arXiv:2303.02849v1 [math.GT] 6 Mar 2023

映射类群的有限性与海加德距离

YANQING ZOU

Abstract. 我们证明，距离至少为 3 的 Heegaard 分解的映射类群是有限的。然而，我们构造了一个距离为 2 的反例，推翻了这一断言。此外，距离至多为 1 的 Heegaard 分解的映射类群是无限的；结合我们的结果，这一事实从 Heegaard 距离的角度回答了映射类群有限性的问题。

关键词：Heegaard 距离、曲线复形、映射类群。

美国数学会分类：57M27

1. Introduction

设 S 是一个闭、可定向且亏格至少为 2 的曲面。记其映射类群为 $Mod(S)$。设 $H_1 \cup_S H_2$ 是一个 Heegaard 分解。则其映射类群 $Mod(S:H_1, H_2)$ 是 $Mod(S)$ 的子群，其中的元素可同时延拓到 H_1 和 H_2。通常，对于给定的元素 $f \in Mod(S)$，很难判断它何时能同时延拓到 H_1 和 H_2。Minsky [5] 提出了以下问题。

Q问题 1.1. $Mod(S: H_1, H_2)$ 是有限的吗？是有限生成的吗？是有限表示的吗?

如果存在一条本质简单闭曲线$c \subset S$，使其在 S 的任意一侧都围成一个圆盘，那么 Heegaard 分解 $H_1 \cup_S H_2$ 就是可约的。否则，它是不可约的。对于任意不可约 Heegaard 分解，Casson 和 Gordon [4] 引入了弱可约 Heegaard 分解的概念，即存在一条本质圆盘 $D \subset H_1$（分别为 $E \subset H_2$），使得$\partial D \cap \partial E = \emptyset$。否则，称其为强不可约。根据定义，可约 Heegaard 分解是弱可约的。在 [14], ，Namazi 证明弱可约 Heegaard 分解的映射类群是无限的。因此，为了得到有限映射类群，我们将重点放在强不可约 Heegaard 分解上。

Hempel [6] 引入了一个强有力的指标——Heegaard 距离 $d(H_1, H_2)$，用于研究 Heegaard 分解，定义如下:

$$d(H_1, H_2) = \min\{n \mid e.s.c.c.a_i \subset S, a_i \cap a_{i+1} = \emptyset, \ for\ any\ 0 \leq i \leq n-1.\},$$

我们感谢 Wang Chao 指出推论 1.2，感谢 Qiu Ruifeng 和 Zhang Ying 与我们进行了许多有益的讨论。本研究部分受国家自然科学基金委员会项目（编号：12131009）资助，部分受上海市科学技术委员会项目（编号：22DZ2229014）资助。

其中， a_0（分别是a_n）在 H_1 （分别是 H_2）中界定一个圆盘。根据定义，弱可约 Heegaard分解对应的 Heegaard 距离至多为 1，而强不可约 Heegaard 分解的距离至少为 2。一般而言，高距离的 Heegaard 分解是常见的，参见 [11]。

利用 Heegaard 距离，Namazi [14] 证明了，若 $d(H_1, H_2)$ 足够大，则$Mod(S\colon H_1, H_2)$是有限的；Bestvina-Fujiwara[2], Ohshika-Sakuma [16] 加强了这一结果，并证明在条件足够大的情况下， $Mod(S\colon H_1, H_2)$ 是平凡的；Johnson[7] 降低了下界，并证明若 $d(H_1, H_2) \geq 4$, 则 $Mod(S\colon H_1, H_2)$ 可作为子群嵌入 M 的映射类群，记作 $Mod(M)$。根据 Perelman 证明的 Thurston 几何化定理， M是双曲的，且 $Mod(M)$ 是有限的。因此， $Mod(S\colon H_1, H_2)$ 是有限的。所以我们考察距离为 2 和 3 的 Heegaard 分解，即强不可约 Heegaard 分解。

然而，Long[8] 构造了一个距离至少为 1 的 Heegaard 分解，使得其映射类群包含一个伪阿诺索夫映射。这意味着， $Mod(S\colon H_1, H_2)$并不像我们所希望的那样简单。在 [17], 中，作者考虑了一个局部大距离至少为 2 的 Heegaard 分解的映射类群，并证明其映射类群是有限的，相应三维流形的映射类群也同样是有限的。考虑映射类群在 $\mathcal{PML}(S)$上的作用，即在 S上的射影测度层状空间上的作用，我们可以去掉局部大距离条件，并证明以下结果。

定理 1.1. 如果 $d(H_1, H_2) \geq 3$, 那么 $Mod(S\colon H_1, H_2)$是有限的。

注 1.1. 根据 Li[9, 10], 证明的 Waldhausen 定理，对于 M，只有有限多个彼此非同痕但亏格为 g 的 Heegaard 分解。因此，根据定理 1.1， $Mod(M)$是有限的。该结果为证明 $Mod(M)$的有限性提供了另一种方法。

然而，在所有距离 2 的 Heegaard 分解中，我们找到了一个反例，其中$Mod(S\colon H_1, H_2)$包含一个无限可约元，如下所示。

推论 1.2. 存在一个距离 2 的 Heegaard 分解 $H_1 \cup_S H_2$ ，以及 S 中的两条互不相交且不同伦的本质简单闭曲线 c_1 和 c_2 ，使得这两个德恩扭转的复合$T_{c_1} \circ T_{c_2}^{-1}$属于 $Mod(S\colon H_1, H_2)$。

由于 c_1与 c_2不同伦， $T_{c_1} \circ T_{c_2}^{-1}$生成了 $Mod(S\colon H_1, H_2)$的一个无限子群。我们将在第2节介绍一些引理，在第3节证明定理 1.1，并在第4节证明推论 1.2。

2. 一些引理

设 S 是一个亏格为 $g \geq 2$的闭可定向曲面。根据尼尔森–瑟斯顿分类， $Mod(S)$中的每个元素要么是周期的、可约的，要么是伪阿诺索夫的。对于每个伪阿诺索夫元素 $f \in Mod(S)$, 它在 $\mathcal{PML}(S)$中有一个稳定层状（$\mathcal{L}^+, \mu_+$）和一个不稳定层状（$\mathcal{L}^-, \mu_-$）。

2.1. $Mod(S)$ 的动力学。

2.1.1. 伪阿诺索夫映射。设 H 是一个边界为 S 的把手体。那么，在 H 中界定本质圆盘的本质简单闭曲线的集合嵌入到 $\mathcal{PML}(S)$ 中，而该子集的闭包记为 $\Lambda(H)$，在$\mathcal{PML}(S)$中没有内部。众所周知， $Mod(S)$中的并非每个元素都能延拓到整个 H。例如，沿一条破盘曲线进行的德恩扭转，即该曲线与每条圆盘边界曲线都有非平凡交。更进一步， $Mod(S)$中的几乎所有元素都不能延拓到 H 上。因为伪阿诺索夫元素在 $Mod(S)$ 中是一般的；如果一个伪阿诺索夫元素 f 能延拓到 H，那么根据 [3], ，它的稳定层状和不稳定层状都位于 $\Lambda(H)$ 中，而后者在 $\mathcal{PML}(S)$中没有内部。

已知，对于 f 的稳定层状和不稳定层状，以及任意本质简单闭曲线 $C \subset S$， $f^n(C)$ 会趋于测地叶状结构 L^+，而该结构是稳定层状 $\mathcal{L}^+ \subset L^+$。因此，对任意 $\delta > 0$，存在 N，使得对任意 $n \geq N$，豪斯多夫距离 $d_H(f^n(C)\ \mathcal{L}^+) \leq \delta$。类似地，我们有 $d_H(f^{-n}(C)\ \mathcal{L}^-) \leq \delta$。因此，对于任意可延拓至 H 的 $f \in Mod(S)$，若选取一条圆盘边界曲线 C，则对任意 n， $f^n(C)$ 都界定 H 中的一个本质圆盘。因此，存在一列圆盘边界曲线在豪斯多夫度量下收敛到 L^+；根据定义 2.1[1]， L^+ 在把手体 H 中界定圆盘。这个结果表明，在 H 中， f 下的圆盘边界曲线似乎属于 L^+。考虑 $\mathcal{PML}(S)$ 中的测度 $(\mathcal{L}^+, \mu_+)$，Ackermann[1] 证明了以下引理。

引理 2.1（引理 3.3）。设 $\delta > 0$ 足够小，并设 C 为一条测地简单闭曲线，且 $d_H(C, \mathcal{L}^-) < \delta$。另外，假设 C 和 L^+ 都在把手体 H 中围成边界。于是，对于任意小的 $\epsilon > 0$，存在弧 $a^+ \subset \mathcal{L}^+$、 $a^- \subset \mathcal{L}^-$，使得 $a^+ \cup a^-$ 是一个圆盘的边界，并且

- $\mu_+(a^-) < \epsilon$;
- $m(2\epsilon) - 2r \leq \mu_-(a^+) \leq 2M(\epsilon) + 2r$, $where\ r = r(\delta)$.

根据引理 2.1，我们有如下引理。

引理 2.2。如果 δ 足够小，则引理 2.1 中的弧 a^- 与 $\mathcal{L}^+$ 至多相交于一点。

证明。假设 a^- 与 $\mathcal{L}^+$ 至少相交于两点 p 和 q。设 γ 为 $\mathcal{L}^+$ 中的一条边界叶。由于 γ 在 $\mathcal{L}^+$ 中稠密， a^- 与 γ 横截地至少相交于两点。这意味着 $\mu_+(a^-)$ 大于一个仅依赖于 S 的常数。矛盾。□

2.1.2. 无限可约映射。设 $f \in Mod(S)$ 是一个无限可约元素。那么存在有限多个互不相交且非同痕的 f-不变本质简单闭曲线$\{C_1, ..., C_k\}$，位于 S 中。不失一般性，假设 $\{C_1, .., C_k\}$ 是典范最小可约系统，且每个 C_i 都不围成 H 中的圆盘。于是，$S - \cup_{i=1}^k C_i$ 的每个分支要么是裤子曲面，要么是非裤子紧子曲面 R，其上有 $\chi(R) \leq -1$。如果 $\partial H - \{C_1, ..., C_k\}$ 的每个分支都是裤子曲面，那么 f 的某个幂等于沿这些 C_i 的若干德恩扭转幂的复合。

引理 2.3（引理 2.14, [15]）。假设 $\overline{\partial H - \{C_1, ..., C_k\}}$ 的每个分量都是裤子曲面。那么对于每个 $1 \leq i \leq k$，存在一个本质环带 $A_i \subset H$，使得 $C_i \subset \partial A_i$。

否则，至少存在一个非裤子分量 $R \subset \overline{\partial H - \{C_1, ..., C_k\}}$。在这种情况下， R 在 H 中要么是可压缩的，要么是不可压缩的。如果 R 在 H 中是可压缩的，那么存在一条与 $\cup_{i=1}^{k} C_i$ 不相交的本质简单闭曲线 $C \subset R$，它在 H 中围成一个本质圆盘。如果 R 在 H 中是不可压缩的，则有如下引理。

引理 2.4（引理 2.15, [15]）。若 R 在 H 中不可压缩，则要么 H 是一个 I-丛，其中 R 的一个不可压缩非裤子分量是水平边界；要么存在一个 f-不变的本质环带 $A \subset H$，使得 $\partial A \subset \{C_1, ..., C_k\}$。

2.2. 子曲面投影与圆盘复形。设 $F \subset S$ 是一个本质真子曲面。为简便起见，我们假设 F 既不是环带，也不是裤子曲面。对于任意本质简单闭曲线 $C \subset S$，若 $C \cap F \neq \emptyset$ 在同痕意义下，则 $C \subset F$ 或 $C \cap F$ 由 F 中的本质弧组成。在 [12], 中，Masur-Minsky 将子曲面投影 π_F 定义为以下两个映射 $\eta \circ \phi$ 的复合，其中

- $\phi(C) = C \cap F$;
- $\eta(a)$ 是 F 中 $\partial(N(a \cup \partial F))$ 的本质简单闭曲线的集合，任取 $a \overline{\subset C \cap F}$。

接着他们证明，对于 S 中任意两条不相交的本质简单闭曲线 C_1 和 C_2，如果它们都与 F 有非平凡交点，那么 $diam_{\mathcal{C}(F)}(\pi_F(C_1) \ \pi_F(C_2)) \leq 2$。

设 H 是一个具有 $\partial H = S$ 的把手体。如果 F 在 H 中可压缩，且对于任一本质圆盘 $D \subset H$，$\pi_F(\partial D) \neq \emptyset$，那么本质真子曲面 $F \subset S$ 是 H 的一个可压缩洞。因此，对于可压缩洞 F， ∂F 不围成 H 中的圆盘。此外，Masur-Schleimer [13] 证明了以下引理。

引理 2.5. 如果 F 是一个可压缩洞，那么对于任一本质圆盘 $D \subset H$，要么 $\partial D \subset F$，要么存在一个本质圆盘 $D' \subset H$ 和 $\partial D' \subset F$，使得 $diam_{\mathcal{C}(F)}(\pi_F(\partial D) \ \partial D') \leq 6$。

3. Proof of Theorem 1.1

证明。设 $H_1 \cup_S H_2$ 是一个 Heegaard 分解，其映射类群为 $Mod(S\colon H_1, H_2)$。根据 Nielson-Thurston 分类，每个元素要么是周期的、可约的，要么是伪阿诺索夫。要证明 $Mod(S\colon H_1, H_2)$ 的有限性，只需证明其中不存在无穷多个可约元素或伪阿诺索夫元素。我们将证明分为 3.1 和 3.2 两个小节。

3.1. 假设存在一个伪阿诺索夫元素 $f \in Mod(S\colon H_1, H_2)$。那么 f 在 S 上有稳定层状 $\mathcal{L}^+$ 和不稳定层状 $\mathcal{L}^-$。由于 $f\colon H_1 \to H_1$，对于 H_1 中任意一个边界圆盘 C， $f^{-n}(C)$ 都映到 f 的不稳定层状 L^-。此外， C 和 L^+ 都在 H_1 中围成边界。于是由引理 2.1 和 2.2，存在一条本质简单闭曲线 $a_1^+ \cup a_2^-$，它在 H_1 中围成一个圆盘，使得 a_1^- 与 L^+ 至多相交于一点。类似地，也存在 $a_2^+ \cup a_2^-$，它在 H_2 中围成一个圆盘，且具有相同性质。因此， a_1^+ 与 a_2^- 至多相交于一点。 a_1^- 和 a_2^+ 的情形类似。

由于 a_1^+ 和 a_2^+ 都是 $\mathcal{L}$+的两条子弧， $a_1^+ \cup a_1^-$ 与 $a_2^+ \cup a_2^-$ 至多相交于两点。此外，$a_1^+ \cup a_1^-$（分别地，$a_2^+ \cup a_2^-$）在 H_1（分别地，

H_2）中围成一个本质圆盘 ∂D_2（分别地， ≤ 2）。于是 $|\partial D_1 \cap \partial D_2| \leq 2$。因此，Heegaard 距离 $d(H_1, H_2) \leq d(\partial D_1, \partial D_2) \leq 2$。矛盾。

3.2. 假设存在一个无限可约元 $f \in Mod(S: H_1, H_2)$。令$\{C_1, ..., C_2\}$为规范的最小 f-不变曲线系。

断言 3.1. $d(H_1, H_2) \leq 2$。

证明。为了证明此断言，只需找到两个本质圆盘 $D_1 \subset H_1$ 和$D_2 \subset H_2$，使得 $d(\partial D_1, \partial D_2) \leq 2$。

如果 $\{C_1, ..., C_k\}$ 中有一条曲线在 H_1 中围成一个圆盘，那么不失一般性，我们假设 C_1 围成一个圆盘 D。令 $D_1 = D$。于是 $\partial D \cap \cup_{i=1}^{k} C_i = \emptyset$。否则， $\{C_1, ...C_k\}$ 在 H_1 中不可压缩。

情形 3.1. $R = \overline{\partial H_1 - \{C_1, ..., C_k\}}$ 由裤子曲面组成。根据引理 2.3，对每个 $1 \leq i \leq k$，存在一个本质圆盘 D_i，使得 $\partial D_i \cap C_i = \emptyset$。

情形 3.2. R 在 H_1中可压缩。因此存在一个本质圆盘 $D \subset H_1$，使得$\partial D \cap \cup_{i=1}^{k} C_i = \emptyset$。令 $D_1 = D$。

情形 3.3. R 在 H_1中不可压缩。若 $f|_R$ 是周期的，则 f 的某个幂在 R上是恒等映射。于是 f 的某个幂是沿着 C_i的一些德恩扭转的若干次复合。因此，根据引理 2.3，对每个 $1 \leq i \leq k$，存在一个本质圆盘 $D_i \subset H_1$，使得$\partial D_i \cap C_i = \emptyset$。剩下的情形是， f 在一个分支 $R_0 \subset R$ 上的限制是一个伪阿诺索夫映射。根据引理 2.4， H_1 包含一个 I-丛，其一个水平曲面为R_0。

事实 3.2. H_1 不是一个只有一个水平曲面的 I-丛 R_0。

证明。假设结论不成立。那么 H_1 是一个以 R_0 为底的乘积 I-丛，或者是一个水平曲面为 R_0的扭曲 I-丛。如果 R_0 在 H_2中可压缩，那么存在一个圆盘$D_2 \subset H_2$，使得$\partial D_2 \cap \cup_{i=1}^{k} C_i = \emptyset$。在每种情况下，由于 H_1 不是实心环面，存在一个本质环带 $A \subset H_1$，使得 $\partial A \cap \partial D_2 = \emptyset$。于是 $d(H_1, H_2) \leq 2$。因此，我们还假设 R_0 在 H_2中不可压缩。由于 $f|_{R_0}$ 是伪阿诺索夫，根据引理 2.4， H_2 是一个水平边界曲面为 R_0 的 I-丛，或者包含一个水平边界曲面为 R_0的 I-丛。在这两种情况下，都存在两个本质环带 $A_1 \subset H_1$和 $A_2 \subset H_2$，使得 $\partial A_1 = \partial A_2$。因此， $d(H_1, H_2) \leq 2$。□

事实 3.2 的证明表明， H_1 不含 I-丛，因为 R_0 是水平曲面。用与上述类似的论证， H_2也不含 I-丛。因此，存在圆盘 $D_i \subset H_i$，它与C_1不相交，且满足 $i = 1,2$。于是 $d(H_1, H_2) \leq d(\partial D_1, \partial D_2) \leq 2$. 矛盾。

□

根据 3.1 和 3.2 中的讨论，每个元素 $f \in Mod(S: H_1, H_2)$ 都是周期的。因此，$Mod(S: H_1, H_2)$ 是一个有限群。

□

4. Infinite mapping class group of Heegaard splitting

本节中，我们构造一个距离二 Heegaard 分解 $H_1 \cup_S H_2$，使得 $Mod(S:H_1, H_2)$ 含有一个无限可约元。

令 H 为亏格 g 的把手体，$D \subset H$ 为一个非分离本质圆盘。我们选取一条与 ∂D 不相交且不同痕的非分离本质简单闭曲线 C，它在 H 中不围成圆盘。随后对 D 与环带 $A = C \times I$ 做带和，得到一个本质环带 $A' \subset H$。不难看出，$\partial A'$ 在 ∂H 中是非分离的。记 $\overline{\partial H - \partial A'}$ 为 S'。令 $\mathcal{D}(S') = \{\partial D \mid \partial D \cap \partial A' = \emptyset, D \text{ 为 } H \text{ 中的一个本质圆盘。}\}$

由于 $g(S) \geq 2$，S' 支持一个伪阿诺索夫映射。令 h 为 S' 上的一个一般伪阿诺索夫映射，即其稳定层状和不稳定层状都不属于 $\mathcal{PML}(S')$ 中的 $\mathcal{D}(S')$。那么 $d_{\mathcal{C}(S')}(\mathcal{D}(S'), h^n(\mathcal{D}(S'))) \to \infty$ 如 $n \to \infty$。因此存在一个数 K，使得

$$d_{\mathcal{C}(S')}(\mathcal{D}(S'), h^K(\mathcal{D}(S'))) \geq 15.$$

由于 h 作用于 S'，因此可以通过定义$h|_{\partial A'} = Id$，将其扩展为 ∂H 上的一个同胚 h。因此，$H_1 \cup_S H_2 = H \cup_{h^K} H$ 是一个 Heegaard 分解。此外，其距离为 2。

断言 4.1. $d(H_1, H_2) = 2$。

证明。对于任意把手体 H_i，当 $i = 1,2$ 时，都存在一个与$\partial A'$不相交的本质圆盘 D_i，$d(H_1, H_2) \leq 2$。假设结论不成立。则 $d(H_1, H_2) \leq 1$。因此，存在一对本质圆盘 $D_1 \subset H_1$ 和 $D_2 \subset H_2$，使得 $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$。

不难看出，S' 是 $\mathcal{D}(H_1)$ 和 $\mathcal{D}(H_2)$ 的可压缩洞。由引理 2.5，对于 $D_1 \subset H_1$，存在一个本质圆盘 $D_1' \subset H_1$，其中 $\partial D_1' \subset S'$，使得 $diam_{\mathcal{C}(S')}(\pi_{S'}(\partial D_1)\ \partial D_1') \leq 6$。类似地，也存在一个本质圆盘 $D_2' \subset H_2$，使得 $diam_{\mathcal{C}(S')}(\pi_{S'}(\partial D_2)\ \partial D_2') \leq 6$。此外，由于 ∂D_1与 ∂D_2不相交，$diam_{\mathcal{C}(S')}(\pi_{S'}(\partial D_1)\pi_{S'}(\partial D_2) \leq 2$。总之，$d_{\mathcal{C}(S')}(\partial D_1', \partial D_2') \leq 14$。矛盾。□

记作 $\partial A' = C_1 \cup C_2$。不难看出，$C_1$ 与 C_2不同伦。因此，两个德恩扭转的复合 $\psi = T_{C_1} \circ T_{C_2}^{-1}$ 具有无限阶。要证明 ψ 可延拓到 H_1上，只需证明存在一个极小圆盘系 $\{D_1, ..., D_g\}$，使得$\psi(\{D_1, ..., D_g\})$也是一个圆盘系。因此，我们只需证明，对于任意 $1 \leq i \leq g$, $\psi(D_i)$是 H_1中的一个本质圆盘。

令 $\{D_1, ..., D_{g-1}\}$ 为与 A' 不相交的 $g-1$ 两两不相交圆盘的集合，并令 D_g为与 A'相交于一条弧的圆盘。由于 $C_1 \cup C_2$与 ∂D_i不相交，因此 $1 \leq i \leq g-1$，$\psi(D_i) = D_i$。对于 ∂D_g，$h(\partial D_g)$ 仍在 H_1中围成一个本质圆盘。因此 $\psi(H_1) = H_1$。关于 H_2的论证类似，故略去。因此，$\psi = T_{C_1} \circ T_{C_2}^{-1} \subset Mod(S: H_1, H_2)$ 具有无限阶。

References

[1] Ackermann, Robert *An alternative approach to extending pseudo-Anosovs over compression bodies.* 代数与几何拓扑 15 (2015)，第 4 期，2383–2391。[2] Bestvina, Mladen；Fujiwara, Koji *Handlebody subgroups in a mapping class group.* 沿袭 Ahlfors-Bers 的传统。VII，29–50，Contemp. Math.，696，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[3] Biringer, Ian；Johnson, Jesse；Minsky, Yair *Extending pseudo-Anosov maps into compression bodies.* 拓扑学杂志 6 (2013)，第 4 期，1019–1042。[4] Casson, A. J.；Gordon, C. McA. *Reducing Heegaard splittings.* 应用拓扑学 27 (1987)，第 3 期，275–283。[5] Gordon, Cameron McA. 问题。 *Workshop on Heegaard Splittings*，401–411，Geom. Topol. Monogr.，12，Geom. Topol. Publ.，考文垂，2007。[6] Hempel, John *3-manifolds as viewed from the curve complex.* 拓扑学 40 (2001)，第 3 期，631–657。[7] Johnson, Jesse *Mapping class groups of medium distance Heegaard splittings.* Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010)，第 12 期，4529–4535。[8] Long, D. D. *On pseudo-Anosov maps which extend over two handlebodies.* Proc. 爱丁堡数学学会 (2) 33 (1990)，第 2 期，181–190。[9] Li, Tao *Heegaard surfaces and measured laminations. I. The Waldhausen conjecture.* 数学发明 167 (2007)，第 1 期，135–177。[10] Li, Tao *Heegaard surfaces and measured laminations. II. Non-Haken 3-manifolds.* 美国数学学会杂志 19 (2006)，第 3 期，625–657。[11] Lustig, Martin；Moriah, Yoav *Are large distance Heegaard splittings generic?* 附录由 Vaibhav Gadre 撰写。J. Reine Angew. Math. 670 (2012)，93–119。[12] Masur, H. A.；Minsky, Y. N. *Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure.* 几何与泛函分析 10 (2000)，第 4 期，902–974。[13] Masur, Howard；Schleimer, Saul *The geometry of the disk complex.* 美国数学学会杂志 26 (2013)，第 1 期，1–62。[14] Namazi, Hossein *Big Heegaard distance implies finite mapping class group.* 应用拓扑学 154 (2007)，第 16 期，2939–2949。[15] Oertel, Ulrich *Automorphisms of three-dimensional handlebodies.* 拓扑学 41 (2002)，第 2 期，363–410。[16] Ohshika, Ken'ichi；Sakuma, Makoto *Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions.* 180 2016 117 134 几何专论 ( )，–。[17] Zou, Yanqing；Qiu, Ruifeng *Finiteness of mapping class groups: locally large strongly irreducible Heegaard splittings.* 14 2020 2, 591 605 群、几何与动力系统 ( )，第 – 期。

Yanqing Zou 数学科学学院 & 上海市 PMMP 重点实验室 华东师范大学 电子邮箱：yqzou@math.ecnu.edu.cn