M$，网格点为 $x_i = ih$、 $y_j = jh$，且 $\mathbf{x}_h = (x_i, y_j)$。离散

空间网格 $\Omega_h := \{\mathrm{x}_h = (x_i, y_j) \mid 1 \le i, j \le M-1\}$ 和 $\bar{\Omega}_h := \{\mathrm{x}_h = (x_i, y_j) \mid 0 \le i, j \le M\}$。考虑周期函数空间

$$\mathcal{V}_h := \{v_h = v(\mathrm{x}_h) \mid \mathrm{x}_h \in \bar{\Omega}_h \text{ and } v_h \text{ is periodic in each direction}\}.$$

给定网格函数 $v \in \mathcal{V}_h$，引入如下记号 $\delta_x v_{i+\frac{1}{2},\ j} = (v_{i+1,\ j} - v_{ij})/h$，以及 $\delta_x^2 v_{ij} = (\delta_x v_{i+\frac{1}{2},\ j} - \delta_x v_{i-\frac{1}{2},\ j})/h$。离散记号 $\delta_y v_{i,\ j+\frac{1}{2}}$ 和 $\delta_y^2 v_{ij}$ 也可类似定义。此外，离散拉普拉斯算子 $\Delta_h v_{ij} = \delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}$ 和离散梯度向量 $\nabla_h v_{ij} = (\delta_x v_{ij},\ \delta_y v_{ij})^T$。

在网格点 (x_h, t_n) 处考虑方程 (2.1)，可得

$$u_t(\mathrm{x}_h, t_n) + (1+\Delta)^2 u(\mathrm{x}_h, t_n) + f(u(\mathrm{x}_h, t_n)) = 0.$$

由时间离散式 (2.5)–(2.8) 以及空间差分公式，可得到如下全离散格式

$$D_3 u_h^n + (1+\Delta_h)^2 u_h^n + f(u_h^n) = 0 \quad \text{for } \mathrm{x}_h \in \Omega_h,\ 1 \le n \le N, \tag{2.9}$$

满足周期边界条件以及以下初始条件

$$u_h^0 = \varphi_0(\mathrm{x}_h) + \frac{\tau}{2}\varphi_1(\mathrm{x}_h) \quad \text{for } \mathrm{x}_h \in \bar{\Omega}_h, \tag{2.10}$$

其中，对于光滑数据 $\varphi_0 \in H^4(\Omega)$，$\varphi_1 := f(\varphi_0) + (1+\Delta_h)^2 \varphi_0$。

对于任意网格函数 $v,\ w \in \mathcal{V}_h$，我们定义内积 $\langle v,\ w\rangle := h^2 \sum_{\mathrm{x}_h \in \Omega_h} v_h w_h$，其对应的 L^2 范数 $\|v\|_{l^2} := \sqrt{\langle v,\ v\rangle}$ 以及离散 L^q 范数

$$\|v\|_q := \sqrt[q]{h^2 \sum_{\mathrm{x}_h \in \Omega_h} |v_h|^q} \quad \text{for } v \in \mathcal{V}_h.$$

为简化记号，在下文分析中记 $\|v\| := \|v\|_{l^2}$，并将离散 L^∞ 范数 $\|v\|_\infty := \max_{\mathrm{x}_h \in \Omega_h} |v_h|$。周期边界条件下的离散格林公式给出 $\langle -\Delta_h v,\ w\rangle = \langle \nabla_h v,\ \nabla_h w\rangle$ 以及 $\langle \Delta_h^2 v,\ w\rangle = \langle \Delta_h v,\ \Delta_h w\rangle$.

3 可解性与能量耗散律

本节基于布劳威尔不动点定理证明 BDF3 隐式格式 (2.9) 的唯一可解性；随后利用卷积系数的正定性，详细证明能量稳定性，进而推导出数值解在 L^∞ 范数下的有界性。

3.1 唯一可解性

为简便起见，我们引入记号：对于任意固定的指标n，$b_0^{(1)} = \frac{2}{\tau}$、$b_0^{(2)} = \frac{3}{2\tau}$和 $b_0^{(n)} = b_0$，定义映射 $\Pi_n : \mathcal{V}_h \to \mathcal{V}_h$ 如下

$$\Pi_n(w_h) := b_0^{(n)} w_h - g_h^{n-1} + (1+\Delta_h)^2 w_h + f(w_h),\ \ \mathrm{x}_h \in \bar{\Omega}_h,\ \ \text{for}\ \ n \ge 1, \tag{3.1}$$

其中，对于 $n \geq 3$， $g_h^{n-1} = b_0 u_h^{n-1} + b_1 \nabla_\tau u_h^{n-1} - b_2 \nabla_\tau u_h^{n-2}$、 $g_h^1 = \frac{3}{2\tau} u_h^1 + \frac{1}{2\tau} \nabla_\tau u_h^1$和 $g_h^0 = \frac{2}{\tau}\varphi_0 + \varphi_1$。

容易看出，方程 $\Pi_n(u^n) = 0$ 等价于所提出的非线性隐式格式（2.9）。因此，BDF3格式（2.9）的可解性可通过以下定理中的方程$\Pi_n(w_h) = 0$, $n \geq 1$ 得到验证。

定理3.1 假设时间步长 τ 满足条件 $\tau < {}_2{}^3{}_{(\mathrm{g}^2+\epsilon)}$，则差分格式（2.9）具有唯一解。

证明 首先，我们证明解的存在性。

假设 u^{n-1}，u^{n-2} 已确定，与 w 对（3.1）取内积，得到

$$\langle \Pi_n(w), w \rangle = b_0^{(n)} \langle w, w \rangle + \left\langle (1+\Delta_h)^2 w, w \right\rangle + \langle f(w), w \rangle - \left\langle g^{n-1}, w \right\rangle, \quad \text{for} \quad n \geq 1.$$

对于第二项，利用离散格林公式，得到

$$\left\langle (1+\Delta_h)^2 w, w \right\rangle = \langle (1+\Delta_h) w, (1+\Delta_h) w \rangle \geq 0.$$

于是，有:

$$\begin{aligned}
\langle \Pi_n(w), w \rangle &\geq b_0^{(n)} \|w\|^2 + \|w\|_4^4 - \mathrm{g} \left\langle w^2, w \right\rangle - \epsilon \|w\|^2 - \|g^{n-1}\| \cdot \|w\| \\
&\geq \big(b_0^{(n)} - \epsilon\big) \|w\|^2 + \|w\|_4^4 - \big(\frac{\mathrm{g}^2}{4} \|w\|^2 + \|w\|_4^4\big) - \|g^{n-1}\| \cdot \|w\| \\
&= \big(b_0^{(n)} - \epsilon - \frac{\mathrm{g}^2}{4}\big) \|w\|^2 - \|g^{n-1}\| \cdot \|w\|.
\end{aligned}$$

显然，由条件 $\tau < {}_2{}^3{}_{(\mathrm{g}^2+\epsilon)}$ 可得

$$\langle \Pi_n(w), w \rangle \geq 0,$$

其中 $\|w\| = \frac{1}{b_0^{(n)} - \epsilon - \frac{\mathrm{g}^2}{4}} \|g^{n-1}\|$。 利用 著名的布劳威尔不动点定理，存在 w^* 使得

$$\Pi_n(w^*) = 0,$$

这表明 BDF3格式 (2.9) 是可解的。

接下来，我们准备证明解的唯一性。 设 w_h 和 v_h 是差分格式 (2.9) 的解。记 $\zeta_h = w_h - v_h$，我们从关于 ζ_h的下列方程开始，

$$b_0^{(n)} \zeta_h + (1+\Delta_h)^2 \zeta_h + f(w_h) - f(v_h) = 0. \tag{3.2}$$

将 (3.2) 与 ζ 作内积，得到

$$b_0^{(n)} \|\zeta\|^2 + \|(1+\Delta_h)\zeta\|^2 + \langle f(w) - f(v), \zeta \rangle = 0. \tag{3.3}$$

对于 (3.3) 中的非线性项，进一步估计可得

$$\langle f(w) - f(v), \zeta \rangle = \left\langle w^3 - v^3, \zeta \right\rangle - \mathrm{g} \left\langle w^2 - v^2, \zeta \right\rangle - \epsilon \|\zeta\|^2$$

$$= \left\langle w^2 + wv + v^2 - \mathrm{g}w - \mathrm{g}v, \zeta^2 \right\rangle - \epsilon\|\zeta\|^2$$
$$\geq \frac{1}{2}\left\langle (w-\mathrm{g})^2 + (v-\mathrm{g})^2, \zeta^2 \right\rangle - \mathrm{g}^2\|\zeta\|^2 - \epsilon\|\zeta\|^2.$$

将上述不等式代入 (3.3)，可得

$$(b_0^{(n)} - \mathrm{g}^2 - \epsilon)\|\zeta\|^2 \leqslant 0.$$

由 $b_0^{(n)} > \mathrm{g}^2 + \epsilon$，可得

$$\|\zeta\| = 0,$$

这意味着格式 (2.9) 有唯一解。

∎

3.2 能量耗散律

为了证明所提出的格式 (2.9) 的能量稳定性，需要以下引理。

引理 3.1 [21] 对于任意网格函数 $v \in \mathcal{V}_h$，有

$$\|v\|_\infty \leq \tilde{C}_\Omega\big(\|v\| + \|(1+\Delta_h)v\|\big), \tag{3.4}$$

其中 C_Ω 是一个常数，取决于空间区域 Ω 的大小，但与网格尺寸无关。

引理 3.2 对于任意含有 $n-3$ 个元素的实数序列 $\{w_k\}_{k=3}^n$，有

$$6\tau w_n \sum_{j=3}^{n} b_{n-j} w_j = \frac{9}{2}(w_n^2 + \frac{2}{9}w_{n-1}^2) - \frac{9}{2}\left(w_{n-1}^2 + \frac{2}{9}w_{n-2}^2\right) + 2w_n^2 + (w_n + w_{n-2})^2 \tag{3.5}$$
$$+ \frac{7}{2}(w_n - w_{n-1})^2, \qquad for\ n \geq 3.$$

因此，以下离散卷积核 b_{n-k} 是正定的，

$$2\sum_{k=3}^{n} w_k \sum_{j=3}^{k} b_{k-j} w_j \geq 0. \tag{3.6}$$

证明 根据式 (2.6) 中 b_{n-k} 的定义，我们首先进行如下分解

$$6\tau w_n \sum_{j=3}^{n} b_{n-j}^{(n)} w_j = w_n(11w_n - 7w_{n-1} + 2w_{n-2}),$$
$$= \frac{9}{2}(w_n^2 + \frac{2}{9}w_{n-1}^2) - \frac{9}{2}\left(w_{n-1}^2 + \frac{2}{9}w_{n-2}^2\right) + 2w_n^2 + (w_n + w_{n-2})^2$$
$$+ \frac{7}{2}(w_n - w_{n-1})^2.$$

利用式 (3.5)，我们可以如下证明其正定性

$$\begin{aligned}6\tau\sum_{k=3}^{n}w_k\sum_{j=3}^{k}b_{k-j}w_j &= 6\tau\left(\sum_{k=5}^{n}w_k\sum_{j=3}^{k}b_{k-j}w_j+w_4(b_1w_3+b_0w_4)+b_0w_3^2\right)\\ &\geq \frac{9}{2}(w_n^2+\frac{2}{9}w_{n-1}^2)-\frac{9}{2}(w_4^2+\frac{2}{9}w_3^2)-7w_3w_4+11w_4^2+11w_3^2\\ &= \frac{9}{2}(w_n^2+\frac{2}{9}w_{n-1}^2)-7w_3w_4+\frac{13}{2}w_4^2+10w_3^2\\ &\geq \frac{9}{2}(w_n^2+\frac{2}{9}w_{n-1}^2)-\frac{7}{2}(w_3^2+w_4^2)+\frac{13}{2}w_4^2+10w_3^2\geq 0.\end{aligned}$$

∎

引理 3。**3** [21] 对于任意 a， $b\in\mathbb{R}$，以下不等式成立

$$(a^3-\mathrm{g}a^2)(a-b)\geq\frac{1}{4}(a^4-b^4)-\frac{\mathrm{g}}{3}(a^3-b^3)-\frac{2\mathrm{g}^2}{3}(a-b)^2.$$

现在，我们可以证明 BDF3 公式 (2.9) 的能量稳定性。令$E[u^n]$ 为能量泛函 (1.2) 的离散形式

$$E[u^n]:=\frac{1}{2}\left\|(1+\Delta_h)u^n\right\|^2+\frac{1}{4}\|u^n\|_4^4-\frac{\mathrm{g}}{3}\left\langle(u^n)^2,u^n\right\rangle-\frac{\epsilon}{2}\|u^n\|^2.$$

记修正离散能量为

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}[u^0]=E[u^0],\ \mathcal{E}[u^1]=E[u^1]+\frac{3}{4\tau}\left\|\nabla_\tau u^1\right\|^2,\\ &\mathcal{E}[u^n]=E[u^n]+\frac{3}{4\tau}\left\|\nabla_\tau u^n\right\|^2+\frac{1}{6\tau}\left\|\nabla_\tau u^{n-1}\right\|^2,\ \ \text{for } n\geq 2,\end{aligned}$$

那么，关于上述修正离散能量的离散能量耗散律如下定理所示。

定理 3.2 假设时间步长 τ 满足

$$\tau\leq\frac{1}{3(\frac{2\mathrm{g}^2}{3}+\frac{\epsilon}{2})},\tag{3.7}$$

自适应 BDF3 格式 (2.9) 的解满足

$$E[u^n]\leq\mathcal{E}[u^n]\leq\mathcal{E}[u^{n-1}]\leq\cdots\leq\mathcal{E}[u^0]=E[u^0],\ \ 1\leq n\leq N.$$

证明：将 (2.9) 与 $\nabla_\tau u^n$ 作内积，得到

$$\langle D_3u^n,\nabla_\tau u^n\rangle+\left\langle(1+\Delta_h)^2u^n,\nabla_\tau u^n\right\rangle+\langle f(u^n),\nabla_\tau u^n\rangle=0,\ \ n\geq 3.\tag{3.8}$$

根据引理（3.2），左端的第一项可改写为

$$6\tau\left\langle D_3u^n,\nabla_\tau u^n\right\rangle\geq\frac{9}{2}(\|\nabla_\tau u^n\|^2+\frac{2}{9}\|\nabla_\tau u^{n-1}\|^2)-\frac{9}{2}\left(\|\nabla_\tau u^{n-1}\|^2+\frac{2}{9}\|\nabla_\tau u^{n-2}\|^2\right)+2\|\nabla_\tau u^n\|^2.$$

对于第二项，直接应用恒等式 $2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$ 并进行分部求和，可得

$$\begin{aligned}\left\langle (1+\Delta_h)^2 u^n, \nabla_\tau u^n \right\rangle &= \langle (1+\Delta_h)u^n, \nabla_\tau (1+\Delta_h)u^n \rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|(1+\Delta_h)u^n\|^2 - \|(1+\Delta_h)u^{n-1}\|^2 + \|\nabla_\tau((1+\Delta_h)u^n)\|^2 \Big).\end{aligned}$$

对于式 (3.8) 中的非线性项，借助等式 $2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$ 和引理 3.3，可得

$$\begin{aligned}\langle f(u^n), \nabla_\tau u^n \rangle &= \left\langle (u^n)^3 - \mathrm{g}(u^n)^2, \nabla_\tau u^n \right\rangle - \epsilon \langle u^n, \nabla_\tau u^n \rangle \\ &\geq \frac{1}{4}(\|u^n\|_4^4 - \|u^{n-1}\|_4^4) - \frac{\mathrm{g}}{3}\Big(\left\langle (u^n)^2, u^n \right\rangle - \left\langle (u^{n-1})^2, u^{n-1} \right\rangle \Big) \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2}(\|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2) - \Big(\frac{2\mathrm{g}^2}{3} + \frac{\epsilon}{2}\Big)\|\nabla_\tau u^n\|^2.\end{aligned}$$

As 因此，将上述三个不等式代入式 (3.8)，可得 n

$$\left(\frac{1}{3\tau} - \frac{2\mathrm{g}^2}{3} - \frac{\epsilon}{2}\right)\|\nabla_\tau u^n\|^2 + \mathcal{E}[u^n] - \mathcal{E}[u^{n-1}] \leq 0.$$

在条件 (3.7) 下，可推出 $\mathcal{E}[u^n] \leq \mathcal{E}[u^{n-1}]$，其中 $3 \leq n \leq N$.

F对于 $n = 2$，应用柯西-施瓦茨不等式和条件 (3.7)，可得 n

$$\begin{aligned}\left\langle D_3 u^2, \nabla_\tau u^2 \right\rangle &= \frac{3}{2\tau}\|\nabla_\tau u^2\|^2 - \frac{1}{2\tau}\left\langle \nabla_\tau u^1, \nabla_\tau u^2 \right\rangle \\ &\geq \frac{3}{2\tau}\|\nabla_\tau u^2\|^2 - \frac{1}{2\tau}\left(\frac{7}{6}\|\nabla_\tau u^1\|^2 + \frac{3}{14}\|\nabla_\tau u^2\|^2\right) \\ &= \frac{3}{4\tau}\left(\|\nabla_\tau u^2\|^2 + \frac{2}{9}\|\nabla_\tau u^1\|^2\right) - \frac{3}{4\tau}\|\nabla_\tau u^1\|^2 + \frac{9}{14\tau}\|\nabla_\tau u^2\|^2\end{aligned}$$

Ob显然，可得 $\mathcal{E}[u^2] \leq \mathcal{E}[u^1]$。对于 $n = 1$，利用条件 (3.7)，有

$$\left\langle D_3 u^1, \nabla_\tau u^1 \right\rangle = \frac{3}{4\tau}\|\nabla_\tau u^1\|^2 + \frac{5}{4\tau}\|\nabla_\tau u^1\|^2 = \frac{2}{\tau}\|\nabla_\tau u^1\|^2,$$

由此可轻易推出 $\mathcal{E}[u^1] \leq \mathcal{E}[u^0]$。证明完毕。 ∎

由定理 3.2 可知，BDF3格式 (2.9) 的解有界。 我们进一步在以下引理中陈述该结果。

引理 3.4 假设时间步长 τ 满足条件 (3.7)。BDF3格式 (2.9) 的解在 L^∞ 范数下稳定，其中 $\left\|u^n\right\|_\infty \leq c_0$ 适用于 $n \geq 1$，且 c_0 与时间步长 τ无关。

证明 利用定理 3.2 和杨氏不等式，可由 $E[u^n] \leq E[u^0]$ 得出

$$4E[u^0] \geq 2\|(1+\Delta_h)u^n\|^2 + \|u^n\|_4^4 - \frac{4\mathrm{g}}{3}\left\langle (u^n)^2, u^n \right\rangle - 2\epsilon\|u^n\|^2$$

$$\geq 2\|(1+\Delta_h)u^n\|^2 + \|u^n\|_4^4 - \frac{2}{9}\big\|u^n\big\|_4^4 - 2\mathrm{g}^2\|u^n\|^2 - 2\epsilon\|u^n\|^2$$
$$\geq 2\|(1+\Delta_h)u^n\|^2 + \frac{7}{9}\|u^n\|_4^4 - 2(\mathrm{g}^2+\epsilon)\|u^n\|^2, \quad n \geq 1. \tag{3.9}$$

对于任意实数值 $a \in R$，注意到$\big[a^2 - \frac{9}{7}(1+\epsilon+\mathrm{g}^2)\big]^2 \geq 0$，可得

$$\|u^n\|_4^4 \geq \frac{18}{7}(1+\epsilon+\mathrm{g}^2)\|u^n\|^2 - \frac{81}{49}(1+\epsilon+\mathrm{g}^2)^2|\Omega_h|.$$

将上述不等式代入(3.9)，可得

$$4E[u^0] \geq 2\|(1+\Delta_h)u^n\|^2 + 2\|u^n\|^2 - \frac{9}{7}(1+\epsilon+\mathrm{g}^2)^2|\Omega_h|$$
$$\geq \big(\|(1+\Delta_h)u^n\| + \|u^n\|\big)^2 - \frac{9}{7}(1+\epsilon+\mathrm{g}^2)^2|\Omega_h|.$$

由引理 3.1，可得

$$\|u^n\|_\infty \leq \tilde{C}_\Omega(\|(1+\Delta_h)u^n\| + \|u^n\|)$$
$$\leq \tilde{C}_\Omega\sqrt{4E[u^0] + \frac{9}{7}(1+\epsilon+\mathrm{g}^2)^2|\Omega_h|}$$
$$:= c_0.$$

∎

4 L^2 范数误差估计

本节研究差分格式(2.9)的误差估计，并证明该格式的L^2 范数收敛性。

4.1 DOC 核

为建立 L^2 范数估计，我们引入DOC 核 ϑ_{n-k} ，满足

$$\vartheta_0 := \frac{1}{b_0} \quad \text{and} \quad \vartheta_{n-k} := -\frac{1}{b_0}\sum_{j=k+1}^{n}\vartheta_{n-j}b_{j-k}, \quad \text{for } 3 \leq k \leq n-1, \tag{4.1}$$

其中 $b_0 = \frac{11}{6\tau}$、 $b_1 = -\frac{7}{6\tau}$、 $b_2 = \frac{1}{3\tau}$ 和 $b_j = 0$，对于 $3 \leq j \leq n-3$。
一般而言，假设求和 $\sum_{k=i}^{j}$ $i > j$ 为零。显然，重写式 (4.1) 可得一个离散正交恒等式

$$\sum_{j=k}^{n}\vartheta_{n-j}b_{j-k} \equiv \delta_{nk}, \ 3 \leq k \leq n. \tag{4.2}$$

下面的引理给出了 DOC核 ϑ_{n-k} 的性质，这些性质在格式 (2.9) 的收敛性分析中起着关键作用。

引理 4.1 (I) 对任意序列 $\{w_k\}_{k=3}^n$，有

$$\sum_{k=3}^{n} w_k \sum_{j=3}^{k} \vartheta_{k-j} w_j \geq 0, \qquad for\ 3 \leq n. \tag{4.3}$$

(II) 式 (4.1) 中的 DOC 核 ϑ_{n-k} 有显式公式

$$\vartheta_{n-k} = \frac{6\tau}{11}\left[\frac{39+7\sqrt{39}i}{78}\left(\frac{7-\sqrt{39}i}{22}\right)^{n-k} + \frac{39-7\sqrt{39}i}{78}\left(\frac{7+\sqrt{39}i}{22}\right)^{n-k}\right], \tag{4.4}$$

以及以下界

$$|\vartheta_{n-k}| \leq (\frac{2}{11})^{\frac{n-k}{2}}\tau, \qquad and \qquad \sum_{k=3}^{n}|\vartheta_{n-k}| \leq \frac{22}{9}\tau, \qquad for\ 3 \leq k \leq n. \tag{4.5}$$

证明 (1) 基于任意给定的实数序列 $\{w_k\}_{k=3}^n$，序列 $\{v_k\}_{k=3}^n$ 可利用离散 BDF3 核 b_{n-k} 定义

$$v_k = -\frac{1}{b_0}\sum_{j=3}^{k-1} b_{k-j} w_j + \frac{w_k}{b_0}, \qquad \text{for} \quad k \geq 3,$$

这等价于

$$w_k = \sum_{j=3}^{k} b_{k-j} v_j, \qquad \text{for} \quad k \geq 3. \tag{4.6}$$

在公式 (4.6) 两边乘以 DOC 核 ϑ_{n-k} 并对 k 从 3 求和至 n，可得

$$\sum_{k=3}^{n}\vartheta_{n-k}w_k = \sum_{k=3}^{n}\vartheta_{n-k}\sum_{j=3}^{k} b_{k-j}v_j = \sum_{j=3}^{n} v_j \sum_{k=j}^{n}\vartheta_{n-k}b_{k-j} = v_n, \qquad \text{for} \quad n \geq 3. \tag{4.7}$$

进而，结合 (4.6) 和 (4.7) 即可证明 (4.3)

$$\sum_{k=3}^{n} w_k \sum_{j=3}^{k}\vartheta_{k-j}w_j = \sum_{k=3}^{n} v_k \sum_{j=3}^{k} b_{k-j}v_j \geq 0, \qquad \text{for} \quad n \geq 3,$$

其中应用了引理 3.2。
(2) 恒等式 (4.2) 表明

$$\text{当 } n = k, \qquad \vartheta_0 b_0 = 1, \qquad \text{for} \quad k \geq 3, \tag{4.8}$$

$$\text{当 } n = k+1, \qquad \vartheta_1 b_0 + \vartheta_0 b_1 = 0, \qquad \text{for} \quad k \geq 3, \tag{4.9}$$

$$\text{当 } n \geq k \quad +2, \qquad \vartheta_{n-k}b_0 + \vartheta_{n-k-1}b_1 + \vartheta_{n-k-2}b_2 = 0, \qquad \text{for} \quad k \geq 3. \tag{4.10}$$

将 BDF3 核 b_{n-k} 代入 (4.8)-(4.10)，即可得到递推公式

$$11\vartheta_{n-k} - 7\vartheta_{n-k-1} + 2\vartheta_{n-k-2} = 0, \quad \text{for } 3 \le k \le n-2, \tag{4.11}$$

其中 $\vartheta_0 = \frac{6\tau}{11}$ 和 $\vartheta_1 = \frac{42\tau}{121}$。
通过特征方程法得到 $\{\vartheta_{n-k}\}_{k=3}^{n}$ 的显式公式

$$\vartheta_{n-k} = \frac{\vartheta_1 - p\vartheta_0}{q-p}q^{n-k} + \frac{\vartheta_1 - q\vartheta_0}{p-q}p^{n-k}, \qquad \text{for} \quad 3 \le k \le n, \tag{4.12}$$

其中 p和 q是特征方程 $11\lambda^2-7\lambda+2=0$的两个不同根。此外，对 ϑ_{n-k}取绝对值可得

$$\begin{aligned}
|\vartheta_{n-k}| &= \left| \frac{6\tau}{11}\left[\frac{39+7\sqrt{39}i}{78}\left(\frac{7-\sqrt{39}i}{22}\right)^{n-k} + \frac{39-7\sqrt{39}i}{78}\left(\frac{7+\sqrt{39}i}{22}\right)^{n-k}\right]\right| \\
&\le \frac{12\tau}{11}\sqrt{(\frac{39}{78})^2 + (\frac{7\sqrt{39}}{78})^2}\left(\sqrt{(\frac{7}{22})^2 + (\frac{\sqrt{39}}{22})^2}\right)^{n-k} \\
&= \tau\sqrt{\frac{96}{143}}\left(\frac{2}{11}\right)^{\frac{n-k}{2}} \\
&\le \left(\frac{2}{11}\right)^{\frac{n-k}{2}}\tau, \qquad \text{for} \quad 3 \le k \le n.
\end{aligned}$$

Sum分别对上述不等式两边从 3 到 n 取 k，可得 s

$$\sum_{k=3}^{n}|\vartheta_{n-k}| \le \tau\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{2}{11}\right)^{\frac{n-k}{2}} \le \tau\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{2}{11}\right)^{\frac{n-k}{2}} \le \frac{\tau}{1-\sqrt{\frac{2}{11}}} \le \frac{22}{9}\tau.$$

证明完毕。 ∎

4.2 收敛性分析

对于精确解 U^n的正则性，假设存在常数 $c_1 > 0$ 使得$\{\|U^n\|_\infty, \|\partial_t U^n\|_\infty\} \le c_1$，其中 c_1是一个与空间步长 h和时间步长 τ.无关的常数

引理 **4.2** [38] 令 $\lambda \ge 0$，数列 $\{p_k\}_{k=1}^{N}$ 和 $\{V_k\}_{k=1}^{N}$ 均为非负数。若该数列满足

$$V_n \le \lambda\sum_{j=1}^{n-1}\tau_j V_j + \sum_{j=1}^{n}p_j, \quad for\ 1 \le n \le N,$$

则有

$$V_n \le \exp(\lambda t_{n-1})\sum_{j=1}^{n}p_j, \quad for\ 1 \le n \le N.$$

现在我们准备证明 BDF3差分格式(2.9) 的收敛性分析。¯记误差为 $e_h^n = U_h^n - u_h^n$, $\mathrm{x}_h \in \Omega_h$, $0 \le n \le N$. 误差方程如下所示

$$D_3 e_h^n + (1+\Delta_h)^2 e_h^n + \big(f(U_h^n) - f(u_h^n)\big) = \xi_h^n + \eta_h^n, \ \ \mathrm{x}_h \in \bar{\Omega}_h, \ 1 \le n \le N, \tag{4.13}$$

其中 $e_h^0 = 0$, $\mathrm{x}_h \in \bar{}\Omega_h$, ξ_h^n 和 η_h^n 分别表示时间和空间上的局部相容性误差。

定理4.1 假设问题 (1.1) 存在唯一光滑解，且 $u_h^n \in \mathcal{V}_h$ 是差分格式 (2.9) 的解。若时间步长 τ 满足以下条件:

$$\tau \le \frac{9}{88\rho}, \tag{4.14}$$

则该数值格式在 L^2 范数下收敛,

$$\|e^k\| \le C\left(\tau^3 + h^2\right),$$

其中 $\rho = c_1^2 + c_1 c_0 + c_0^2 + \mathrm{g}(c_0 + c_1) + \epsilon$, C 是与时间步长$\tau$ 和空间步长 h无关的正常数。

证明 对于 $n = 1$，将 (4.13) 与 e^1 作离散内积，得到 o

$$\left\langle D_3 e^1, e^1 \right\rangle + \left\langle (1+\Delta_h)^2 e^1, e^1 \right\rangle + \left\langle (f(U^1) - f(u^1), e^1) \right\rangle = \left\langle \xi^1 + \eta^1, e^1 \right\rangle, \tag{4.15}$$

其中 $\xi_h^1 = O(\tau^2)$, $\eta_h^1 = O(h^2)$。

对于式 (4.15) 中的非线性项，记

$$f_h^1 = (U_h^1)^2 + U_h^1 u_h^1 + (u_h^1)^2 - \mathrm{g}(U_h^1 + u_h^1) - \epsilon,$$

则可得 $f(U_h^1) - f(u_h^1) = f_h^1 e_h^1$.由引理 3.4 和 $\|U^n\|_\infty \le c_1$可知

$$\|f^1\|_\infty \le \rho,$$

其中 $\rho = c_1^2 + c_1 c_0 + c_0^2 + \mathrm{g}(c_0 + c_1) + \epsilon$.

注意到 $\left\langle (1+\Delta_h)^2 e^1, e^1 \right\rangle = \|(1+\Delta)e^1\|^2 \ge 0$，其中 $e^0 = 0$，并利用柯西-施瓦茨不等式，可将式 (4.15) 改写为

$$\frac{2}{\tau}\|e^1\|^2 - \rho\|e^1\|^2 \le (\|\xi^1\| + \|\eta^1\|)\|e^1\|,$$

即

$$(2 - \rho\tau)\|e^1\| \le \tau(\|\xi^1\| + \|\eta^1\|).$$

根据条件 (4.14)，可得

$$\|e^1\| \le C_1(\tau^3 + h^2), \tag{4.16}$$

其中， C_1 是一个与 τ 和 h无关的正常数。

而对于 $n=2$，将(4.13)与 e^2作内积，可得

$$\big\langle D_3e^2,e^2\big\rangle+\big\langle(1+\Delta)^2e^2,e^2\big\rangle+\big\langle(f(U^1)-f(u^2),e^2)\big\rangle=\big\langle\xi^2+\eta^2,e^2\big\rangle, \tag{4.17}$$

其中 $\xi_h^2=O(\tau^2)$， $\eta_h^2=O(h^2)$。对左侧第一项应用柯西-施瓦茨不等式，可直接得到以下不等式

$$\big\langle D_3e^2,e^2\big\rangle=\frac{3}{2\tau}\big\langle e^2,e^2\big\rangle-\frac{2}{\tau}\big\langle e^1,e^2\big\rangle\geq\frac{3}{2\tau}\|e^2\|^2-\frac{2}{\tau}\|e^1\|\|e^2\|.$$

与 $n=1$ 的情形类似，方程 (4.17) 可改写为

$$(\frac{3}{2}-\rho\tau)\|e^2\|\leq2\|e^1\|+\tau(\|\xi^1\|+\|\eta^1\|).$$

根据条件 (4.14)，可得以下收敛估计

$$\|e^2\|\leq C_2(\tau^3+h^2), \tag{4.18}$$

其中， C_2 是一个与 τ 和 h 无关的正常数。

对于 $n\geq3$，在 (4.13) 中用 l 替换 n，并将 (4.13) 两边乘以 DOC 核 ϑ_{k-l}，然后对 l 从 3 到 k 求和。对于 $\mathbf{x}_h\in\Omega_h$，我们有以下关于 $k\geq3$ 的恒等式

$$\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}D_3e_h^l+\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}(1+\Delta_h)^2e_h^l-\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}\big(f(U_h^l)-f(u_h^l)\big)=P_h^k+Q_h^k, \tag{4.19}$$

k k其中 $P_h^k=\sum\vartheta_{k-l}\xi_h^l$

且 $Q_h^k=\sum\vartheta_{k-l}\eta_h^l{}_{l=3}$ $_{l=3}$

由引理 4.1 (II) 和 $\xi_h^l=O(\tau^3)$ $\eta_h^l=O(h^2)$可得

$$\sum_{k=3}^{n}\|P^k\|\leq\frac{22}{9}t_n\tau^3\leq C_3\tau^3,\ \text{ for } 3\leq n\leq N, \tag{4.20}$$

$$\sum_{k=3}^{n}\|Q^k\|\leq\frac{22}{9}t_n\tau^3\leq C_4h^2,\ \text{ for } 3\leq n\leq N, \tag{4.21}$$

其中 C_3、 C_4 是与 τ 和 h 无关的正常数。

回顾正交恒等式 (4.2)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}D_3e_h^l&=\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}\sum_{j=1}^{l}b_{l-j}\nabla_\tau e_h^j=\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}\left(\sum_{j=3}^{l}b_{l-j}\nabla_\tau e_h^j+b_{l-1}\nabla_\tau e_h^1+b_{l-2}\nabla_\tau e_h^2\right)\\&=\sum_{j=3}^{k}\nabla_\tau e_h^j\sum_{l=j}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-j}+\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-1}\nabla_\tau e_h^1+\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-2}\nabla_\tau e_h^2\\&=\nabla_\tau e_h^k+\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-1}\nabla_\tau e_h^1+\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-2}\nabla_\tau e_h^2,\qquad\text{for } 3\leq k\leq n,\end{aligned}$$

其中应用了正交恒等式 (4.2)。
将式 (4.19) 与 e^k 取内积，并将 k 从 3 求和至 n，可得

$$\sum_{k=3}^{n}\langle\nabla_\tau e^k,e^k\rangle+\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}^{(k)}\langle(1+\Delta_h)^2e^l,e^k\rangle+\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}^{(k)}\langle f(U^l)-f(u^l),e^k\rangle$$
$$=-\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-1}\langle\nabla_\tau e^1,e^k\rangle-\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-2}\langle\nabla_\tau e^2,e^k\rangle+\sum_{k=3}^{n}\langle P^k+Q^k,e^k\rangle. \tag{4.22}$$

下面将对式 (4.22) 中的每一项进行严格估计。对于左端的第一项，有如下恒等式

$$\sum_{k=3}^{n}\langle\nabla_\tau e^k,e^k\rangle=\frac{1}{2}(\|e^n\|^2-\|e^2\|^2+\sum_{k=3}^{n}\|\nabla_\tau e^k\|^2). \tag{4.23}$$

对于左端的第二项，利用离散核的正定性 ϑ_{n-k} （见式 (4.3)），可得

$$\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}\langle(1+\Delta_h)^2e^l,e^k\rangle=\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}\langle(1+\Delta_h)e^l,(1+\Delta_h)e^k\rangle\geq 0. \tag{4.24}$$

对于左端的第三个非线性项，我们首先进行如下估计

$$f(U_h^l)-f(u_h^l)=f_h^le_h^l,$$

其中记

$$f_h^l=(U_h^l)^2+U_h^lu_h^l+(u_h^l)^2-\mathrm{g}(U_h^l+u_h^l)-\epsilon.$$

由引理 3.4 可知

$$\|f^l\|_\infty\leq\rho,$$

其中 $\rho=c_1^2+c_1c_0+c_0^2+\mathrm{g}(c_0+c_1)+\epsilon$. 因此可得

$$\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}\langle f(U^l)-f(u^l),e^k\rangle=\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}\langle f^le^l,e^k\rangle\leq\rho\sum_{k=3}^{n}\|e^k\|\sum_{l=3}^{k}|\vartheta_{k-l}|\|e^l\|. \tag{4.25}$$

注意到 $b_j=0$ 当 $j\geq 3$ 时，(4.22) 右端的第一项为

$$-\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-1}\langle\nabla_\tau e^1,e^k\rangle=-\sum_{k=3}^{n}\vartheta_{k-3}b_2\langle\nabla_\tau e^1,e^k\rangle\leq\frac{1}{3\tau}\sum_{k=3}^{n}|\vartheta_{k-3}|\|\nabla_\tau e^1\|\|e^k\|, \tag{4.26}$$

其中使用了柯西-施瓦茨不等式。同样地，(4.22) 右端的第二项可估计为

$$-\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=3}^{k}\vartheta_{k-l}b_{l-2}\langle\nabla_\tau e^2,e^k\rangle=-\sum_{k=3}^{n}\vartheta_{k-3}b_1\langle\nabla_\tau e^2,e^k\rangle-\sum_{k=4}^{n}\vartheta_{k-4}b_2\langle\nabla_\tau e^2,e^k\rangle$$

$$\leq \frac{7}{6\tau}\sum_{k=3}^{n}|\vartheta_{k-3}|\|\nabla_\tau e^2\|\|e^k\| + \frac{1}{3\tau}\sum_{k=4}^{n}|\vartheta_{k-4}|\|\nabla_\tau e^2\|\|e^k\|. \quad (4.27)$$

将 (4.23)-(4.27) 代入 (4.22)，可得

$$\|e^n\|^2 - \|e^2\|^2 \leq 2\rho\sum_{k=3}^{n}\|e^k\|\sum_{l=3}^{k}|\vartheta_{k-l}|\|e^l\| + \frac{2}{3\tau}\sum_{k=3}^{n}|\vartheta_{k-3}|\|\nabla_\tau e^1\|\|e^k\|$$
$$+ \frac{7}{3\tau}\sum_{k=3}^{n}|\vartheta_{k-3}|\|\nabla_\tau e^2\|\|e^k\| + \frac{2}{3\tau}\sum_{k=4}^{n}|\vartheta_{k-4}|\|\nabla_\tau e^2\|\|e^k\| + 2\sum_{k=3}^{n}\|e^k\|(\|P^k\| + \|Q^k\|), \quad (4.28)$$

其中最后一项由柯西-施瓦茨不等式得到。

存在　　一个整数 n_0 使得 $\|e^{n_0}\| =$ 最大值$_{0\leq k\leq n}\|e^k\|$. 将 $n = n_0$ 代入 (4.28)，可得　　e

$$\|e^{n_0}\| \leq \|e^2\| + 2\rho\sum_{k=3}^{n_0}\|e^k\|\sum_{l=3}^{k}|\vartheta_{k-l}| + \frac{2}{3\tau}\sum_{k=3}^{n_0}|\vartheta_{k-3}|\|\nabla_\tau e^1\|$$
$$+ \frac{7}{3\tau}\sum_{k=3}^{n_0}|\vartheta_{k-3}|\|\nabla_\tau e^2\| + \frac{2}{3\tau}\sum_{k=4}^{n_0}|\vartheta_{k-4}|\|\nabla_\tau e^2\| + 2\sum_{k=3}^{n_0}(\|P^k\| + \|Q^k\|),$$

当$\tau \leq \frac{9}{88\rho}$时，由引理 4.1 (II) 可得

$$\|e^n\| \leq \|e^{n_0}\| \leq 2\|e^2\| + \frac{88}{9}\rho\tau\sum_{k=3}^{n-1}\|e^k\| + \frac{88}{27}\|\nabla_\tau e^1\|$$
$$+ \frac{44}{3}\|\nabla_\tau e^2\| + 4\sum_{k=3}^{n}(\|P^k\| + \|Q^k\|), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (4.29)$$

应用引理 4.2，并结合估计式 (4.16) 和 (4.18)，可得到以下总体估计

$$\|e^n\| \leq 2\exp(\frac{88}{9}\rho t_{n-1})\Big(\|e^2\| + \frac{44}{27}\|\nabla_\tau e^1\| + \frac{22}{3}\|\nabla_\tau e^2\| + 2\sum_{k=3}^{n}(\|P^k\| + \|Q^k\|)\Big)$$
$$\leq 2\exp(\frac{88}{9}\rho t_{n-1})\Big(\|e^2\| + \frac{44}{27}\|e^1\| + \frac{22}{3}\sqrt{2}(\|e^2\| + \|e^1\|) + 2C_3\tau^3 + 2C_4h^2\Big)$$
$$\leq C(\tau^3 + h^2), \qquad 3 \leq n \leq N.$$

其中 C 是一个与时间步长 τ 和空间步长 h无关的正常数。 ∎

5 数值结果

本节通过二维和三维数值算例，验证时间方向的收敛阶、全局能量稳定性以及数值解的演化特性。精确解 U_h^N与数值解 u_h^N 之间的 L^2 范数误差记为 $e(N) := \|U^N - u^N\|$，时间方向的收敛阶估计为 order $= \log(e(N)/e(2N))$ 。

例 5.1（时间精度测试）考虑 Swift-Hohenberg方程 $u_t+(1+\Delta)^2u+f(u) = g(x,y,t)$, $(x,y) \in \Omega$ $0 < t \leq T$，定义在二维区域 $\Omega = (0,2\pi)^2$，满足周期边界条件，初始数据为

$$u(x,y,0) = \sin(2x)\sin(2y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

使其具有一个精确解

$$u(x,y,t) = \cos(t)\sin(2x)\sin(2y).$$

该例也用于 [21] 数值测试。空间网格点固定为 M=10000，时间步数通过 N=10,20,30,40 进行变化。模型参数 g 和 ϵ在不同情形下分别设定为：(1)$\epsilon = 0.25$，$g = 1$；(2)$\epsilon = 0.15$，$g = 1$；(3)$\epsilon = 0.25$，$g = 0$，以测试该方法在不同条件下的收敛性。实验结果见表1，结果表明，时间方向的收敛阶与第4节中的理论分析吻合良好。

表1：不同 ϵ 和 g 下 BDF3 格式 (2.9) 的 L^2 误差及收敛阶。

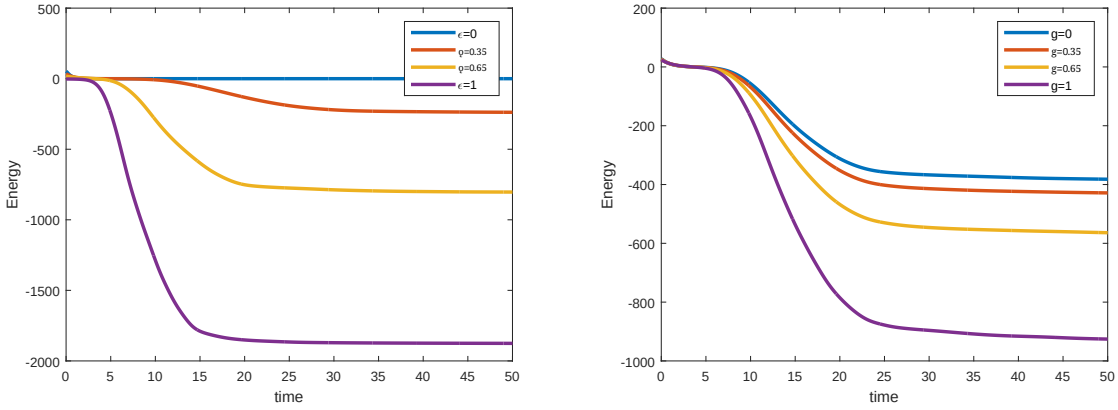
	ϵ=0.25, g =1		ϵ=0.15, g=1		ϵ=0.25, g=0	
N	e(N)	顺序	e(N)	顺序	e(N)	顺序
10	3.167e-01	*	3.154e-01	*	3.127e-01	*
20	5.699e-02	2.47	5.647e-02	2.48	5.315e-02	2.56
40	7.321e-03	2.96	7.246e-03	2.96	6.625e-03	3.00
80	9.311e-04	2.98	9.309e-04	2.96	8.443e-04	2.97

例5.2（二维中能量和解的演化）我们考虑区域 $\Omega = (0,100)^2$ 上的 Swift-Hohenberg 方程 (1.1)，其中参数 ϵ 和 g 不同，满足周期边界条件，初始数据为 *[?]*

$$u(x,y,0) = 0.1 + 0.02\cos\left(\frac{\pi x}{100}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{100}\right) + 0.05\sin\left(\frac{\pi x}{20}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{20}\right), \qquad (x,y) \in \Omega.$$

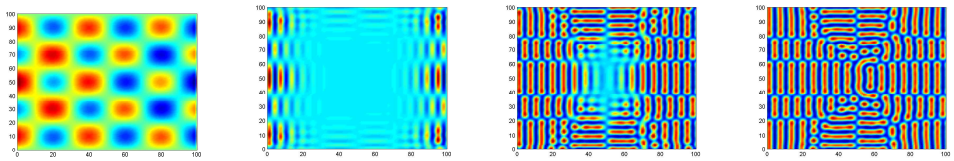
本例中，我们将展示基于空间网格 128×128、$\tau = 0.1$ 的能量和数值解的演化。图1展示了不同参数 ϵ 和 g 下能量随时间的演化（$T = 50$），由此可见，对于所测试的任意参数，格式 (2.9) 始终耗散能量。此外，ϵ 和 g 的取值似乎会影响能量的衰减率。

根据图1，参数 ϵ 和 g 对耗散性质有很大影响。对于固定的 $\tau = 0.1$ 和 $\epsilon = 0.25$，图2和图3展示了参数分别为 $g = 0$ 和 $g = 1$ 时，在不同时间 $t = 0.1$、16、32、64 稳定化前的数值解。我们发现，数值解的演化模式受参数 g 影响：在饱和时间，当 $g = 1$ 时呈现柱状模式，而当 $g = 0$ 时呈现曲线图案。



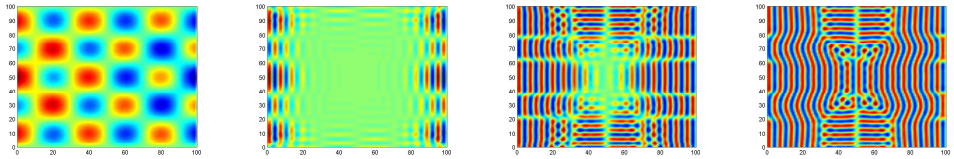
(a) g=0.5 (b) ϵ=0.5

图1：不同参数 ϵ 和 g 下的能量演化。



(a) t=0.1 (b) t=16 (c) t=32 (d) t=64

图2：g $=1$ 下 $u(x,y,t)$ 在 $t=0.1$、16、32、64 时的演化



(a) t=0.1 (b) t=16 (c) t=32 (d) t=64

图3：当 g $=0$ 时， $t=0.1$、16、32、64 处 $u(x,y,t)$ 的演化

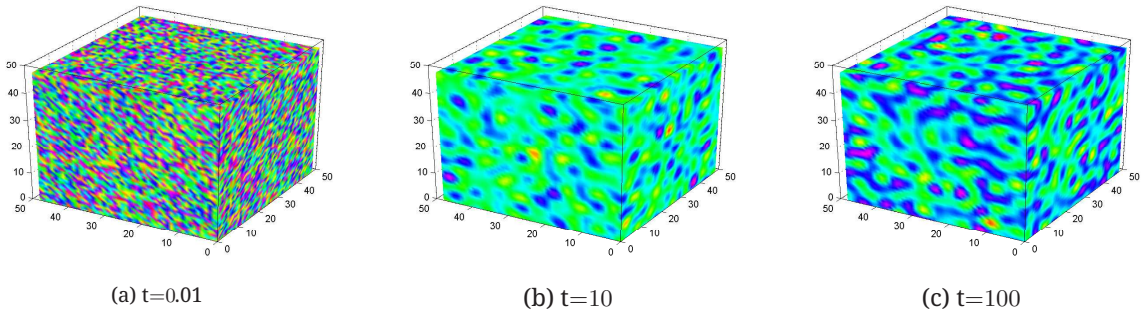
例5.3（三维能量与解的演化）在本例中，为了进一步检验 BDF3格式 (2.9) 的演化性质，我们考虑三维空间 $\Omega = (0,48)^3$ 上的 Swift-Hohenberg方程 (1.1)，其中 $\epsilon = 0.1$、$g = 0$，并施加周期边界条件和随机初始条件

$$u(x,y,z,0) = 0.01 * rand(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \Omega,$$

其中，rand(x,y,z) 是一个介于 -0.01 和 0.01 之间的随机数。

对于固定的 $h=1$、$\tau=0.01$、$\epsilon=0.1$、$g=0$，数值解如图4所示，而从 $t=0.01$ 到 $t=5000$ 的快照生动地展现了曲线图案的形成与演化。图案演化在开始阶段较为缓慢，然而，我们观察到，在某个时刻，即本例中的 $t=100$ 之前，圆形聚集状态发生破裂，转而形成曲线图案。稳定的曲线图案在此之后逐渐成形

$t \geq 5000$，并逐渐趋近于稳态。图5中的能量演化清楚地证实了这一点。



(a) t=0.01　(b) t=10　(c) t=100

(d) t=500　(e) t=2000　(f) t=5000

图4：当 g 为 $=0$ 时，$u(x,y,t)$ 在 $t=0.1$、10、100、500、2000、5000 时的演化

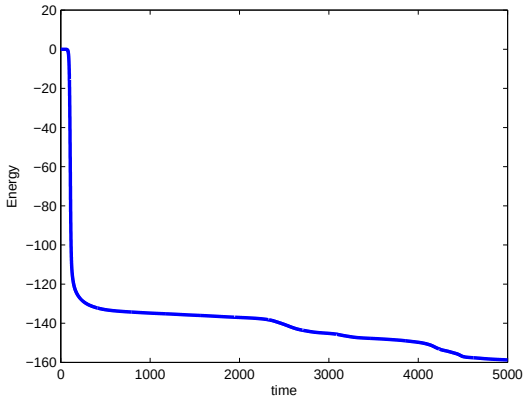


图5：使用 BDF3格式 (2.9) 时能量的演化。

6 总结

本文提出并分析了一种具有能量稳定性、唯一可解性和收敛性的Swift-Hohenberg方程数值格式。全离散格式的能量稳定性和唯一可解性

利用布劳威尔不动点定理和一些分析技术得以推导。随后，借助DOC核证明了 L^2 范数收敛性。数值结果展示了所提出的BDF3格式在二维和三维模拟中的收敛阶及耗散性质。本文建立的分析框架还可进一步推广至其他具有梯度流结构的问题。

致谢

谨此感谢国家自然科学基金委员会（项目编号：11701081、11861060）、中央高校基本科研业务费、江苏省网络群体智能重点实验室（项目编号：BM2017002）、国家自然科学基金重点项目（项目编号：61833005）、东南大学至善青年学者计划、中国博士后科学基金会（项目编号：2019M651634），以及南京工程学院高层次科研人才引进基金（项目编号：YKL201856）的资助。

参考文献

[1] J. Swift, P. C. Hohenberg， 对流不稳定性下的流体动力学涨落。《物理评论A》，15（1977）319-328。[2] S. Li, F. Denner, N. Morgan 等，破裂薄膜中的瞬态结构：黏性流体中马兰戈尼效应诱导的对称性破缺图案形成。《科学进展》，6（2020）eabb0597。[3] S. M. Wise, C. Wang 和 J. S. Lowengrub，相场晶体方程的能量稳定且收敛的有限差分格式。SIAM J. Numer. Anal.，47（2009）2269-2288。[4] M. Tlidi, E. Berr´ıos-Caro, D. Pinto-Ramo 等，植被斑块与空隙的相互作用：对水资源短缺的自组织响应。《物理学D辑》，414（2020）132708。[5] P. Stefanovic, M. Haataja 和 N. Provatas，纳米晶材料中形变与塑性的相场晶体研究。《物理评论E》，80（2009）046107。[6] R. R. Rosa, J. Pontes, C. I. Christov, F. M. Ramos, C. Rodrigues Neto, E. L. Rempel 和 D. Walgraef, Swift-Hohenberg动力学的梯度图案分析：相位无序表征。《物理学A辑》，283（2000）156-159。[7] A. Hutt、A. Longtin 和 L. Schimansky-Geier，空间系统中加性噪声诱导的图灵转变及其在神经场和Swift-Hohenberg方程中的应用。《物理学D辑》，237（2008）755-773。[8] Y. Choi, T. Ha, J. Han 和 D. S. Lee，修正Swift-Hohenberg方程的分岔与最终图案。《离散与连续动力系统B辑》，22（2017）2543。[9] L. A. Peletier 和 V. Rottsch¨afer，Swift-Hohenberg方程解的图案选择。《物理学D辑》，194

(2004) 95-126.

[10] Y. X. Shi 和 M. A. Han，修正 Swift-Hohenberg 方程的广义同宿解的存在性，离散与连续动力系统丛书 S，103 (2020) 3189。[11]B. S. Lai 和 L. L. Zhang，对称性破缺模型上广义 Swift-Hohenberg 方程周期解的存在性，应用数学快报，13 (2020) 106206。[12] P. Gao，Swift-Hohenberg方程的平均原理，纯粹与应用分析通讯，19 (2020) 293。[13] D. V. Kostin，Fuss-Winkler-Zimmermann 和 Swift-Hohenberg 四阶非线性方程的初边值问题，Matematicki Vesnik，70 (2018) 26-39。[14] H. L. Liu 和 P. M. Yin，无条件能量稳定的 Swift-Hohenberg 方程 DG 格式，科学计算杂志，81 (2019) 789-819。[15] A. F. Sar miento、L. F. R. Espath、P. Vignal 等，一种用于 Swift-Hohenberg方程的能量稳定广义-α 方法，J. Comput. Appl. Math.，344 (2018) 836-851。[16] Z. G. Liu，基于 H^{-1}-梯度流方法的二次-三次非线性 Swift-Hohenberg 模型新型能量稳定格式，数值算法，3 (2020)[17] M. Dehghan、M. Abbaszadeh、A. Khodadadian 等，求解广义 Swift-Hohenberg 方程的本征正交分解降阶方法 (POD-ROM)，国际热与流体流动数值方法杂志，29(2019) 2642-2665。[18] C. I. Christov 和 J. Pontes，严格实现李雅普诺夫泛函的 Swift-Hohenberg 方程数值格式，数学与计算机建模，35 (2002) 87-99。[19] H. G. Lee，二次-三次非线性 Swift-Hohenberg 方程的一种能量稳定方法，计算方法与应用力学工程，343 (2019) 40-51。[20] Z. R. Zhang 和 Y. Z. Ma，Swift-Hohenberg方程的大时间步进方法，应用数学与力学进展，8 (2018) 992-1003。[21] H. Sun、X. Zhao、H. Y. Cao 等，Swift-Hohenberg方程自适应 BDF2 格式的稳定性与收敛性分析，非线性科学与数值模拟通讯，111 (2022) 106412。[22] J. Su、W. W. Fang、Q. Yu 和 Y. B. Li，采用四阶紧致格式对 Swift-Hohenberg方程进行数值模拟，计算与应用数学，38 (2019) 54。[23] H. G. Lee，Swift-Hohenberg方程的半解析傅里叶谱方法，计算数学与应用，74 (2017) 1885-1896。[24] M. Dehghan 和 M. Abbaszadeh，求解多维 Cahn-Hilliard、Swift-Hohenberg 和相场晶体方程的无网格局部配置法，工程分析与边界元，78 (2017) 49-64。[25]H. Gomez 和 X. Nogueira，一种严格遵循李雅普诺夫泛函的 Swift-Hohenberg方程新时空离散，非线性科学与数值模拟通讯，17 (2012) 4930-4946。

[26] H. Q. Wang 和 L. Yanti, 《五次复 Swift-Hohenberg 方程的一种高效数值方法》, Numer. Math. Theor. Meth. Appl., 4 (2011) 237-254,[27] X. P. Zhao、B. Liu、P. Zhang 等, 《修正 Swift-Hohenberg 方程的傅里叶谱方法》, Adv. Difference Equ., 2013 (2013) 156. [28] H. G. Lee, 《一种新的守恒 Swift-Hohenberg 方程及其质量守恒方法》, J. Comput. Appl. Math., 375 (2020) 112815.[29] J. Y. Wang 和 S. Y. Zhai, 《非局部守恒 Swift-Hohenberg 方程的快速高效数值算法》, Math. Probl. Eng., 2020 (2020) 7012483. [30] J. Zhou 和 X. M. Dai, 《Swift-Hohenberg 方程及其李雅普诺夫泛函的能量稳定伪谱格式》, Therm. Sci., 23 (2019) 975-982[31] E. Hairer 和 K. Wanner, 《常微分方程求解：刚性问题与微分代数问题》, 海德堡：Springer Verlag，1996.[32] P. Kim、D. Kim、X. F. Piao 和 S. Bak, 《一种用于求解纳维-斯托克斯方程的 BSLM 柯西问题完全显式格式》, J. Comput. Phys., 401 (2020) 109028.[33] Q. F. Zhang 和 C. J. Zhang, 《非线性黏性波动方程的分块预条件策略》, Appl. Math. Model., 37 (2013) 5801-5813.[34] G. Dahlquist, 《G-稳定性等价于 A-稳定性》, BIT,18 (1978) 384-401.[35] J. Liu, 《时变区域上斯托克斯方程的简单高效 ALE 方法及其最高五阶的可证明时间精度》, SIAM J. Numer. Anal., 51 (2013) 743-772.[36] O. Nevanlinna 和 F. Odeh, 《线性多步法的乘子技术》, Numer. Funct. Anal. Optim., 3 (1981) 377-423.[37] H. L. Liao、T. Tang 和 T. Zhou, 《多步后向差分公式的一种新离散能量技巧》, CSIAM 应用数学汇刊，3(2) (2022) 318-334.[38] H. L. Liao 和 Z. Zhang, 《扩散方程自适应 BDF2 格式的分析》, Math. Comp., 329 (2021) 1207-1226。