arXiv:2303.02853v1 [math.DS] 6 Mar 2023

通过符号计算研究平面六体问题中心构型的有限性

KE-MING CHANG 和 KUO-CHANG CHEN

Abstract. 本文提出符号计算算法，以研究平面 n 体问题中心构型的有限性。我们的方法基于 Albouy-Kaloshin 关于五体问题中心构型有限性的研究。在他们的论文中，引入了称为 zw 图的双色图，用以描述有限性猜想不成立时可能出现的情形；证明有限性即在于排除与这些图相关的中心构型。沿用他们的方法，当物体数超过五个时，计算量会变得极其庞大。本文引入矩阵代数来确定图和渐近阶，设计了若干判据以降低计算复杂度，并主要通过自动推导验证有限性。对于平面六体问题，我们的第一种算法有效地将有限性证明缩减至 117 zw 图；第二种算法排除了其中的 31 个；最后一种算法排除了另外 62 个图，但质量空间中某个余维二簇上的质量除外，因此仍有 24 种情形尚未解决。

Table of Contents

1. 引言 2 2. 奇异序列、 zw-图和着色规则 5 3. 奇异序列的矩阵规则 10 4. 奇异序列的阶矩阵 16 5. 汇集多项式方程 30 6. 算法 I - 确定 zw-图 33 7. 算法 II - 确定变量的序 36 8. 算法 III - 消元和质量关系 38 9. $n = 4$ 41的情形10. $n = 5$ 45的情形11. $n = 6$ 54的情形附录 I: 使用 Mathematica 编写的算法 I 程序 76 附录 II：使用 Mathematica 编写的算法 II 程序 82 附录 III：使用 Mathematica 编写的算法 III 程序 97 附录 IV：质量关系中一些频繁出现的因子 111 参考文献 117

Date：2023年3月1日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：70F10、70F15；次要分类号：68W30、03B35。*Key words and phrases.* n体问题、中心构型、符号计算。本研究部分由台湾国家科学委员会资助。

1. Introduction

牛顿 n体问题研究的是 n 质点 m_1, $\cdots$, m_n 在空间中依照牛顿万有引力定律运动的情形:

$$\ddot{q}_k = \sum_{l\neq k} \frac{m_l(q_l - q_k)}{|q_l - q_k|^3}, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.1}$$

其中, $q_k \in \mathbb{R}^d$ (1 $\leq$ d $\leq$ 3) 是质量 m_k 的位置。位置向量 q =(q_1, $\cdots$, q_n) $\in$ ($\mathbb{R}^d$)^n 称为该系统的构型 。系统 (1.1) 除碰撞集 Δ 外均为光滑的, 该碰撞集定义为

$$\Delta = \{q \in (\mathbb{R}^d)^n : q_i = q_j \text{ for some } i \neq j\}.$$

Δ 中的构型称为碰撞构型。

中心构型是无碰撞构型, 并具有如下性质: 每个质点 m_k 的引力加速度 $\ddot{q}_k$ 都是从 q_k指向系统质心的向量的一个常数倍。更确切地说, 设

$$q_c = \frac{1}{m_1 + \cdots + m_n}(m_1 q_1 + \cdots + m_n q_n)$$

为系统的质心。若存在一个正的常数 λ, 称为乘子, 使得 q =(q_1, $\cdots$, q_n) $\in$ ($\mathbb{R}^d$)$^n \setminus \Delta$ 是质量为 (m_1, $\cdots$, m_n) 的系统的中心构型 , 则称其为该系统的中心构型。

$$-\lambda(q_k - q_c) = \sum_{l\neq k} \frac{m_l(q_l - q_k)}{|q_l - q_k|^3}, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.2}$$

中心构型的集合显然在相似变换下保持不变, 因此, 如果两个中心构型属于同一个相似类, 就认为它们等价。

中心构型在天体力学中具有特殊的重要性, 因为它们在自相似解、奇点分析、抛物解以及积分流形的分岔中发挥着关键作用。此外, 它们还有一些实际应用, 例如空间任务设计、小行星运动、行星环建模等。从纯数学的角度来看, 这是一个深刻而引人入胜的课题, 许多基本问题仍悬而未决。关于相关介绍和参考文献, 请读者参阅 [1, 4, 17, 19] ; 关于许多尚未解决的问题, 请参阅[2, 19] 。一个基本问题关乎中心构型的有限性:

有限性猜想: 对于任意选取的 n 个正质量, 中心构型只有有限多个相似类。

有限性猜想, 也称为 Chazy-Wintner 猜想, 其雏形见于 Chazy 1918年的论文 [5], 该文提出中心构型的非退化性; 而其现今的表述则见于 Wintner 的经典专著 [24]。Moulton [20] 于1910年证明, 共线情形 ($d = 1$) 恰有 $n!/2$ 个中心构型相似类, 因此有限性猜想仅针对 $d \geq 2$。有限性猜想的平面情形 ($d = 2$)

被列入 Smale 为 21世纪提出的数学问题清单 [22], ，从而大大提升了这一课题在数学界的关注度和影响力。关于有限性猜想历史的全面介绍，参见 [4, §1] 。下文仅简要介绍其现状，以及与本文工作最相关的进展。

本文始终讨论平面问题。众所周知，三体问题有 5 个中心构型相似类 [8, 13], ，但对于多于三个物体的情形，计数中心构型通常颇具挑战，因为这需要计算复杂多项式方程组的实根数。这类多项式方程组会因所选变量而异，它们是通过对 (1.2) 进行代数运算推导出来的；中心构型的相似类以这种方式嵌入该多项式方程组的零点集之中。

Hampton 和 Moeckel [11]于 2006年解决了四体问题的有限性猜想，改进了此前针对一般质量 [18], 的研究；他们采用了计算代数几何中的 Bernstein-Khovanskii-Kushnirenko (BKK) 理论。他们所用的多项式方程主要是 Albouy-Chenciner 方程 [3] 和 Dziobek 方程 [7]。证明涉及对某些复杂多项式的牛顿多面体、闵可夫斯基和及混合体积进行计算，并对与闵可夫斯基和多面体各面相对应的约化多项式方程组进行变量消去。面的数量非常庞大，其中许多面所对应的多项式方程组几乎不可能手工处理，因此计算机代数的辅助必不可少。尽管计算量巨大，但所有计算均为精确计算且只涉及整数，因此不存在舍入误差。采用类似的设置并借助热带几何工具，Hampton [9],、Hampton-Jensen [10], 和 Jensen-Leykin [12]为若干类平面和空间五体问题得到了有限性结果。

2012年，Albouy and Kaloshin [4] 解决了平面五体问题的有限性猜想，但质量空间中某个余维二簇上的质量除外。他们为中心构型选取了另一组变量，从而得到一个不同的多项式系统，并设计了一种基于图的方法来处理实根的有限性。将该方法应用于四体问题时，它大幅减少了 BKK 方法所需的计算量，而且无需借助计算机即可完成。五个物体的情形需要进行多得多的计算，因此研究中使用符号计算对一些“庞大”的多项式进行了因式分解。

有限性猜想无法推广到任意非零质量，因为 Roberts 的一个著名反例 [21] 表明，如果允许负质量， $n = 5$ 就会存在一个中心构型连续统。Yu-Zhu [23] 近期一项基于 Albouy- Kaloshin 方法的有趣研究证明，即使存在负质量， $n = 4$ 仍具有有限性。

有限性猜想的最新进展，得益于对中心构型的深刻观察，以及计算代数几何和计算机代数领域的现代工具。若直接沿用以往的设定和方法， $n = 6$ 具有一般质量的情形似乎仍远未得到解决，因为所涉及的计算量极其庞大，多项式也异常复杂。关于 $n = 6$ 的有限性，已有证明

但目前仅针对少数例外情形 [6, 14, 15, 16, 25], 得到了证明，其中一些情形还确定了中心构型的确切数量。

作为迈向 $n = 6$ 有限性猜想的一步，本文沿用 Albouy-Kaloshin 的方法，引入两族矩阵以便进行代数运算，并设计了三种符号计算算法，以完成大部分计算。我们的目标是开发高效工具，通过自动推导解决有限性猜想，尽可能节省计算时间，并尽可能减少尚未解决的情形，从而使后续研究能够以我们遗留的情形为起点，稳步推进。我们工作的另一个目标是通过符号计算，为这一研究方向提供一个便捷的平台：通过不断探索中心构型的更多判据或规则，只需将其转化为新的子程序并添加到我们的算法中即可。为此，我们在附录中公开了 Mathematica 源代码，并附上了清晰的说明，介绍子程序与所用判据之间的对应关系。

在 [4] 双色图中，引入了称为 zw-图 的图，用来描述有限性猜想可能失效的情形；证明有限性归结为排除与这些图相关联的中心构型。在他们的论文中，证明情形$n = 4$ 的有限性被缩减为 5 zw-图，而情形 $n = 5$ 则被缩减为 16 zw-图。与其他有关有限性的研究相比，他们的设定似乎最适用于情形$n = 6$，尽管我们尚未解决所有情形。在此，我们引入矩阵代数，以确定 zw-图和主变量的渐近阶，并设计若干判据来降低计算复杂度，再使用我们的算法验证有限性。第一个算法将情形 $n = 6$ 缩减为 117 zw-图；第二算法排除了其中的 31 个；第三个算法则找到了 62 个图的质量关系，其中一个不可能对应正质量。因此，仍有 24 个情形的有限性尚未解决。

本文结构安排如下。我们将在第 2 节简要介绍 Albouy- Kaloshin 的方法。特别地，我们会回顾他们提出的奇异序列、 zw-图、着色规则以及一些对我们的分析和算法至关重要的估计。第 3 节中，我们将 zw-图与其邻接矩阵联系起来，并建立若干矩阵规则。有些矩阵规则直接源自着色规则，有些则更为复杂。第 4 节中，我们将另一组称为阶矩阵的矩阵与 zw-图联系起来，这些矩阵用于追踪主变量可能的序。我们将证明关于阶矩阵的若干判据。第 5 节展示收集多项式方程的过程。接着，在第 6 节中，我们给出一种有效算法，用于生成所有可能的zw-图。第 7 节将介绍生成阶矩阵的算法。基于这些阶矩阵，我们要么直接消去 zw-图，要么为该图收集多项式方程。第 8 节介绍一种用于消元并生成质量关系的算法。第 9、10 节分别展示我们将算法应用于四体问题和五体问题的结果。第 11 节介绍我们工作的主要进展，即将其应用于六体问题。附录包含 Mathematica 程序的源代码，以及一些频繁出现的质量关系的详细内容。

2. Singular sequences, zw-diagrams, and coloring rules

本节简要介绍 Albouy and Kaloshin 关于平面中心构型的方法 [4]。我们将介绍他们对归一化中心构型的表述、奇异序列和 zw-图的概念，并概述他们的大部分估计和着色规则。这些概念和规则是我们在后续各节中进行论证和设计算法所必需的预备知识。

2.1. 归一化中心构型。 令 $q_k = (x_k,\ y_k) \in \mathbb{R}^2$ 表示质量为 $m_k > 0$ 的质点的位置，$q_{lk} = q_k - q_l$, $q_{lk} = (x_{lk},\ y_{lk})$表示质量为 $r_{lk} = \|q_l - q_k\|$ 的质点的位置，并令 q_l 与 q_k 之间的相互距离为 $r_{lk} = \|q_l - q_k\|$。由于中心构型的集合在相似变换下保持不变，我们可以通过将质心置于原点来消去平移，通过令乘子为 $\lambda = 1$来消去缩放，并通过令$y_{12} = 0$来消去旋转。于是（1.2）变为

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{l\neq k} m_l r_{lk}^{-3} x_{lk}, \quad k = 1,\dots,n, \\ y_k &= \sum_{l\neq k} m_l r_{lk}^{-3} y_{lk}, \quad k = 1,\dots,n, \\ y_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

考虑复数 x_k, y_k, m_k，并添加新变量 $\delta_{kl} \in \mathbb{C}$, $1 \le k \neq l \le n$，用于表示 r_{kl}^{-1}。于是（2.1）可改写为关于 $\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{\binom{n(n-1)}{2}}$ 的如下多项式系统。

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{l\neq k} m_l \delta_{lk}^3 x_{lk}, \quad k = 1,\dots,n, \\ y_k &= \sum_{l\neq k} m_l \delta_{lk}^3 y_{lk}, \quad k = 1,\dots,n, \\ 1 &= \delta_{kl}^2 (x_{kl}^2 + y_{kl}^2), \quad 1 \le k < l \le n, \\ y_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

将 m_k 复化后，子系统的总质量可能等于零。为了使“子系统的质心”仍有意义，我们施加了质量弱假设：

$$\sum_{k\in I} m_k \ \neq\ 0 \quad \text{for any nonempty } I \subset \{1,\cdots,n\}.$$

定义 2.1。 向量 $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,\delta_{12},\dots,\delta_{(n-1)n}) \in \mathbb{C}^{2n}\times\mathbb{C}^{\binom{n}{(n-1)2}}$若是系统 (2.2) 的解，则称为归一化中心构型 。实归一化中心构型 是指 x_k 和 y_k 均为实数的归一化中心构型，而正归一化中心构型 是指 δ_{kl} 为正数的实归一化中心构型。

引理 2.1。设 $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 为归一化中心构型的集合，并令

$$U = \sum_{k<l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}} = \sum_{k<l} m_k m_l \delta_{kl}$$

为势能。则 U（$\mathcal{A}$）是有限的。

2.2. **奇异序列**。令 $z_k = x_k + iy_k$、$w_k = x_k - iy_k$、$z_{kl} = z_k - z_l$ 和 $w_{kl} = w_k - w_l$。则 $z_{kl} w_{kl} = r_{kl}^2$,

$$\begin{pmatrix} z_k \\ w_k \end{pmatrix} = \sum_{l \neq k} m_l r_{lk}^{-3} \begin{pmatrix} z_{lk} \\ w_{lk} \end{pmatrix} = \sum_{l \neq k} m_l \begin{pmatrix} z_{lk}^{-1/2} w_{lk}^{-3/2} \\ z_{lk}^{-3/2} w_{lk}^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

且系统 (2.2) 中的条件 $y_{12} = 0$ 等价于 $z_{12} = w_{12}$。项 r_{kl} 称为“距离”，项 z_{kl} 和 w_{kl} 分别称为“z-分离”和“w-分离”。

设 $Z_{kl} = z_{kl}^{-1/2} w_{kl}^{-3/2}$ 和 $W_{kl} = z_{kl}^{-3/2} w_{kl}^{-1/2}$。系统 (2.2) 化为

$$\begin{aligned} z_k &= \sum_{l \neq k} m_l Z_{lk}, \quad k = 1, \ldots, n, \\ w_k &= \sum_{l \neq k} m_l W_{lk}, \quad k = 1, \ldots, n, \\ 1 &= \delta_{kl}^2 z_{kl} w_{kl}, \quad 1 \leq k < l \leq n, \\ z_{12} &= w_{12}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

使用这些新变量，归一化中心构型可写为

$$\mathcal{Q} = (z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n, \delta_{12}, \ldots, \delta_{(n-1)n}),$$

我们将其与 $\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ 中的两个向量 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{W}$ 相关联，其中 $\mathcal{N} = {}^{n}{}_{(n+1)\ 2}$，给定 b $\quad$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= (\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_{\mathcal{N}}) = (z_1, \ldots, z_n, Z_{12}, \ldots, Z_{(n-1)n}), \\ \mathcal{W} &= (\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_{\mathcal{N}}) = (w_1, \ldots, w_n, W_{12}, \ldots, W_{(n-1)n}). \end{aligned}$$

令 $\|\mathcal{Z}\| = \max_{1 \leq k \leq \mathcal{N}} |\mathcal{Z}_k|$ 和 $\|\mathcal{W}\| = \max_{1 \leq k \leq \mathcal{N}} |\mathcal{W}_k|$。对于由归一化中心构型组成的序列 $\mathcal{Q}^{(m)}$，我们选取一个子序列 $\mathcal{Q}^{(m_j)}$，使得 $\|\mathcal{Z}^{(m_j)}\| = |\mathcal{Z}^{(m_j)_p}|$，其中某个 $1 \leq p \leq \mathcal{N}$ 满足条件，并且 $\|W^{(m_j)}\| = |\mathcal{W}^{(m_j)_q}|$，其中某个 $1 \leq q \leq \mathcal{N}$ 满足条件。我们再次提取一个子序列，使得 $\|\mathcal{Z}\|^{-1}\mathcal{Z}$ 和 $\|\mathcal{W}\|^{-1}\mathcal{W}$ 都收敛。

若 $\mathcal{Z}$ 有界，由于 $z_{12} = w_{12}$，项 Z_{12} 等于 z_{12}^{-2}，因此 z_1、z_2 和 Z_{12} 不可能同时趋于零。因此，所提取子序列的 $\|\mathcal{Z}\|$ 与零保持正距离。同样，若 $\mathcal{W}$ 有界，则所提取子序列的 $\|\mathcal{W}\|$ 与零保持正距离。

提取出的子序列有两种:

(1) $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{W}$ 均有界；(2) $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{W}$ 中至少有一个无界。

无论哪种情况， $\|\mathcal{Z}\|$ 和 $\|\mathcal{W}\|$ 都远离零。可以证明，第一类提取出的子序列收敛到一个归一化中心构型。

定义 2.2。 考虑一个归一化中心构型序列。通过上述过程提取的子序列，如果属于第二类，则称为奇异序列。

2.3. **奇异序列的彩色图**。 下一步是对奇异序列进行分类。对于两个由非零数构成的序列 a, b ，我们分别使用 $a \sim b$、 $a \preceq b$、 $a \prec b$ 和$a \approx b$ 表示“$a/b \to 1$”、“a/b 有界”、“$a/b \to 0$”以及“$a \preceq b$ 和 $b \preceq a$”。

从现在开始，我们将采用一种新的归一化方式。我们将 z_k 乘以一个正数a ，并将 w_k 乘以 a^{-1} ，使得 $\|\mathcal{Z}\| = \|\mathcal{W}\|$。在这种归一化下，我们不再具有关系 $z_{12} = w_{12}$。

由于 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{W}$ 远离零，对于奇异序列， $\|\mathcal{Z}\|\,\|\mathcal{W}\|$ 总是无界的。我们令 $\|\mathcal{Z}\| = \|\mathcal{W}\| = \epsilon^{-2}$，其中 ϵ 是一个收敛到 0 的序列。

对于奇异序列，我们写下物体指标；如果z_k 具有最大序（即 $z_k \approx \epsilon^{-2}$），就在指标 k 周围画一个圆；如果 $Z_{kl} \approx \epsilon^{-2}$，就在 k 和 l 之间画一条线段。我们称此图为 z-图。对于 w_k和 W_{kl}，我们用另一种颜色做同样的标记，并画出 w-图。将 z-图与 w-图结合起来，我们得到一个与该奇异序列相关联的双色图，称为 zw-图，或简称图。物体指标是该图的顶点 。

“边”这一术语不同于“线段”。顶点 k 与顶点l 之间有一条边，意味着顶点 k 与顶点 l之间有一条 z-线段或 w-线段。边有三种类型： z-边、 w-边、 zw-边。第一种表示这两个顶点之间只有一条 z-线段，第二种表示这两个顶点之间只有一条 w-线段，第三种表示这两个顶点之间同时有一条 z-线段和一条 w-线段。

2.4. **接近性与聚类方案**。在 z-图中，

(1) 若 k 与 l 在 z-图中接近或 z-接近，则称这两个顶点为 $z_{kl} \prec \epsilon^{-2}$。(2) 若 V是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的非空子集，且从 V 中的某个顶点到 V外的另一个顶点没有 z-线段，则称 V为一个孤立分支。(3) 若 $z_{kl} \approx \epsilon^{-2}$，则称 k 与 l 之间的 z-线段为极大。

w-近邻、孤立分支以及 w-图中的极大 w-线段等概念的定义相同。

当我们取奇异序列的极限时， z_k 和 w_k 可能形成簇。例如，如果 $z_{12} \prec z_{13}$，我们称 1 在 z-坐标中相对于物体子集 $\{1, 2, 3\}$ 与 2 成簇。当考虑更多物体时，它们可能形成子簇。为表示簇结构，我们写作 z ： 24。1.....3，对应于情形 $z_{24} \prec z_{12} \prec z_{13}$。两个不带点的指标表示它们之间的 z-分离最小（在这些物体之间的所有分离中）；一个点表示分离具有中等阶；三个点表示分离最大。将考虑用 ϵ 的幂函数表示的三种精确且不同的分离阶： ϵ^2、 ϵ、 ϵ^{-2}。

2.5. **阶估计和着色规则**。 下面我们总结 [4] 中的一些关键估计和着色规则。

定理 2.2 （估计 1）。 对于任意两个顶点 k 和 l，有

(1) $\epsilon \preceq r_{kl} \preceq \epsilon^{-2}$,(2) $\epsilon^2 \preceq z_{kl}, w_{kl} \preceq \epsilon^{-2}$,(3) k 和 l 之间存在一条 zw-边，当且仅当 $r_{kl} \approx \epsilon$,(4) k 和 l 之间存在一条极大 z-边，当且仅当 $w_{kl} \approx \epsilon^2$.

定理 2.3 (估计 2**).** 假设 k 和 l之间存在一条 z-线段，则

(1) $\epsilon \preceq r_{kl} \preceq 1$,(2) $\epsilon \preceq z_{kl} \preceq \epsilon^{-2}$,(3) $\epsilon^2 \preceq w_{kl} \preceq \epsilon$,(4) 它是一条 zw-边
$\Leftrightarrow$ $r_{kl} \approx \epsilon$ $\Leftrightarrow$ $z_{kl} \approx \epsilon$ $\Leftrightarrow$ $w_{kl} \approx \epsilon$,(5) 它是一条极大 z-线段
$\Leftrightarrow$ $r_{kl} \approx 1$ $\Leftrightarrow$ $z_{kl} \approx \epsilon^{-2}$ $\Leftrightarrow$ $w_{kl} \approx \epsilon^2$.

若将“z”和“w”互换，则定理 2.2、2.3仍然成立。

定理 2.4 (单色规则)。 在奇异序列的 z 图中，我们有以下性质。

(规则 1a) 至少存在一条 z 线段。在每条 z 线段的端点处，要么有另一条从该端点延伸出的 z 线段，要么有一个围绕该端点的 z 圆。在每个 z 圆处，都有一条从该圆延伸出的 z 线段。**(规则 1b)** 如果物体 k 和 l 彼此 z 接近，那么它们要么都被 z 圆环绕，要么都不被 z 圆环绕。**(规则 1c)** 在一个孤立分支中，该分支内物体的质心与原点z接近。**(规则 1d)** 在 z 图的一个孤立分支中，如果存在一个 z 圆，则还存在另一个。此外，这些 z 圆不可能全部 z聚集在一起。**(规则 1e)** 在一个孤立分支中，存在一条极大 z 线段，当且仅当存在一个z圆。

若将“z-”替换为“w-”，则规则 *1a-1e* 仍然成立。

定理 2.5 (双色规则)。 在奇异序列的 zw-图中，我们有以下性质。

（环绕法）如果 k 和 l之间有一条 w笔画（分别为 z笔画），那么 k 和 l要么都被 z环绕（分别为被 w环绕），要么都不被 z环绕（分别为不被 w环绕）。**（规则 2a）**对于图中的每条 zw边，都有另一条 z笔画和一条 w笔画从该边发出。**（规则2b）**如果有两条连续的 zw边，则存在第三条 zw边，使这三条边构成一个三角形。**（规则 2c）**考虑两条连续且不属于三角形的边。假设它们分别是连接*1*和*2*的边以及连接*2*和*3*的边。那么簇结构为z：1.2...3、 w： 1...2.3 或 z： 1...2.3、 w： 1.2...3。在这种情况下，我们称之为偏斜聚类。**（规则 2c 的推论）**如果图中有两条连续的 z边（w边），且它们不属于三角形，那么它们不能同时是极大的。

（规则 *2d*）考虑一个边的循环、该循环中的 z分离列表，以及列表中的最大阶。至少有两个此类 z分离达到该阶，且对应的边属于同一类型。此外，如果恰有两个 z分离达到该阶，那么这两个 z分离等价（即， $z_{k_1l_1} \sim z_{k_2l_2}$，如果这些边分别连接 k_1和 l_1、 k_2和 l_2）。若将“z-”替换为“w-”，同一规则也成立。（规则 *2e*）如果三条边构成一个三角形，那么它们属于同一类型，对应的z分离具有相同的序，对应的 w分离也具有相同的序。（规则 *2e* 的推论）考虑任意三个顶点，连接它们的笔画数为*0*、*1*、*2*、*3*或*6*。（规则 *2f*）考虑一个由图中的边构成、顶点为 k_1、 k_2、 k_3 的三角形。假设存在 $p > 3$ 以及其他顶点 k_4、 k_5、 ...、 k_p，使得对于每个 $4 \leq t \leq p$，至少有两条边将 k_t 与 k_1、.....、 k_{t-1}中的顶点连接起来。那么 k_1、 $\ldots k_p$中任意两者之间都有一条边；这些边属于同一类型，其对应的 z分离具有相同的序，其对应的 w分离也具有相同的序。（规则 *2g*）如果四条边构成一个四边形，那么对边属于同一类型。（规则 *2h*）如果有物体 k_0、 l_0，使得对于所有 k、 l和 $r_{k_0l_0} \to 0$， $r_{k_0l_0} \preceq r_{kl}$成立，那么还存在另一对物体 k_1、 l_1，使得 $r_{k_1l_1} \approx r_{k_0l_0}$成立。（规则 *2h* 的推论）如果图中有一条 zw边，那么还存在另一条。

一些关于 [4, 命题 1,2,4] 奇异序列的其他命题也对我们的目的有所帮助：

命题 2.6。 如果对于每个不同于 1 和 n 的 k， $z_{1n} \prec z_{kn}$ 且 $w_{1n} \approx w_{kn}$，那么 z_1、 z_n 和原点构成一个大小为 $\approx z_{1n}$ 的簇；即 z_1、 $z_n \preceq z_{1n}$。

命题 2.7。 如果存在某个 k_0，使得对于所有 $l \neq k_0$ 都有 $r_{k_0l} \succ 1$，那么存在某些 k_1、 k_2，使得 $z_{k_0} \prec z_{k_1}$ 且 $w_{k_0} \prec w_{k_2}$。

命题 2.8。 假设该图恰好有一条极大的 z-边，且它构成一个孤立分支，不妨设物体 *1* 和 *2* 是这条边的端点。如果 $m_1^3 + m_2^3 \neq 0$，那么不存在满足 $3 \leq k \leq n$ 的 k，使得对于满足 $l \neq k$ 和 $3 \leq l \leq n$ 的所有 l，都有 $w_{1k} \prec w_{1l}$。

如果将“z”和“w”互换，这些命题仍然成立。

2.6. **关于有限性证明的备注**。 对于 4 个物体的情况，Albouy and Kaloshin 首先运用着色规则，构造与奇异序列相关的所有可能的图。对于其中一些图，他们找到一个关于质量的代数关系，而与该图相关的奇异序列必然满足这一关系。有四个图具有简单的质量关系，还有一个图不会导出任何质量关系。

在有限性证明中，他们经常使用以下论证：

• 如果存在无穷多个归一化中心构型，那么就有某个多项式函数 p 取无穷多个值，并且存在一个奇异序列，使得 p 趋于 0 或 ∞。

• 某个奇异序列中，$p_1 \to 0$ （或 ∞）在某些图中是不可能的，因此，另一个指定的多项式 p_2 会沿着这个奇异序列趋于 0（或 ∞）。

• 沿着某个奇异序列，多项式 $p \to 0$ （或 ∞）意味着存在另一个奇异序列，使得 p 趋于 ∞ （或 0）。

•某个奇异序列中，$p \to 0$ （或 ∞）在某些图中是不可能的，因此这些质量必须满足其他某个图所对应的质量关系。

粗略地说，有限性证明的思路是从归一化中心构型集合中取出若干个奇异序列，它们分别对应不同的图，但不存在能够同时满足所有这些相应质量关系的质量。

3. 矩阵规则：奇异序列

本节定义与中心构型奇异序列相关联的 z-矩阵、 w-矩阵和 zw-矩阵，并为这些矩阵建立代数规则。这些矩阵规则大多是根据上一节中的估计、着色规则和命题推导出来的。其中一些是着色规则的直接推论，但另一些则更为复杂。它们为实现我们的算法提供了有效工具。

定义 3.1。 给定 n 体问题的一个中心构型奇异序列，并考虑相应的 zw-图。将其 z-图的邻接矩阵（其中z-圆视为自环）称为与该奇异序列相关联的 z-矩阵 。更确切地说， z-矩阵是对称的 $n \times n$ 二元矩阵 $A = (a_{ij})$，定义如下

$a_{ij} = 1$ 若 $i \neq j$ 且物体 m_i 与 m_j之间有一条 z-线段；$= 0$ 若 $i \neq j$ 且物体 m_i 与 m_j之间没有 z-线段；$a_{ii} = 1$ 若 m_i处有一个 z-圆；$= 0$ 若 m_i.处没有 z-圆

类似地，与该奇异序列相关联的 w-矩阵是 w-图的邻接矩阵，其中将 w-圆视为自环。它是由下式给出的 $n \times n$ 二元矩阵 $B = (b_{ij})$:

$b_{ij} = 1$ 如果 $i \neq j$ 且物体 m_i 与 m_j之间存在一条 w-线段；$= 0$ 如果 $i \neq j$ 且物体 m_i 与 m_j之间不存在 w-线段；$b_{ii} = 1$ 如果在 m_i处有一个 w-圆；$= 0$ 如果在 m_i.处没有 w-圆

奇异序列的 zw-矩阵 是二元矩阵（$A|B$）。我们称 A 和B 互为伴随矩阵 。

定义 3.2. z-矩阵 A （分别为 w-矩阵 B）的连通分量 是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的一个子集I，使得从 $A^{n+1}-I$ （分别从 $B^{n+1}-I$）中删除所有 $j \notin I$ 对应的第 j列和第 j行后得到的主子矩阵，是一个所有元素均为正的极大主子矩阵。

定义 3.3. 如果 $\{1,2,\ldots,n\}$ 是 A （分别为 B）的一个连通分量，则称 z-矩阵 A（分别为 w-矩阵 B）为完全连通。

我们的矩阵规则是可能的 z-矩阵和 w-矩阵的必要条件。它们可根据所涉及图的类型进行分类。若一条规则涉及 z-图或 w-图之一，但不同时涉及二者，我们称其为单色矩阵规则。若该判据涉及 zw-图，我们称其为双色矩阵规则。值得注意的是，单色矩阵规则并非仅仅是单色规则的矩阵表述，双色矩阵规则也并非只是双色规则的推论。

下文中，我们将根据矩阵的基本特征以及所涉及顶点的数量对矩阵规则进行分类。表1展示了我们的分类及其与着色规则的对应关系。其中一条并非源自任何着色规则。许多规则需要用到上一节中的估计和命题，但我们在表中省略了这些依赖关系。

分类矩阵规则		**着色规则**	**Mono-着色的**	**Bi-着色的**
列和	列和规则	1a	√	
	双列和规则	2a		√
迹	迹的第一规则	1d	√	
	迹的第二规则	1e		√
	迹为 2 的矩阵第一规则	1a,1d,2c,2e	√	
	迹为 2 的矩阵第二规则	1a,1d,1e,2a,2c,2e,cm		√
	迹为 3 的矩阵规则	1c, 2c, 2e	√	
	迹为 0 的主子式规则	（无）	√	
Edge	环绕规则	cm		√
三角形	三角形第一规则	2c	√	
	三角形第二规则	2c	√	
	三角形第三规则	2e		√
	三角形第四规则	2e		√
四边形	四边形第一规则	2f	√	
	四边形第二规则	2g		√
五边形	五边形规则	2d		√
连通性	全连通伴随对象规则	1e,2d		√
	连通分支规则	1c		√

TABLE 1. 矩阵规则分类。在着色规则中，“cm”是环绕法的缩写。

我们的矩阵规则名称大多直观易懂。例如，关于迹的规则是对 z-、 w- 或 zw-矩阵的迹的限制，或是对迹固定的情形的限制；关于三角形的规则是对图中三个顶点的限制；关于四边形的规则

是对四个顶点的限制，依此类推。单边规则是个例外，我们将其命名为环绕规则，因为它是环绕法的直接推论。

假设与记号： 在下文中，我们假设对称的 $n\times n$二元矩阵$A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 分别是与某个中心构型奇异序列相关联的 z-矩阵和 w-矩阵。相关联的 zw-矩阵为 $(A|B)$。令 $A+B=C=(c_{ij})$。

定理 3.1。令 $E=A$ 或 B。

(a) **(列和规则)** E 的列和均不等于 *1*，且 E 的列和不可能全为 *0*。(b) **(双列和规则)** 若对于某个 $1\le i<j\le n$有 $c_{ij}=2$，则

$$\left(\sum_{k\neq i,j}(a_{ki}+a_{kj})\right)\left(\sum_{k\neq i,j}(b_{ki}+b_{kj})\right)\neq 0.$$

证明。（a）部分由规则 1a 可轻易推出。

注意，$c_{ij}=2$ 表示在 i 和 j之间有一条 zw-边。根据规则 2a，从这条 zw-边还延伸出另一条 z-线段。因此，$\sum_{k\neq i,\ j}a_{ki}>0$ 或 $\sum_{k\neq i,\ j}a_{kj}>0$，由此可得 $\sum_{k\neq i,\ j}(a_{ki}+a_{kj})>0$。类似地，$\sum_{k\neq i,\ j}(b_{ki}+b_{kj})>0$。这就证明了（b）。□

定理 3.2。**（环绕规则）**对于任意 $1\le i<j\le n$，我们有

$$a_{ij}(b_{ii}+b_{jj}),\ b_{ij}(a_{ii}+a_{jj})\neq 1.$$

证明。 这可由环绕法直接得出。 □

T定理 3.3。(a) **（迹的第一规则）**迹 $\mathrm{tr}(A)$ 不能为 A *1* .

(*b*) （迹的第二规则）若对于每个 $1\le i<j\le n$ 都有 $c_{ij}\neq 1$，则 *tr(C)* $=0$。 (*c*) （迹为 *2* 的矩阵第一规则）若 *tr(A)* $=2$，且对于某个 $i\neq j$ 有 $a_{ii}=a_{jj}=1$，则对于任意 $k\neq i$、j，都有 $a_{ij}=1$ 和 $a_{ik}=a_{jk}$。 (*d*) （迹为 *2* 的矩阵第二规则）设 *tr(A)* $=2$，且对于某个 $i\neq j$ 有 $a_{ii}=a_{jj}=1$，而对于任意 $k\neq l$ 有 $a_{kl}=0$。那么对于任意 k，都有 $b_{ik}=b_{jk}=0$。若$m_i^3+m_j^3\neq 0$，则 *tr(B)* $\neq n-3$。 (*e*) （迹为 *3* 的矩阵规则）设 *tr(A)* $=3$，且对于互不相同的 i、j、k 有 $a_{ii}=a_{jj}=a_{kk}=1$。若 $l\notin\{i,j,k\}$ 且 $a_{ij}=a_{ik}=a_{il}=1$，则 $a_{jl}+a_{kl}\neq 0$。若将 A 与 B 互换，这些规则仍然成立。

证明。 (a) 部分可由规则 1d 立即得出。

如果对于任意 $1\le i<j\le n$ 都有 $c_{ij}\neq 1$，那么根据估计 1，所有边都是 zw-边，且没有一条是极大的。根据规则 1e，不存在圆，因此对于任意 k 都有 $c_{kk}=0$。这就证明了 (b)。

假设 (c) 的假设成立。那么，i 和 j周围有 z-圆，且不存在其他 z-圆。假设 $a_{ij}\neq 1$，则 i 和 j之间不存在 z-线段。根据规则 1a，对于某个 $k\neq j$，将存在一条连接 i 和 k 的 z-线段；对于某个 $l\neq i$，还存在另一条连接 j 和 l 的 z-线段。由于 k 和 l 未被 z-圆圈围住，这两条 z-线段必定是极大的。这

意味着 $k \neq l$，否则将与规则 2c 的推论（若 i 和 j之间没有边）或规则 2e（若 i 和 j之间存在一条 w-边）相矛盾。

注意，连接 i 和 k 的 z-线段必须是从 i发出的唯一一条 z-线段。为此，假设还存在另一条 z-线段，例如从 i 到 p （$\neq k$, j），则这条 z-线段必为极大；再由规则 2c 的推论和规则 2e，z_{pk} 也必为极大，但这是不可能的，因为 z_p, $z_k \prec \epsilon^{-2}$ （即 p 和 k 均未被 z-圆圈圈出）。

在 z-分离中，对所有 $p \neq i$, j，都有 $z_{ip} \approx \epsilon^{-2}$。由规则 1d, i 和 j 属于 z-图中的同一孤立分支，且 $z_{ij} \approx \epsilon^{-2}$。在 w-分离中，根据估计 1，对所有 $p \neq k$，有 $w_{ik} \approx \epsilon^2$ 和 $w_{ip} \succ \epsilon^2$。根据命题 2.6，我们得到 $w_i \preceq w_{ik} \approx \epsilon^2$。类似地， $w_j \preceq w_{jl} \approx \epsilon^2$, 进而可得 $w_{ij} \preceq \epsilon^2$，这与估计 1 以及我们关于 i 和 j之间不存在 z-线段的假设相矛盾。这证明了 (c) 的第一部分；即 $a_{ij} = 1$。

假设 $a_{ik} = 1$ 对于某个 $k \neq i$, j。要完成 (c) 的证明，我们只需证明$a_{jk} = 1$。 i 和 k 之间的 z-线段是极大的，因为 k 不是 z-圈。根据规则 1d, i 和 j 之间的z-线段也为极大。由此，根据规则 2c 的推论， i、 j和 k 在 zw-图中构成一个三角形。根据规则 2e， j 和 k 之间的边与另外两条边属于同一类型，因此 $a_{jk} = 1$。至此，(c) 得证。

接下来，我们假设 (d) 的假设成立。由 (c) 可知 $a_{ij} = 1$，因此 z-图恰有一条 z-线段，且它位于 i 和 j之间。不失一般性，我们可以假设$i = 1$、 $j = 2$。

根据规则 2a 和 z-线段的唯一性，我们有 $b_{12} = 0$。根据环绕法，从顶点 1、2 到其他顶点不存在 w-线段，因此对于 $k \geq 3$，有 $b_{1k} = b_{2k} = 0$。于是根据规则 1a，1、2 周围不存在 w-圆；即 $b_{11} = b_{22} = 0$，因此对于任意 k，都有 $b_{1k} = b_{2k} = 0$。等价地说，这两个 z-圆以及它们之间的 z-线段在 zw图中构成一个孤立分支。根据规则 1e，唯一的 z-线段是极大的。

假设 $\mathrm{tr}(B) = n - 3$；即存在 $n - 3$ w-圆。根据以上讨论，这些w-圆与 z-圆不相交。不失一般性，假设它们环绕顶点 $3, \cdots, n-1$。那么对于任意 $l \in \{3, \cdots, n-1\}$,

$$w_{1n} = w_1 - w_n \prec \epsilon^{-2} \approx w_1 - w_l = w_{1l}$$

由于顶点 1, n 没有被 w 环绕，而 l 被环绕。这与命题 2.8 矛盾，前提是$m_1^3 + m_2^3 \neq 0$。因此，我们得出结论：在此质量条件下，$\mathrm{tr}(B) \neq n - 3$。由此证明了 (d)。

最后，假设 (e) 的假设成立。那么 $z_p \prec z_i, z_j, z_k \approx \epsilon^{-2}$ 对任意 $p \notin \{i, j, k\}$ 都成立，并且根据规则 1c,

$$(m_i + m_j + m_k)z_i - m_j z_{ij} - m_k z_{ik} = m_i z_i + m_j z_j + m_k z_k \prec \epsilon^{-2}.$$

因此， z-笔画 z_{ij}, z_{ik} 中至少有一个是极大的。不失一般性，假设 z_{ij} 是极大的。 z-笔画 z_{il} 也是极大的，因为 i 被 z 环绕，而 l 没有。根据规则 2c，顶点 $\{i, j, l\}$ 在 zw-图中构成一个三角形；根据规则 2e，三角形的三条边属于同一类型。于是 $a_{jl} + a_{kl} \geq a_{jl} = 1$，从而完成了 (e) 的证明。□

定理 3.4。 考虑 $n \geq 3$ 和给定的 $1 \leq i < j < k \leq n$。

(a) **（三角形第一规则）**

$$(a_{ii}+a_{jj}+a_{kk})\,(a_{ii}+a_{ij}+a_{ik})\,(a_{ik}+a_{jk}+a_{kk})\,(a_{ij}+a_{jj}+a_{jk}) \neq 16.$$

（b）**（三角形第二规则）**

$$(a_{ii}+a_{ij}+a_{ik}+a_{jj}+a_{jk}+a_{kk})\,m_{i,j,k} \neq 9.$$

其中 $m_{i、\ j、\ k}$ = 最大值$\{a_{ii}+a_{ij}+a_{ik},\ a_{ji}+a_{jj}+a_{jk},\ a_{ki}+a_{kj}+a_{kk}\}$。

(c) **（三角形第三规则）**

$$c_{ij}+c_{jk}+c_{ik} \notin \{4,5\}.$$

(d) **（三角形第四规则）**

$$c_{ij}c_{jk}c_{ik}\max\{a_{ij}+a_{jk}+a_{ik}, b_{ij}+b_{jk}+b_{ik}\} \in \{0,3,24\}.$$

如果将 A 替换为 B，则规则 *(a)*、*(b)* 成立。

证明。假设 (a) 中的乘积等于 16。唯一的可能是四个因子都等于 2。可以很容易地列举出所有可能性:

(i) $a_{ii}=0$ implies $a_{ij}=a_{ik}=a_{jj}=a_{kk}=1$ and $a_{jk}=0$.
(ii) $a_{jj}=0$ implies $a_{ii}=a_{ij}=a_{jk}=a_{kk}=1$ and $a_{ik}=0$.
(iii) $a_{kk}=0$ implies $a_{ii}=a_{ik}=a_{jj}=a_{jk}=1$ and $a_{ij}=0$.

在情形 (i) 中，z图包含一条从 j 到 i的 z线段、一条从 i 到 k的 z线段，且没有一条从 j 到 k的 z线段。j 和 k 都被 z 圈出，而 i 没有被 z 圈出。这意味着从 j 到 i 以及从 i 到 k 的 z 线段都是极大的。这与规则 2c 矛盾。

类似地，情形 (ii) 得到一个 z图，其中有两条连续的 z线段，一条从 i 到j，另一条从 j 到 k，并且没有一条从 i 到 k的 z线段。此外，i 和 k 被 z圈出，而j 没有被圈出。这同样与规则 2c 矛盾。情形 (iii) 的讨论完全相同。由此证明 (a)。

(b) 的证明类似。假设 (b) 中的方程等于 9。max$\{...\}$ 中的三个项之一必须为 3，且第一个因子（$a_{ii}+a_{ij}+\cdots$）也必须等于 3，因此恰有三个 1 和三个 0。不失一般性，考虑以下情形

$$a_{ii}=a_{ij}=a_{ik}=1,\ \ a_{jj}=a_{jk}=a_{kk}=0.$$

该 z 图包含一条从 j 到 i的 z 线段，一条从 i 到 k的 z 线段，但没有从j 到 k的 z 线段。j 和 k 都没有被圈上 z，因此这两个顶点不是极大的。顶点 i 是极大的，因为它被圈上了 z，所以从 j 到 i 以及从 i 到 k 的 z 线段都是极大的。同样，这与规则 2c 矛盾。

(c) 部分可由规则 2e 的推论立即得出。

为证明 (d)，我们只需考虑 $c_{ij}c_{jk}c_{ik}\neq 0$，此时每对顶点 i、j、k 之间都有一条边。这三条边构成一个三角形；根据规则 2e，它们属于同一类型。如果它们是 zw 边，那么判别式

$$c_{ij}c_{jk}c_{ik}\max\{a_{ij}+a_{jk}+a_{ik}, b_{ij}+b_{jk}+b_{ik}\}$$

(d) 中的判别式显然为 24；如果它们是 z 边或 w 边，那么判别式显然为 3。 □

定理 3.5。考虑 $n\geq 4$ 以及给定的 $1\leq i<j<k\leq \ell\leq n$。

（a）**（四边形第一规则）**

$$a_{ij} + a_{ik} + a_{i\ell} + a_{jk} + a_{j\ell} + a_{k\ell} \neq 5.$$

(b) **（四边形第二规则）**如果 $c_{ij}c_{jk}c_{k\ell}c_{\ell i} \neq 0$，那么

$$a_{ij} + a_{k\ell},\ a_{jk} + a_{\ell i},\ b_{ij} + b_{k\ell},\ b_{jk} + b_{\ell i} \ \neq\ 1.$$

如果将 A 替换为 B，规则 *(a)* 仍然成立。

证明。(a) 部分可由规则 2f 轻易推出。(b) 部分可由规则 2g 轻易推出。 □

定理 3.6。**（五边形规则）**设 $n \geq 5$，且 i_1、i_2、i_3、i_4、$i_5 \in\{1,\dots,n\}$ 两两不同。令 $i_0 = i_5$。假设

$$\prod_{k=0}^{4} c_{i_k i_{k+1}} \ \neq\ 0.$$

Let

$$\begin{aligned} N_z &= \#\{k : (a_{i_k i_{k+1}}, b_{i_k i_{k+1}}) = (1,0),\ k = 0,1,2,3,4\} \\ N_w &= \#\{k : (a_{i_k i_{k+1}}, b_{i_k i_{k+1}}) = (0,1),\ k = 0,1,2,3,4\} \\ N_{zw} &= \#\{k : (a_{i_k i_{k+1}}, b_{i_k i_{k+1}}) = (1,1),\ k = 0,1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

那么 $N_z \neq 1$，$N_w \neq 1$，$(N_z,\ N_w,\ N_{zw}) \neq$(4，0，1)，(0，4，1)。

证明。该规则的假设表明，顶点 i_1、i_2、i_3、i_4、i_5 在zw-图中构成一个五边形。五边形的边构成了 i_k与 i_{k+1}, $k = 0$、$\cdots$、4之间的边的循环。不失一般性，假设对每个 k，都有 $i_k = k$。

注意，N_z、N_w、N_{zw} 分别表示五边形边上的边中 z-边、w-边、zw-边的数量。设 $N_z = 1$，则不妨假设唯一的 z-边位于顶点 1 和 2 之间。由规则 2d，z_{12} 不可能在 $\{z_{12}, z_{23}, z_{34}, z_{45}, z_{51}\}$ 中具有最大阶。设其中有一条边 z_{ij} 具有最大阶，则由估计 2 得 $\epsilon \prec z_{12} \prec z_{ij}$。$i$ 与 j之间有一条 w-线段，再次由估计 2 可得 $\epsilon \preceq w_{ij}$，因此

$$\epsilon^4 \ \prec\ z_{ij}^3 w_{ij} \ =\ W_{ij}^{-2} \ \approx\ \epsilon^4,$$

矛盾。这表明 $N_z \neq 1$。类似地，$N_w \neq 1$。

假设 $(N_z,\ N_w,\ N_{zw}) =$(4，0，1)；也就是说，在这个五边形中存在唯一的 zw-边、四条 z-边，且不存在w-边。根据估计 2，该 zw-边对应的 w-分离的序严格大于四条 z-边对应的 w-分离的序，但这与规则 2d 矛盾。对于 $(N_z,\ N_w,\ N_{zw}) \neq$(0，4，1) 的证明类似。□

定理 3.7。(a) **（全连通伴随对象规则）**如果 z-矩阵或w-矩阵是完全连通的，那么其伴随矩阵的迹为 *0*。

(b) **（连通分支规则）**如果 I 是 A（分别为 B）的一个连通分量，则（i）$\sum_{i\in I} a_{ii} \neq 1$（分别为 $\sum_{i\in I} b_{ii} \neq 1$），（ii）如果对于所有 $i \in I$（分别为 $b_{ii} = 1$）都有 $a_{ii} = 1$，那么存在互不相同的 i、$j \in I$，使得 $c_{ij} \neq 2$。

证明。要证明 (a)，只需假设 A 是完全连通的，并证明对于每个 k 都有 $b_{kk}=0$。假设该规则不成立，即对于某个 k 有 $b_{kk}=1$。根据规则 1e，在某些顶点 k_1 和 k_2 之间存在一条极大的 w-线段。估计 2 表明，k_1 与 k_2 之间的边是一条 w-边。由于 A 是完全连通的，因此存在一条由 z-线段组成的路径，从 k_1 连接到 k_2。这条路径与 k_1 和 k_2 之间的 w-边共同构成一个多边形。但是，在这个多边形的各边中，$w_{k_1k_2}$ 是唯一的极大 w-分离，这与规则 2d 矛盾。因此，对于每个 k 都有 $b_{kk}=0$。这就证明了 (a)。

如果 I 是 A的一个连通分量，那么 I 就是 z-图中的一个孤立分支。根据规则 1c，I 中物体的质心与原点的距离小于 z；也就是说，$\sum_{i\in I} m_i z_i \prec \epsilon^{-2}$。因此，$I$中不可能恰好有一个被 z-圆圈标记的物体，从而 $\sum_{i\in I} a_{ii}\neq 1$。类似地，如果 I 是 B的一个连通分量，那么 $\sum_{i\in I} b_{ii}\neq 1$。如果对于所有 $i\in I$都有 $a_{ii}=1$，那么 I 中的所有物体都被 z-圆圈标记，因此对于所有 $i\in I$都有 $z_{ii}\approx\epsilon^{-2}$。取一个 $i\in I$。由于对于 $j\neq i$ 有 $z_j=z_{ji}+z_i$，我们得到

$$\epsilon^{-2}\succ\sum_{j\in I} m_j z_j=\sum_{j\in I} m_j z_i+\sum_{j\in I,\ j\neq i} z_{ji},$$

由此可知，存在某个 $j\in I$，使得 $j\neq i$，且 $z_{ji}\approx\epsilon^{-2}$；因此，顶点 i 和 j之间不可能有一条 zw 边。因此，存在 $i,\ j\in I$，使得 $j\neq i$，且$c_{ij}\neq 2$。这就完成了 (b) 的证明。□

定理 3.8。（迹为 0 的主子式规则）设 $I\subset\{1,\dots,n\}$。若对所有 $i\in I$ 都有 $a_{ii}=0$，则 $\sum_{i\in I,\ j\notin I} a_{ij}\neq 1$。若交换 A 和 B，此规则仍然成立。

证明。设 $\sum_{i\in I,\ j\notin I} a_{ij}=1$。那么存在唯一的 $(i_0,\ j_0)$，使得 $i_0\in I$ 且 $j_0\notin I$，并满足 $a_{i_0j_0}=1$。由系统 (2.3) 可得

$$\sum_{i\in I} m_i z_i=\sum_{i\in I, j\notin I} m_i m_j Z_{ij}.$$

由于对于所有 $i\in I$，$m_{i_0}m_{j_0}Z_{i_0j_0}$ 都是该方程中序最大的唯一一项，这是不可能的。因此 $\sum_{i\in I,\ j\notin I} a_{ij}$ 不可能为 1。□

我们指出，当 $n\le 5$ 时，在消去 zw-矩阵的过程中可以跳过迹为 0 的主子式规则。对于 $n=6$，该规则则不可或缺。

4. 奇异序列的序矩阵

在§2.3中，奇异序列经过归一化，使得 $\|\mathcal{Z}\|=\|\mathcal{W}\|=\epsilon^{-2}$，其中 ϵ 是一个趋于0的正数序列。本节将引入阶矩阵，以讨论三组变量的序，并用 ϵ的幂函数来表示。这三组变量分别是“位置” z_k、w_k，“分离” z_{kl}、w_{kl}，以及“距离”r_{kl}。

4.1. 阶的层级与阶矩阵。 回顾一下，非零复数序列 a 满足 $a \approx \epsilon^{\lambda}$、 $\lambda \in \mathbb{R}$，当且仅当 a/ϵ^{λ} 和 ϵ^{λ}/a 均有界。在这种情况下，我们称 a具有阶 ϵ^{λ}。如果 $a/\epsilon^{\lambda} \to 0$，记作 $a \prec \epsilon^{\lambda}$，则称 a 具有严格小于 ϵ^{λ}的阶。

让我们将这一概念进一步扩展。给定一个复数序列 b ，其中可能包含无穷多个零点，如果 b 具有严格小于 ϵ^{λ} 的序，我们称其为 $b/\epsilon^{\lambda} \to 0$。同样的记号 $b \prec \epsilon^{\lambda}$ 也将被使用。类似地，如果 b 具有严格大于ϵ^{λ} 的序，我们称其为 $b/\epsilon^{\lambda} \to \infty$。同样的记号 $\epsilon^{\lambda} \prec b$ 也将被使用。

虽然估计 1 为分离和距离的序提供了界，但分离和距离未必能用 ϵ 的幂函数表示出定义良好的序，位置变量也是如此。不过，说一个变量的序严格介于某个ϵ^{λ_1} 和 ϵ^{λ_2}之间是有意义的。在提及变量的序时，我们将使用这一更宽泛的概念。

为简化讨论并为符号计算扫清道路，我们将可能的序划分为几个层级，从而对问题进行离散化；然后引入序矩阵，以记录这些变量的可能层级。

根据估计 1 和估计 2，我们将位置序和分离划分为六个层级：
层级 *0*： 序严格小于 ϵ^2层级 *1*： 序为 ϵ^2层级 *2*： 序严格介于 ϵ^2 和 ϵ之间层级 *3*： 序为 ϵ层级 *4*： 序严格介于 ϵ 和 ϵ^{-2}之间层级 *5*： 序为 ϵ^{-2}

由于分离满足 $\epsilon^2 \preceq z_{kl}$， $w_{kl} \preceq \epsilon^{-2}$，因此层级 0 仅可能对应位置。距离满足 $\epsilon \preceq r_{kl} \preceq \epsilon^{-2}$，所以我们以不同方式划分其序：
级别 *1*： 序为 ϵ级别 *2*： 序严格介于 ϵ 与 1 之间级别 *3*： 序为 1级别 *4*： 序严格介于 1 与 ϵ^{-2} 之间级别 *5*： 序为 ϵ^{-2}

记号。 设 a 是位置、分离或距离变量。

$$\mathscr{L}(a) = k \iff a \text{ has order in level } k.$$

若 $\mathscr{L}(a) \in s$，则称集合 s 覆盖 a 的序。

下面这个简单观察稍后会用到：

引理 4.1。 若物体 i 与 j 之间有一条边，则 $\mathscr{L}(z_{ij}) + \mathscr{L}(w_{ij}) = 6$。若物体 i 与 j 之间没有边，则 $\mathscr{L}(z_{ij}) + \mathscr{L}(w_{ij}) \geq 6$。

证明。 若 i 与 j 之间有一条边，则

$$\text{either} \quad z_{ij}^{-1/2} w_{ij}^{-3/2} = Z_{ij} \approx \epsilon^{-2} \quad \text{or} \quad w_{ij}^{-1/2} z_{ij}^{-3/2} = W_{ij} \approx \epsilon^{-2}.$$

如果 i 和 j之间没有边，那么

$$z_{ij}^{-1/2} w_{ij}^{-3/2} = Z_{ij} \prec \epsilon^{-2} \quad \text{and} \quad w_{ij}^{-1/2} z_{ij}^{-3/2} = W_{ij} \prec \epsilon^{-2}.$$

由这些公式和估计 1、2 可轻易得出该引理。 □

定义 4.1。 一个 zw阶矩阵 是对称 $n\times n$矩阵的有序对（S， T）， $S=$（s_{ij}），$T=$（t_{ij}），满足

$$s_{ij},\ t_{ij}\ \subset\ \{1,2,3,4,5\}\quad \text{for } i\neq j,$$
$$s_{ii},\ t_{ii}\ \subset\ \{0,1,2,3,4,5\}\quad \text{for any } i.$$

如果每个 s_{ij}和 t_{ij}都是非空的，我们称（S， T）是非空的 。一个 r阶矩阵 是对称$n\times n$ 矩阵 $D=$（d_{ij}），满足

$$d_{ij}\subset\{1,2,3,4,5\}\quad \text{for } i\neq j,$$
$$d_{ii}=\emptyset\quad \text{for any } i.$$

如果每个带有 $i\neq j$ 的 d_{ij} 都是非空的，我们称 D 是非空的。

请注意，序矩阵的元素是集合，而不是标量。我们将把适用于集合的记号和术语应用于序矩阵。例如，给定 zw阶矩阵（S， T）、（S'， T'）、（S''， T''），

$$\begin{aligned}(S',T')\subset(S,T)\ &\iff\ s'_{ij}\subset s_{ij},\ t'_{ij}\subset t_{ij}\ \ \forall i,j;\\ (S,T)\cup(S',T')=(S'',T'')\ &\iff\ s''_{ij}=s_{ij}\cup s'_{ij},\ t''_{ij}=t_{ij}\cup t'_{ij}\ \ \forall i,j;\\ (S,T)\cap(S',T')=(S'',T'')\ &\iff\ s''_{ij}=s_{ij}\cap s'_{ij},\ t''_{ij}=t_{ij}\cap t'_{ij}\ \ \forall i,j.\end{aligned}$$

4.2. 用序矩阵覆盖序。 给定一个与奇异序列相关联的 zw图。我们从一个覆盖位置和分离的所有可能层级的 zw阶矩阵，以及一个覆盖距离的所有可能层级的 r阶矩阵开始。例如，我们可以从最大的序矩阵开始；即选择

$$s_{ii}=t_{ii}=\{0,1,2,3,4,5\}\ \ \forall i,\quad s_{ij}=t_{ij}=r_{ij}=\{1,2,3,4,5\}\ \ \forall i\neq j.$$

通过直接估计并运用第 2 节中的工具，我们将对可能层级施加越来越多的限制。最终会出现两种可能结果：要么得出矛盾（例如某个s_{ij} 变为空），在这种情况下，我们可以直接排除 zw-图；要么得到位置、分离和距离的可能层级范围。对于后一种情况，我们将直接使用这个 zw-序矩阵，或者选取一个更精细的 zw-序矩阵集合进行进一步研究。

定义 4.2. 如果一个非空 zw-序矩阵的集合 $\mathcal{C}$ 覆盖 奇异序列的 zw-阶，那么对于该奇异序列的任意子序列，只要其中位置和分离的阶处于固定层级，就存在$(S,\ T)\ \in\mathcal{C}$, $S=(s_{ij})$, $T=(t_{ij})$, 使得

$$\mathscr{L}(z_k)\in s_{kk},\ \ \mathscr{L}(w_k)\in t_{kk}\quad \text{for every } k,$$
$$\mathscr{L}(z_{kl})\in s_{kl},\ \ \mathscr{L}(w_{kl})\in t_{kl}\quad \text{for every } k\neq l.$$

我们称非空 r阶矩阵的集合 $\mathcal{R}$ 覆盖 r序 奇异序列，如果对于该奇异序列的任意子序列，只要其距离的序处于固定层级，就存在 $D\in\mathcal{R}$, $D=(d_{ij})$，使得

$$\mathscr{L}(r_{kl})\in d_{kl}\quad \text{for every } k\neq l.$$

记号。 我们使用简写记号

$$\mathcal{C} \ni (A|B)$$

当由非空 $\mathcal{C}$ zw阶矩阵构成的集合覆盖与 zw矩阵（$A|B$）相关的任意奇异序列的 zw阶时。为简洁起见，我们说 $\mathcal{C}$ 覆盖 () 的阶。如果集合 $\mathcal{C}$仅由一个 zw阶矩阵（S，T）构成，我们也将使用记号

$$(S,T) \ni (A|B).$$

除非另有说明，当用大写字母表示矩阵时，相应的小写字母表示该矩阵的元素。例如，写作（S，T）∋（$A|B$）时，我们假定 $A=$（a_{ij}）、$B=$（b_{ij}）、$S=$（s_{ij}）、$T=$（t_{ij}）、$1 \le i, j \le n$。

Rem引理 4.1. 性质“∋（$A|B$）”在并集和交集运算下封闭；即 .

$$\begin{aligned}(S_1,T_1),\,(S_2,T_2) \ni (A|B) \quad &\Longrightarrow \quad (S_1,T_1)\cup(S_2,T_2),\,(S_1,T_1)\cap(S_2,T_2) \ni (A|B),\\ \mathcal{C}_1,\,\mathcal{C}_2 \ni (A|B) \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2,\,\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2 \ni (A|B).\end{aligned}$$

一旦确定了位置和分离的层级范围，我们的下一个目标就是找到一个“合适的” zw阶矩阵集合，使其覆盖该奇异序列的 zw阶。它们将自动生成一个 r阶矩阵集合，覆盖该奇异序列的r阶。粗略地说，预期“合适的” zw阶矩阵集合应满足两个判据：

(i) 该集合对于符号计算而言规模不至于过大。(ii) 集合中的成员能导出多项式方程，这些方程有助于为奇异序列生成质量关系。

这两个判据彼此制约。位置序和分离的描述越精确，我们就越有可能从中得到有用的多项式方程，但代价是需要更大的 zw阶矩阵集合。我们将通过一个简单的例子来说明这一点。这个例子也为我们选择集合的方法 $\mathcal{C}$提供了一些启发。

例 4.1。 假设我们最终得到

$$\mathscr{L}(z_{12}),\,\mathscr{L}(z_{13}),\,\mathscr{L}(w_{12}),\,\mathscr{L}(w_{13}) \in \{2,3,4\},\ \mathscr{L}(z_{23}),\,\mathscr{L}(w_{23}) \in \{3\}.$$

我们可以使用一个 zw阶矩阵，其中

$$s_{12}=s_{13}=t_{12}=t_{13}=\{2,3,4\},\ \ s_{23}=t_{23}=\{3\}$$

以涵盖 z_{12}、 z_{13}、 z_{23}、 w_{12}、 w_{13}、 w_{23}的阶。为了更精细地刻画它们的阶，根据关系 $z_{12}+z_{23}=z_{13}$、 $w_{12}+w_{23}=w_{13}$ 可知，不可能有一个z分离（或 w分离）的阶严格大于另外两个，因此我们可以用一个 zw阶矩阵集合替代zw阶矩阵，其中（s_{12}、 s_{13}、 s_{23}）和（t_{12}、 t_{13}、 t_{23}）等于以下情况之一，

$$(\{2\},\{3\},\{3\}),\,(\{3\},\{2\},\{3\}),\,(\{3\},\{3\},\{3\}),\,(\{4\},\{4\},\{3\}),$$

并保持其他 s_{ij}'s、 t_{ij}'s 不变。

匹配（s_{12}、 s_{13}、 s_{23}）和（t_{12}、 t_{13}、 t_{23}）共有 16 种方式。其中一些可以排除，而该集合仍覆盖 zw 阶。举例来说，由 $z_{12}^{-1}w_{12}^{-3} = Z_{12}^2 \preceq \epsilon^{-4}$ 可知，如果 s_{12}、 t_{12} 中的一个是 $\{2\}$，另一个必定是 $\{4\}$。 s_{13}、 t_{13} 也是如此。因此，我们可以用 8 zw 阶矩阵替换原来的 zw 阶矩阵，其中

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{2\}, \{3\}, \{3\}, \{4\}, \{4\}, \{3\}),\\
&\text{(ii)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{3\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{4\}, \{3\}),\\
&\text{(iii)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{3\}, \{3\}, \{3\}, \{3\}, \{3\}, \{3\}),\\
&\text{(iv)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{3\}, \{3\}, \{3\}, \{4\}, \{4\}, \{3\}),\\
&\text{(v)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{4\}, \{4\}, \{3\}, \{2\}, \{3\}, \{3\}),\\
&\text{(vi)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{4\}, \{4\}, \{3\}, \{3\}, \{2\}, \{3\}),\\
&\text{(vii)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{4\}, \{4\}, \{3\}, \{3\}, \{3\}, \{3\}),\\
&\text{(viii)} && (s_{12}, s_{13}, s_{23}, t_{12}, t_{13}, t_{23}) = (\{4\}, \{4\}, \{3\}, \{4\}, \{4\}, \{3\}),
\end{aligned}
$$

并保持其他 s_{ij}、 t_{ij} 不变。

通过交换顶点 2 和 3，情形 (i) 和 (ii) 可以视为相同，情形 (v) 和 (vi) 也可以视为相同。如果我们进一步知道顶点 1 和 2 之间没有边（或顶点 1 和 3 之间没有边），那么从 $z_{12}^{-1}w_{12}^{-3} = Z_{12}^2 \prec \epsilon^{-4}$ 情形 (iii) 也可以删除。

如果我们对位置序和其他分离执行类似的拆分，并选择 S 和 T 使得每个条目都是单元素集合，那么 zw-阶矩阵的数量将呈阶乘增长。在实践中，存在这样的情形：当 $n \geq 5$ 时，这个庞大的集合超出了典型数学软件的处理能力。幸运的是，对于许多具有 $n = 6$ 的情形，我们能够通过规模小得多的 zw-阶矩阵集合得出有限性结论。

这个例子出现在对若干包含由 zw 边构成的孤立三角形的 zw 图的分析中。

4.3. 生成 r阶矩阵，由 zw阶矩阵得到。 根据关系 $r_{ij}^2 =^{z_{ij}w_{ij}}$，任意 zw 阶矩阵都可按如下方式生成一个 r 阶矩阵。

引理 4.2。设 $\phi = \{\}$ 且

$$
D_1 = \begin{pmatrix}
\{\} & \{\} & \{\} & \{\} & \{3\}\\
\{\} & \{\} & \{\} & \{2\} & \{\}\\
\{\} & \{\} & \{1\} & \{\} & \{\}\\
\{\} & \{2\} & \{\} & \{\} & \{\}\\
\{3\} & \{\} & \{\} & \{\} & \{\}
\end{pmatrix},
$$

$$
D_2 = \begin{pmatrix}
\{\} & \{\} & \{\} & \{\} & \{\}\\
\{\} & \{\} & \{\} & \{2,3,4\} & \{4\}\\
\{\} & \{\} & \{\} & \{2,3,4\} & \{4\}\\
\{\} & \{2,3,4\} & \{2,3,4\} & \{2,3,4\} & \{4\}\\
\{\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{5\}
\end{pmatrix}.
$$

给定 $i \neq j$。如果 $\mathscr{L}(z_{ij}) = k$、$\mathscr{L}(w_{ij}) = l$，那么 $\mathscr{L}(r_{ij})$ 位于 D_1 的 $(k、l)$ 项中，当 zw-矩阵 $(A|B)$ 满足 $a_{ij} + b_{ij} \geq 1$ 时；否则位于 D_2 的 $(k、l)$ 项中。

证明。当 $a_{ij} + b_{ij} \geq 1$ 时，i 和 j 之间有一条边，由引理 4.1 可得 $k + l = \mathscr{L}(z_{ij}) + \mathscr{L}(w_{ij}) = 6$。如果 $(k, l) = (1, 5)$，那么它是一条 w-边；根据估计 1、2，它实际上是一条极大 w-边，并且 $\mathscr{L}(r_{ij}) = 3$。

假设 $(k, l) = (2, 4)$。如果 $a_{ij} + b_{ij} \geq 1$，那么 i 和 j 之间同样有一条 w-边。根据估计 2，它既不是极大 w-边，也不是 zw-边，因此 $\mathscr{L}(r_{ij}) = 2$。如果 $a_{ij} + b_{ij} = 0$，则 i 和 j 之间没有边；根据估计 1，我们知道 $\epsilon \prec r_{ij}$。于是由 $r_{ij}^2 = z_{ij} w_{ij} \prec \epsilon^{-1}$ 可得 $\mathscr{L}(r_{ij}) \in \{2, 3, 4\}$。

其他情形的讨论类似。 □

推论 4.3. 设 $(S, T) \ni (A|B)$。则下文定义的矩阵 $D = (d_{ij})$ 是一个r阶矩阵，它覆盖奇异序列的 r 阶：

$$d_{ij} = \bigcup_{k \in s_{ij}, l \in t_{ij}} d_{kl}^{(1)} \quad \textit{if } i \neq j \textit{ and } a_{ij} + b_{ij} \geq 1,$$

$$d_{ij} = \bigcup_{k \in s_{ij}, l \in t_{ij}} d_{kl}^{(2)} \quad \textit{if } i \neq j \textit{ and } a_{ij} + b_{ij} = 0,$$

$$d_{ij} = \{\} \quad \textit{if } i = j.$$

这里，$d_{kl}^{(1)}$ 和 $d_{kl}^{(2)}$ 分别是 D_1 和 D_2的(k, l)项。

定义 4.3. 推论 4.3 中的 r阶矩阵 D 称为由 zw阶矩阵 (S, T) 生成的 r阶矩阵。

4.4. 对 zw阶矩阵的细化。 了解 zw阶矩阵如何自然地产生 r阶矩阵后，我们将重点放在将一个 zw阶矩阵 (S, T) 细化为一个更小的 zw阶矩阵 (S', T')，并假设 $(S, T) \ni (A|B)$。本小节包含七条将在我们的算法中使用的原则。

命题 4.4。 假设 $(S, T) \ni (A|B)$。那么，下面给出的(S', T')是(S, T)的子集，也满足$(S', T') \ni (A|B)$：

(a) 对于任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$，

$$\begin{aligned} a_{ii} = 1 &\implies s'_{ii} = s_{ii} \cap \{5\}, \\ b_{ii} = 1 &\implies t'_{ii} = t_{ii} \cap \{5\}, \\ a_{ii} = 0 &\implies s'_{ii} = s_{ii} \cap \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ b_{ii} = 0 &\implies t'_{ii} = t_{ii} \cap \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

(b) 对于任意 $i、j \in \{1, \cdots, n\}$、$i \neq j$，

$$\begin{aligned} (a_{ij}, b_{ij}) = (1, 0) &\implies s'_{ij} = s_{ij} \cap \{4, 5\}, t'_{ij} = t_{ij} \cap \{1, 2\}, \\ (a_{ij}, b_{ij}) = (0, 1) &\implies s'_{ij} = s_{ij} \cap \{1, 2\}, t'_{ij} = t_{ij} \cap \{4, 5\}, \\ (a_{ij}, b_{ij}) = (1, 1) &\implies s'_{ij} = s_{ij} \cap \{3\}, t'_{ij} = t_{ij} \cap \{3\}, \\ (a_{ij}, b_{ij}) = (0, 0) &\implies s'_{ij} = s_{ij} \cap \{2, 3, 4, 5\}, t'_{ij} = t_{ij} \cap \{2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

证明。 由 z 圆、 w 圆的定义立即可得 $\mathscr{L}(z_i) \in s'_{ii}$、 $\mathscr{L}(w_i) \in t'_{ii}$。对于 $i \neq j$, 由估计 1、2 可得 $\mathscr{L}(z_{ij}) \in s'_{ij}$、 $\mathscr{L}(w_{ij}) \in t'_{ij}$。 □

注 4.2. 对于 (b) 的某些特殊情形，我们可以选取更小的 (S', T') 来覆盖 zw-序。若 $(S, T) \ni (A|B)$, 则下文给出的 (S', T') 是 (S, T) 的子集，并且也满足 $(S', T') \ni (A|B)$: 对于任意 $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ii} + a_{jj} = 1 &\implies s'_{ij} = \{5\}, \\ b_{ii} + b_{jj} = 1 &\implies t'_{ij} = \{5\}, \end{aligned}$$

并且对于 S', T' 的其他项，令 (S', T') 与 (S, T) 相同。

为说明这一点，注意条件 $a_{ii} + a_{jj} = 1$ 意味着 z_i, z_j 中一个的序为 $\approx \epsilon^{-2}$，另一个为 $\prec \epsilon^{-2}$，因此 $z_{ij} \approx \epsilon^{-2}$; 也就是说， $5 = \mathscr{L}(z_{ij}) \in s_{ij}$, 所以 $s'_{ij} \subset s_{ij}$, 且 s'_{ij} 覆盖了 z_{ij} 的序。情形 $b_{ii} + b_{jj} = 1$ 类似。

我们不会在算法中直接应用这一简单原则，因为它已包含在其他原则中。

命题 4.5。 设 $(S, T) \ni (A|B)$。给定 $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$。任意选择$k \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i, j\}$。令

$s'_{ij} = \{\sigma \in s_{ij} | \sigma \leq$最大值$(s_{ik} \cup s_{kj})$，最小值 $s_{ik} \leq$最大值$(\{\sigma\} \cup s_{kj})$，最小值 $s_{kj} \leq$最大值$(\{\sigma\} \cup s_{ik})\}$,$s'_{ji} = s'_{ij}$,$s'_{ii} = \{\sigma \in s_{ii} | \sigma \leq$最大值$(s'_{ij} \cup s_{jj})$，最小值 $s'_{ij} \leq$最大值$(\{\sigma\} \cup s_{jj})$，最小值 $s_{jj} \leq$最大值$(\{\sigma\} \cup s'_{ij})\}$,$s'_{jj} = \{\sigma \in s_{jj} | \sigma \leq$最大值$(s'_{ij} \cup s'_{ii})$, 最小值 $s'_{ij} \leq$最大值$(\{\sigma\} \cup s'_{ii})$，最小值 $s'_{ii} \leq$最大值$(\{\sigma\} \cup s'_{ij})\}$,$t'_{ij} = \{\tau \in t_{ij} | \tau \leq$最大值$(t_{ik} \cup t_{kj})$，最小值 $t_{ik} \leq$最大值$(\{\tau\} \cup t_{kj})$，最小值 $t_{kj} \leq$最大值$(\{\tau\} \cup t_{ik})\}$,$t'_{ji} = t'_{ij}$, $t'_{ii} = \{\tau \in t_{ii} | \tau \leq$最大值$(t'_{ij} \cup t_{jj})$，最小值 $t'_{ij} \leq$最大值$(\{\tau\} \cup t_{jj})$，最小值 $t_{jj} \leq$最大值$(\{\tau\} \cup t'_{ij})\}$,$t'_{jj} = \{\tau \in t_{jj} | \tau \leq$最大值$(t'_{ij} \cup t'_{ii})$，最小值 $t'_{ij} \leq$最大值$(\{\tau\} \cup t'_{ii})$，最小值 $t'_{ii} \leq$最大值$(\{\tau\} \cup t'_{ij})\}$,

并令(S', T')与(S, T)在 S', T' 的其他项中相同。于是$(S', T') \ni (A|B)$。

证明。 由 $z_{ij} = z_{ik} + z_{kj}$ 可得

$$\begin{aligned} & \mathscr{L}(z_{ij}) \leq \max\{\mathscr{L}(z_{ik}), \mathscr{L}(z_{kj})\} \in s_{ik} \cup s_{kj}, \\ \implies & \mathscr{L}(z_{ij}) \in \{\sigma \in s_{ij} | \sigma \leq \max(s_{ik} \cup s_{kj})\}; \\ & \min s_{ik} \leq \mathscr{L}(z_{ik}) \leq \max\{\mathscr{L}(z_{ij}), \mathscr{L}(z_{kj})\}, \\ \implies & \mathscr{L}(z_{ij}) \in \{\sigma \in s_{ij} | \min s_{ik} \leq \max(\{\sigma\} \cup s_{kj}); \\ & \min s_{kj} \leq \mathscr{L}(z_{kj}) \leq \max\{\mathscr{L}(z_{ij}), \mathscr{L}(z_{ik})\}, \\ \implies & \mathscr{L}(z_{ij}) \in \{\sigma \in s_{ij} | \min s_{kj} \leq \max(\{\sigma\} \cup s_{ik}). \end{aligned}$$

因此 $\mathscr{L}(z_{ij}) \in s'_{ij}$。类似地，由 $z_i = z_{ij} + z_j$ 可得

$$\begin{aligned} & \mathscr{L}(z_i) \ \le\ \max\{\mathscr{L}(z_{ij}), \mathscr{L}(z_j)\} \ \in\ s'_{ij} \cup s_{jj} \\ \Longrightarrow\ & \mathscr{L}(z_i) \ \in\ \{\sigma \in s_{ii} | \sigma \le \max(s'_{ij} \cup s_{jj})\}; \\ & \min s'_{ij} \ \le\ \mathscr{L}(z_{ij}) \ \le\ \max\{\mathscr{L}(z_i), \mathscr{L}(z_j)\}, \\ \Longrightarrow\ & \mathscr{L}(z_i) \ \in\ \{\sigma \in s_{ii} | \min s'_{ij} \le \max(\{\sigma\} \cup s_{jj}); \\ & \min s_{jj} \ \le\ \mathscr{L}(z_j) \ \le\ \max\{\mathscr{L}(z_i), \mathscr{L}(z_{ij})\}, \\ \Longrightarrow\ & \mathscr{L}(z_i) \ \in\ \{\sigma \in s_{ii} | \min s_{jj} \le \max(\{\sigma\} \cup s'_{ij}). \end{aligned}$$

Th因此，$\mathscr{L}(z_i) \in s'_{ii}$。$\mathscr{L}(z_j) \in s'_{jj}$ 的证明相同。同样，我们也有

$$\mathscr{L}(w_{ij}) \ \in\ t'_{ij}, \quad \mathscr{L}(w_i) \ \in\ t'_{ii}, \quad \mathscr{L}(w_j) \ \in\ t'_{jj}.$$

因此 $(S',\ T') \ \ni (A|B)$。 □

命题 4.6。设 $(S,T) \ni (A|B)$。假设 $1 \le i < j < k \le n$ 且

$$(a_{ij} + b_{ij})(a_{jk} + b_{jk})(a_{ik} + b_{ik}) \neq 0.$$

通过设定来定义 (S', T')

$$\begin{aligned} s'_{ij} = s'_{ji} = & s'_{jk} = s'_{kj} = s'_{ik} = s'_{ki} = s_{ij} \cap s_{jk} \cap s_{ik}, \\ t'_{ij} = t'_{ji} = & t'_{jk} = t'_{kj} = t'_{ik} = t'_{ki} = t_{ij} \cap t_{jk} \cap t_{ik}, \end{aligned}$$

并令 (S', T') 与 (S, T) 对于 S', T' 的其他项相同。于是 $(S', T') \ni (A|B$).

证明。假设 $(a_{ij} + b_{ij})(a_{jk} + b_{jk})(a_{ik} + b_{ik}) \neq 0$ 意味着物体 i, j, k 构成一个三角形。根据规则 2e，这三条边属于同一类型，且 $z_{ij} \approx z_{jk} \approx z_{ik}$。因此，交集 $s_{ij} \cap s_{jk} \cap s_{ik}$ 涵盖 z_{ij}, z_{jk}, z_{ik} 的序。T' 的情形类似。□

命题 4.7。假设 $(S,T) \ni (A|B)$。那么，下面给出的 (S,T) 的子集 (S', T') 也满足 $(S', T') \ni (A|B)$:

(a) 对于任意 i、$j \in \{1, \cdots, n\}$、$i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} + b_{ij} \ge 1 \ \Longrightarrow\ & s'_{ij} = s_{ij} \cap \{6 - \tau | \tau \in t_{ij}\}, \\ & t'_{ij} = t_{ij} \cap \{6 - \sigma | \sigma \in s'_{ij}\}; \\ a_{ij} + b_{ij} = 0 \ \Longrightarrow\ & s'_{ij} = \{\sigma \in s_{ij} | \sigma \ge 6 - 2\lfloor \tau/2 \rfloor \ \textit{for every}\ \tau \in t_{ij}\}, \\ & t'_{ij} = \{\tau \in t_{ij} | \tau \ge 6 - 2\lfloor \sigma/2 \rfloor \ \textit{for every}\ \sigma \in s'_{ij}\}. \end{aligned}$$

(b) 对于任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$s'_{ii} \ =\ \left\{ \sigma \in s_{ii} | \sigma \le \max \bigcup_{j \neq i} s'_{ij} \right\}, \quad t'_{ii} \ =\ \left\{ \sigma \in t_{ii} | \sigma \le \max \bigcup_{j \neq i} t'_{ij} \right\}.$$

证明。考虑 $i \neq j$ 和 $a_{ij} + b_{ij} \ge 1$。根据引理 4.3，我们有

$$s_{ij} \ \ni\ \mathscr{L}(z_{ij}) \ =\ 6 - \mathscr{L}(w_{ij}) \ \in\ \{6 - \tau | \tau \in t_{ij}\}.$$

因此，(a) 中定义的第一个 s'_{ij} 涵盖了 z_{ij} 的序。

当 $a_{ij}+b_{ij}=0$ 时，我们有

$$z_{ij}^{-1/2}w_{ij}^{-3/2}=Z_{ij}\prec\epsilon^{-2}\quad\text{and}\quad w_{ij}^{-1/2}z_{ij}^{-3/2}=W_{ij}\prec\epsilon^{-2}.$$

因此，若 $\mathscr{L}(z_{ij})=k$，则 $\mathscr{L}(w_{ij})\le 6-k$。由于第 1、3、5 层各自只包含一个精确的序，对于 $k=1,3,5$，实际上有 $\mathscr{L}(w_{ij})<6-k$，因而对每个 k，都有 $\mathscr{L}(w_{ij})\le 6-2\lfloor k/2\rfloor$。因此，(a) 中定义的第二个 s'_{ij} 涵盖了 z_{ij}的序。关于 t'_{ij}的讨论类似。

由于质心位于原点，我们有 $m_1z_1+\cdots+m_nz_n=0$，这等价于

$$(m_1+m_2+\cdots+m_n)z_i=\sum_{j\neq i}m_jz_{ij}.$$

回想一下，总质量不可能为零。因此，对于任意 i，都存在某个 $j\neq i$，使得 $z_i\preceq z_{ij}$，其中于是

$$\mathscr{L}(z_i)\le\max_{j\neq i}\mathscr{L}(z_{ij})\in\bigcup_{j\neq i}s'_{ij}.$$

这意味着 $\mathscr{L}(z_i)\in s'_{ii}$。类似地，对每个 i，都有 $\mathscr{L}(w_i)\in t'_{ii}$。至此，证明完成。 □

P命题 4.8. 设 $(S,T)\ni(A|B)$。给定一个非空的 $I\subset\{1,\cdots,n\}$.

(a) 若 I 是 A 的一个连通分量，则在 I 中恰有一对 $i<j$ 满足 $(a_{ij},b_{ij})=(1,0)$，且 $\sum_{k\in I}a_{kk}\neq 0$，此时令 $s'_{ij}=\{5\}$。对于其他情形令 $s'_{ij}=s_{ij}$，对于 S' 的其他项令 $s'_{kl}=s_{kl}$。(b) 若 I 是 B 的一个连通分量，则在 I 中恰有一对 $i<j$ 满足 $(a_{ij},b_{ij})=(0,1)$，且 $\sum_{k\in I}b_{kk}\neq 0$，此时令 $t'_{ij}=\{5\}$。对于其他情形令 $t'_{ij}=t_{ij}$，对于 T' 的其他项令 $t'_{kl}=t_{kl}$。

那么 $(S',T')\ni(A|B)$。

证明。 A 中的一个孤立分支对应于 z-图中的一个孤立分支。(a)中的假设意味着，对应于 I 的孤立分支包含某个 z-圆和且仅有一条 z-边，且该边连接 i 和 j。由规则 1e 可得 $\mathscr{L}(z_{ij})=5$，因此 s'_{ij} 覆盖了z_{ij}的序。(b)的讨论类似。□

命题 4.9。 假设 $(S,T)\ni(A|B)$。给定 $1\le i,j\le n$, $i\neq j$。(S',T') 是 (S,T) 的子集，如下所示，也满足 $(S',T')\ni(A|B)$:

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{k\neq i}t_{ik}=\{\ell\},\ \ell\in\{1,3,5\},\ \textit{and}\ \ \max s_{ij}<\min\bigcup_{k\neq i,j}s_{ik}\\
\Longrightarrow\ \ &s'_{ii}=\{\sigma\in s_{ii}|\sigma\le\max s_{ij}\},\quad s'_{jj}=\{\sigma\in s_{jj}|\sigma\le\max s_{ij}\},\\
&s'_{ij}=\{\sigma\in s_{ij}|\sigma\ge\min(s'_{ii}\cup s'_{jj})\};\\
&\bigcup_{k\neq i}s_{ik}=\{\ell\},\ \ell\in\{1,3,5\},\ \textit{and}\ \ \max t_{ij}<\min\bigcup_{k\neq i,j}t_{ik}\\
\Longrightarrow\ \ &t'_{ii}=\{\tau\in t_{ii}|\tau\le\max t_{ij}\},\quad t'_{jj}=\{\tau\in t_{jj}|\tau\le\max t_{ij}\},\\
&t'_{ij}=\{\tau\in t_{ij}|\tau\ge\min(t'_{ii}\cup t'_{jj})\}.
\end{aligned}$$

对于 S', T' 的其他项，令 (S', T') 与 (S, T) 相同。

证明。 条件 $\bigcup_{k\neq i} t_{ik} = \{\ell\}, \ell \in \{1,3,5\}$ 蕴含：对于任意 $k \neq i$， $w_{ij} \approx w_{ik}, j$。下一个条件 $\max s_{ij} < \min \bigcup_{k\neq i,j} s_{ik}$ 蕴含：对于任意 $k \neq i$， $z_{ij} \prec z_{ik}, j$。由命题 2.6 可知 z_i, $z_j \preceq z_{ij}$，因此 s'_{ii} 覆盖 z_i 的序， s'_{jj} 覆盖 z_j 的序，而 s'_{ij} 覆盖 z_{ij} 的序。关于 t'_{ii}, t'_{jj}, t'_{ij} 的讨论类似。□

命题 4.10。 设 $(S, T) \ni (A|B)$。令 D 为由 (S, T) 生成的 r-序矩阵。假设 $\bigcup_{j\neq i} d_{ik} \subset \{4,5\}$。则下面给出的 (S, T) 的子集 (S', T') 也满足 $(S', T') \ni (A|B)$：

$$\max \bigcup_{j\neq i} s_{jj} \in \{0,2,4\} \quad \Rightarrow \quad s'_{ii} = \left\{ \sigma \in s_{ii} | \sigma \leq \max \bigcup_{j\neq i} s_{jj} \right\},$$

$$\max \bigcup_{j\neq i} s_{jj} \in \{1,3,5\} \quad \Rightarrow \quad s'_{ii} = \left\{ \sigma \in s_{ii} | \sigma < \max \bigcup_{j\neq i} s_{jj} \right\},$$

$$\max \bigcup_{j\neq i} t_{jj} \in \{0,2,4\} \quad \Rightarrow \quad t'_{ii} = \left\{ \tau \in t_{ii} | \tau \leq \max \bigcup_{j\neq i} t_{jj} \right\},$$

$$\max \bigcup_{j\neq i} t_{jj} \in \{1,3,5\} \quad \Rightarrow \quad t'_{ii} = \left\{ \tau \in t_{ii} | \tau < \max \bigcup_{j\neq i} t_{jj} \right\},$$

令 $s'_{ij} = s_{ij}$, $t'_{ij} = t_{ij}$ 用于 S', T' 的其他项。

证明。 这是命题 2.7 的直接推论。 □

4.5. 可行覆盖序矩阵的判据。 给定一个与某个 zw-矩阵 $(A|B)$ 相关联的奇异序列。找到一个足够小的 zw-序矩阵 (S, T)，使得 $(S, T) \ni (A|B)$ 后，我们可以将 (S, T) 划分为若干非空的 zw-序矩阵，这些矩阵恰当地包含于 (S, T) 中，并且其集合 $\mathcal{C}$ 满足 $\mathcal{C} \ni (A|B)$。

如例 4.1 所示，我们可以从 $\mathcal{C}$ 中删去那些对于奇异序列的任何子序列都不可能覆盖位置序和分离的成员。这里我们提出五条判据来实现这一目的。如果应用这些判据导致矛盾，那么就可以排除该 zw-图。

命题 4.11。 设 $\mathcal{C} \ni (A|B)$ 且 $(S, T) \in \mathcal{C}$。令 D 为由 (S, T) 生成的 r-序矩阵。若对任意 $1 \leq i, j \leq n$， $d_{ij} \neq \{1\}$，则满足 $i < j$ 且使得 $d_{ij} = \{2\}$ 的配对 (i, j) 的数量不能为 *1*。

证明。 这是规则 2h 的一部分。 □

在命题 4.7(b) 中，我们利用了整个系统的质心条件。运用类似的思路，我们得到可行覆盖序矩阵的另一个判据。

命题 4.12。 设 $(S、 T) \ni (A|B)$。给定一个非空的 $I \subset \{1, \cdots, n$ $\}$.

(a) 设 I 是 A 和 $J = \{i \in I | a_{ii} = 1\}$ 的连通分量。那么

$$5 \in s_{ij}$$

对于某些 i、$j \in J$、$i \neq j$。

(b) 设 I 是 B 的一个连通分量，并且 $J = \{i \in I | b_{ii} = 1\}$。那么

$$5 \in t_{ij}$$

对于某些 i、$j \in J$、$i \neq j$。

证明。假设 I 是 A的一个连通分量，那么 I 是 z图中的一个孤立分支。根据规则 1c，我们有 $\sum_{j\in I} m_j z_j \prec \epsilon^{-2}$。由于对于 $i \in I \setminus J$、$\sum_{j\in J} m_j z_j \prec \epsilon^{-2}$，$z_i \prec \epsilon^{-2}$。对于每个 $i \in J$，由恒等式

$$\left(\sum_{j\in J} m_j\right) z_i \;=\; \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}} m_j z_{ij} + \sum_{j\in J} m_j z_j$$

并且假设任何子系统的总质量均非零，我们得到

$$\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}} m_j z_{ij} \approx \epsilon^{-2}.$$

因此，对于某个 $i, j \in J, i \neq j$，$z_{ij} \approx \epsilon^{-2}$，(a) 的证明即告完成。(b) 的证明类似。□

对于接下来的三个判据，我们需要确定 Z_{ij} 和 W_{ij} 的可能极大阶项。为此，我们引入以下序比较过程，借此排除不合格的候选项。该过程由九条简单或显而易见的比较规则组成，证明从略。

序比较过程。

(1) z 分离的比较规则：(a) 若 min(s_{ij}) >max(s_{kl})，则 $z_{ij} \succ z_{kl}$。(b) 若 $s_{ij} = s_{kl} \subset \{1, 3, 5\}$ 且 $|s_{ij}| = 1$，则 $z_{ij} \approx z_{kl}$。(c) 若 min($s_{ij} \cup s_{ik}$) $\geq$ max(s_{jk}) 且 max(s_{jk}) $\in \{1, 3, 5\}$，则 $z_{ij} \approx z_{ik}$。(d) 若 min($s_{ij} \cup s_{ik}$) $\geq$ max(s_{jk})，且 min(s_{ij}) 和 min(s_{ik}) 中至少有一个严格大于 max(s_{jk})，则 $z_{ij} \approx z_{ik}$。

(2) w 分离的比较规则：
(a) 若 min(t_{ij}) >max(t_{kl})，则 $w_{ij} \succ w_{kl}$。(b) 若 $t_{ij} = t_{kl} \subset \{1, 3, 5\}$ 且 $|t_{ij}| = 1$，则 $w_{ij} \approx w_{kl}$。(c) 若 min($t_{ij} \cup t_{ik}$) $\geq$ max(t_{jk}) 且 max(t_{jk}) $\in \{1, 3, 5\}$，则 $w_{ij} \approx w_{ik}$。(d) 若 min($t_{ij} \cup t_{ik}$) $\geq$ max(t_{jk})，且 min(t_{ij}) 与 min(t_{ij}) 中至少有一个严格大于 max(t_{jk})，则 $w_{ij} \approx w_{ik}$。

(3) z_{ij} 与 z_i, $i \neq j$的比较规则(a) 如果 min(s_{ij}) >max(s_{ii})，则 $z_{ij} \succ z_i$。(b) 如果 $s_{ij} = s_{ii} \subset \{1, 3, 5\}$ 且 $|s_{ij}| = 1$，则 $z_{ij} \approx z_i$。

(c) 如果 $\min(s_{ii} \cup s_{ij}) \geq \max(s_{jj})$ 且 $\max(s_{jj}) \in \{1,3,5\}$，则 $z_i \approx z_{ij}$。(d) 如果 $\min(s_{ii} \cup s_{ij}) \geq \max(s_{jj})$，且 $\min(s_{ii})$ 和 $\min(s_{ij})$ 中至少有一个严格大于 $\max(s_{jj})$，则 $z_{ii} \approx z_{ij}$。

(4) w_{ij} 与 w_i、$i \neq j$的比较规则：(a) 若$\min(t_{ij}) > \max(t_{ii})$，则 $w_{ij} \succ w_i$。(b) 若 $t_{ij} = t_{ii} \subset \{1,3,5\}$ 且 $|t_{ij}| = 1$，则 $w_{ij} \approx w_i$。(c) 若$\min(t_{ii} \cup t_{ij}) \geq \max(t_{jj})$且 $\max(t_{jj}) \in \{1,3,5\}$，则 $t_i \approx t_{ij}$。(d) 若$\min(t_{ii} \cup t_{ij}) \geq \max(t_{jj})$，且$\min(t_{ii})$和 $\min(t_{ij})$中至少有一个严格大于$\max(t_{jj})$，则 $w_{ii} \approx w_{ij}$。

(5) 距离的比较规则：

(a) 若$\min(d_{ij}) >\max(d_{kl})$，则 $r_{ij} \succ r_{kl}$。(b) 若 $d_{ij} = d_{kl} \subset \{1,3,5\}$ 且 $|d_{ij}| = 1$，则 $r_{ij} \approx r_{kl}$。

接下来，我们根据以下关系比较 Z_{ij}和 W_{ij}的序

$$Z_{ij} = z_{ij}^{-1/2} w_{ij}^{-3/2} = z_{ij} r_{ij}^{-3} = w_{ij}^{-1} r_{ij}^{-1} = W_{ij}^{1/3} w_{ij}^{-4/3}$$
$$W_{ij} = w_{ij}^{-1/2} z_{ij}^{-3/2} = w_{ij} r_{ij}^{-3} = z_{ij}^{-1} r_{ij}^{-1} = Z_{ij}^{1/3} z_{ij}^{-4/3}.$$

以及关于位置、分离和距离的比较规则所得结果：

(6) Z_{ij}和 Z_{ik}、i，j，k互不相同的比较规则

(a) 若 $a_{ij} = a_{ik} = 1$，则 $Z_{ij} \approx Z_{ik}$。(b) 若 $a_{ij} > a_{ik}$，则 $Z_{ij} \succ Z_{ik}$。(c) 若 $z_{ij} \succeq z_{ik}$、$w_{ij} \succeq w_{ik}$，且至少一个不等式为严格不等式，则$Z_{ij} \prec Z_{ik}$。(d) 若 $z_{ij} \approx z_{ik}$ 和 $w_{ij} \approx w_{ik}$，则 $Z_{ij} \prec Z_{ik}$。(e) 若 $z_{ij} \preceq z_{ik}$、$r_{ij} \succeq r_{ik}$，且至少一个不等式为严格不等式，则$Z_{ij} \prec Z_{ik}$。(f) 若 $z_{ij} \approx z_{ik}$ 和 $r_{ij} \approx r_{ik}$，则 $Z_{ij} \prec Z_{ik}$。(g) 若 $w_{ij} \preceq w_{ik}$、$r_{ij} \preceq r_{ik}$，且至少一个不等式为严格不等式，则$Z_{ij} \succ Z_{ik}$。(h) 若 $w_{ij} \approx w_{ik}$ 和 $r_{ij} \approx r_{ik}$，则 $Z_{ij} \prec Z_{ik}$。(i) 若 $w_{ij} \succ w_{ik}$ 和 $b_{ik} = 1$，则 $Z_{ij} \prec Z_{ik}$。(j) 若 $w_{ij} \approx w_{ik}$ 和 $b_{ij} = b_{ik} = 1$，则 $Z_{ij} \approx Z_{ik}$。

(7) W_{ij} 与 W_{ik}, i、j、k 互不相同的比较规则 (a) 若 $b_{ij} = b_{ik} = 1$，则 $W_{ij} \approx W_{ik}$。(b) 若 $b_{ij} > b_{ik}$，则 $W_{ij} \succ W_{ik}$。(c) 若 $w_{ij} \succeq w_{ik}$, $z_{ij} \succeq z_{ik}$，且至少一个不等式为严格不等式，则$W_{ij} \prec W_{ik}$。(d) 若 $w_{ij} \approx w_{ik}$ 且 $z_{ij} \approx z_{ik}$，则 $W_{ij} \prec W_{ik}$。(e) 若 $w_{ij} \preceq w_{ik}$, $r_{ij} \succeq r_{ik}$，且至少一个不等式为严格不等式，则$W_{ij} \prec W_{ik}$。(f) 若 $w_{ij} \approx w_{ik}$ 且 $r_{ij} \approx r_{ik}$，则 $W_{ij} \prec W_{ik}$。(g) 若 $z_{ij} \preceq z_{ik}$, $r_{ij} \preceq r_{ik}$，且至少一个不等式为严格不等式，则$W_{ij} \succ W_{ik}$。

(h) 若 $z_{ij} \approx z_{ik}$ 且 $r_{ij} \approx r_{ik}$，则 $W_{ij} \prec W_{ik}$。(i) 若 $z_{ij} \succ z_{ik}$ 且 $a_{ik} = 1$，则 $W_{ij} \prec W_{ik}$。(j) 若 $z_{ij} \approx z_{ik}$ 且 $a_{ij} = a_{ik} = 1$，则 $W_{ij} \approx W_{ik}$。(8) Z_{ij} 与 $z_i, i \neq j$的比较规则 (a) 若 $a_{ij} = a_{ii} = 1$，则 $Z_{ij} \approx z_i$。(b) 若 $a_{ij} > a_{ii}$，则 $Z_{ij} \succ z_i$。(c) 若 $z_{ij} \succeq z_i, r_{ij} \preceq 1$，且至少一个不等式为严格不等式，则 $Z_{ij} \succ z_i$。(d) 若 $z_{ij} \approx z_i$ 且 $r_{ij} \approx 1$，则 $Z_{ij} \approx z_i$。(9) W_{ij} 与 $w_i, i \neq j$的比较规则 (a) 若 $b_{ij} = b_{ii} = 1$，则 $W_{ij} \approx w_i$。(b) 若 $b_{ij} > b_{ii}$，则 $W_{ij} \succ w_i$。(c) 若 $w_{ij} \succeq w_i, r_{ij} \preceq 1$，且至少一个不等式为严格不等式，则 $W_{ij} \succ w_i$。(d) 若 $w_{ij} \approx w_i$ 且 $r_{ij} \approx 1$，则 $W_{ij} \approx w_i$。

定义 4.4. 假设 $(S,T) \ni (A|B)$。令 D 为由 (S,T) 产生的 r-序矩阵。为方便起见，令 $Z_{ii} = -z_i/m_i$。给定 $i \in \{1, \cdots, n\}$。若对于每个 $j \in M_{Z,i}$ 和每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，关系 $Z_{ij} \prec Z_{ik}$ 与序比较过程矛盾，则称集合 $M_{Z,i} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 为由 $(A|B)$ 和 (S,T) 确定的第 i 个极大 Z-序集合。类似地，我们定义由 $(A|B)$ 和 (S,T) 确定的第 i 个极大 W-序集合，并将其记为 $M_{W,i}$。

第 i 个极大 Z-序集合 $M_{Z,\ i}$ 可能包含某个子指标 j，使得 $Z_{ij} \prec Z_{ik}$ 对某个 k 成立。关键在于，只有在遵守了序比较过程的所有规则时，才可能发生这种情况。

命题 4.13。假设 $(S,T) \ni (A|B)$。那么对于每个 i, $|M_{Z,i}| \geq 2$ 和 $|M_{W,i}| \geq 2$。

证明。由于 $Z_{i1}, \ldots, Z_{in}$ 中至少有一个极大阶项，因此我们有$|M_{Z,i}| \geq 1$。(2.3) 中的一个方程为

$$\sum_{j=1}^{n} m_j Z_{ji} = 0,$$

$Z_{i1}, \ldots, Z_{in}$ 中至少有两个极大阶项。因此$|M_{Z,i}| \geq 2$。对于$|M_{W,i}|$ 的证明类似。□

下一个命题可由 [4, §7.5.2.2] 中的论证推出。

命题4.14。假设 $(S,T) \ni (A|B)$。令 D 为由(S,T) 产生的 r-序矩阵。若对于某些 $i \neq j$ 和 $m_i + m_j \neq 0$ 有 $3 \notin d_{ij}$，则 $M_{Z,i}$ 和 $M_{Z,j}$ 不可能同时为$\{i,j\}$, $M_{W,i}$；并且 $M_{W,j}$ 不可能同时为 $\{i,j\}$。

证明。假设 $M_{Z,\ i} = M_{Z,\ j} = \{i,j\}$。由于该方程中的极大阶项的数量不可能为 0 或 1，因此方程中的极大阶项

$$\sum_{k=1}^{n} m_k Z_{ki} = 0$$

为 m_iZ_{ii} 和 m_jZ_{ji}，方程中的极大阶项

$$\sum_{k=1}^{n} m_k Z_{kj} = 0$$

分别为 m_jZ_{jj} 和 m_iZ_{ij}。因此我们有

$$z_i \sim m_j Z_{ji} \quad \text{and} \quad z_j \sim m_i Z_{ij}.$$

将第二个方程从第一个方程中相减，得到

$$z_{ij} \sim (m_i + m_j) Z_{ji} = -(m_i + m_j) r_{ij}^{-3} z_{ij},$$

由此可得 $r_{ij} \approx 1$，因为 $m_i + m_j \neq 0$。这与 $3 \notin d_{ij}$矛盾。 □

命题4.15。设 $(S,T) \ni (A|B)$。

(a) 若对于互不相同的 i、j、k，有 $a_{ij}a_{jk} > 0$和 $a_{ki} = 0$，则对于某个 $p \in \{i,j,k\}$，有$M_{W,j} \neq \{i,k\}$ 和$M_{W,p} \nsubseteq \{i,j,k\}$。(b) 若对于互不相同的 i、j、k，有 $b_{ij}b_{jk} > 0$和 $b_{ki} = 0$，则对于某个 $p \in \{i,j,k\}$，有$M_{Z,j} \neq \{i,k\}$ 和$M_{W,p} \nsubseteq \{i,j,k\}$。

证明。为证明 (a)，我们假设对于不同的 i，有 $a_{ij}a_{jk} > 0$ 和 $a_{ki} = 0$,j,k。于是 $Z_{ij} \approx Z_{jk} \approx \epsilon^{-2}$。由于 $a_{ki} = 0$，根据规则 2e，物体 i,k 之间没有边，因此 i,j 之间的边和 j,k 之间的边相邻，但不属于同一个三角形。根据规则 2c，要么$z_{ij} \prec z_{jk}$，要么 $z_{ij} \succ z_{jk}$。不失一般性，假设 $z_{ij} \prec z_{jk}$。于是

$$z_{ij} \prec z_{jk} \approx z_{ik} \preceq \epsilon^{-2}.$$

由于

$$Z_{ij} \approx Z_{jk} \succ Z_{ik},$$

我们有

$$W_{ij} \succ W_{jk}, W_{ik},$$

并且可得 $k \notin M_{W,i}$ 和 $k \notin M_{W,j}$。如果 $M_{W,i}$,$M_{W,j} \subset \{i,j,k\}$，那么 $M_{W,i} = M_{W,j} = \{i,j\}$。由于 $z_{ij} \prec \epsilon^{-2}$, r_{ij} 的序不是 1，这与命题4.14矛盾。因此，对于某个 $p \in \{i,j,k\}$，有 $M_{W,p} \nsubseteq \{i,j,k\}$。上面的结论 $k \notin M_{W,j}$ 表明$M_{W,j} \neq \{i,k\}$。另一种情况 $z_{ij} \succ z_{jk}$ 意味着 $i \notin M_{W,j}$，因此我们再次得到 $M_{W,j} \neq \{i,k\}$。(b) 的证明类似。□

如例 4.1 所示，划分（S、T）的可能方式数量往往极其庞大，$n \geq 6$时更是如此。为了使其更贴近实际，在实践中，我们会先对 S、T 的非对角元进行划分，在此阶段尽可能排除各种情形，然后再处理它们的对角项。幸运的是，在大多数情形下，这一过程都能得到令人满意的 $\mathcal{C}$ 个 zw 阶矩阵的集合，用以涵盖位置序和分离。详细过程将在第7节介绍。

5. Collect polynomial equations

给定一个归一化中心构型的奇异序列，考虑一个带有 zw-矩阵（$A|B$）的图。在找到一个合适的 $\mathcal{C}$ 个 zw 阶矩阵的集合，使得 $\mathcal{C} \ni$ （$A|B$）之后，我们可以根据（2.3）选取最高阶项，收集一些多项式方程。与 [11], 中的 BKK方法相比，这一过程本质上等同于取闵可夫斯基和多面体的一个面，并考虑其对应的约化系统。本节将展示收集这类多项式方程的一些细节。

在为 Z_{ij} 和 W_{ij} 挑选最高阶项的过程中，定义 4.4 中定义的极大 Z 阶和 W 阶集合还不够。它们是通过序比较过程得到的极大序项候选，但通常我们不能排除这样的可能性: 对于 $M_{Z,\ i}$ 中的某个元素 j， Z_{ij} 实际上并非极大。我们需要对这些极大 Z 阶和 W 阶集合作出更强的假设。

定义 5.1。 若对每个 k_1, $k_2 \in M_{Z,\ i}$，都存在一个有限序列 $\{j_0, \ldots, j_N\} \subset M_{Z,\ i}$，使得对于每个 $l = 1, \ \ldots, \ N$, $j_0 = k_1$、$j_N = k_2$ 以及关系 $Z_{ij_{l-1}} \approx Z_{ij_l}$ 均可通过序比较过程得到，则称第 i 个极大 Z 阶集合 $M_{Z,\ i}$ 为确定为极大 。

5.1. 五类多项式方程。第一类方程由系统 (2.3) 中的前两个方程得到。我们选取 z_k、w_k、Z_{kl}和 W_{kl}的极大序项，于是得到若干方程。我们可以更粗略或更精确地确定极大序项。例如，如果根据zw-矩阵来确定，那么我们只收集序为 ϵ^{-2} 的那些项；如果根据zw-阶矩阵来确定，那么某些方程的极大序项的序可能小于 ϵ^{-2}。我们称这些方程为主方程，并将第 iz 个方程简称为 z_i- 方程，将第 i w 个方程简称为 w_i- 方程。

在选取极大序项的过程中，我们仅在通过序比较过程确定为极大时，才使用所得到的极大 Z–序集合 M_{Z_i}。对于 W_{kl}也是如此。

第二类方程是质心条件。根据规则 1c,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \prec \epsilon^{-2}, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i w_i \prec \epsilon^{-2}.$$

取 ϵ^{-2} 阶项，若 I 是所有 z-圆化物体的集合，且 J 是所有w-圆化物体的集合，则

$$\sum_{i \in I} m_i z_i \ = \ 0, \quad \sum_{i \in J} m_i w_i = 0.$$

虽然质心条件可以由主方程推出，但有时我们会直接收集这些条件，而不通过主方程来获得，以降低计算复杂度。

第三类方程由聚类方案得到。回顾一下，若 $z_{kl} \prec z_k$ 和 $z_{kl} \prec z_l$，则两个物体k 和 l 在 z-图中聚在一起。在这种情况下，我们有

$z_k \sim z_l$，省略低阶项后可将其视为 $z_k = z_l$。我们称这些方程为簇方程。

第四类方程是分离之间的关系：

$$\begin{aligned} z_{ij} + z_{jk} + z_{kl} &= 0 \\ w_{ij} + w_{jk} + w_{kl} &= 0 \end{aligned}$$

对于互不相同的 $i,\ j,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$。为了确保该方程中的所有项具有相同的序，我们只选取，$j,\ k$这些物体，它们是图中一个三角形的顶点。

第五类方程由外积得到，我们称之为楔形方程。相关思路已在 [4, §5.0,5.1,8.6-8.8] 中详细阐述。由于

$$q_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(z_k + w_k)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(z_k - w_k)\begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{z_k}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{w_k}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

我们有

$$q_k \wedge q_l = C(z_k w_l - z_l w_k),$$

其中 $C = \frac{1}{4}\left(\binom{1}{-i} \wedge \binom{1}{i}\right)$。然后，令 $f_k = \sum_{j \neq k} m_j r_{ij}^{-3}(q_j - q_k)$，由 (2.1) 可得

$$0 \ = \ q_k \wedge f_k \ = \ \sum_{j \neq k} m_j r_{jk}^{-3}(q_k \wedge q_j) \ = \ C \sum_{j \neq k} m_j r_{jk}^{-3}(z_k w_j - w_k z_j), \tag{5.1}$$

另一方面，根据关系

$$Z_{jk} \ = \ z_{jk} r_{jk}^{-3}, \qquad W_{jk} \ = \ w_{jk} r_{jk}^{-3},$$

我们有

$$r_{jk}^{-3}(q_j - q_k) = \frac{Z_{jk}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{W_{jk}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

因此

$$0 \ = \ q_k \wedge f_k \ = \ C \sum_{j \neq k} m_j (z_k W_{jk} - w_k Z_{jk}). \tag{5.2}$$

5.2. 通过 zw-序得到楔形方程。 现在我们展示 zw-阶矩阵如何导出有用的楔形方程。

考虑 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的两个非空不相交子集 I_1 和 I_2。令 $J=\{1,\ldots,n\}\setminus(I_1\cup I_2)$。由系统 (2.3) 可得

$$\sum_{k\in I_1} m_k z_k = \sum_{k\in I_1,\ j\in J} m_k m_j Z_{jk} + \sum_{k\in I_1,\ j\in I_2} m_k m_j Z_{jk}, \tag{5.3}$$

$$\sum_{k\in I_1} m_k w_k = \sum_{k\in I_1,\ j\in J} m_k m_j W_{jk} + \sum_{k\in I_1,\ j\in I_2} m_k m_j W_{jk}, \tag{5.4}$$

$$\sum_{k\in I_2} m_k z_k = \sum_{k\in I_2,\ j\in J} m_k m_j Z_{jk} + \sum_{k\in I_2,\ j\in I_1} m_k m_j Z_{jk}, \tag{5.5}$$

$$\sum_{k\in I_2} m_k w_k = \sum_{k\in I_2,\ j\in J} m_k m_j W_{jk} + \sum_{k\in I_2,\ j\in I_1} m_k m_j W_{jk}, \tag{5.6}$$

$$\sum_{j\in J} m_j z_j = \sum_{k\in I_1,\ j\in J} m_k m_j Z_{jk} + \sum_{k\in I_2,\ j\in J} m_k m_j Z_{jk}, \tag{5.7}$$

$$\sum_{j\in J} m_j w_j = \sum_{k\in I_1,\ j\in J} m_k m_j W_{jk} + \sum_{k\in I_2,\ j\in J} m_k m_j W_{jk}. \tag{5.8}$$

由上面的方程（5.2），我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j\in I_1\cup J} m_j(q_j\wedge f_j) \\ &= C\sum_{j\in I_1,\ k\in I_2} m_j m_k(z_j W_{kj} - w_j Z_{kj}) + C\sum_{j\in J,\ k\in I_2} m_j m_k(z_j W_{kj} - w_j Z_{kj}), \\ 0 &= \sum_{j\in I_2\cup J} m_j(q_j\wedge f_j) \\ &= C\sum_{j\in I_2,\ k\in I_1} m_j m_k(z_j W_{kj} - w_j Z_{kj}) + C\sum_{j\in J,\ k\in I_1} m_j m_k(z_j W_{kj} - w_j Z_{kj}). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Supp因此，根据 zw 序矩阵， I_1 和 I_2 满足以下条件 s:

(1) 对于每个 $k\in I_1$, $z_k\approx\epsilon^{-2}$ 和 $w_k\prec\epsilon^{-2}$ (2) 对于每个 $k\in I_2$, $z_k\prec\epsilon^{-2}$ 和 $w_k\approx\epsilon^{-2}$ (3) 对于 $k,l\in I_1$, $k\neq l$, $z_{kl}\approx\epsilon^{-2}$ 和 $w_{kl}\approx\epsilon^{2}$ (4) 对于 $k,l\in I_2$, $k\neq l$, $z_{kl}\approx\epsilon^{2}$ 和 $w_{kl}\approx\epsilon^{-2}$ (5) 对于 $k\in I_1$ 和 $l\in I_2$, $z_{kl}\approx w_{kl}\approx\epsilon^{-2}$。

于是我们有

$$\sum_{k\in I_2} m_k z_k \preceq \epsilon^2, \qquad \sum_{k\in I_1,\ j\in I_2} m_k m_j Z_{jk} \preceq \epsilon^4,$$
$$\sum_{k\in I_1} m_k w_k \preceq \epsilon^2, \qquad \sum_{k\in I_1,\ j\in I_2} m_k m_j W_{jk} \preceq \epsilon^4.$$

由 (5.4) 和 (5.5) 可得

$$\sum_{k\in I_1,\ j\in J} m_k m_j W_{jk} \preceq \epsilon^2, \qquad \sum_{k\in I_2,\ j\in J} m_k m_j Z_{jk} \preceq \epsilon^2.$$

我们还假设 $J=\emptyset$ 或 J 仅含一个元素 k_0 和 $z_{k_0},\ w_{k_0} \preceq \epsilon^2$。对于前者，由 (5.9) 可得

$$\sum_{j\in I_1,\ k\in I_2} m_j m_k (z_j W_{kj} - w_j Z_{kj}) = 0 \prec \epsilon^2.$$

对于后者，由 (5.7) 和 (5.8) 可得

$$\sum_{k\in I_1,\ j\in J} m_k m_j Z_{jk} \preceq \epsilon^2, \qquad \sum_{k\in I_2,\ j\in J} m_k m_j W_{jk} \preceq \epsilon^2.$$

由 (5.9)，由于 J 仅含一个元素，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I_1,\ k\in I_2} m_j m_k (z_j W_{kj} - w_j Z_{kj}) &= -\sum_{j\in J,\ k\in I_2} m_j m_k (z_j W_{kj} - w_j Z_{kj}) \\ &\approx z_{k_0} \sum_{k\in I_2,\ j\in J} m_k m_j W_{jk} + w_{k_0} \sum_{k\in I_1,\ j\in J} m_k m_j Z_{jk} \\ &\preceq \epsilon^4 \prec \epsilon^2.\end{aligned}$$

由于

$$z_j W_{kj} \approx z_j z_{kj}^{-3/2} w_{kj}^{-1/2} \approx z_j^{-1/2} w_k^{-1/2} \approx \epsilon^2$$

and

$$w_j Z_{kj} \approx w_j z_{kj}^{-1/2} w_{kj}^{-3/2} \approx w_j^{-1/2} z_j^{-1/2} w_k^{-3/2} \approx \epsilon^3 \prec \epsilon^2$$

对于每个 $j\in I_1$ 和 $k\in I_2$，我们得到

$$\sum_{j\in I_1,\ k\in I_2} m_j m_k z_j W_{kj} \prec \epsilon^2,$$

这给出了其中一个方程

$$\sum_{j\in I_1,\ k\in I_2} c_{jk} m_j m_k (z_j w_k)^{-1/2} = 0, \qquad c_{jk}\in\{1,-1\} \tag{5.10}$$

6. Algorithm I - Determine zw-diagrams

我们的程序包含三种算法：第一种用于寻找可能的图；第二种用于搜索与某个图相关的各种变量可能具有的序；最后一种用于寻找图的质量关系。它们都采用符号计算，因此所有输出都是精确的，不存在舍入误差。

本节专门介绍第一种算法。以下是该算法的概要。Mathematica 代码见附录 I。

(I.1) 可能的 z-矩阵的初步筛选

(a) 按列和与对角线对称二进制矩阵进行分类

(b) 排除迹为 1 的矩阵 (c) 按迹分类 (I.2) 应用单色矩阵规则 (a) 列和规则 (b) 迹为 2 的矩阵第一规则 (c) 三角形第二规则 (d) 四边形第一规则 (e) 三角形第一规则 (f) 迹为 3 的矩阵规则 (g) 迹为 0 的主子式规则 (I.3) 生成可能的 zw-矩阵 (a) 生成可能的 w-矩阵 (b) 根据连通性对 z-矩阵进行分类 (c) 根据全连通伴随对象规则匹配 z-矩阵和 w-矩阵 (I.4) 应用双色矩阵规则 (a) 环绕规则 (b) 迹为 2 的矩阵第二规则 (c) 三角形第三规则 (d) 双列和规则 (e) 三角形第四规则 (f) 连通分支规则 (g) 四边形第二规则 (h) 五边形规则 (I.5) 生成与剩余 zw-矩阵相关的 zw-图

整个过程涉及大量计算。暴力法消去 zw-矩阵可能会导致计算机程序在 $n \geq 6$ 时崩溃，因此有效减少计算量是我们程序的关键部分。下面我们将讨论程序的一些细节，但不包括简单的步骤 (I.5)。

步骤 *(I.1)*。在初步选取可能的 z-矩阵时，根据迹的第一规则，我们不会生成迹为 1 的矩阵。为在一开始删除一些等价的情形，不失一般性，我们可以假设 z-圆形物体的指标较大；也就是说，我们可以假设 z-矩阵满足以下条件：

$$a_{ii} \leq a_{jj}, \qquad \forall\, i < j. \tag{6.1}$$

这类 z-矩阵的数量为 $n2^{n(n-1)/2}$。我们根据这些矩阵的迹将其分为 n 类 S_1，.....，S_n，其中 S_1 由迹为 0 的矩阵组成，而 S_k由迹为 k （ $k > 1$）的矩阵组成。这种划分显著减少了生成 zw-矩阵所需的计算量。

应用矩阵规则之前，为了删除更多等价情形，我们对顶点重新排列，使列和按递增顺序排列，然后删除重复项，再将其变换，使其再次满足性质 (6.1)。此步骤可迅速删除超过 90% 的候选项，这些候选项可能是情形 $n = 6$ 下的 z-矩阵。

步骤 *(I.2)*。三角形第一规则仅在 $a_{ii}+a_{jj}+a_{kk}=2$ for some $1\le i<j<k\le n$ 时不成立，因此该规则对 $S_1\cup S_n$ 中的矩阵成立，所以我们只需检查 $S_2,\dots,S_{n-1}$ 中的成员是否满足此规则。此外，由于对于 $A\in S_K$,$2\le K\le n-1$，当且仅当 $i\ge n-K$ 时有 $a_{ii}=1$，因此该规则在 S_K 上可化简为

$$(a_{ij}+a_{ik})(1+a_{ij}+a_{jk})(1+a_{ik}+a_{jk})\ \neq\ 8 \qquad \forall\ 1\le i<K\le j<k\le n.$$

由三角形第二规则的证明可知，该规则仅在 $a_{ii}+a_{jj}+a_{kk}=1$ 对某个 $1\le i<j<k\le n$ 时失效，因此我们只需检查 S_2、 ..... 、 S_{n-2} 中的成员是否满足该规则。对于 $A\in S_K$、$2\le K\le n-2$，当且仅当 $i\ge n-K$ 时，我们有 $a_{ii}=1$；该规则在 S_K 上可化简为

$$a_{ik}+a_{jk}\ \neq\ 2 \qquad \forall\ 1\le i<j<n-K\le k\le n.$$

迹为 2 的矩阵第一规则适用于 S_2 中的矩阵。性质 (6.1) 意味着对每个 $A\in S_2$ 都有 $a_{nn}=a_{(n-1)(n-1)}=1$。因此，判别式可化简为

$$a_{n(n-1)}\ =\ 1.$$

步骤 *(I.3)*。对 z-矩阵应用单色矩阵规则后，我们不仅得到可能的 z-矩阵，也得到可能的 w-矩阵。我们无法消去通过置换矩阵共轭相关的 w-矩阵，因为将它们与给定的 z-矩阵匹配后，它们通常并不等价。为减少初始的 zw-矩阵数量，我们仅将每个 z-矩阵与适当类别的 w-矩阵进行匹配。

我们将每个 S_k 分成两部分 $S_{k,\ c}$ 和 $S_{k,\ d}$，其中$S_{k,\ c}$ 由完全连通矩阵组成，而 $S_{k,\ d}=S_k\setminus S_{k,\ c}$。此外，我们假设每个 zw-矩阵 $(A|B)$ 满足

$$\mathrm{tr}(A)\ \le\ \mathrm{tr}(B). \tag{6.2}$$

令 T_1 为所有迹为 0 的可能 w-矩阵的集合， T_k 为对 $2\le k\le n$ 而言所有迹为 k 的可能w-矩阵的集合。根据全连通伴随对象规则，我们仅将 $S_{k,\ c}$ 中的 z-矩阵与 T_1中的 w-矩阵配对。根据假设 (6.2)，我们将 $S_{1,\ c}$中的矩阵与 T_1 中的矩阵配对，并将 $S_{k,\ d}$中的矩阵与 $T_1\cup\cdots\cup T_k$中的矩阵配对，其中 $1\le k\le n$。这些 zw-矩阵的集合分别记为 U_c 和 U_k。

步骤 *(I.4)*。剩余的 zw-矩阵数量仍然非常庞大；对于情形 $n=6$，约有 2.85×10^6 个，而检查双色矩阵规则的顺序对算法效率至关重要。有些规则对每个矩阵所需的计算较少，但能排除更多矩阵，例如环绕规则。我们首先实施这类规则。

为提高效率，我们将环绕规则分为两部分，第一部分是$b_{ij}(a_{ii}+a_{jj})\ \neq 1$；另一部分是 $a_{ij}(b_{ii}+b_{jj})\ \neq 1$。由于第一部分 $b_{ij}(a_{ii}+a_{jj})\ \neq 1$ 仅在 $1\le \mathrm{tr}(A)\ \le n-1$时为假，因此我们只需检查满足 $2\le K\le n-1$的 U_K中的矩阵。由于每个 zw-矩阵（$A|B$）都满足 (6.1)，在 U_K，$2\le K\le n-1$中，判别式 $b_{ij}(a_{ii}+a_{jj})\ \neq 1$ 对于 $i<n-K$ 和 $j\ge n-K$变为 $b_{ij}\neq 1$。第二部分 $a_{ij}(b_{ii}+b_{jj})\ \neq 1$ 仅在 $\mathrm{tr}(B)\ >0$时为假，因此该规则对 $U_c\cup U_1$中的矩阵成立。

结合迹为 2 的矩阵第二规则，我们排除了超过88%的 zw-矩阵；对于情形 $n=6$，还剩下约 3.35×10^5 种情形。然后，我们将 U_c 与所有 U_k

合并为集合 U，按序应用剩余的双色矩阵规则，然后删除所有在物体排列以及 z 与 w交换下重复的矩阵。这样就完成了对所有可能的 zw-矩阵的搜索，并使我们能够生成所有可能的zw-图。当 $n = 6$时，还剩下117个图。下一步是将我们的第二算法应用于每个图。

7. Algorithm II - Determine orders of variables

给定与 zw-矩阵（$A|B$）相关联的一个奇异序列。我们的第二算法旨在找到一个合适的序矩阵集合，以涵盖位置序、分离和距离。

在展示算法步骤之前，我们根据非对角元和对角元的大小对 zw-序进行分类。

定义 7.1。给定一个 zw-矩阵（$A|B$）。

(a) 满足条件（S,T) $\ni (A|B)$ 的任意 zw-序矩阵（S,T）称为类型*1*的 zw-矩阵 （$A|B$）的 zw-序矩阵。(b) 如果一个非空的 zw-序矩阵（S,T）的 S,T 的非对角元均为单元素集，则称其为类型*2*；也就是说，

$$\prod_{i<j} |s_{ij}|\ |t_{ij}| \ = \ 1.$$

(c) 如果一个非空的 zw-序矩阵（$S,\ T$）中的 S、 T 的所有元素都是单元素集，则称其为类型 *3* ，即，

$$\prod_{i\le j} |s_{ij}|\ |t_{ij}| \ = \ 1.$$

我们的策略是先为（$A|B$）适当地选取一个 1 zw-序矩阵（$S,\ T$），然后选取一个由（$S,\ T$）的类型 2 子集组成的集合 $\mathcal{C}_2$，使得 $\mathcal{C}_2 \ni$（$A|B$），最后再选取一个由（$S,\ T$）的类型 3 子集组成的集合 $\mathcal{C}_3$，使得 $\mathcal{C}_3 \ni$（$A|B$）。

记号。给定（$A|B$）的一个类型 1 zw-序矩阵（$S,\ T$）。令

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{C}}_1(S,T) &= \left\{(S',T') \subset (S,T) | \, (S',T') \text{ is nonempty}\right\}, \\
\tilde{\mathcal{C}}_2(S,T) &= \left\{(S',T') \in \tilde{\mathcal{C}}_1(S,T) | \, (S',T') \text{ is of Type 2}\right\}, \\
\tilde{\mathcal{C}}_3(S,T) &= \left\{(S',T') \in \tilde{\mathcal{C}}_1(S,T) | \, (S',T') \text{ is of Type 3}\right\}.
\end{aligned}$$

注意，$\tilde{\mathcal{C}}_1(S,\ T) \supset \tilde{\mathcal{C}}_2(S,\ T) \supset \tilde{\mathcal{C}}_3(S,\ T) \ni (A|B)$。

为方便起见，命题 4.5、4.6、4.7、4.9、4.10 将称为更新序的原则。§4.3 中的另外两个命题将用于初始选取类型 1zw-序矩阵。命题 4.11、4.12、4.13、4.14、4.15 将称为可行序矩阵判据。

下面给出该算法的步骤。Mathematica 代码见附录 II。(II.1) 为 ($A|B$) 选取一个 1 zw 型序矩阵 (S,T)

(a) 根据圆选取对角元（应用命题 4.4(a)）(b) 为极大边选取非对角元（应用命题 4.8 ） (c) 根据边选取其他非对角元（应用命题 4.4(b) ） (d) 按照更新序的原则反复细化 (S,T) (II.2) 选取一个由 $\mathcal{C}_2$ 个 2 zw 型序矩阵组成的集合，使得 $\mathcal{C}_2 \ni (A,B)\tilde{}$ (a) 在 $\mathcal{C}_2(S,T)$ 中选取对角元与 (S,T) 相同的元素 (b) 按照更新序的原则细化这些元素 (c) 应用可行序矩阵判据，令 $\mathcal{C}_2$ 为剩余元素 (d) 若 $\mathcal{C}_2=\emptyset$，则消去 zw-图；否则继续下一步 (II.3) 选取一个由 $\mathcal{C}_3$ 个 3 zw 型序矩阵组成的集合，使得 $\mathcal{C}_3 \ni (A,B)\tilde{}$ (a) 在 $\mathcal{C}_3(S,T)$ 中选取包含于 $\mathcal{C}_2$ 中元素的元素 (b) 按照更新序的原则细化这些元素 (c) 应用可行序矩阵判据，令 $\mathcal{C}_3$ 为剩余元素 (d) 从 $\mathcal{C}_3$ 生成 r 阶矩阵 $\mathcal{R}$ (e) 若 $\mathcal{C}_3=\emptyset$，则消去 zw-图

下面我们讨论一些技术细节。

步骤 *(II.1)*。这一步相当直接。部分 (d) 将在某个类型1zw-序矩阵 (S,T) 处终止，对于 $(A|B)$，我们称这个 (S,T) 为最优。严格来说，这个zw-序矩阵更适合称为“相对于更新序原则而言最优”，因为还可以探索其他原则来进一步细化它。此类示例见 §11.5。稍微宽泛地使用这一术语，为简洁起见，我们就称其为最优。

步骤 *(II.2)*。我们使用最优的 (S,T) 来确定分离的更精确的序。通过暴力法无法实现从 $\mathcal{C}_2$ (S,T) 中选择元素的˜过程。我们˜先将 ($\mathcal{C}_1(S,T)$) 中的少数几个非对角元分离出来，再逐步对其他非对角元重复这一过程。

更准确地说，考虑一对 (i,j)、 $i\neq j$，其中 $|s_{ij}|>1$ 或 $|t_{ij}|>1$。如果 $|s_{ij}|>1$，我们将 s_{ij} 拆分为单元素集 $\{\sigma_1\},\{\sigma_2\},\dots\{\sigma_k\}$，但不同时拆分 t_{ij}，以免占用过多内存空间。令 S_l 为通过在 S中用 $\{\sigma_l\}$ 替换 s_{ij} 和 s_{ji} 而得到的矩阵。例如，若

$$S=\begin{pmatrix}\{1,2,3\} & \{1,2,3\} & \{1\}\\ \{1,2,3\} & \{1,2,3\} & \{1,2\}\\ \{1\} & \{1,2\} & \{1,2\}\end{pmatrix}$$

且 (i,j) =(1,2)，令 $\sigma_k=k$，则得到

$$S_k=\begin{pmatrix}\{1,2,3\} & \{k\} & \{1\}\\ \{k\} & \{1,2,3\} & \{1,2\}\\ \{1\} & \{1,2\} & \{1,2\}\end{pmatrix}\qquad \text{for } k=1,2,3.$$

原先由 (S,T) 覆盖的内容，现在由 $\{(S_1,T),(S_2,T),(S_3,T)\}$ 覆盖。接下来，对于每个 (S_l,T)，我们应用更新序的原则，然后得到的 (S',T') 满足以下其中一项

以下各项:

$$\prod_{i<j} |s'_{ij}|\ |t'_{ij}| \ = \ 0,\ 1,\ \text{or greater than 1.}$$

如果它为 0，我们就删除这个（S'，T'）；如果它为 1，我们就收集这个（S'，T'）；如果它大于 1，我们就对（S'，T'）的其他非对角元重复上述过程。最终，我们得到一个集合 $\mathcal{C}$，其中包含满足 $\mathcal{C} \ni (A|B)$ 的 zw 阶类型 2 矩阵。

令 $P_{(A|B)}$ 为所有不改变（$A|B$）的 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的排列的集合；即，$q \in P_{(A|B)}$ 表示与 q 对应的置换矩阵 Q 满足 $Q^{-1}AQ = A$ 和$Q^{-1}BQ = B$。排列的共轭变换对应于对顶点重新标记，因此将其应用于阶矩阵是合理的。$\mathcal{C}$ 中的两个 zw 阶矩阵等价，当且仅当其中一个可以通过排列 $q \in P_{(A|B)}$从另一个得到。在算法 I 中，我们已经消除了在物体排列意义下重复的 zw 矩阵。现在，对 $\mathcal{C}$ 中的元素执行相同操作，然后应用可行序矩阵判据以删除更多矩阵。

该步骤中的一个子程序计算由 $\mathcal{C}$产生的 r-阶矩阵，另一个子程序执行序比较过程。最终，我们要么得到一个由 zw-阶类型2矩阵组成的集合 $\mathcal{C}_2$，使得 $\mathcal{C}_2 \ni (A|B)$成立；要么得到一个空集合，在这种情况下可以消去 zw-图。

步骤 *(II.3)*。在此步骤中，我们对（S, T）$\in \mathcal{C}_2$的对角元应用与步骤 (II.2)相同的过程。同样地，我们逐个分离对角元。最终，我们要么得到一个由 zw-阶类型 3矩阵组成的集合 $\mathcal{C}_3$，使得 $\mathcal{C}_3 \ni (A|B)$成立；要么得到一个空集合，在这种情况下消去 zw-图。

两个集合 $\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_3$ 记录了位置和分离的可能序。我们已经在第 5 节看到，如何利用 $\mathcal{C}_2$ 或 $\mathcal{C}_3$ 生成多项式方程。下一步是应用我们最后的算法来寻找质量关系。

8. Algorithm III - Eliminations and mass relations

对于每个 zw-矩阵（$A|B$），我们按照第 5 节所述整理出一组多项式方程。这组多项式方程是与（$A|B$）相关的奇异序列存在的必要条件。我们希望应用消去理论，得到仅含质量变量的多项式方程，并将这些方程称为与（）相关的质量关系。由此，我们得出结论：位于这些质量关系的零点集之外的质量，不可能产生与（$A|B$）相关的奇异序列。如果我们能够对每个 zw-矩阵都这样做，那么就可以得出结论：对于位于一族质量关系的零点集之外的质量，中心构型具有有限性。由于中心构型在质量缩放下保持不变，这样的零点集应当是质量空间中的余维 2 代数簇。

给定 zw-矩阵（$A|B$）。执行算法 II 后，我们得到一个由 zw 阶矩阵构成的集合$\mathcal{C}$。它可以是上一节中得到的 $\mathcal{C}_2$ 或 $\mathcal{C}_3$。我们的第三个算法（Mathematica 代码见附录 III）包含两个简单步骤:

(III.1) 整理多项式方程 (III.2) 通过消元生成质量关系

步骤（*III.1*）。如第 5 节所述，我们收集了五类多项式方程。由于这一步相当直接，这里不展示具体细节。在收集主方程时，一个小小的变化是引入变量

$$u_{ij} = z_{ij}^{-1/2}, \quad v_{ij} = w_{ij}^{-1/2}.$$

复平方根具有多值性，但我们的方程和消元过程是明确无歧义的，因为形式为 $u_{ij}^k v_{ij}^l$ with $k, l \in \mathbb{Z}$ 的项在整个过程中都满足 $k + l \in 2\mathbb{Z}$。

步骤（*III.2*）。针对这一步设计了几个并行的子程序。这些子程序在所调用的多项式方程以及消元策略方面既有相似之处，也有差异。我们将展示其中三个，它们足以满足我们对 $n = 4$，5，6 的分析。以下三个小节将介绍一些技术细节。

8.1. **消元过程**。假设我们有若干个包含多个变量的多项式方程。令 $\mathcal{P}$ 为与这些方程对应的多项式集合，V 为变量族。我们的消元过程包含以下四类操作。

8.1.1. 删除孤立成员。如果存在某个 $v \in V$ 只出现在一个多项式 $f \in \mathcal{P}$ 中，那么我们就从 $\mathcal{P}$ 中删除 f，并从 V 中删除 v。

8.1.2. 提取因子。如果存在某个 $f \in \mathcal{P}$，使得 $f = g_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot g_k^{n_k}$ 对某些不可约多项式 $g_1, \ldots, g_k$ 成立，那么我们用 $g_1 \cdot \cdots \cdot g_k$ 替换 f，因为它与 f 有相同的零点。

8.1.3. 简单代换。如果存在多项式 $f \in \mathcal{P}$ 和变量 $v \in V$，使得$f = vg + h$，其中 g, h 是由单个项构成且与 v 无关的多项式，那么我们对 $\mathcal{P}$ 中的每个成员应用代换 $v = -h/g$。将 $\mathcal{P}$ 中的每个成员乘以某个 $k \in \mathbb{N}$ 的 g^k 后，$\mathcal{P}$ 将成为与 v 无关的多项式集合。

8.1.4. 消元。对于每个 $f \in \mathcal{P}$ 和 $v \in V$，令 $\deg(f, v)$ 表示 f 中关于 v 的各项的最高次数，并令 c_f 表示 f 中 $v^{\deg(f,v)}$ 这一项的系数。例如，如果$f = 3x^2z + 2xy + 4zy^3$ 且 $v = x$，那么 $\deg(f, v) = 2$ 且 $c_f = 3z$；如果 $f = 3xy^2 + 2xz - z^2y^2$ 且 $v = y$，那么 $\deg(f, v) = 2$ 且 $c_f = 3x - z^2$。

令 f_0 为 $\mathcal{P}$中的一个成员，使得对每个满足 $\deg(f, v) > 0$ 的$f \in \mathcal{P}$，均有 $\deg(f_0, v) > 0$，且 $\deg(f_0, v) \leq \deg(f, v)$。那么，对于每个满足 $\deg(f, v) > 0$ 的 $f \in \mathcal{P}$，令

$$g = c_{f_0} f - c_f f_0 v^{\deg(f,v)-\deg(f_0,v)},$$

并用 f 替换 g。由于 g中项 $v^{\deg(f,v)}$ 的系数为 0，因此 $\deg(g, v) <\deg(f, v)$。

重复此过程，直到只剩下一个满足 $\deg(f, v) > 0$ 的 $f \in \mathcal{P}$。

8.2. **生成质量关系**。对于不同的 zw-矩阵，我们有不同的方法来寻找质量关系。

8.2.1. 对于某些 zw-矩阵，我们只需收集由 zw-矩阵 $(A|B)$ 确定的主方程，并根据由某些 zw- 阶矩阵 $(S,\ T)$ 确定的簇方程进行代换。然后直接使用 Mathematica 中的 “GroebnerBasis”函数来找出质量关系。

8.2.2. 对于某些 zw-矩阵，我们检查 $\mathcal{C}_3$ 中的每个 zw-序矩阵是否满足该系统包含如（5.10）所示的某个楔形方程的假设。然后，对于每个（$S,\ T$）$\in\mathcal{C}_3$ 以及（5.10）的每种选择，我们将 f 与质心条件收集为一个集合 $\mathcal{P}$，并根据由（$S,\ T$）确定的簇方程进行代换。

由于 f 中某些 z_k 或 w_k 的幂次可能不是整数，我们分别将 $z_k,\ w_k$ 替换为 $\zeta_k^2,\ \omega_k^2$。然后，我们应用上述消元过程，直到 $\mathcal{P}$ 中存在一个仅依赖于质量的多项式，或者 $\mathcal{P}$ 中不存在多项式为止。

8.2.3. 对于某些 zw-矩阵，我们收集由（$A|B$）或某个（$S,\ T$）确定的主方程、以及分离之间的关系，并根据由（$S,\ T$）确定的簇方程进行代换。令 $\mathcal{P}$ 为与这些方程对应的多项式集合。我们分别将 Z_{kl}'s 和 W_{kl}'s 替换为 $z_{kl}^{-1/2}w_{kl}^{-3/2}$ 和 $w_{kl}^{-1/2}z_{kl}^{-3/2}$，然后分别用 u_{kl}^{-2} 和 v_{kl}^{-2} 代换 z_{kl} 和 w_{kl}。将 $\mathcal{P}$ 中的每个成员乘以某个 $u^{n_1}v^{n_2}$ 后，$n_1+n_2\in 2\mathbb{N}$，$\mathcal{P}$ 成为一个新的多项式集合。然后，我们应用上述消元过程，直到 $\mathcal{P}$ 中存在一个仅依赖于质量的多项式，或者 $\mathcal{P}$ 中不存在多项式为止。

8.2.4. 关于这一过程的细节，我们有一些变体。选择 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}\ni(A|B)$，我们可以在 $\mathcal{C}$ 中使用 zw阶矩阵来确定主方程和簇方程。如果对于每个 $(S,\ T)\ \in\mathcal{C}$，我们都有一个质量关系，那么它们的公倍数就是这个 zw阶矩阵的一个质量关系。此外，我们还可以添加通过讨论得到、但算法未自动收集的其他方程；有时我们只选取部分（而非全部）主方程，因为方程过多会导致计算成本过高。

8.3. **子程序概述**。第一子程序收集由 zw阶矩阵（$A|B$）确定的主方程，并根据由某些阶矩阵确定的簇方程进行代换。然后使用 Mathematica 中的“GroebnerBasis”函数生成质量关系。

对于第二个子程序，我们检查它是否满足系统包含某个楔形方程这一假设。然后，对于这些方程的每种选择 f，我们将 f与质心条件一并收集为集合 $\mathcal{P}$，并根据由某些阶矩阵（$S,\ T$）确定的簇方程进行代换。分别用 ζ_k^2、ω_k^2 替换z_k、w_k。然后应用上述消元过程，直到 $\mathcal{P}$ 中出现一个仅依赖于质量的多项式，或者 $\mathcal{P}$中不再有多项式。

在第三个子程序中，我们将由某个 zw-序矩阵 (S,T) 确定的全部或部分主方程，以及必要时的附加方程，收集到集合 V_1 中，并分别用 $u_{kl}v_{kl}^3$、$u_{kl}^3v_{kl}$ 替换 Z_{kl}、W_{kl}。接下来，我们收集涉及以下物体的间隔关系：这些物体

在图中构成一个三角形的顶点，并分别用 u_{kl}^{-2} 、 v_{kl}^{-2} 替换 z_{kl}、 w_{kl} 。然后，我们根据由 zw-序矩阵 (S,T) 确定的簇方程进行代换，并对集合 V_1 应用消元过程（而不是求助于 Gr¨obner 基）。

9. The case $n = 4$

对于四体问题，利用算法 I，我们在图 1 中得到了奇异序列的五种图。这些图以及利用算法 II、III 得到的质量关系，与 [4]，中的相同，但第三种图多出了一些因子。这并非巧合，因为我们的算法旨在通过机械化过程体现其思想。本节将展示这些算法在这些图中的应用。类似情形在 $n = 5$，6 中多次出现。

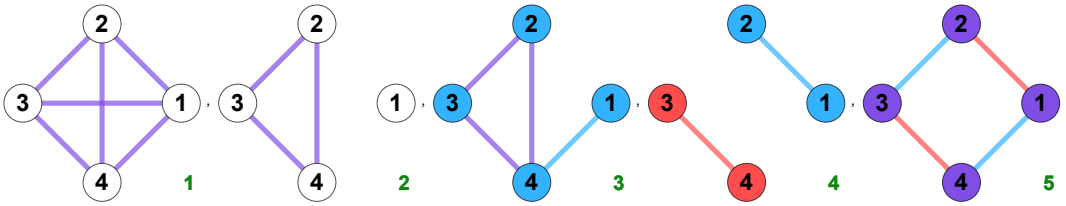

Figure 1. 四体问题奇异序列的图。

9.1. **图 1**。 这是全边图。利用算法 II，我们得到一个类型 2 的 zw 阶矩阵，以覆盖 zw 矩阵的各阶。

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} \end{pmatrix}\right).$$

这是估计 2 的一个显然推论，因为每个分离的阶为 ϵ。算法 II 的步骤 (II.3) 得到类型 3 的 25 zw 阶矩阵，以覆盖 zw 矩阵的各阶。然而，由于最高阶项过多，在这种情况下，我们无法通过算法找到质量关系。

事实上，如 [4, §5.6], 所示，对于这个特定的图，无需求助于任何质量关系即可实现有限性。其思路是引入一个关于距离的主导多项式，该多项式在趋近于这个特定图的奇异序列上有界。利用主导多项式的一项基本性质，可以确保存在一个趋近于另外四个图之一的奇异子序列。因此，要得出有限性结论，只需排除另外四个图。

9.2. **图2**。该图由一个全边孤立三角形构成。通过算法 II，我们找到 5 zw个类型2的序矩阵，用以覆盖 zw矩阵的序。它们是

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 3\} & \{2\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 3\} & \{2\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} \end{pmatrix}\right)$$

它们都生成相同的 r阶矩阵

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{2,3,4\} & \{2,3,4\} & \{2,3,4\} \\ \{2,3,4\} & \{\} & \{1\} & \{1\} \\ \{2,3,4\} & \{1\} & \{\} & \{1\} \\ \{2,3,4\} & \{1\} & \{1\} & \{\} \end{pmatrix}.$$

注意，这些 zw阶矩阵的左右两半中的第 (1,2)、(1, 3) 和 (2,3) 项，正是我们在例 4.1 中看到的内容。算法 II 的步骤 (II.3) 生成 468 zw阶的类型 3 矩阵，以覆盖 zw矩阵的各阶。

可以直接将第三个子程序应用于 §8.1 中所有的 z_i-、 w_i-方程，也可以选取一个较小的多项式方程集合，以减少计算量。例如，在利用 zw-矩阵确定主方程和簇方程后，我们可以收集 z_2-、 z_3-、 w_2-、 w_3-方程以及分离之间的关系，根据由类型1的 zw-阶矩阵确定的簇方程进行代换，并应用消元过程。由此得到一个质量关系 $f_{4,\ 2} = 0$ 其中 $f_{4,\ 2}$ 是一个多项式

$\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, $\sqrt{m_3}$, $\sqrt{m_4}$ 有 6 个因子:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}-\sqrt{m_2}\sqrt{m_4}-\sqrt{m_3}\sqrt{m_4},\\
&\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}+\sqrt{m_2}\sqrt{m_4}-\sqrt{m_3}\sqrt{m_4},\\
&\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}-\sqrt{m_2}\sqrt{m_4}+\sqrt{m_3}\sqrt{m_4},\\
&m_2m_3+m_2m_4+m_3m_4-2m_2\sqrt{m_3}\sqrt{m_4},\\
&m_2m_3+m_2m_4+m_3m_4-2\sqrt{m_2}m_3\sqrt{m_4},\\
&m_2m_3+m_2m_4+m_3m_4-2\sqrt{m_2}\sqrt{m_3}m_4.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

前三个因子给出方程

$$\frac{1}{\sqrt{m_i}}=\frac{1}{\sqrt{m_j}}+\frac{1}{\sqrt{m_k}}\qquad \{i,j,k\}=\{2,3,4\}. \tag{9.2}$$

后三个因子可写为

$$m_i(\sqrt{m_j}-\sqrt{m_k})^2+m_jm_k\qquad \{i,j,k\}=\{2,3,4\},$$

对于正质量，它们永远不为零。

9.3. 图3。 这是“风筝图”，其中一条 a w-边与一个全边三角形相连。根据算法 II，我们得到两个 zw-序矩阵，其类型为 3，用于覆盖 zw-矩阵的序:

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\ \{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}\\ \{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}\\ \{1\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}\\ \{5\}&\{3\}&\{5\}&\{3\}\\ \{5\}&\{3\}&\{3\}&\{5\}\end{pmatrix}\right),$$
$$\left(\begin{pmatrix}\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\ \{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}\\ \{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}\\ \{1\}&\{3\}&\{3\}&\{0\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}\\ \{5\}&\{3\}&\{5\}&\{3\}\\ \{5\}&\{3\}&\{3\}&\{5\}\end{pmatrix}\right).$$

它们都生成 r-序矩阵

$$\begin{pmatrix}\{\}&\{4\}&\{4\}&\{3\}\\ \{4\}&\{\}&\{1\}&\{1\}\\ \{4\}&\{1\}&\{\}&\{1\}\\ \{3\}&\{1\}&\{1\}&\{\}\end{pmatrix}.$$

同样，我们可以直接应用 §8.1 中的第三个子程序，也可以只收集 z_2-、z_3-、 w_2-、 w_3-方程、簇方程以及分离之间的关系。然后，根据由 zw-阶矩阵确定的簇方程进行代换，并应用消元过程，算法 III 输出质量关系 $f_{4,3}=0$，其中多项式$f_{4,3}$ 有 11 个因子。其中六个与 (9.1) 完全相同。另有两个

较短的因子为

$$-m_2^{3/4}m_3^{3/4}+m_2\sqrt{m_4}+m_3\sqrt{m_4},$$
$$m_2^3-(m_2+m_3)m_4^2.$$

另外三个因子 $\mu_{15}(m_2,\ m_3,\ m_4)$、$\mu_{21}(m_2,\ m_3,\ m_4)$、$\mu_{33}(m_2,\ m_3,\ m_4)$ 更长。详情见附录 IV。上面的第一个因子等价于

$$(m_2m_3)^3=m_4^2(m_2+m_3)^4. \tag{9.3}$$

9.4. 图4。 图 1 中的第四个图是一个非连通图，由一条 z 边和一条 w 边组成。应用算法 II，一个类型 3 的 zw 序矩阵覆盖了 zw 矩阵的序：

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\}&\{1\}&\{5\}&\{5\}\\ \{1\}&\{1\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{1\}&\{1\}\\ \{5\}&\{5\}&\{1\}&\{1\}\end{pmatrix}\right).$$

我们有楔形方程

$$m_1m_3(z_1w_3)^{-1/2}\pm m_1m_4(z_1w_4)^{-1/2}\pm m_2m_3(z_2w_3)^{-1/2}\pm m_2m_4(z_2w_4)^{-1/2}.$$

对于每个楔形方程，我们根据簇方程进行代换，并对由该楔形方程和质心条件组成的集合应用消元过程。可以得到两个质量关系：对于其中 4 个楔形方程，存在一个质量关系

$$(m_1^2-m_1m_2+m_2^2)(m_3^2-m_3m_4+m_4^2)=0,$$

该关系对正质量不成立；对于另外 4 个楔形方程，我们得到质量关系

$$m_1^3m_3^3+m_2^3m_3^3-4m_1^{3/2}m_2^{3/2}m_3^{3/2}m_4^{3/2}+m_1^3m_4^3+m_2^3m_4^3=0.$$

这些可以由 §8.3 中的第二个子程序自动实现。最后一个方程可以改写为

$$[(m_1m_3)^{3/2}-(m_2m_4)^{3/2}]^2+[(m_1m_4)^{3/2}-(m_2m_3)^{3/2}]^2=0.$$

对于正质量，当且仅当以下条件成立时，上述方程成立

$$m_1m_3=m_2m_4\quad\text{and}\quad m_1m_4=m_2m_3,$$

这等价于以下条件

$$m_1=m_2\quad\text{and}\quad m_3=m_4. \tag{9.4}$$

9.5. **图5**。 图 1 中的最后一个图是方形图。根据算法 II，同样有一个类型 3 的 zw-序矩阵覆盖 zw- 矩阵的序：

$$\left(\begin{pmatrix}\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{1\}\\\{5\}&\{5\}&\{1\}&\{5\}\\\{5\}&\{1\}&\{5\}&\{5\}\\\{1\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{1\}&\{5\}&\{5\}\\\{1\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{1\}\\\{5\}&\{5\}&\{1\}&\{5\}\end{pmatrix}\right).$$

与前面的图一样，我们知道所有分离的精确阶数，它们要么是极大，要么是极小。

我们收集由 zw-矩阵确定的主方程，并根据由某些 zw-阶矩阵确定的簇方程进行代换。通过应用消元过程（例如 §8.1 中的第三个子程序），或直接使用 Mathematica 中的 “Groebner-Basis”函数（§8.1 中的第一子程序），可以轻松得到以下质量关系：

$$m_1m_3 = m_2m_4. \tag{9.5}$$

上述质量关系 (9.2)、(9.3)、(9.4)、(9.5) 与 [4, §5.1-5.4] 中的关系一致。

10. The case $n = 5$

对于 $n = 5$ 这一情形，算法 I 得到了 20 个图。见图2。图 9、11、13、17 已被算法 II 排除，其余 16 个图正是 [4,图 11] 中的图。

10.1. **图 1、3、6、8**。它们与 §9.2 中的情况类似。对于图 1，一个zw阶的类型2矩阵足以覆盖 zw-矩阵的各阶：

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\sim4\}&\{4\}&\{4\}&\{4\}&\{4\}\\\{4\}&\{0\sim4\}&\{4\}&\{4\}&\{4\}\\\{4\}&\{4\}&\{0\sim4\}&\{3\}&\{3\}\\\{4\}&\{4\}&\{4\}&\{0\sim4\}&\{3\}\\\{4\}&\{4\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim4\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{0\sim3\}&\{2\}&\{3\}&\{3\}&\{2\}\\\{2\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}&\{2\}\\\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}\\\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}\\\{2\}&\{2\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}\end{pmatrix}\right).$$

算法 II 的步骤 (II.3) 得出 125 zw阶的类型 3 矩阵。

类似地，对于图8，也有一个 zw阶的类型2矩阵可以覆盖 zw-矩阵的各阶：

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\sim3\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\\{1\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}\\\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}\\\{1\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\\{5\}&\{5\}&\{0\sim4\}&\{3\}&\{3\}\\\{5\}&\{5\}&\{3\}&\{0\sim4\}&\{3\}\\\{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim4\}\end{pmatrix}\right).$$

算法 II 的步骤 (II.3) 得到类型 3 的 24 zw 阶矩阵。

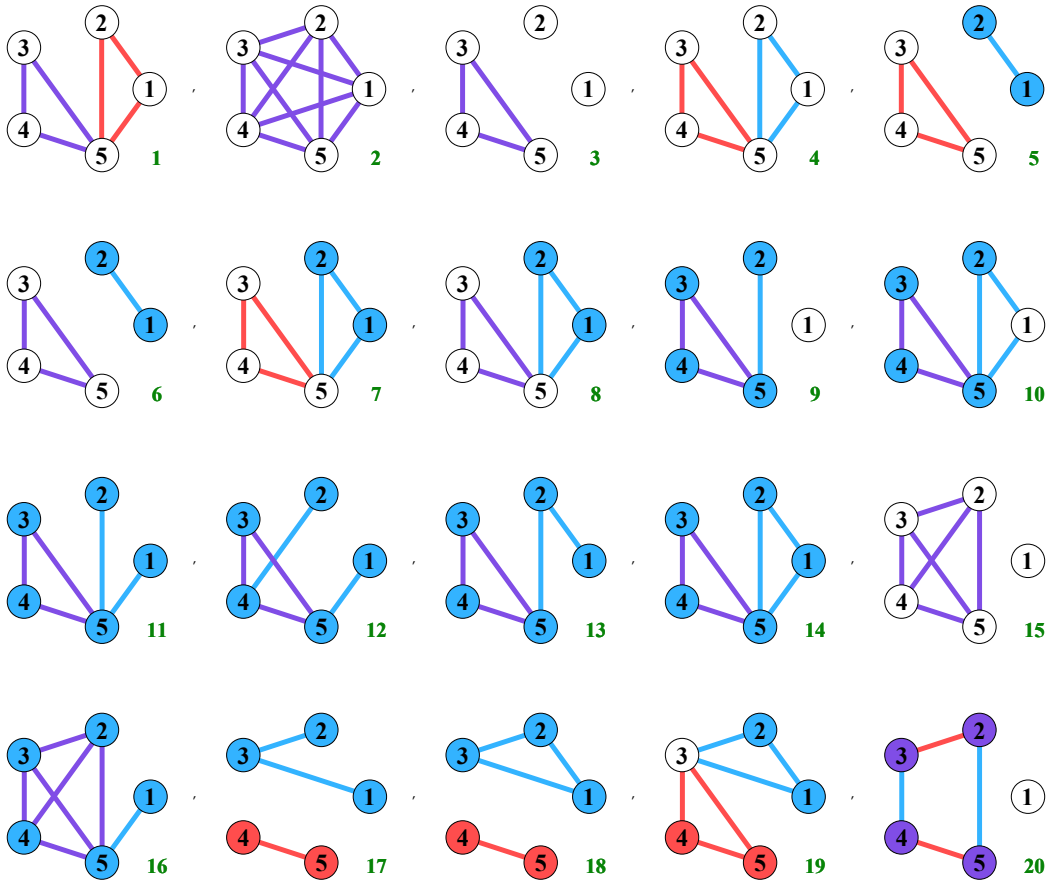

FIGURE 2. 五体问题奇异序列的图。

图 m 6 需要三个类型2的 zw 阶矩阵来覆盖其 zw 矩阵的序 :

$$\left(\begin{pmatrix} \{0,1\} & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{3\} \\ \{1\} & \{0,1\} & \{2\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\} & \{2\} & \{2\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} \{0,1\} & \{1\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{1\} & \{0,1\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{4\} & \{4\} & \{3\} & \{4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} \{0,1\} & \{1\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{1\} & \{0,1\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right).$$

步骤 (II.3) 得出 18 zw 阶的类型 3 矩阵。

图3更为复杂。覆盖相应 zw矩阵各阶的最优 zw阶类型1矩阵为：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} \\ \{2\sim 4\} & \{0\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} \\ \{2\sim 4\} & \{0\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{0\sim 4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{3\} & \{0\sim 4\} & \{3\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right).$$

其中包含多于 4.78×10^6 zw 个类型2阶矩阵，以及多于 $4.67\times 10^{13} zw$ 个类型3阶矩阵。步骤 (II.2) 收集 32 zw 个类型2阶矩阵，以覆盖其 zw矩阵各阶。

将 §8.3 中的第三个子程序应用于所有 z_i、 w_i 方程后，图1、图3、图6、图8 均得出相同的质量关系 $f_5=0$，其中 f_5 与 (9.1) 相同，但下标向后移 1。特别地，我们还有 (9.2)，但下标向后移 1：

$$\frac{1}{\sqrt{m_i}}=\frac{1}{\sqrt{m_j}}+\frac{1}{\sqrt{m_k}} \qquad \{i,j,k\}=\{3,4,5\}.$$

我们还可以收集主方程的部分列表，例如，仅收集由 zw-矩阵确定的 z_3、 z_4、 w_3、 w_4 方程。结合分离之间的关系，根据由某些 zw 阶矩阵确定的簇方程进行代换，并应用消元过程，我们最终得到一个限制性更强的质量关系：

$$(m_3^{1/4}-m_5^{1/4})f_5 \;=\; 0.$$

10.2. 图 4、7。 在任一图中，由物体 3、4、5 之间的 z 边构成一个三角形，并且对于 $i\in\{3,4\}$ 和 $j\in\{1,2\}$，不存在连接物体 i 和物体 j 的边。

对于图4，存在一个类型2的 zw序矩阵，涵盖 zw矩阵的序：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{2\} & \{4\} & \{4\} & \{2\} \\ \{2\} & \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{2\} \\ \{4\} & \{4\} & \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim 4\} & \{4\} \\ \{2\} & \{2\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{0\sim 4\} & \{2\} & \{2\} \\ \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{0\sim 4\} & \{2\} \\ \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right).$$

该 zw序矩阵生成 r序矩阵

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{2\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\} \\ \{2\} & \{\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{\} & \{2\} & \{2\} \\ \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\} & \{\} & \{2\} \\ \{2\} & \{2\} & \{2\} & \{2\} & \{\} \end{pmatrix}.$$

对于图7，有一个类型2的 zw 序矩阵覆盖了 zw-矩阵的序：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{1\} & \{4\} & \{4\} & \{1\} \\ \{1\} & \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{1\} \\ \{4\} & \{4\} & \{0\sim 4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim 4\} & \{4\} \\ \{1\} & \{1\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\sim 4\} & \{2\} & \{2\} \\ \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{0\sim 4\} & \{2\} \\ \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}\right).$$

它生成了 r 序矩阵

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{3\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{3\} & \{\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{4\} & \{\} & \{2\} & \{2\} \\ \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{\} & \{2\} \\ \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{2\} & \{\} \end{pmatrix}.$$

对于这两个图，取任意一个 zw 序矩阵，如果我们只收集算法自动生成的方程，那么由于太多极大序集并非确定为极大，我们得不到任何质量关系。如果我们分析某些 z_i-或 w_i-方程中的最高阶项，并针对每种可能的情况添加相应的 z_i-或 w_i-方程，那么就可能得到质量关系。

为方便起见，引入如下记号：

记号。对于 $i \in \{1,\ldots,n\}$，令 $M^*_{Z,i}$ 表示方程 $z_i = \sum_{j\neq i} m_j Z_{ji}$ 中的最高阶项的主体，并令 $M^*_{W,i}$ 表示方程$w_i = \sum_{j\neq i} m_j W_{ji}$中的最高阶项的主体。

显然，$M^*_{Z,\ i} \subset M_{Z,\ i}$, $M^*_{W,\ i} \subset M_{W,\ i}$, $|M^*_{Z,\ i}| \geq 2$, $|M^*_{W,\ i}| \geq 2$。

对于图4中唯一的类型2 zw-序矩阵，其极大序集及其是否确定为极大如下表所示：

	$M_{Z,i}$	确定为极大?	$M_{W,i}$	确定为极大?
$i=1$	$\{1,2,5\}$		$\{2,5\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2,5\}$		$\{1,5\}$	$\surd$
$i=3$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{3,4,5\}$	
$i=4$	$\{3,5\}$	$\surd$	$\{3,4,5\}$	
$i=5$	$\{3,4\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$

由于物体 3、4、5 之间由 z-边构成一个三角形，根据规则 2c $z_{34} \approx z_{35} \approx z_{45}$ 和 $w_{34} \approx w_{35} \approx w_{45}$，然后是 $Z_{34} \approx Z_{35} \approx Z_{45}$ $W_{34} \approx W_{35} \approx W_{45}$。因此，$M^*_{W,\ 3}$和 $M^*_{W,\ 4}$有四种情况：

1. $M^*_{W,\ 3}=\{4,5\}$和$M^*_{W,\ 4}=\{3,5\}$，2. $M^*_{W,\ 3}=\{3,4,5\}$和$M^*_{W,\ 4}=\{3,5\}$，3. $M^*_{W,\ 3}=\{4,5\}$和$M^*_{W,\ 4}=\{3,4,5\}$，4. $M^*_{W,\ 3}=\{3,4,5\}$和$M^*_{W,\ 4}=\{3,4,5\}$。

我们首先证明情形 2 和情形3是不可能的。若 $w_3\approx W_{43}=r_{43}^{-3}w_{43}$，则 $w_3\succ w_{43}$，因为 $r_{43}\prec 1$。由此可得 $w_4\approx w_3\approx W_{43}$，这意味着$M^*_{W,\ 4}=\{3,4,5\}$，因此情形 2 不可能。类似地，情形3也不可能。

在情形 4 中，由于 $r_{34}\prec 1$，我们有 $w_3\approx W_{34}=r_{34}^{-3}w_{34}\succ w_{34}$，进而可得 $w_3\sim w_4$。因此我们还有方程 $w_3=w_4$。

对于情形 1，我们收集 z_3-方程和 z_4-方程、分离之间的关系以及附加方程

$$\begin{aligned}0 &= m_4W_{43}+m_5W_{53},\\ 0 &= m_3W_{34}+m_5W_{54}.\end{aligned}$$

然后我们根据簇方程进行代换，并应用消元过程。结果得到质量关系 $f_{5,\ 4,\ 1,\ 1}=0$，其中 $f_{5,\ 4,\ 1,\ 1}$ 与（9.1）相同，只是下标整体向后移了 1 位。

对于情形 4，我们汇集 z_3-方程和 z_4-方程、分离之间的关系以及附加方程

$$\begin{aligned}w_3 &= m_4W_{43}+m_5W_{53},\\ w_4 &= m_3W_{34}+m_5W_{54},\\ w_3 &= w_4.\end{aligned}$$

然后，根据簇方程进行代换，并应用消元过程。结果是一个质量关系 $f_{5,4,1,2}=0$，其中 $f_{5,4,1,2}$ 与 §9.3 中的 $f_{4,3}$ 相同，只是下标向后移了 1 位。

另一方面，通过类似的讨论，对于 $M^*_{Z,1}$ 和 $M^*_{Z,2}$，我们也有两种可能性：

1. $M^*_{Z,1}=\{2,5\}$ and $M^*_{Z,2}=\{1,5\}$,
2. $M^*_{Z,1}=\{1,2,5\}$ and $M^*_{Z,2}=\{1,2,5\}$.

在情形 1 中，我们得到一个质量关系 $f_{5,4,2,1}=0$ ，其中 $f_{5,4,2,1}$ 与 (9.1) 相同，只是下标分别由 $2,3,4$ 变为 1,2,5。在情形 2 中，我们得到一个质量关系$f_{5,4,2,2}=0$ ，其中 $f_{5,4,2,2}$ 与 §9.3 中的 $f_{4,3}$ 相同，只是下标分别由 2,3,4 变为 1,2,5。

因此，对于图4，我们有一个质量关系 $f_{5,\ 4,\ 1}=f_{5,\ 4,\ 2}=0$ ，其中 $f_{5,\ 4,\ i}$ 是 $f_{5,\ 4,\ i,\ 1}$ 和 $f_{5,\ 4,\ i,\ 2}$ 的最小公倍数，对应于 $i=1,\ 2$。

对于图7中唯一的类型2 zw-序矩阵，极大序集以及它们是否确定为极大，见下表：

	$M_{Z,i}$	确定为极大?	$M_{W,i}$	确定为极大?
$i=1$	$\{1,2,5\}$		$\{1,2,5\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2,5\}$		$\{1,2,5\}$	$\surd$
$i=3$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{3,4,5\}$	
$i=4$	$\{3,5\}$	$\surd$	$\{3,4,5\}$	
$i=5$	$\{3,4\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$

与图4中的讨论相同，对于 $M^*_{W,3}$和 $M^*_{W,4}$有两种情形，在这些情形下，我们分别得到质量关系 $f_{5,4,1,1}=0$ 和 $f_{5,4,1,2}=0$ 。因此，对于图7，我们得到与图4相同的质量关系。

10.3. 图5. 对于图5，有三个 zw-序矩阵（S_k，T）、 $k=2$，3，4，属于类型2，并覆盖 zw-矩阵的序，其中

$$S_k=\begin{pmatrix} \{0\sim 1\} & \{1\} & \{k\} & \{4\} & \{4\} \\ \{1\} & \{0\sim 1\} & \{k\} & \{4\} & \{4\} \\ \{k\} & \{k\} & \{k\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \end{pmatrix},$$

and

$$T=\begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\sim 4\} & \{2\} & \{2\} \\ \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{0\sim 4\} & \{2\} \\ \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim 4\} \end{pmatrix}.$$

它们产生相同的 r-序矩阵

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{3\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{3\} & \{\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{4\} & \{\} & \{2\} & \{2\} \\ \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{\} & \{2\} \\ \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{2\} & \{\} \end{pmatrix}.$$

对于（S_2，T）和（S_3，T），极大序集以及它们是否确定为极大的情况如下表所示:

	$M_{Z,i}$	一定是最大值吗?	$M_{W,i}$	一定是最大值吗?
$i=1$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=3$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5\}$	
$i=4$	$\{3,5\}$	$\surd$	$\{3,4,5\}$	
$i=5$	$\{3,4\}$	$\surd$	$\{3,4,5\}$	

与图4的讨论相同，对于 $M^*_{W,4}$和 $M^*_{W,5}$，这两种情形分别得到质量关系 $f_{5,5,1}=0$ 和 $f_{5,5,2}=0$ ，其中 $f_{5,5,i}$ 与 §10.2 中的 $f_{5,4,1,i}$ 相同，只是对于 $i=1,2$，下标分别由 $3,4,5$ 改为 4,5,3。

对于 (S_4, T)，极大序集以及其是否确定为极大如下表所示：

	$M_{Z,i}$	一定是最大值?	$M_{W,i}$	一定是最大值?
$i=1$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=3$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5\}$	
$i=4$	$\{3,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5\}$	
$i=5$	$\{3,4\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5\}$	

我们首先证明存在互不相同的 i，$j\in\{3,4,5\}$，使得 $M^*_{W,\,i}$，$M^*_{W,\,j}\subset\{3,4,5\}$。接着按照图4中的类似方法，我们将得到质量关系 $f_{5,\,5,\,3}=0$，其中 $f_{5,\,5,\,3,\,k}$ 与§10.2中的 $f_{5,\,4,\,1}$ 相同，只是下标从3，4，5分别改为 i，j，k，其中 $\{i,j,k\}=\{3,4,5\}$。

对于 $i\in\{3,4,5\}$，假设存在某个 $p\in\{1,2\}\cap M^*_{W,i}$。由 w阶序矩阵，根据三角不等式可得，对于 $j=3$，4，5，有 $w_{ip}\approx w_{jp}$。由于物体3、4、5之间由 z 条线段构成一个三角形，因此有 $j,k\in M^*_{W,i}$，其中 $\{i,j,k\}=\{3,4,5\}$。由关系 $Z_{kl}=r_{kl}^{-3}z_{kl}$ 可得，对于不同于 i 的 $j\in\{3,4,5\}$，有 $z_{pi}\prec z_{ij}\approx z_{34}$，从而得到 $z_{pj}\approx z_{ij}\approx z_{34}$。因此 $Z_{pj}\prec Z_{ij}\approx Z_{34}$，这意味着 $p\notin M^*_{W,j}$。另一方面，由于对于 $k=3$，4，5，有 $z_{12}\prec z_{1k}$，故可得 $z_{1k}\approx z_{2k}$。由 w阶序矩阵可知 $w_{1k}\approx w_{2k}\approx\epsilon^{-2}$，从而得到 $Z_{1k}\approx Z_{2k}$。因此，对于不同于 i 的 $j\in\{3,4,5\}$，有 $\{1,2\}\subset M^*_{W,i}$，并且 $\{1,2\}\cap M^*_{W,j}=\emptyset$，于是存在互不相同的 j，$k\in\{3,4,5\}$，使得 $M^*_{W,j},M^*_{W,k}\subset\{3,4,5\}$。

对于图5，我们有质量关系 $f_{5,\,5}=0$ 其中 $f_{5,\,5}$ 是 $f_{5,\,5,\,1}$、$f_{5,\,5,\,2}$、$f_{5,\,5,\,3,\,3}$、$f_{5,\,5,\,3,\,4}$以及 $f_{5,\,5,\,3,\,5}$的最小公倍数。

10.4. 图10、图14。这两种情形与§9.3中的风筝图相似。一个zw-序矩阵的类型2足以覆盖图10的 zw-矩阵的序：

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\sim3\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\ \{1\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\ \{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}\\ \{3\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}\\ \{1\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{0\sim4\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}\\ \{5\}&\{5\}&\{3\}&\{5\}&\{3\}\\ \{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}&\{5\}\end{pmatrix}\right).$$

与图8相比，它们的 zw-矩阵之间的差异体现在 w-矩阵的第一、第三、第四和第五个对角元上。这一事实反映在它们之间用于覆盖的类型2 zw-序矩阵的差异中。

图14的 zw-图也可由一个类型 2 zw-序矩阵覆盖：

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\sim3\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\ \{1\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\ \{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}&\{3\}\\ \{3\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}&\{3\}\\ \{1\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{0\sim3\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}\\ \{5\}&\{5\}&\{3\}&\{5\}&\{3\}\\ \{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}&\{5\}\end{pmatrix}\right).$$

收集由 zw-矩阵确定的 z_3、z_4、w_3、w_4-方程以及分离之间的关系，然后根据由簇方程确定的

某些 zw-阶矩阵进行代换，消元过程（§8.3中的第三个子程序）得到质量关系 $f_5 = 0$，其中 f_5 与§9.3中的$f_{4,\ 3}$ 相同，只是下标移了1位。

10.5. 图 12。 存在 2 zw 阶的类型2矩阵：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0,1\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{1\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{2\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{1\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0,1\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{5\} & \{4\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} \\ \{5\} & \{4\} & \{3\} & \{5\} & \{3\} \\ \{5\} & \{4\} & \{3\} & \{3\} & \{5\} \end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{1\} \\ \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{1\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{1\} & \{3\} & \{0\sim 3\} & \{3\} \\ \{1\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim 3\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{5\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} & \{5\} \end{pmatrix}\right).$$

对于每一个，我们收集由 zw 阶矩阵确定的所有主方程，以及分离之间的关系。接着，根据簇方程进行代换并应用消元过程，最终得到两个多项式方程。总的来说，它们的因子包括

$$\begin{aligned}
&\sqrt{m_3}\sqrt{m_4} - \sqrt{m_3}\sqrt{m_5} - \sqrt{m_4}\sqrt{m_5},\\
&\sqrt{m_3}\sqrt{m_4} + \sqrt{m_3}\sqrt{m_5} - \sqrt{m_4}\sqrt{m_5},\\
&\sqrt{m_3}\sqrt{m_4} - \sqrt{m_3}\sqrt{m_5} + \sqrt{m_4}\sqrt{m_5},\\
&m_3m_4 + m_3m_5 + m_4m_5 - 2m_3\sqrt{m_4}\sqrt{m_5},\\
&m_3m_4 + m_3m_5 + m_4m_5 - 2\sqrt{m_3}m_4\sqrt{m_5},\\
&m_3m_4 + m_3m_5 + m_4m_5 - 2\sqrt{m_3}\sqrt{m_4}m_5,\\
&m_3^3 - (m_2 + m_3 + m_4)m_5^2,\\
&m_1m_3^3 + m_2m_3^3 - m_1m_3m_5^2 - m_1m_4m_5^2 + m_2m_5^3.
\end{aligned}$$

另外六个较长的因子如下（详情见附录 IV）

$$\mu_{45}(m_2,m_3,m_4,m_5),\ \mu_{84}(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5),\ \mu_{88}(m_2,m_3,m_4,m_5),$$
$$\mu_{111}(m_2,m_3,m_4,m_5),\ \mu_{221}(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5),\ \mu_{374}(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5).$$

10.6. 图 19。 此情形与 §9.4 中的非连通图相似。 zw 图由 9 zw 阶的类型 3 矩阵覆盖：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} \\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} \\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\} \\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\} \end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{0\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{0\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{0\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{0\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{0\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{0\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{0\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{0\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{0\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{pmatrix}\{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{1\} & \{1\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{1\} & \{1\}\end{pmatrix}\right).$$

对于这些 zw 阶矩阵中的每一个，我们整理出一个楔形方程和质心条件，然后根据簇方程进行代换。类似于相关讨论

在 §9.4 中，使用 §8.3 中的第二个子程序，对于部分楔形方程，我们得到一个对正质量永远不成立的质量关系：

$$(m_1^2 - m_1m_2 + m_2^2)(m_4^2 - m_4m_5 + m_5^2) = 0;$$

对于其他一些楔形方程，我们得到一个质量关系，它等价于 t o

$$m_1 = m_2 \quad \text{and} \quad m_4 = m_5$$

对正质量成立。

10.7. **图20**。 这个情形类似于 §9.5 中分析的方形图。同样，我们只有一个 Type 2 zw-序矩阵来涵盖 zw-图的各个序，

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{1\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim 4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{1\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{5\} \end{pmatrix}\right).$$

在 §9.5 中得到的 zw-序矩阵由上述矩阵的 4×4 个块组成。完全按照 §9.5 中相同的过程，我们得到质量关系

$$m_2m_4 = m_3m_5.$$

10.8. **其他图**。 对于其他图，即编号为 2、15、16、18 的图，我们的程序没有输出任何质量关系。在 [4], 其中一些图是逐个情形处理的，其余图则通过与 §9.1 中所述类似的论证予以排除。其余图有一个很好的共同特点：某个关于距离的简单主导多项式（他们称之为 *4*-乘积）在趋近于这些图的奇异序列上保持有界。这保证了存在一个趋近于其他某个图的奇异子序列。

11. The case $n = 6$

我们关于六体问题的主要结果是

定理11.1。 平面六体问题至多有 *85* 种可能的 zw-图。其中至少有 *61* 种图不可能实现，除非质量空间中某个余维为 *2* 的簇上的正质量。

事实上，我们通过算法 I 得到了 117 zw-图。见图3、4、5、6。其中有 27 种图被算法 II 直接排除：

第21、23、24、25、26、33、34、35、37、38、39、41、42、53、54、
56、68、70、72、83、85、87、91、92、96、97、113号

图1、10、59、60则被算法 II 间接排除。另一幅图，即第116号图，可由算法 III 排除。参见下文 §11.2。

我们将展示我们的算法如何消除图1、10、59、60，并为第116号和另外61个图生成质量关系，从而留下24个尚未解决的图。理想情况下，可以通过§9.1、§10.8中的论证处理有限性猜想；也就是说，

找到一个主导多项式，使其在趋近于剩余24个图的奇异序列上保持有界。我们不知道这样的主导多项式是否存在。更实际的方法可能是逐个情形排除其中一些，然后再找到一个合适的主导多项式。我们尚未完成这项任务，因此为未来的研究留下了一个未解的难题。

11.1. 常见因子。 前两节中观察到的许多质量关系在 $n = 6$ 情形下很常见。我们为它们引入一些缩写记号：

$$\begin{aligned}
\mu_1(m_i, m_j, m_k) &= \sqrt{m_i}\sqrt{m_j} - \sqrt{m_j}\sqrt{m_k} + \sqrt{m_k}\sqrt{m_i},\\
\mu_2(m_i, m_j, m_k) &= m_i m_j + m_j m_k + m_k m_i - 2m_i\sqrt{m_j}\sqrt{m_k},\\
\mu_3(m_i, m_j, m_k) &= \mu_1(m_i, m_j, m_k)\,\mu_1(m_j, m_k, m_i)\,\mu_1(m_k, m_i, m_j),\\
\mu_4(m_i, m_j, m_k) &= \mu_2(m_i, m_j, m_k)\,\mu_2(m_j, m_k, m_i)\,\mu_2(m_k, m_i, m_j),\\
\mu_5(m_i, m_j, m_k) &= \mu_3(m_i, m_j, m_k)\,\mu_4(m_j, m_k, m_i).
\end{aligned}$$

尽管在消元过程中因子 μ_3 和 μ_4 会同时出现，我们仍将它们分开，因为 $\mu_3 = 0$ 对正质量施加了实际约束，而 $\mu_4 > 0$ 对任意选取的正质量都成立（如 §9.2 中所见）。

我们在 §9.3 中看到的另一个因子具有如下形式：

$$-m_i^{3/4} m_j^{3/4} + m_i\sqrt{m_k} + m_j\sqrt{m_k}.$$

它可以替换为一个新的因子：

$$\mu_6(m_i, m_j, m_k) = (m_i m_j)^3 - m_k^2(m_i + m_j)^4.$$

一些较长的因子也频繁出现在质量关系中。它们缩写为μ_{15}、μ_{21}、μ_{33}、μ_{45}、μ_{84}、μ_{88}、μ_{111}、μ_{221}、μ_{374}，其中下标表示因子中的项数。详情见附录 IV。

11.2. 图77, 99∼112, 114∼117。对于这19个图，我们收集由 zw矩阵确定的主要方程，根据由某些 zw阶矩阵确定的簇方程进行代换，然后直接使用 Mathematica 中的“GroebnerBasis”函数。它们都得出了简单的质量关系。

例如，在图107中，通过算法 II，我们得到一个最优的类型1 zw阶矩阵，用以涵盖位置序和分离：

$$\left(\begin{pmatrix}
\{5\} & \{5\} & \{3\} & \{5\} & \{3\} & \{2,3\}\\
\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}\\
\{3\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{3\}\\
\{5\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\
\{3\} & \{5\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} & \{3\}\\
\{2,3\} & \{5\} & \{3\} & \{5\} & \{3\} & \{5\}
\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}
\{5\} & \{3\} & \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{5\}\\
\{3\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{1\} & \{5\}\\
\{5\} & \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{5\} & \{3\}\\
\{5\} & \{5\} & \{3\} & \{5\} & \{5\} & \{1\}\\
\{3\} & \{1\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\
\{5\} & \{5\} & \{3\} & \{1\} & \{5\} & \{5\}
\end{pmatrix}\right).$$

§8.3 的第一子程序自动执行以下步骤。根据这些低阶分离，我们确定簇方程

$$z_1 = z_3 = z_5 = z_6,\ z_2 = z_4,\ w_1 = w_2 = w_5,\ w_3 = w_4 = w_6.$$

根据这些簇方程，我们将 z_1 代入以替换 z_3、 z_5 和 z_6，将 z_2 代入以替换 z_4，将 w_1 代入以替换 w_2 和 w_5，将 w_3 代入以替换 w_4 和 w_6。然后，在 Mathematica 中使用“GroebnerBasis”函数获得质量关系

$$m_4(m_1 + m_5) \;=\; m_2(m_3 + m_6).$$

可以实　现算法 II 和 III，并在 Mathematica 中实现如下（见附录 II、III）　　.

在：= FindOrder[111]; FindMassRel1[]

存在一些例外情形。对于图77、102、109、117，我们可以遵循§8.2中的其他过程，以生成限制较少的关系。例如，对图81应用带有 Gr¨obner 基的子程序，得到质量关系

$$(m_2m_4 - m_3m_5)(m_1m_5 - m_2m_6)(m_1m_4 - m_3m_6) \;=\; 0.$$

如果选取由最优类型1zw序矩阵确定的 z_1-、 z_2-、 w_1-、 w_2-、 w_3-、 w_4-、 w_5-方程，并在§8.3中应用第三个子程序，那么我们将得到限制较少的质量关系

$$m_2m_4 - m_3m_5 \;=\; 0.$$

在我们的 Mathematica 程序中，集合 $\mathcal{C}_2$ 记作 zwotype2。此消元过程的命令行如下：

在：= FindOrder[77]; 执行[FindMassRel3[zwotype2[[k]]、
{1, 2}、 {1, 2, 3, 4, 5}]、{k、1、Length@zwotype2}]

其他例外情形所选取的主方程见表2。

图 116 也是一个例外情形。这是一个特殊情形，其中 Gr¨obner 基子程序得到的质量关系为

$$m_1m_4m_5 + m_2m_3m_6 \;=\; 0.$$

由于不存在满足此关系的正质量，我们可以排除这幅图。也可以在 §8.3 中使用第三个子程序来完成此操作，方法是选取 z_1–、 z_2–、 w_1–、 w_2–、 w_3–、 w_4–、 w_5 和 w_6–方程。结果将是 $\{1\}$，因为如果质量中的某个因子的各项具有恒定符号，该子程序就会将其消去。

11.3. **图4、7、9、12、15、17、19、28、30、76**。这10种情形与情形 $n = 4$ 中的全边孤立三角形相似。我们收集由 zw-序矩阵和分离之间的关系所确定的一些 z_i-、 w_i-方程，根据由一些 zw-序矩阵所确定的簇方程进行代换，然后通过§8.3中的第三个子程序执行消元过程。

NO	质量关系	$\lvert\mathcal{C}_2\rvert$	方法
4	$(m_1-m_6)\mu_5(m_1,\ m_2,\ m_6)=0$	1	(1,2; 1, 2)
7	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	200	(5, 6; 5, 6)
9	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	9	(4,5,6; 4,5,6)
12	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	5	(5, 6; 5, 6)
15	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	24	(5, 6; 5, 6)
17	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	7	(4, 5, 6; 4, 5, 6)
19	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	5	(5, 6; 5, 6)
28	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	3	(5, 6; 5, 6)
30	$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	1	(4,5,6; 4,5,6)
76	$\mu_5(m_1,\ m_2,\ m_3)=\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)=0$	9	(1,2; 1, 2), (5, 6; 5, 6)
77	$m_2m_4=m_3m_5$	1	(1, 2; 1, ...5)
99	$m_3m_5=m_4m_6$	5	格罗布纳基
100	$m_3m_5=m_4m_6$	10	格罗布纳基
101	$m_3m_5=m_4m_6$	4	格罗布纳基
102	$m_2m_4=m_1m_5$	1	(1, 2; 1, ...5)
103	$m_1m_4=(m_2+m_5)(m_3+m_6)$	1	格罗布纳基
104	$m_1m_4=m_2m_6$	1	格¨布纳基
105	$m_1m_4=(m_2+m_5)(m_3+m_6)$	1	格¨布纳基
106	$m_4(m_1+m_5)=m_2(m_3+m_6)$	2	格¨布纳基
107	$m_4(m_1+m_5)=m_2(m_3+m_6)$	2	Gr¨obner 基
108	$m_4(m_1+m_5)=m_2(m_3+m_6)$	1	Gr¨obner 基
109	$m_1m_3=m_2m_4$	1	(1, 2; 1, ..., 5)
110	$m_1m_3=(m_2+m_5)(m_4+m_6)$	1	Gr¨obner 基
111	$m_4(m_2+m_5)=m_1(m_3+m_6)$	2	Gr¨obner 基
112	$m_4(m_2+m_5)=m_1(m_3+m_6)$	1	Gr¨obner 基
114	$m_1m_3=m_2(m_4+m_5+m_6)$	1	Gr¨obner 基
115	$m_1m_3=m_2(m_4+m_5+m_6)$	1	Gr¨obner 基
116	$m_1m_4m_5+m_2m_3m_6=0$	1	Gr¨obner 基
117	$m_1m_3=m_2m_4$	1	(1, ..., 4; 1, ..., 6)

TABLE 2. 一些具有简单质量关系的图。方法可以是使用 Gr¨obner 基，也可以手动选择主方程。记号 $(i_1,\ \ldots,\ i_k;\ j_1,\ \ldots,\ j_l)$ 表示选择 $z_{i_1},\ \ldots,\ z_{i_k}$、$w_{j_1},\ \ldots,\ w_{j_l}$。例如，(2，3；4，5) 表示 $z_2,\ z_3,\ w_4,\ w_5$。

例如，在图4中，物体1、2、6构成一个全边三角形，并且物体1、2仅彼此相邻以及与物体6相邻。基于这一特征，我们收集由 zw-矩阵和分离之间的关系所确定的z_1-、 z_2-、 w_1-、 w_2-方程。然后，我们根据由一些 zw-序矩阵所确定的簇方程进行代换，执行消元过程，并得到质量关系

$$(m_1-m_6)\mu_5(m_1,m_2,m_6)=0$$

通过收集更多方程，例如针对 $i\in\{2,3,4,5,6\}$ 的 z_i-、 w_i-方程，可以得到一个不含第一个因子、限制较少的质量关系。

图76是一个特殊情形，其中包含两个孤立完全边三角形。通过两次应用相同的过程，我们可以得到更精细的质量关系：一次针对一个三角形中的物体，另一次针对另一个三角形中的物体。

值得一提的一个特殊情形是图7。算法 II 可快速输出其 zw 矩阵对应的最优 zw 阶类型1序矩阵：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{3\} & \{0\sim4\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{3\} & \{0\sim4\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}\right).$$

进入步骤 (II.2) 之前，位置序和分离方面存在太多不确定性；其类型2子矩阵的总数约为 2.82×10^{11}。执行步骤 (II.2) 来筛选类型-2 zw阶矩阵集合 $\mathcal{C}_2$ ，需要耗费大量时间和内存空间。

用最优 zw 阶类型1序矩阵得出的主方程来处理此图，而非从 $\mathcal{C}_2$ 或 $\mathcal{C}_3$ 得出主方程，会高效得多。幸运的是，以这种方式收集的多项式方程足以继续进行消元过程。我们的程序中的函数“FindOrder”提供了时间约束选项。步骤 (II.1) 非常快，因此可以将搜索时间限制为较短的时长，例如 2 秒，并放弃搜索集合 $\mathcal{C}_2$。在我们的程序中使用仅含最优 zw 阶类型1序矩阵的算法 III（记作 {zo1,wo1} ）时，可以使用 §8.3 的第三个子程序以及下面的命令行来求出质量关系。

```
在：= FindOrder[7,2]; FindMassRel3[{zo1、wo1}、 {5，6}、 {5，6}]
```

11.4. 图31、32、43、44、48、49、51、55、57、58、78、95。这12种情形与 $n=4$情形中的风筝图相似。我们收集由 zw-矩阵确定的 z_i-、z_j-、 w_i-、w_j-方程以及分离之间的关系。接着，根据某些 zw-阶矩阵所确定的簇方程进行代换，应用消元过程，得到与§9.3中的质量关系类似的关系。

例如，在图31中，类型1的最优 zw-序矩阵为

$$\left(\begin{pmatrix} \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{0,1\} & \{3\} & \{3\} & \{1\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{1\} & \{3\} & \{3\} & \{0,1\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} \\ \{5\} & \{2\sim4\} & \{5\} & \{3\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{2\sim4\} & \{5\} & \{3\} & \{5\} & \{5\} \end{pmatrix}\right).$$

取出右下角的 4×4 主子式，我们得到 §9.3 中风筝图的类型 2 zw-序矩阵。算法 II 的步骤 (II.2) 产生了类型2的 22 zw-序矩阵。

他们产生的 r-序矩阵为

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{2\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{2\sim 4\} & \{\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{\} & \{1\} & \{1\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{1\} & \{\} & \{1\} \\ \{4\} & \{4\} & \{3\} & \{1\} & \{1\} & \{\} \end{pmatrix}.$$

有一个顶点为 4，5，6 的全边三角形，它们都是 w-圆形，物体 4、5 彼此相邻，且仅与物体 6 相邻。基于这些特征，我们收集由 zw-矩阵确定的 z_4-、 z_5-、 w_4-、w_5-方程，以及分离之间的关系。使用 §8.3 中的第三个子程序，我们得到质量关系

$$\begin{aligned}(m_4^3 - m_4m_6^2 - m_5m_6^2)\,\mu_5(m_4,m_5,m_6)\,\mu_6(m_4,m_5,m_6) \\ \mu_{15}(m_4,m_5,m_6)\,\mu_{21}(m_4,m_5,m_6)\mu_{33}(m_4,m_5,m_6) \;&=\; 0\end{aligned} \tag{11.1}$$

对本小节中除图 95 外的全部 12 个图应用这一过程，我们得到完全相同的质量关系。图 95 中的全边三角形顶点为 2，3，4，选取 z_1-、 z_2-、 w_1-、 w_2-方程后，我们得到相同的质量关系，只是下标 (4，5，6) 被替换为 (2，3，4)。

对于图 78，由于其中有两个全边三角形，因此可以得到限制更严格的质量关系。很容易得到一个额外的质量关系，它与 (11.1) 相同，只是下标 (4，5，6) 被替换为 (1，2，3)。

11.5. **图 2、20、22、36、40、45、46、50、61、62、84、86**。对于这 12 个图，我们采用与 $n = 5$ 情形下图 12 相同的过程。对于 $\mathcal{C}_2$ 中每个 2 zw 阶矩阵，或 $\mathcal{C}_3$ 中每个 3 zw 阶矩阵，我们通过 zw 阶矩阵确定主方程和簇方程，并收集部分主方程及分离之间的关系。然后，我们根据由 zw 阶矩阵确定的簇方程进行代换，并应用消元过程求出质量关系。 $\mathcal{C}_2$ 中不同的成员可能会产生不同的质量关系。它们的零点集的并集就是我们得到的质量关系。

表 3 包含此类别中大多数图的质量关系，排除的情形将在下文讨论。这一族中的若干图会产生其他图中没有出现的特殊质量关系。为简洁起见，我们不列出一些较长因子的详细内容。读者可按照我们关于选取 z_i-、w_i-方程的说明将其还原。

无质量关系		$\lvert\mathcal{C}_2\rvert$	方法
2	$\mu_5(m_1,m_3,m_4)(3m_1^2m_3^2-5m_1^2m_4^2-3m_3^2m_4^2)(m_1^2m_3^2+m_1^2m_4^2-m_3^2m_4^2)=\mu_5(m_2,m_5,m_6)(3m_2^2m_5^2-5m_2^2m_6^2-3m_5^2m_6^2)(m_2^2m_5^2+m_2^2m_6^2-m_5^2m_6^2)=0$	2	(1, 3, 4; 1, 3, 4), (2, 5, 6; 2, 5, 6)
25	$\mu_5(m_4,m_5,m_6)(5m_4^2m_5^2-3m_4^2m_6^2+3m_5^2m_6^2)=0$	1	(4,5; 4,5)
36	$(m_2m_4^3+m_3m_4^3-m_2m_4m_6^2-m_2m_5m_6^2+m_3m_6^3)\mu_5(m_4,m_5,m_6)\mu_{84}(m_2,m_3,m_4,m_5,m_6)\mu_{221}(m_2,m_3,m_4,m_5,m_6)\mu_{374}(m_2,m_3,m_4,m_5,m_6)=0$	4	(4, 5; 2, ... 6)
40	$(m_4^3-(m_2+m_4+m_5)m_6^2)\mu_5(m_4,m_5,m_6)\mu_{45}(m_2,m_4,m_5,m_6)\mu_{84}(m_3,m_2,m_4,m_5,m_6)\mu_{88}(m_2,m_4,m_5,m_6)\mu_{111}(m_2,m_4,m_5,m_6)\mu_{221}(m_3,m_2,m_4,m_5,m_6)\mu_{374}(m_3,m_2,m_4,m_5,m_6)=0$	2	(4,5; 1, ..., 6)
46	$(m_2m_4-m_3m_5)(m_1m_5-m_2m_6)=0$	9	(4,5; 1, ..., 6)
61	$m_1(m_3+m_5)=m_2(m_4+m_6)$	3	(4, 5; 1, ..., 6)
62	$m_1(m_3+m_5)=m_2(m_4+m_6)$	3	(4, 5; 1, ..., 6)
84	$m_1m_3=m_2m_4$	8	(4、5; 1、.....6)
86	$(m_2^3-m_2m_4^2-m_3m_4^2)\mu_5(m_2,m_3,m_4)\mu_6(m_2,m_3,m_4)\mu_{15}(m_2,m_3,m_4)\mu_{21}(m_2,m_3,m_4)\mu_{33}(m_2,m_3,m_4)=0$	1	(1, ..., 6; 1, ..., 6)

TABLE 3. 更多图及其质量关系。考察图20。我们得到一个 Type 2 zw 序矩阵，以涵盖位置序和分离：

$$\left(\begin{pmatrix} \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{1\} \\ \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{1\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0,1\} & \{1\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{1\} & \{0,1\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{1\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{1\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{0\sim4\} & \{3\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{0\sim4\} & \{3\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{3\} & \{3\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}\right).$$

这不是步骤 (II.1) 得出的“最优”Type 1 zw-序矩阵；利用该矩阵，我们的程序无法找到任何质量关系。它产生的 r-序矩阵为

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{\} & \{3\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{3\} & \{\} & \{1\} & \{1\} \\ \{4\} & \{3\} & \{4\} & \{1\} & \{\} & \{1\} \\ \{3\} & \{4\} & \{4\} & \{1\} & \{1\} & \{\} \end{pmatrix}.$$

顶点为 4、5、6 的全边三角形提示我们选择 z_i-、 w_i-方程，并结合$i \in \{4,5,6\}$ 生成质量关系。然而，我们的算法无法利用这组主方程得出任何质量关系。通过考虑所有 z_i-和 w_i-方程，我们能够得到质量关系 $f_{6,20}=0$，其中 $f_{6,20}$ 具有

以下因子

$$
\begin{aligned}
&\mu_5(m_4,m_5,m_6),m_1m_4^2+m_2m_4^2-m_1m_6^2,\\
&m_1^3m_2^3m_4^6m_5^6+3m_1^2m_2^4m_4^6m_5^6+3m_1m_2^5m_4^6m_5^6+m_2^6m_4^6m_5^6+\cdots\text{（另外 20 项）},\\
&m_1^3m_2^3m_4^6m_5^6+3m_1^2m_2^4m_4^6m_5^6+3m_1m_2^5m_4^6m_5^6+m_2^6m_4^6m_5^6+\cdots\text{（另外 26 项）},\\
&3m_1^4m_4^8m_5^4+3m_1^3m_2m_4^8m_5^4-9m_1^2m_2^2m_4^8m_5^4-15m_1m_2^3m_4^8m_5^4-\cdots\text{（另外 38 项）}.
\end{aligned}
$$

由于最高阶项过多，图40、45和50的消元过程耗时较长。图45和50会产生几个特殊质量因子。

在图45中，我们有 $|\mathcal{C}_2|=3$, $|\mathcal{C}_3|=13$。利用 $\mathcal{C}_2$ 中的成员以及 z_4-、 z_5-方程和所有 w_i-方程，我们得到质量关系$f_{6,\ 45}=0$ ，其包含以下因子

$$
\begin{aligned}
&m_4^3-(m_3+m_4+m_5)m_6^2m_4^3+m_1m_6^2+m_2m_6^2+m_6^3,\mu_5(m_4,m_5,m_6)\\
&-m_1m_4^3-m_3m_4^3-m_2m_3m_6^2+m_1m_4m_6^2+m_1m_5m_6^2-m_3m_6^3,\mu_{45}(m_3,m_4,m_5,m_6),\\
&m_4^{11}m_5^2-m_4^{11}m_6^2+3m_1m_4^8m_5^2m_6^2+3m_2m_4^8m_5^2m_6^2-\cdots\text{(另外56项)},\mu_{88}(m_3,m_4,m_5,m_6),\mu_{111}(\\
&m_3,m_4,m_5,m_6),-m_1^3m_4^{11}-m_5^2-3m_1^2m_3m_4^{11}m_5^2-3m_1m_3^2m_4^{11}m_5^2-m_3^3m_4^{11}m_5^2+\cdots\text{(另外}\\
&\text{135项)},9m_1m_4^{11}m_5^4+9m_2m_4^{11}m_5^4+6m_4^{12}m_5^4+9m_4^{11}m_5^4m_6-\cdots\text{(另外158项)},\\
&m_1^3m_4^9m_5^6+3m_1^2m_2m_4^9m_5^6+3m_1m_2^2m_4^9m_5^6+m_2^3m_4^9m_5^6+\cdots\text{(另外304项)},\\
&9m_1^3m_2m_3m_4^{11}m_5^4+27m_1^2m_2m_3^2m_4^{11}m_5^4+27m_1m_2m_3^3m_4^{11}m_5^4+9m_2m_3^4m_4^{11}m_5^4-\cdots\text{(另外420}\\
&\text{项)},m_1^3m_2^3m_3^3m_4^9m_5^6+3m_1^2m_2^3m_3^4m_4^9m_5^6+3m_1m_2^3m_3^5m_4^9m_5^6+m_2^3m_3^6m_4^9m_5^6+\cdots\text{(另外967项)}。
\end{aligned}
$$

在图 50 中，我们有 $|\mathcal{C}_2|=4$, $|\mathcal{C}_3|=27$。利用 $\mathcal{C}_2$ 和 z_4-、 z_5-方程中的成员以及所有 w_i-方程，我们得到质量关系 $f_{6,\ 50}=0$ ，其因子如下

$\mu_5(m_4,m_5,m_6)$,$m_4^3-m_2m_6^2-m_3m_6^2-m_4m_6^2-m_5m_6^2$
$m_1m_4^3+m_2m_4^3-m_1m_3m_6^2-m_1m_4m_6^2-m_1m_5m_6^2+m_2m_6^3$,
$m_1m_4^3+m_2m_4^3+m_3m_4^3-m_1m_4m_6^2-m_1m_5m_6^2+m_2m_6^3+m_3m_6^3$,
$m_4^{11}m_5^2-m_4^{11}m_6^2+3m_1m_4^8m_5^2m_6^2-m_4^9m_5^2m_6^2+\cdots$(另有26项),
$9m_1m_4^{11}m_5^4+6m_4^{12}m_5^4+9m_4^{11}m_5^4m_6-30m_1m_4^{11}m_5^2m_6^2-\cdots$(另有68项),
$m_4^{11}m_5^2-m_4^{11}m_6^2-3m_2m_4^8m_5^2m_6^2-3m_3m_4^8m_5^2m_6^2+\cdots$(另有79项),$\mu_{111}(m_1,m_4,m_6,m_5)$,
$m_1^3m_4^{11}m_5^2+3m_1^2m_2m_4^{11}m_5^2+3m_1m_2^2m_4^{11}m_5^2+m_2^3m_4^{11}m_5^2+\cdots$(另有135项),
$9m_2m_4^{11}m_5^4+9m_3m_4m_5^4+3m_4^{12}m_5^4+9m_4^{11}m_5^5+\cdots$(另有183项),
$m_1^3m_4^{11}m_5^2+3m_1^2m_2m_4^{11}m_5^2+3m_1m_2^2m_4^{11}m_5^2+m_2m_4^{11}m_5^2+\cdots$(另有191项),
$-m_2^3m_4^9m_5^6-3m_2^2m_3m_4^9m_5^6-3m_2m_3^2m_4^9m_5^6-m_3^3m_4^9m_5^6+\cdots$(另有304项),
$9m_1^4m_3m_4^{11}m_5^4+27m_1^3m_2m_3m_4^{11}m_5^4+27m_1^2m_2^2m_3m_4^{11}m_5^4+9m_1m_2^3m_3m_4^{11}m_5^4+\cdots$(另有420项),$3m_1^4m_4^{12}m_5^4-3m_1^3m_2m_4^{12}m_5^4-9m_1^2m_2^2m_4^{12}m_5^4-15m_1m_2^3m_4^{12}m_5^4+\cdots$(另有633项),$-m_1^6m_3^3m_4^9m_5^6-3m_1^5m_2m_3^3m_4^9m_5^6-3m_1^4m_2^2m_3^3m_4^9m_5^6-m_1^3m_2^3m_3^3m_4^9m_5^6+\cdots$(另有967项),

$m_1^3m_2^3m_4^{12}m_5^6+3m_1^2m_2^4m_4^{12}m_5^6+3m_1m_2^5m_4^{12}m_5^6+m_2^6m_4^{12}m_5^6+\cdots$（另外 1492 项）.

11.6. 图47。 在图47中，我们有 $|\mathcal{C}_2|=4$。对于前三个成员，在情形 $n=5$ 下，我们采用与图 12 相同的过程。我们收集 z_4-、 z_5-方程、全部w_i-方程以及分离之间的关系。然后，根据由 zw-序矩阵确定的簇方程进行代换，并应用消元过程以求得质量关系。

$\mathcal{C}_2$ 中的最后一个成员是

$$\left(\begin{pmatrix}\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}\\\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{1\}&\{3\}\\\{3\}&\{3\}&\{0\sim1\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}\\\{3\}&\{3\}&\{1\}&\{0\sim1\}&\{3\}&\{3\}\\\{3\}&\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}\\\{1\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}&\{3\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{4\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\\{4\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}\\\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{3\}&\{5\}&\{3\}\\\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{3\}&\{3\}&\{5\}\end{pmatrix}\right).$$

我们从这个序矩阵得到 $\epsilon\approx z_1\approx z_2\approx z_5\approx z_6\succ z_3,\ z_4$。由于质心位于原点，取极大阶项后，我们得到方程

$$m_1z_1+m_2z_2+m_5z_5+m_6z_6=0.$$

我们将所有主方程、分离之间的关系与 $m_1z_1+m_2z_2+m_5z_5+m_6z_6=0$ 汇总在一起。然后根据簇方程进行代换

由 zw 阶矩阵确定，并应用消元过程，得到

$$m_1m_5 = m_2m_6.$$

对于图47，我们得到质量关系 $f_{6,\ 47} = 0$ ，其因子如下

$m_1m_5 - m_2m_6$，
$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6) - m_3m_4^2 - m_4^3 + m_2m_6^2 + m_3m_6^2 + m_4m_6^2 + m_5m_6^2$，
$m_1m_3m_4^2 + m_2m_3m_4^2 + m_1m_4^3 + m_2m_4^3 - m_1m_3m_6^2 - m_1m_4m_6^2 - m_1m_5m_6^2 + m_2m_6^3$，
$-m_1m_4^3 - m_2m_4^3 + m_3m_4^2m_5 + m_3m_4^2m_6 + m_1m_4m_6^2 + m_1m_5m_6^2 - m_2m_6^3 - m_3m_6^3$，
$m_3^3m_4^8m_5^2 + 3m_3^2m_4^9m_5^2 + 3m_3m_4^{10}m_5^2 + m_4^{11}m_5^2 - \cdots$（另外108项），
$m_1^3m_3^3m_4^8m_5^2 + 3m_1^2m_2m_3^3m_4^8m_5^2 + 3m_1m_2^2m_3^3m_4^8m_5^2 + m_2^3m_3^3m_4^8m_5^2 + \cdots$（另外232项），
$-m_1^3m_4^{11}m_5^2 - 3m_1^2m_2m_4^{11}m_5^2 - 3m_1m_2^2m_4^{11}m_5^2 - m_2^3m_4^{11}m_5^2 + \cdots$（另外244项），
$9m_2m_3^3m_4^8m_5^4 + 3m_3^4m_4^8m_5^4 + 27m_2m_3^2m_4^9m_5^4 + 12m_3^3m_4^9m_5^4 + \cdots$（另外266项），
$-m_2^3m_3^3m_4^6m_5^6 - 3m_2^3m_3^2m_4^7m_5^6 - 3m_2^3m_3m_4^8m_5^6 - m_2^3m_4^9m_5^6 - \cdots$（另外397项），
$3m_1^4m_3^4m_4^8m_5^4 + 3m_1^3m_2m_3^4m_4^8m_5^4 - 9m_1^2m_2^2m_3^4m_4^8m_5^4 - 15m_1m_2^3m_3^4m_4^8m_5^4 - \cdots$（另外763项），$-3m_1^4m_4^{12}m_5^4 - 3m_1^3m_2m_4^{12}m_5^4 + 9m_1^2m_2^2m_4^{12}m_5^4 + 15m_1m_2^3m_4^{12}m_5^4 + \cdots$（另外801项），$m_1^3m_2^3m_3^6m_4^6m_5^6 + 3m_1^2m_2^4m_3^6m_4^6m_5^6 + 3m_1m_2^5m_3^6m_4^6m_5^6 + m_2^6m_3^6m_4^6m_5^6 + \cdots$（另外1732项），

$m_1^3m_2^3m_4^{12}m_5^6 + 3m_1^2m_2^4m_4^{12}m_5^6 + 3m_1m_2^5m_4^{12}m_5^6 + m_2^6m_4^{12}m_5^6 + \cdots$（另外 1800 项）。

11.7. **图1、10、59、60**。 在这些图中，每个图都有一个由 z边（或 w边）构成且没有对角线的四边形。

对于图 1，我们在 $\mathcal{C}_2$中得到一个 zw序矩阵：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim4\} & \{3\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{3\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\} \\ \{3\} & \{3\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{0\sim3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} & \{3\} \\ \{3\} & \{3\} & \{0\sim3\} & \{2\} & \{2\} & \{2\} \\ \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{0\sim3\} & \{2\} & \{2\} \\ \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim3\} & \{2\} \\ \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim3\} \end{pmatrix}\right).$$

以及所得到的 r-序矩阵

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{1\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{1\} \\ \{1\} & \{\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{1\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{\} & \{2\sim4\} & \{2\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{\} & \{2\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\} & \{2\} & \{\} & \{2\sim4\} \\ \{1\} & \{1\} & \{2\sim4\} & \{2\} & \{2\sim4\} & \{\} \end{pmatrix}$$

下　　表显示了所有极大序集，以及它们是否确定为极大　　.

	$M_{Z,i}$	确定为极大?	$M_{W,i}$	确定为极大?
$i=1$	$\{2,6\}$	$\surd$	$\{2,6\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,6\}$	$\surd$	$\{1,6\}$	$\surd$
$i=3$	$\{5,6\}$	$\surd$	$\{3,4,5,6\}$	
$i=4$	$\{5,6\}$	$\surd$	$\{3,4,5,6\}$	
$i=5$	$\{3,4\}$	$\surd$	$\{3,4,5,6\}$	
$i=6$	$\{1,2,3,4\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$

由于物体 3、5 之间以及物体 3、6 之间的 z-边相邻，但不属于同一个三角形，根据规则 2c，要么 $z_{35} \prec z_{36}$，要么 $z_{35} \succ z_{36}$。不失一般性，我们可以假设 $z_{35} \prec z_{36}$，于是 $z_{36} \approx z_{56} \succ z_{35}$。由于物体 3、5、4、6 构成一个四边形，根据规则 2g，$z_{35} \approx z_{46}$ 和 $z_{36} \approx z_{45}$。因此我们有

$$z_{36} \approx z_{45} \approx z_{34} \approx z_{56} \succ z_{35} \approx z_{46}$$

由于 $Z_{35} \approx Z_{36} \succ Z_{34}$，由 $W_{ij} = Z_{ij}^{1/3} z_{ij}^{-4/3}$，我们得到

$$W_{35} \succ W_{36}, Z_{34}.$$

因此 $M^*_{W,\ 3} = \{3,5\}$，同理 $M^*_{W,\ 5} = \{3,5\}$，并且我们得到方程　　s

$$\begin{aligned} w_3 &= m_5 W_{53} = m_5 r_{53}^{-3} w_{53} \\ w_5 &= m_3 W_{35} = m_3 r_{35}^{-3} w_{35}, \end{aligned}$$

由此可得 $w_{35} = w_3 - w_5 = -(m_3 + m_5) r_{35}^{-3} w_{35}$。如果所有质量均为正，则得到$r \approx 1$，这与 $3 \notin d_{35}$ 矛盾。因此，图 1 不可能。

对于图 59，我们得到 $\mathcal{C}_2$ 中的 3 zw 阶序矩阵。前两个序矩阵给出了以下极大序集表:

	$M_{Z,i}$	当然是最大值?	$M_{W,i}$	当然是最大值?
$i=1$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=3$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=4$	$\{3,6\}$	$\surd$	$\{3,4,5,6\}$	
$i=5$	$\{3,6\}$	$\surd$	$\{3,4,5,6\}$	
$i=6$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{3,4,5,6\}$	

按照与图 1 相同的讨论，这两种情形对于正质量而言是不可能的。

$\mathcal{C}_2$ 中的最后一个成员是

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim1\} & \{1\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{1\} & \{0\sim1\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\sim4\} & \{2\} & \{2\} & \{2\} \\ \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{0\sim4\} & \{2\} & \{2\} \\ \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim4\} & \{2\} \\ \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}\right).$$

这给出了以下极大序集的 Table

	$M_{Z,i}$	当然是最大值?	$M_{W,i}$	当然是最大值?
$i=1$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2\}$	$\surd$	$\{1,2\}$	$\surd$
$i=3$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=4$	$\{3,6\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=5$	$\{3,6\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=6$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	

我们将证明，对于至多存在一个 $i\in\{3,4,5,6\}$，使得 $\{1,2\}\cap M^*_{W,\,i}\neq\emptyset$。然后，通过与 $\mathcal{C}_2$中其他成员相同的讨论，我们也得出结论：对于正质量而言，这种情况是不可能的。

如果 $p\in\{1,2\}\cap M^*_{W,\,i}$对于某个 $i\in\{3,4,5,6\}$成立，那么对于每个不同于i的 $j\in\{3,4,5,6\}$，都有 $W_{pi}\succeq W_{ij}$。由 $w_{ip}\succ w_{ij}$ 可得 $z_{ip}\prec z_{ij}$，因此 $z_{pj}\approx z_{ij}$，这意味着 $W_{pj}\prec W_{ij}$，因为 $w_{pj}\succ w_{ij}$。这意味着 $p\notin M^*_{W,\,j}$。另一方面，由于 $z_{pq}\prec z_{pi}$，其中 $\{p,q\}=\{1,2\}$，我们有 $z_{pi}\approx z_{qi}$。根据 w 个分离，得到 $W_{pi}\approx W_{qi}$。因此，对于不同于 i 的 $j\in\{3,4,5,6\}$，有$\{1,2\}\subset M^*_{W,\,i}$和$\{1,2\}\cap M^*_{W,\,j}=\emptyset$。

对于图60，我们在 $\mathcal{C}_2$中得到一个 zw阶矩阵。按照图59中前两种情形的相同讨论，对于正质量而言，这个图是不可能的。

11.8. 图3、13、29。 这三个图与情形 $n=5$中的图4相似。对于图3，我们得到一个类型2的 zw阶矩阵，它给出$M_{Z,\,1}=\{2,6\}$、$M_{Z,\,2}=\{1,6\}$以及$M_{W,\,1}=M_{W,\,2}=\{1,2,6\}$。通过与§10.2类似的讨论，我们得到质量关系$f_{6,\,3}=0$，其中$f_{6,\,3}$与$f_{5,\,4,\,1}$相同，只是下标分别由3，4，5改为1，2，6。

对于图13和图29，$\mathcal{C}_2$ 中的每个成员给出$M_{Z,\,4}=\{5,6\}$、$M_{Z,\,5}=\{4,6\}$以及$M_{W,\,4}=M_{W,\,5}=\{4,5,6\}$。按照§10.2中的相同讨论，我们得到质量关系$f_{6,\,13}=0$，其中$f_{6,\,13}$与$f_{5,\,4,\,1}$相同，只是下标平移了1。

11.9. 图27。 我们得到三个 Type 2 zw 阶矩阵（S_k，T）、$k=2$，3，4:

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\sim4\}&\{1\}&\{1\}&\{k\}&\{2\sim4\}&\{2\sim4\}\\ \{1\}&\{0\sim4\}&\{1\}&\{k\}&\{2\sim4\}&\{2\sim4\}\\ \{1\}&\{1\}&\{0\sim4\}&\{k\}&\{2\sim4\}&\{2\sim4\}\\ \{k\}&\{k\}&\{k\}&\{0\sim4\}&\{4\}&\{4\}\\ \{2\sim4\}&\{2\sim4\}&\{2\sim4\}&\{4\}&\{0\sim4\}&\{4\}\\ \{2\sim4\}&\{2\sim4\}&\{2\sim4\}&\{4\}&\{4\}&\{0\sim4\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}&\{5\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{0\sim4\}&\{2\}&\{2\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{2\}&\{0\sim4\}&\{2\}\\ \{5\}&\{5\}&\{5\}&\{2\}&\{2\}&\{0\sim4\}\end{pmatrix}\right),$$

对于（S_2，T）和（S_3，T），$M_{Z,\,5}=\{4,6\}$，$M_{Z,\,6}=\{5,6\}$，$M^*_{W,\,5}$，$M^*_{W,\,6}\subset\{4,5,6\}$。这与 $n=5$ 情形下的图4类似，我们得到质量关系 $f_{6,\,27,\,1}=0$ 其中 $f_{6,\,27,\,1}$ 与 $f_{5,\,4,\,1}$相同，只是下标从 3，4，5 分别改为 5，6，4。

对于（S_4，T），我们有 $M_{Z,\,4}=\{5,6\}$, $M_{Z,\,5}=\{4,6\}$, $M_{Z,\,6}=\{4,5\}$, $M_{W,\,j}=\{1,2,3,4,5,6\}$当 $j=4$、5、6 时。与 §10.3 中的讨论相同，至多存在一个 $i\in\{4,5,6\}$ 使得 $M^*_{W,\,i}\cap\{1,2,3\}\neq\emptyset$，因此对于 $\{4,5,6\}$ 中的其他 j，有 $M^*_{W,\,j}\subset\{4,5,6\}$。在此情况下，

我们得到质量关系 $f_{6,\ 27,\ 2,\ i}=0$ 其中 $f_{6,\ 27,\ 2,\ i}$ 与 §10.2 中的 $f_{5,\ 4,\ 1}$ 相同，只是下标从 3、4、5 改为 $j,\ k,\ i$，其中 $\{i,j,k\}=\{4,5,6\}$。

因此我们得到质量关系 $f_{6,\ 27}=0$，其中 $f_{6,\ 27}$ 与 §10.3 中的 $f_{5,\ 5}$ 相同，只是下标向后移了 1。

11.10. **图 18**。 最优的 Type 1 zw-序矩阵为

$$\left(\begin{pmatrix}\{0\sim4\} & \{1\} & \{1\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\}\\ \{1\} & \{0\sim4\} & \{1\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\}\\ \{1\} & \{1\} & \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\}\\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\}\\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\}\\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\{0\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\}\\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{0\sim4\} & \{2\} & \{2\}\\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{0\sim4\} & \{2\}\\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim4\}\end{pmatrix}\right)$$

由此得到以下极大序集表：

	$M_{Z,i}$	确定是最大值吗?	$M_{W,i}$	确定是最大值吗?
$i=1$	$\{1,2,3,4,5,6\}$		$\{2,3\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2,3\}$		$\{1,2,3\}$	$\surd$
$i=3$	$\{1,2,3\}$		$\{1,2,3\}$	$\surd$
$i=4$	$\{5,6\}$	$\surd$	$\{1,4,5,6\}$	
$i=5$	$\{4,6\}$	$\surd$	$\{1,4,5,6\}$	
$i=6$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,4,5,6\}$	

按照 §10.3 中相同的讨论，满足 $1\in M^*_{W,i}$ 的 $i\in\{4,5,6\}$ 至多有一个，因此在 $\{4,5,6\}$ 中，对其他 j，$M^*_{W,j}\subset\{4,5,6\}$。在此情形下，我们得到质量关系$f_{6,}$18,$_i=0$，其中 $f_{6,}$18,$_i$ 与 §10.2 中的 $f_{5,}$4,1 相同，只是下标从 3、4、5 改为 j,k,i，且 $\{i,j,k\}=\{4,5,6\}$。因此我们得到质量关系 $f_{6,18}=0$，其中$f_{6,}$18 与 §10.3 中的 $f_{5,}$5 相同，只是下标整体加 1。

11.11. **图 11**。 我们得到五个成员（$S_2,\ T_4$）、（$S_3,\ T_4$）、（$S_4,\ T_4$）、（$S_4,\ T_3$）、（$S_4,\ T_2$），在 $\mathcal{C}_2$ 中，其中

$$S_k=\begin{pmatrix}\{0\sim4\} & \{2\} & \{2\} & \{k\} & \{4\} & \{4\}\\ \{2\} & \{0\sim4\} & \{2\} & \{k\} & \{4\} & \{4\}\\ \{2\} & \{2\} & \{0\sim4\} & \{k\} & \{4\} & \{4\}\\ \{k\} & \{k\} & \{k\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\}\\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\}\\ \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\}\end{pmatrix}$$

and

$$T_k=\begin{pmatrix}\{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{k\} & \{k\} & \{k\}\\ \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\}\\ \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\}\\ \{k\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{2\} & \{2\}\\ \{k\} & \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{0\sim4\} & \{2\}\\ \{k\} & \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim4\}\end{pmatrix}$$

对于 $k=$2,3,4。

(S_2, T_4) 和 (S_3, T_4) 给出 $M_{Z,5} = \{4,6\}$, $M_{Z,6} = \{4,5\}$，以及 $M_{W,5} = M_{W,6} = \{4,5,6\}$。与情形 $n = 5$ 中的图 4 类似，我们有质量关系 $f_{6,11,1} = 0$，其中 $f_{6,11,1}$ 与 $f_{5,4,1}$ 相同，只是下标分别从 3, 4, 5 改为 5,6,4。

另一方面，(S_2, T_4) 和 (S_3, T_4) 也给出 $M_{Z,1} = M_{Z,2} = M_{Z,3} = \{1,2,3,4\}$ 和 $M_{W,i} = \{j,k\}$，其中 $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$。这与情形 $n = 6$ 中的图 18 类似。通过类似的讨论，我们得到质量关系 $f_{6,11,2} = 0$，其中 $f_{6,11,2}$ 与 $f_{6,18}$ 相同，只是下标分别由 4、5、6 改为 1、2、3。

情形 (S_4, T_2) 和 (S_4, T_3) 类似，我们得到相同的质量关系。

对于 (S_4, T_4)，极大序集如下表所示

	$M_{Z,i}$	一定是最大值吗?	$M_{W,i}$	一定是最大值吗?
$i=1$	$\{1,2,3,4,5,6\}$		$\{2,3\}$	$\surd$
$i=2$	$\{1,2,3,4,5,6\}$		$\{1,3\}$	$\surd$
$i=3$	$\{1,2,3,4,5,6\}$		$\{1,2\}$	$\surd$
$i=4$	$\{5,6\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=5$	$\{4,6\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=6$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	

假设 $p \in \{1,2,3\} \cap M^*_{W,i}$ 对某个 $i \in \{4,5,6\}$ 成立。令 $j \in \{4,5,6\}$ 与 i 不同。则 $z_{pi} \prec z_{ij} \approx z_{45}$，且 $w_{pi} \succ w_{ij} \approx w_{45}$，因为 $Z_{pi} \prec Z_{ij}$ 且 $W_{pi} \approx W_{ij}$，由此可得 $z_{pj} \approx z_{ij} \approx z_{45}$ 和 $w_{pj} \approx w_{pi} \succ w_{ij} \approx w_{45}$。因此 $W_{pj} \prec W_{pi} \approx W_{ij}$，这意味着$p \notin M^*_{W,j}$。

令 $q \in \{1,2,3\}$ 与 p 不同。由于 $z_{pi} \succ z_{pq}$，我们有 $z_{qi} \approx z_{pi} \prec z_{ij}$。通过与上一段相同的讨论，可得 $z_{qj} \approx z_{ij}$，由此可得$W_{qj} \prec W_{ij}$，这意味着 $q \notin M^*_{W,j}$。因此，至多存在一个 $i \in \{4,5,6\}$ 使得$M^*_{W,i} \cap \{1,2,3\} \neq \emptyset$。

与情形 $n = 5$ 中的图4类似，我们将得到质量关系 $f_{6,11,3,i} = 0$ 其中$f_{6,11,3,i}$与 §10.2 中的 $f_{5,4,1}$ 相同，只是下标从 3，4，5 分别改为 j，k，i，其中 $\{i,j,k\} = \{4,5,6\}$。

另一方面，由于 (S_4, T_4) 在分别交换 1，2，3，z与 4，5，6，w时保持不变，因此我们也有质量关系 $f_{6,11,4,i} = 0$，其中 $f_{6,11,3,i}$ 与 §10.2 中的 $f_{5,4,1}$ 相同，只是下标从 3，4，5 分别改为 j，k，i，其中 $\{i,j,k\} =\{1,2,3\}$。

因此我们得到质量关系 $f_{6,11} = 0$ 其中 $f_{6,11}$ 是$f_{6,11,1}$、$f_{6,11,2}$、$f_{6,11,3,i}$、$f_{6,11,4,j}$、$i \in \{4,5,6\}$ 和 $j \in \{1,2,3\}$的最小公倍数。

11.12. 图16。 对于图16，我们得到最优的类型 1 zw 序矩阵：

$$\left(\begin{pmatrix} \{0\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{0\sim4\} & \{1\} & \{4\} & \{4\} & \{1\} \\ \{2\sim4\} & \{1\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} & \{4\} \\ \{2\sim4\} & \{1\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{5\} & \{5\} \\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{2\} & \{0\sim4\} & \{2\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{0\sim4\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{2\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}\right)$$

以及生成的 r 序矩阵

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{4\} & \{4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} & \{2\sim 4\} \\ \{4\} & \{\} & \{3\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{2\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{\} & \{2\} & \{2\} \\ \{2\sim 4\} & \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{\} & \{2\} \\ \{2\sim 4\} & \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{2\} & \{\} \end{pmatrix}$$

极大序集如下表所示:

	$M_{Z,i}$	确实是极大的吗?	$M_{W,i}$	确实是极大的吗?
$i=1$	$\{1,4,5,6\}$		$\{1,4,5,6\}$	
$i=2$	$\{2,3,6\}$		$\{2,3,6\}$	$\surd$
$i=3$	$\{2,3,6\}$		$\{2,3,6\}$	$\surd$
$i=4$	$\{5,6\}$	$\surd$	$\{1,4,5,6\}$	
$i=5$	$\{4,6\}$	$\surd$	$\{1,4,5,6\}$	
$i=6$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{2,3\}$	

理由与 §10.3 中相同，$1 \notin M^*_{W,\ 4}$且$1 \notin M^*_{W,\ 5}$。此外，根据 §10.2 中相同的讨论，我们还可知，$4 \in M^*_{W,\ 4}$ 当且仅当$5 \in M^*_{W,\ 5}$。因此，$M^*_{W,\ 4}$和$M^*_{W,\ 5}$共有 5 种情形:

1. $M^*_{W,\ 4} \subset \{4,5,6\}$和$M^*_{W,\ 5} \subset \{4,5,6\}$，
2. $M_{W,\ 4} = \{1,5,6\}$和$M^*_{W,\ 5} \subset \{4,6\}$，
3. $M_{W,\ 4} = \{5,6\}$和$M^*_{W,\ 5} \subset \{1,4,6\}$，
4. $M_{W,\ 4} = \{1,4,5,6\}$和$M^*_{W,\ 5} \subset \{4,5,6\}$，
5. $M_{W,\ 4} = \{4,5,6\}$和$M^*_{W,\ 5} \subset \{1,4,5,6\}$。

情况1类似于情况 $n = 5$中的图4。我们得到质量关系$f_{6,\ 16,\ 1} = 0$其中$f_{6,\ 16,\ 1}$与§10.2中的$f_{5,\ 4,\ 1}$相同，只是下标向后移了1位。

对于情况2，我们收集 z_4-和 z_5-方程、分离之间的关系，以及方程 $m_4W_{45} + m_6W_{65} = 0$。然后按照簇方程进行代换，并应用消元过程。我们得到质量关系 $f_{6,\ 16,\ 2} = 0$ ，其因子如下

$m_4 - m_6$，$\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)$，
$m_4^8m_5^2 - m_4^8m_6^2 - 4m_4^6m_5^2m_6^2 - 3m_4^6m_6^4 + 6m_4^4m_5^2m_6^4 - 4m_4^2m_5^2m_6^6 + m_5^2m_6^8$，
$4m_4^8m_5^2 - 4m_4^8m_6^2 - m_4^6m_5^2m_6^2 - 12m_4^6m_6^4 - 9m_4^4m_5^2m_6^4 + 5m_4^2m_5^2m_6^6 + m_5^2m_6^8$，
$m_4^8m_5^2 - m_4^8m_6^2 - 4m_4^6m_5^2m_6^2 - 31m_4^6m_6^4 + 6m_4^4m_5^2m_6^4 - 31m_4^4m_6^6 - 4m_4^2m_5^2m_6^6 - m_4^2m_6^8 + m_5^2m_6^8$，
$3m_4^8m_5^4 - 43m_4^8m_5^2m_6^2 - 12m_4^6m_5^4m_6^2 + 40m_4^8m_6^4 - \cdots$（另外 8 项），
$45m_4^8m_5^4 + 955m_4^8m_5^2m_6^2 - 180m_4^6m_5^4m_6^2 - 1000m_4^8m_6^4 + \cdots$（另外 8 项），
$3m_4^8m_5^4 - 24m_4^8m_5^2m_6^2 - 12m_4^6m_5^4m_6^2 + 21m_4^8m_6^4 + \cdots$（另外 8 项），
$216m_4^8m_5^6 - 861m_4^8m_5^4m_6^2 - 864m_4^6m_5^6m_6^2 + 2145m_4^8m_5^2m_6^4 + \cdots$（另外 12 项）。

对于情形3，我们收集 z_4-和 z_5-方程、分离之间的关系，以及方程 $m_5W_{54}+m_6W_{64}=0$。然后，我们根据簇方程进行代换，并应用消元过程。我们得到质量关系 $f_{6,\ 16,\ 2}=0$ 其中 $f_{6,\ 16,\ 3}=\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6)\ (5m_4^2m_5^2-3m_4^2m_6^2+3m_5^2m_6^2)$。

在情形 4 中，我们有 $z_{14}\prec z_{45}\approx z_{46}$，因此 $z_{15}=z_{14}+z_{45}\approx z_{45}$ 和 $z_{16}=z_{14}+z_{46}\approx z_{46}$。由关系 $W_{ij}=r_{ij}^{-1}z_{ij}^{-1}$、 $z_{14}\prec z_{45}$ 和 $W_{14}\prec W_{45}$，我们得到$r_{14}\succ r_{45}$。由于 $w_{ij}=W_{ij}r_{ij}^3$，我们有 $w_{14}\succ w_{45}$，由此可得 $w_{14}\approx w_{15}\approx w_{16}$。因此

$$Z_{14}\succ Z_{15}\approx Z_{16},\quad W_{14}\succ W_{15}\approx W_{16},$$

由此得到 $M^*_{Z,\ 1}=\{1,4\}=M^*_{W,\ 1}$。

另一方面，由于 $r_{23}\approx r_{26}\approx r_{36}\approx 1$ 和 $z_{23}\approx z_{26}\approx z_{36}\approx\epsilon^2$，我们有$Z_{23}\approx Z_{26}\approx Z_{36}$。从上表可知，$M^*_{Z,\ 2},\ M^*_{Z,\ 3}\subset\{2,3,6\}$。因此$z_2,\ z_3\preceq Z_{23}\approx z_{23}\epsilon^2$，由此可得 $z_6=z_2-z_{26}\preceq\epsilon^2$。

由于 $z_{46}\succ\epsilon^2\approx z_6$，我们有 $z_4\approx z_{46}\succ z_{14}$，由此可得 $z_1\sim z_4$。根据关系 $z_1\sim Z_{14}=z_{14}r_{14}^{-3}$，我们得到 $r_{14}\prec 1$。因此 $w_1\approx W_{14}=w_{14}r_{14}^{-3}\succ w_{14}$，进而得到 $w_1\sim w_4$。

我们汇总 z_4-、 z_5-方程、分离量之间的关系，以及以下附加方程

$$\begin{aligned}
w_4 &= m_1W_{14}+m_5W_{54}+m_6W_{64},\\
w_5 &= m_4W_{45}+m_6W_{65},\\
w_1 &= m_4W_{41},\\
w_1 &= w_4,\\
w_4 &= w_5.
\end{aligned}$$

然后，我们根据簇方程进行代换，应用消元过程，得到质量关系 $f_{6,\ 16,\ 4}=0$ ，其包含以下因子

$$\begin{aligned}
&-m_1m_4^2-m_4^3+m_1m_6^2+m_4m_6^2+m_5m_6^2,\\
&\mu_5(m_4,m_5,m_6),\\
&m_1^3m_4^8m_5^2+3m_1^2m_4^9m_5^2+3m_1m_4^10m_5^2+m_4^11m_5^2-\cdots(60\text{ other terms}),\\
&\mu_{111}(m_1,m_4,m_5,m_6),\\
&-3m_1^4m_4^8m_5^4-12m_1^3m_4^9m_5^4-18m_1^2m_4^{10}m_5^4-12m_1m_4^{11}m_5^4-\cdots(124\text{ other terms}).
\end{aligned}$$

情形 5 与情形 4 类似。我们我们收集 z_4-、 z_5-方程、分离之间的关系，以及以下附加方程

$$\begin{aligned} w_4 &= m_5 W_{54} + m_6 W_{64}, \\ w_5 &= m_1 W_{15} + m_4 W_{45} + m_6 W_{65}, \\ w_1 &= m_5 W_{51}, \\ w_1 &= w_5, \\ w_4 &= w_5. \end{aligned}$$

然后，根据簇方程进行代换，应用消元过程，得到质量关系 $f_{6,\ 16,\ 5} = 0$ 其中

$$\begin{aligned} f_{6,16,5} &= (-m_4^3 + m_1 m_6^2 + m_4 m_6^2 + m_5 m_6^2)\mu_5(m_4, m_5, m_6)\mu_{45}(m_1, m_4, m_5, m_6) \\ &\quad \mu_{88}(m_1, m_4, m_5, m_6)\mu_{111}(m_1, m_4, m_5, m_6). \end{aligned}$$

注意，情形2和情形3中收集的方程相同，只是下标4和5互换。因此，在情形2中，我们也可以将$f_{6,\ 16,\ 3} = 0$中的 m_4 和 m_5 互换，从而得到质量关系；因此，在情形2、3中有 $\mu_5(m_4,\ m_5,\ m_6) = 0$。类似地，对于情形4和5，我们有质量关系

$$\mu_5(m_4, m_5, m_6)\mu_{111}(m_1, m_4, m_5, m_6) = 0.$$

因此，对于图16，我们得到质量关系 $f_{6,\ 16} = 0$ ，其中

$$f_{6,16} = f_{6,16,1}\,\mu_{111}(m_1, m_4, m_5, m_6).$$

11.13. 图14。 对于图14，我们得到最优 Type 1 zw-序矩阵：

$$\left(\begin{pmatrix} \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{0,1\} & \{1\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{1\} & \{0,1\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{4\} & \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{2\sim4\} & \{4\} \\ \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{4\} & \{2\sim4\} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{0\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{5\} & \{5\} & \{0\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} \\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{0\sim4\} & \{2\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{0\sim4\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{5\} & \{5\} & \{5\} & \{2\} & \{0\sim4\} \end{pmatrix}\right).$$

以及生成的 r-序矩阵

$$\begin{pmatrix} \{\} & \{4\} & \{4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} & \{2\sim4\} \\ \{4\} & \{\} & \{3\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{4\} & \{3\} & \{\} & \{4\} & \{4\} & \{3\} \\ \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{\} & \{2\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{4\} & \{4\} & \{2\} & \{\} & \{2\} \\ \{2\sim4\} & \{3\} & \{3\} & \{2\} & \{2\} & \{\} \end{pmatrix}$$

极大序集如下表所示：

	$M_{Z,i}$	一定是最大值?	$M_{W,i}$	一定是最大值?
$i=1$	$\{1,4,5,6\}$		$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=2$	$\{2,3\}$	$\surd$	$\{2,3\}$	$\surd$
$i=3$	$\{2,3\}$	$\surd$	$\{2,3\}$	$\surd$
$i=4$	$\{5,6\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=5$	$\{4,6\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	
$i=6$	$\{4,5\}$	$\surd$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	

根据 §10.3 中最后一种情况的相同讨论，至多有一个 $i\in\{4,5,6\}$ 使得 $1\in M^*_{W,\ i}$，并且至多有一个 $j\in\{4,5,6\}$ 使得 $\{2,3\}\cap M^*_{W,\ j}\neq\emptyset$。

因此，对于某些互不相同的 $M^*_{W,\ i}\subset\{1,4,5,6\}$ 和 $M^*_{W,\ j}\subset\{4,5,6\}$ $i,\ \ j\in\{4,5,6\}$。令 $\{i,j,k\}=\{4,5,6\}$

如果 $M^*_{W,\ p}\subset\{4,5,6\}$ 对于 $i,\ \ j,\ \ k$ 中的两个成立，那么这与 §10.2 相同，我们得到质量关系$f_{6,\ 14,\ 1}=0$ 其中 $f_{6,\ 14,\ 1}$ 与 §10.2 中的 $f_{5,\ 4,\ 1}$ 相同，只是下标向后移了 1 位。

如果 $M^*_{W,\ i},\ \ M^*_{W,\ k}\nsubseteq\{4,5,6\}$。那么 2，$3\in M^*_{W,\ k}$，并且有两种子情形:

1. $M^*_{W,i}=\{1,5,6\}$ 和 $M^*_{W,j}\subset\{4,6\}$2.

$M^*_{W,i}=\{1,4,5,6\}$ 和 $M^*_{W,j}=\{4,5,6\}$

情况 1 与 §11.12 中的情况 2 类似，我们得到质量关系 $f_{6,14,2}=0$ 其中$f_{6,14,2}=f_{6,16,2}$。在情况 2 中，按照 §10.3 最后一个情况的相同讨论，我们有

$$\begin{aligned} z_{1i} &\prec z_{1j}\approx z_{1k}\approx z_{ij}\\ w_{1i} &\approx w_{1j}\approx w_{ik}\\ z_{pk} &\prec z_{pi}\approx z_{pj}\approx z_{ij}\end{aligned}$$

对于 $p=2$,3。因此可得 $z_{12}\approx z_{13}\approx z_{1j}\approx z_{ij}$。由于 $z_1\succ z_2,z_3$，我们得到 $z_1\approx z_{12}\approx z_{13}\succ z_{1i}$。因此

$$\begin{aligned} z_{12}\approx z_{13} &\approx z_{1j}\approx z_{1k}\succ w_{1i},\\ w_{12}\approx w_{13} &\succ w_{1i}\approx w_{1j}\approx w_{1k},\end{aligned}$$

我们有 $Z_{1i}\succ Z_{1p}$ 且 $W_{1i}\succ W_{1p}$ 对于 $p=2$,3, j,k，这意味着

$$M^*_{Z,1}=M^*_{W,1}=\{1,i\}.$$

另一方面，由于 $z_1\succ z_{1i}$，我们有 $z_1\sim z_i$。由于 $z_1\approx Z_{1i}$，我们有 $r_{1i}\prec 1$，结果发现 $w_{1i}\prec w_1$。因此，$w_1\sim w_i$ 并且我们得到以下方程

$$\begin{aligned} w_j &= m_iW_{ij}+m_kW_{kj},\\ w_i &= m_1W_{1i}+m_jW_{ji}+m_kW_{ki},\\ w_1 &= m_iW_{i1},\\ w_1 &= w_i,\\ w_i &= w_j,\end{aligned}$$

这与 §11.12 中的情形 4 类似，因此我们得到质量关系 $f_{6,\ 14,\ 3}=0$ 其中 $f_{6,\ 14,\ 3}$ 与 $f_{6,\ 16,\ 3}$相同。

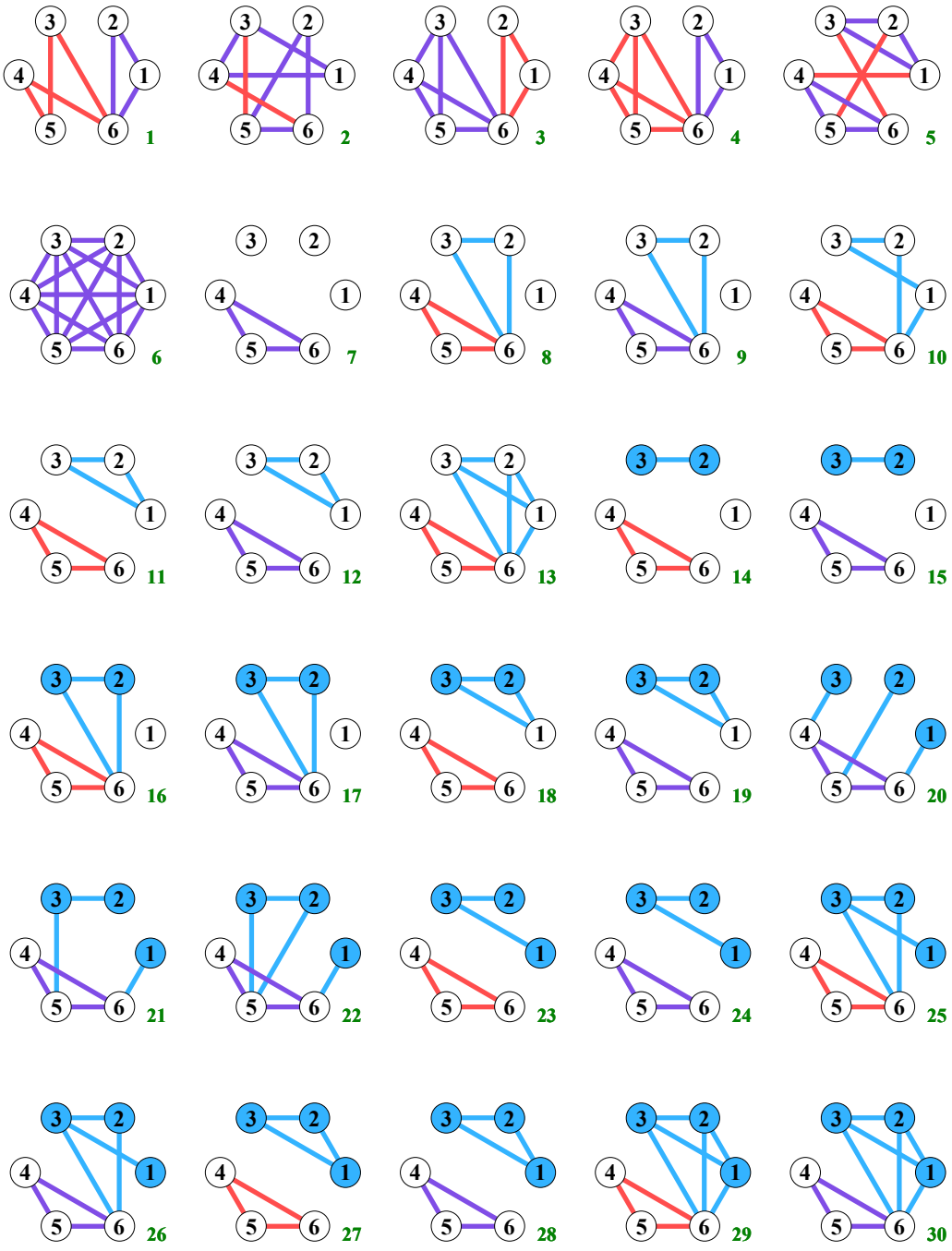

FIGURE 3. 图 1–30，适用于 $n = 6$。

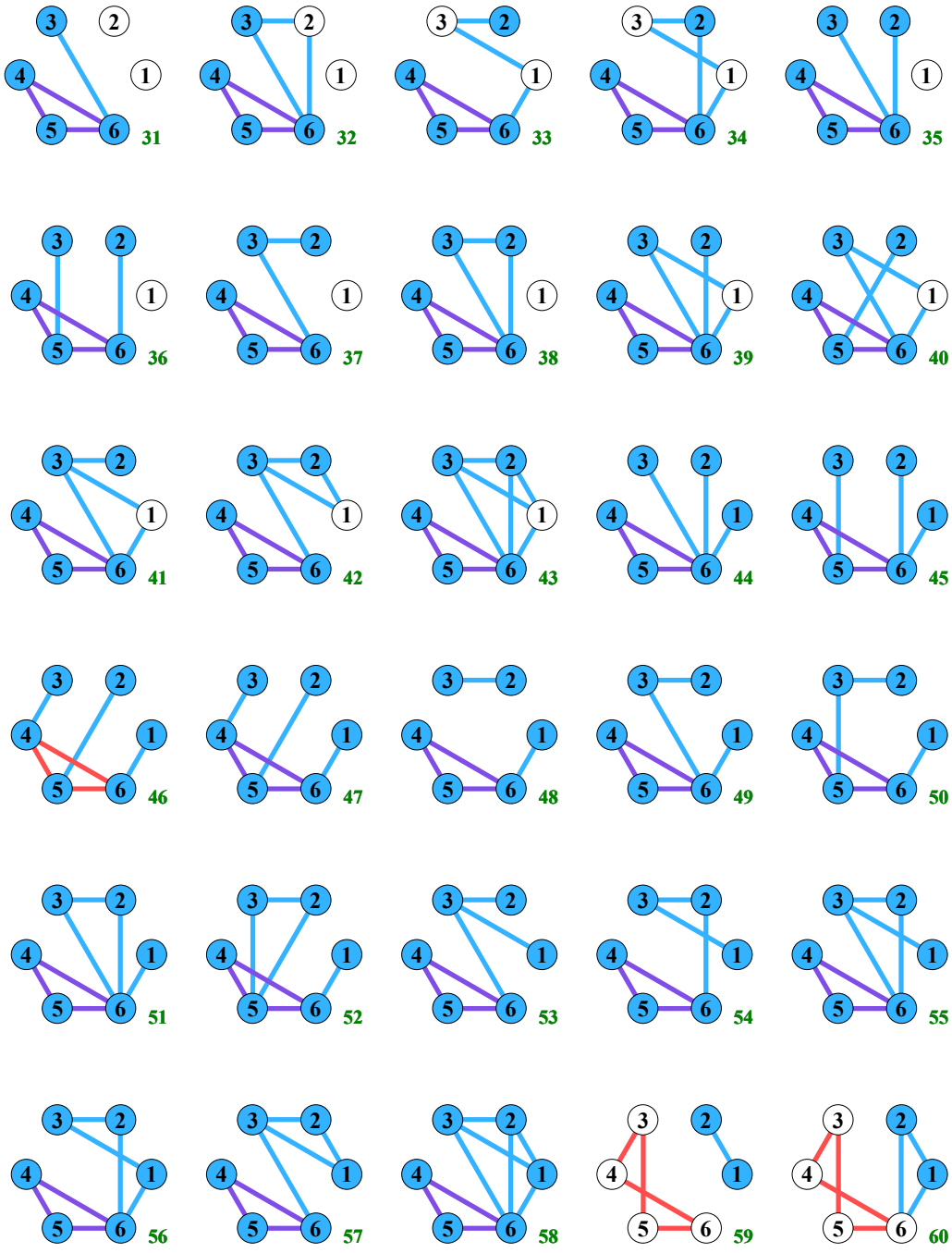

FIGURE 4. 图 31–60，适用于 $n = 6$。

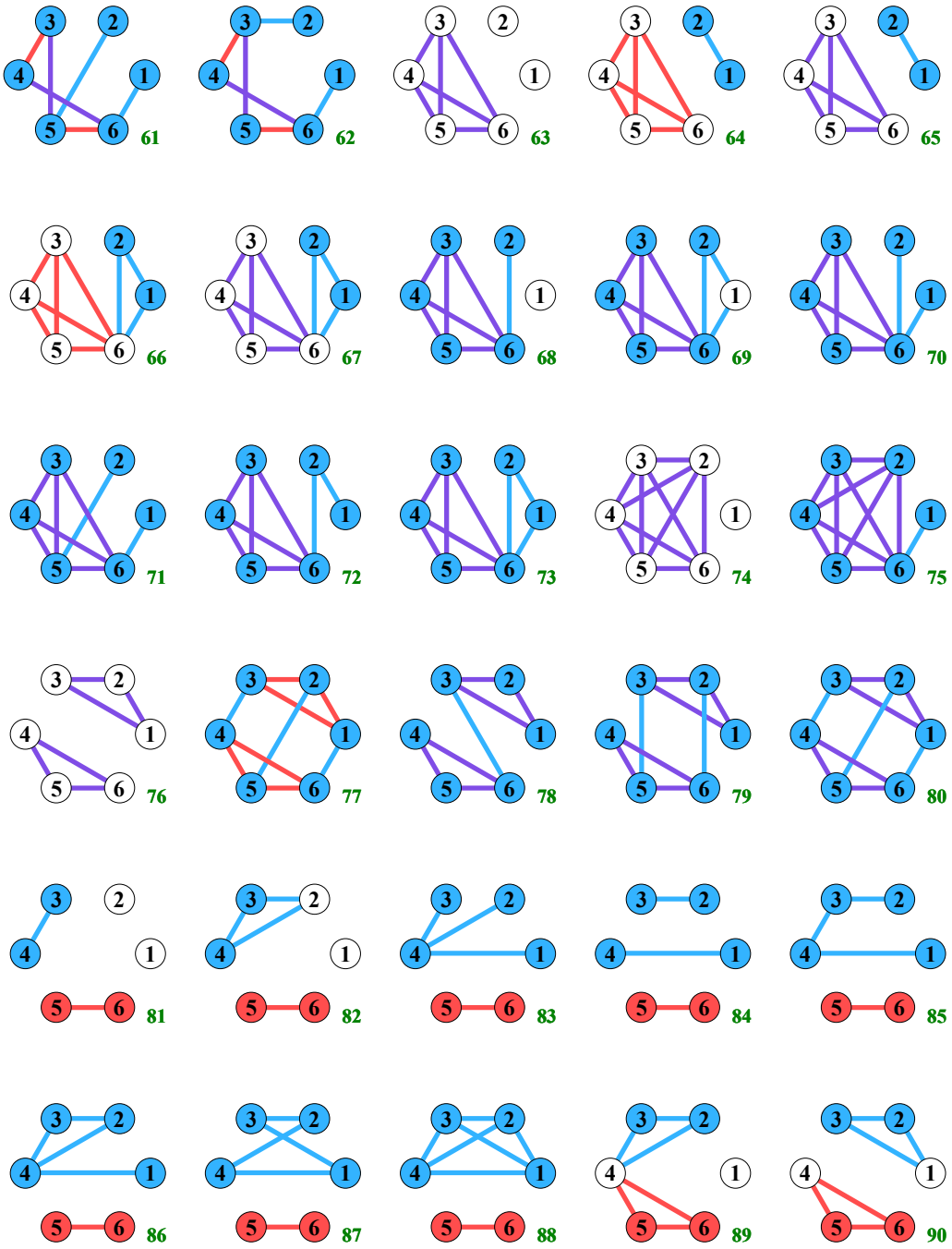

FIGURE 5. $n = 6$的图示编号61–90。

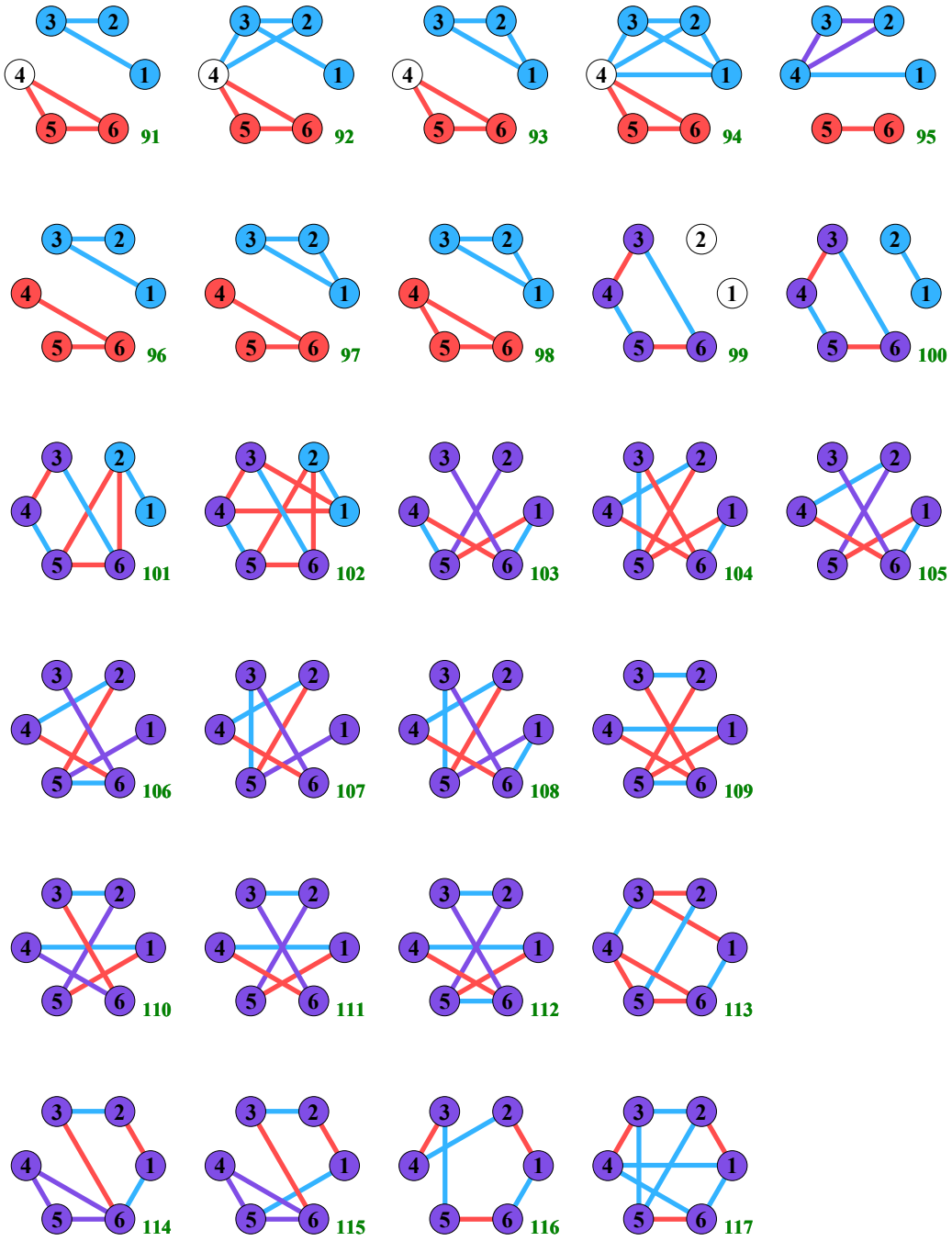

FIGURE 6. 第91—117号图，关于 $n = 6$。

Appendix I: Program for Algorithm I by Mathematica

编译程序后，使用函数“zw 矩阵”并输入物体数量，即可找出 zw-矩阵。为监控性能，可以在每个子程序执行后，轻松输出剩余的zw-矩阵数量及所用的累计时间。为简洁起见，我们删去了这些部分。为便于说明，还使用“(* ... *)”添加了一些注释。

```
zw矩阵[nn_]:=(n=nn; pm=排列
@Table[k,{k,n}]; 连通矩阵判定[x_]:=
    计数[Flatten[单位矩阵[n]+Sum[矩阵幂[x,k],{k,1,n-1}]],0]==0; zpart[{z_,w_}]:
=z; wpart[{z_,w_}]:=w; trianglepart[x_]:=Table[If[i≤j,x[[i,j]],0],{i,1,n},{j,1,n}];

    (* 开始选择 z-矩阵 *) (* 收集所有对称二进制矩阵，按照列和与对角线排序，然后
删除重复项 *) mxsort[x_?ArrayQ]:=x[[##]]&@@（Ordering[x ~ Total ~ {#}]&/@{1,1}）;
mxreorder[x_?ArrayQ]:=x[[##]]&@@ （Ordering[Diagonal[x]]&/@{1,1}）; A= 笛卡尔
积[{0,1},n（n-1）/2]; a=Table[k（k-1）/2, {k,1,n+1}]; S={0} ~连接~ Table
[k,{k,2,n}]; V=Array[If[#1>#2,0,1]& {n+1,n}]; F[x_]:=Array[If[#1≠#2, x[[ a[[n-
Abs[#1-#2]]]+Min[#1, #2]]],0]& {n,n}]; fmx0=Table[F[A[[k]]],{k,1,Length[A]}];
fmx=Table[Table[对角矩阵[V[[n-j+1]]]+fmx0[[k]], {k,1,Length[fmx0]}], {j,S}];

Do[fmxs=Table[mxsort@fmx[[j]][[k]], {k,1,Length[fmx[[j]]]}]; fmx[[j]]=
DeleteDuplicates[fmxs], {j,1,n}]; Do[fmx[[j]]=Table[mxreorder@fmx[[j]][[k]],
{k,1,Length[fmx[[j]]]}], {j,1,n}]; Do[fmx[[j]]=DeleteDuplicates[fmx[[j]]], {j,1,n}];

(* 列和规则 *)
RuleCSQ[x_]:=计数[总计@x,1]==0&&计数[总计@x,0]<n;
Do[fmx[[k]]=Select[fmx[[k]],RuleCSQ],{k,1,n}];

    (* 迹为 2 的矩阵第一规则 *) RuleTr2Part1Q[x_]:=x[[n,n-1]]==1; fmx
[[2]]=Select[fmx[[2]],RuleTr2Part1Q]; twolinesSP[x_]:=Flatten[Table[(
x[[i,n]]+x[[i,n-1]]+x[[n-1,n]]) {i,1,n-2}]]; RuleTr2MxPart2Q[x_]:=
(Count[twolinesSP[x], 2]==0); fmx[[2]]=Select[fmx[[2]],RuleTr2MxPart2Q];

(* 三角形第二规则 *)
pr三角形3[x_]:=Flatten[Table[
    x[[i,k]]+x[[j,k]]+x[[k,k]], {k,n-K+1,n}, {j,1,n-K}, {i,j+1,n-K}], 2];
规则三角形2Q[x_]:=计数[prtriangle3@x, 3]==0;
```

Do[$K=k$; fmx[[k]] = 选择[fmx[[k]], 规则三角形2Q], $\{k,2,n-2\}$];

(* 四边形第一规则 *) foursum[x]:=Flatten[Table
$[x[[i,j]]+x[[i,k]]+x[[i,l]]+x[[j,k]]+x[[j,l]]+x[[k,l]],\{l,4,n\},\{k,3,l-1\},$
$\{j,2,k-1\},\{i,1,j-1\}]$; Rule2fCorQ[x]:= 计数[foursum[x], 5] == 0; Do[fmx
[[k]] = Select[fmx[[k]], Rule2fCorQ], $\{k,1,n\}$];

(* 三角形第一规则 *)
三条线SP[x]:=Flatten[Table[$(x[[i,i]]+x[[i,j]]+x[[i,k]])$
$(x[[j,i]]+x[[j,j]]+x[[j,k]])(x[[k,i]]+x[[k,j]]+x[[k,k]])(x[[i,i]]+x[[j,j]]+x[[k,k]])$,
$\{k,n-K+2,n\},\{j,n-K+1,k-1\},\{i,1,n-K\}$]];
三角形规则1Q[x]:= 计数[三条线SP[x], 16] == 0;
执行[$K=k$; FMX[[k]] = 选择[FMX[[k]], 三角形规则1Q], $\{k,2,n-1\}$];

(* 迹为 3 的矩阵规则，仅适用于 $n\geq 6$。 *)
如果[$n>5$,(
规则Tr3MxQ[x]:=($Z=x$; $i=n-3$;
当[$i>0$,若[($Z[[i,n-2]]+Z[[i,n-1]]+Z[[i,n]]$) $*$最大值[
$Z[[i,n]]+Z[[n-2,n]]+Z[[n-1,n]]$, $Z[[i,n-1]]+Z[[n-2,n-1]]+Z[[n-1,n]]$,
$Z[[i,n-2]]+Z[[n-2,n-1]]+Z[[n-2,n]]$]== 3, 返回@假]; $i--$]; 返回@真);

fmx[[3]] = 选择[fmx[[3]],规则Tr3MxQ];

(* 迹为 0 的主子式规则 *) Rule0DiagSubmxQ[x2] :=($S2=$表[$j2,\{j2,1,n-K1\}$];
若[$K1==1, S2=S2\sim$连接 $\sim\{n\}$];$P2=$子集[$S2$]; $P2=$选择[$P2$, Length@# >2&];
$kk2=1$; 当[$kk2\leq$ Length@$P2$, s2a $=P2[[kk2]]$; s2b =补集[allind, s2a]; 若[计数[
Flatten@(x2[[s2a, s2b]]) 1] == 1, 返回[假]]; $kk2++$]; 返回[真]) 执行[$K1=k1$;fmx[[$k1$]] =
选择[fmx[[$k1$]], Rule0DiagSubmxQ], $\{k1,1,n-1\}$];

(* 删除重复项 *)
Do[重复项索引 = {};
执行[如果[Length@交集[Table[fmx[[i]][[k]][[pm[[j]], pm[[j]]]], $\{j,1,$Length[pm]$\}$],
fmx[[i]][[1;;$k-1$]]] >0, 重复项索引 =追加[重复项索引 $\{k\}$]], $\{k,2,$Length[fmx[[i]]]$\}$];
fmx[[i]] =删除[fmx[[i]], 重复项索引], $\{i,1,n\}$];
(* z-矩阵的选择结束 *)

(* 开始选择 zw-矩阵 *)
(* 生成所有可能的 w-矩阵，并按迹对其分类。*) smx =Table[{}, $\{k,1,n\}$]; Do[Do[
smx[[k]] =并集[smx[[k]], Table[fmx[[k]][[i]][[pm[[j]], pm[[j]]]], $\{j,1,$Length[pm]$\}$]],
$\{i,1,$Length[fmx[[k]]]$\}$], $\{k,1,n\}$];

smxcnn = smx[[1]];(* 收集 w-迹为 0 的项 *) Do[smx[[$n-k$]] = smx[[$n-k$]] ~
连接 ~smx[[$n-k+1$]], $\{k,1,n-1\}$];L = Table[Length[smx[[k]]] − Length[
smx[[$k+1$]]], $\{k,1,n-1\}$];L = Append[L,Length@smx[[n]]];

fmxcnn = Table[{}, $\{k,1,n\}$]; fmxdnn = fmxcnn;
执行[fmxcnn[[k]] = 选择[fmx[[k]], 连通矩阵判定], $\{k,1,n\}$]; （
* 将 fmx 分成不同类别。
从具有连通图的类别开始。*）
执行[fmxdnn[[k]] = 补集[fmx[[k]], fmxcnn[[k]]], $\{k,1,n\}$];

(* 生成所有可能的 zw矩阵，使其 z迹小于或等于 w迹。 *) FMXCNN =
Flatten[Table[{fmxcnn[[1]][[i]], smxcnn[[j]]}, $\{i$, Length[fmxcnn[[1]]]}, $\{j$,Length[
smxcnn]}], 1]; (* 根据全连通伴随对象规则，将完全连通的 z矩阵与迹为0 w的矩阵匹
配 *) FMXDNN = Table[{}, $\{k,1,n\}$]; Do[FMXDNN[[k]] = Flatten[Table[{fmxdnn
[[k]][[i]],smx[[k]][[j]]}, $\{i$, Length[fmxdnn[[k]]]},$\{j$,Length[smx[[k]]]}], 1], $\{k,1,n\}$];

(* 环绕规则 *)
$K=1$; 环绕规则WQ[x]:=(W =wpart[x];s = Total[Flatten@W[[1;;$n-K$,
$n-K+1$;;n]]]; If[$s \neq 0$,Return@False,Return@True]; Do[$K=k$;
FMXDNN[[k]] = Select[FMXDNN[[k]], 环绕规则WQ], $\{k,2,n-1\}$]; 环绕规则
ZQ[x]:=(Z = zpart[x]; W = wpart[x]; dW = Diagonal[W]; p0 =
Flatten@Position[dW, 0]; p1 = Flatten@Position[dW, 1];s = Total[
Flatten@Z[[p0,p1]]]; If[$s \neq 0$,Return@False,Return@True]; Do[
FMXDNN[[k]] = Select[FMXDNN[[k]], 环绕规则ZQ], $\{k,1,n-1\}$];

（* 迹为 2 的矩阵第二规则 * ）
Rule2ndTr2MxQ[x]:=(Z =zpart[x];
如果[总计[Z[[n]]] == 2&&Tr[wpart[x]] == $n-3$,Return@False]; 如果[$n==5, W$ = wpart[x];
如果[Tr[W] == 2, W = mx重排[W];
If[W[[5, 4]] == 1&&Total[W[[5]]] == 2&&Tr[Z] == 2, Return@False]]; Return@True);
FMXDNN[[2]] = 选择[FMXDNN[[2]],Rule2ndTr2MxQ];

（* 合并所有类 *） FMX =FMXCNN; Do[FMX =F
MX ~连接~FMXDNN[[k]], $\{k,1,n\}$];

（* 三角形第三规则 *）RuleTriangle3Q[x]: =(B =
zpart[x] + wpart[x]; $k=n$;

当[$k \geq 3, j = 2$; 当[$j < k, i = 1$; 当[$i < j, b = B[[i, j]] + B[[j, k]] + B[[k, i]]$; 如果[$b == 4 \| b == 5$, 返回@假]; i++]; j++]; k--]; 返回@真);

FMX $=$ 选择[FMX, RuleTriangle3Q];

(* 双列和规则 *) Rule2CSQ[x_]:=($Z =$ zpart[x]; $Z = Z -$ 对角矩阵[对角@Z]; $W =$ wpart[x]; $W = W -$ 对角矩阵[对角@W]; $X = Z + W$; $P =$ 位置[$X, 2$]; 如果[Length[P] $== 2$, 返回@假]; $k = 1$; 当[$k \leq$ Length[P], 如果[(Total[Z[[P[[$k, 1$]]]]] + Total[Z[[P[[$k, 2$]]]]] $- 2$) $*$(Total[W[[P[[$k, 1$]]]]] + Total[W[[P[[$k, 2$]]]]] $- 2$) $== 0$, 返回@假]; k++]; 返回@真

则）;

FMX $=$ 选择[FMX, Rule2CSQ];

（* 三角形第四规则 *）
RuleTriangle4Q[x_]:=($Z =$ zpart[x]; $W =$ wpart[x]; $B = Z + W$; $k = n$;
当[$k \geq 3, j = 2$; 当[$j < k, i = 1$; 当[$i < j, s = B[[i, j]] * B[[j, k]] * B[[k, i]] *$最大[($Z$[[$i, j$]] + Z[[k, j]] + Z[[i, k]]), (W[[i, j]] + W[[k, j]] + W[[i, k]])]; 如果[s!=0&&s!=3&&s!=24, Return@假]; i++]; j++]; k--]; Return@真）; FMX $=$ 选择[FMX, RuleTriangle4Q];

（* 连通分支规则 *）
componentsZ[x_]:=(ZZ $=$ zpart[x]; ZC $=$ 矩阵幂[ZZ $n - 1$]; zc $=$ Flatten[笛卡尔积[{{0}}, $n - 1$], 1]; Pz $=$ Table[k, {$k, 1, n$}];$k = 1$;

While[Length[Pz] > 0, zc[[k]] $=$ 并集[{Pz[[1]]}, Select[Pz, ZC[[Pz[[1]], #]] > 0&]; Pz $=$ 补集[Pz, zc[[k]]]; k++];
zc $=$ 选择[zc,Length[#] > 1&]; Return@zc);

componentsW[x_]:=(WW $=$ wpart[x];WC $=$ 矩阵幂[WW $n - 1$]; wc $=$ Flatten[笛卡尔积[{{0}}, $n - 1$], 1]; Pw $=$ Table[k, {$k, 1, n$}];$k = 1$; While[Length[Pw] > 0, wc[[k]] $=$ 并集[{Pw[[1]]}, Select[Pw, WC[[Pw[[1]], #]] > 0&]; Pw $=$ 补集[Pw, wc[[k]]]; k++]; wc $=$ Select[wc, Length[#] > 1&]; Return@wc);

RuleConnCompZQ[x_]:=($Z =$ zpart[x]; $W =$ wpart[x]; $X = Z + W$;$X = X -$对角矩阵[Diagonal[X]]; If[Tr[Z] < 3, Return@True]; zc $=$ Select[componentsZ[x], Length[#] ≥ 3&]; $k = 1$; While[$k \leq$ Length[zc], $l =$ Length[zc[[k]]]; sX $= X$[[zc[[k]], zc[[k]]]]; sZ $= Z$[[zc[[k]], zc[[k]]]];

If[Tr[sZ] == 1, Return@False]; If[Tr[sZ] == l&&计数Flatten[sX], 2] == l($l-1$), Return@False]; k++]; Return@True);

RuleConnCompWQ[x]:=(Z = zpart[x]; W = wpart[x];$X = Z + W$; $X = X -$ 对角矩阵[Diagonal@X]; If[Tr[W] < 3, Return@True]; wc = Select[componentsW[x], Length[#] $\geq$ 3&];$k = 1$; While[$k \leq$ Length[wc], l = Length[wc[[k]]]; sX = X[[wc[[k]], wc[[k]]]]; sW = W[[wc[[k]], wc[[k]]]]; If[Tr[sW] == 1,Return@False]; If[Tr[sW] == l&&计数[Flatten[sX], 2] == l ($l-1$), Return@False]; k++]; Return@True); FMX = Select[FMX, RuleConnCompZQ]; FMX = Select[FMX, RuleConnCompWQ];

(* 四边形第二规则 *) odminortest[x]:=Flatten@Table[{如果[l==j||l==k||(zpart[x][[i, j]] + wpart[x][[i, j]])(zpart[x][[i, k]] + wpart[x][[i, k]]) (zpart[x][[l, j]] + wpart[x][[l, j]])(zpart[x][[l, k]] + wpart[x][[l, k]])==0, {},{zpart[x][[i, j]] + zpart[x][[l, k]], zpart[x][[i, k]] + zpart[x][[l, j]], wpart[x][[i, j]] + wpart[x][[l, k]], wpart[x][[i, k]] + wpart[x][[l, j]]}],{$k, 3, n$}, {$i, 1, k-1$}, {$l, i+1, n$}, {$j, i+1, k-1$}]; RuleQuad2Q[x]:=计数[odminortest[x], 1]==0; FMX = 选择[FMX,RuleQuad2Q];

(* 五边形规则 *) RulePentagonQ[x]:=(Z = zpart[x]; W = wpart[x]; $X = Z + 2W$; $i = 1$; While[$i < n-3, j = i+1$; While[$j \leq n, k = i+1$; While[$k \leq n, l = i+1$; While[$l \leq n, m = j+1$; While[$m \leq n$,If[($j-k$)($k-l$)($l-m$)($j-l$)($k-m$)($j-m$) $\neq 0$, side = $\{X[[i, j]], X[[j, k]], X[[k, l]], X[[l, m]], X[[m, i]]\}$;$v = \{$计数[side, 0], 计数[side, 1], 计数[side, 2], 计数[side 3]}; If[v[[1]]==0&&(v[[2]] == 1||v[[3]] == 1||$v == \{0, 4, 0, 1\}$||$v == \{0, 0, 4, 1\}$), Return@False]; m++;]; l++;]; k++;]; j++;]; i++;];Return@True);

FMX = 选择[FMX, RulePentagonQ];

（* v[[1]]==0表示这些边构成一个五边形，$X[[i, j]] = 1 \Leftrightarrow z$-边 $2 \Leftrightarrow w$-边 $3 \Leftrightarrow zw$-边， $X[[j, k]]$也类似，等等。排除恰好有一条 z-边（v[[2]]==1）的五边形，恰好有一条w-边（v[[3]]==1）的五边形 4 z-边加一条 1 zw-边（$v = \{0, 4, 0, 1\}$）的五边形，以及4条w-边加一条 1 zw-边（$v = \{0, 0, 4, 1\}$）的五边形。*）

(* 删除重复项 *)

重复项索引 = {}; 执行[A = FMX[[k]]; AA = Flatten[Table[{{A[[1]][[pm[[j]], pm[[j]]]], A[[2]][[pm[[j]], pm[[j]]]]},{A[[2]][[pm[[j]], pm[[j]]]], A[[1]][[pm[[j]], pm[[j]]]]}}, {j, 1, Length[pm]}], 1]; 若[Length@Intersection[AA, FMX[[1;;$k-1$]]] >0, 重复项索引 = Append[重复项索引 {k}]], {k, 2, Length@FMX}]; FMX = 删除[FMX,重复项索引]; (* zw − 矩阵的选择结束 *)

(* 开始绘制图 *)

FMXR = Table[{三角形部分[FMX[[k, 1]]], 三角形部分[FMX[[k, 2]]]}, {k, Length[FMX]}]; (* 移除方阵左下角的三角形部分 *)

rededges[k_]:=Rule@@@Position[zpart@FMXR[[k]], 1]; (* 收集红色笔画 *) bluedges[k_]:=Rule@@@Position[wpart@FMXR[[k]], 1]; (* 收集蓝色笔画 *) alledges[k]:=Flatten[Append[rededges[k], bluedges[k]]]; (* 删除重复边，然后确定边的颜色。 *) Print@Table[GraphPlot[DeleteDuplicates[Table[1 → j, {j, 2, n}] ∼Join∼ alledges[k]], VertexLabeling → False, EdgeRenderingFunction → (Which[MemberQ[rededges[k],First[#2] → Last[#2]] == True&& MemberQ[bluedges[k], First[#2] → Last[#2]] == False,{RGBColor[1, .3, .3], Thickness[.025], Line[#1]}, MemberQ[rededges[k],First[#2] → Last[#2]] == False&& MemberQ[bluedges[k], First[#2] → Last[#2]] == True,{RGBColor[.2, .7, 1], Thickness[.025], Line[#1]}, MemberQ[rededges[k],First[#2] → Last[#2]] == True&& MemberQ[bluedges[k], First[#2] → Last[#2]] == True,{Thickness[.025],RGBColor[.5, .3, .9], Line[#1]}, MemberQ[rededges[k],First[#2] → Last[#2]] == False&& MemberQ[bluedges[k], First[#2] → Last[#2]] == False {Thickness[.025]}]&), VertexRenderingFunction → ({#2/.Table[Which[FMXR[[k, 1]][[i]][[i]]==1&&FMXR[[k, 2]][[i]][[i]]==0, i → RGBColor[1, .3, .3], FMXR[[k, 1]][[i]][[i]]==0&&FMXR[[k, 2]][[i]][[i]]==1, i → RGBColor[.2, .7, 1], FMXR[[k, 1]][[i]][[i]]==1&&FMXR[[k, 2]][[i]][[i]]==1, i → RGBColor[.5, .3, .9], FMXR[[k, 1]][[i]][[i]]==0&&FMXR[[k, 2]][[i]][[i]]==0, i → White], {i, n}], EdgeForm[Black], Disk[#1, .24],Black, FontSize → 28, FontWeight → Bold, Text[#2, #1], Opacity[.5], RGBColor[0, .5, 0], FontSize → 24, Text[k, {1.1, −1}]}&)

,

自环样式 → 无，图像尺寸 → {240, 240}], {k, 1, Length[FMXR]}]; (* 顶点着色: z-圆 红色， w-圆 蓝色， zw-圆 紫色 *)

(* 结束绘制图 *))

Appendix II: Program for Algorithm II by Mathematica

该算法必须在算法 I 之后编译。可以使用命令 FindOrder[n]或 FindOrder[n,t] 生成最优的 zw阶矩阵（类型1）以及用于图 n的集合 $\mathcal{C}_2$、 $\mathcal{C}_3$ 。系统设置了默认时间约束，以避免在可能性过多时枚举所有类型2或类型 3 zw阶矩阵。可选参数 t 用于更改此时间约束。

类型1的最优 zw阶矩阵记作 {zo,wo}，集合 $\mathcal{C}_2$ 在程序中记作 zwotype3。算法 III 可以通过调用其中任意一个来生成质量关系。

（∗ 从 zw− 阶矩阵生成 r− 阶矩阵 ∗）Dis
= { {{},{},{},{},{}}, {{},{},{},{2,3,4},{4}}, {{},{},{},{2,3,4},{4}},
{{},{2,3,4},{2,3,4},{2,3,4},{4}}, {{},{4},{4},{4},{5}} }; DisEdge
= { {{},{},{},{},{3}}, {{},{},{},{2},{}}, {{},{},{1},{},{}},{{},{2},{},{},{}},
{{3},{},{},{},{}} }; Dis2[zorderset6, worderset6] : =DeleteDuplicates[Flatten[
Table[Dis[[zorderset6[[$i6$]], worderset6[[$j6$]]]], {$i6,1$,Length[zorderset6]}, {$j6,1$,
Length[worderset6]}]]]; Dis2Edge[zorderset6, worderset6] : = DeleteDuplicates[
Flatten[Table[DisEdge[[zorderset6[[$i6$]], worderset6[[$j6$]]]], {$i6,1$, Length[zorderset6]},
{$j6,1$,Lengthngth[worderset6]}]]]; Dis3[{zomatrix5, womatrix5 }] : = （dx5 = Table
[{},{$i5,1,n$},{$j5$,1,n}]; Do[Do[If[$XX1$[[$i5,j5$]] == 0,dx5[[$i5,j5$]] = Dis2[zomatrix5[[$i5,j5$]],
womatrix5[[$i5,j5$]]], dx5[[$i5,j5$]] = Dis2Edge[zomatrix5[[$i5,j5$]], womatrix5[[$i5,j5$]]]];
dx5[[$j5,i5$]] = dx5[[$i5,j5$]], {$i5,j5+1,n$}], {$j5,1,n-1$}]; Return[dx5])

(∗更新序的原则 ∗)

(∗ 命题 4.5：三角不等式 ∗) TriIneqQ[序5a , 序5b ,序5c] := (If[计数[{序5a, 序
5b, 序5c}, Max[序5a, 序5b, 序5c]] == 1, Return[False], Return[True]]) TriIneqQ2[
序4 , 序集合4A , 序集合4B] := (ii4 = 1; While[ii4 <= Length[序集合4A], jj4 = 1;
While[jj4 <= Length[序集合4B],If[TriIneqQ[序4, 序集合4A[[ii4]], 序集合4B
[[jj4]]] == True, Return[True]]; jj4 + +]; ii4 + +]; Return[False]) 三角不等式[{
zomatrix3 , womatrix3 }] := (Clear[zo3, wo3]; zo3 = zomatrix3; wo3 =
womatrix3; Do[Do[zo3[[$i3,i3$]] = Select[zo3[[$i3,i3$]], TriIneqQ2[#, zo3[[$j3,j3$]], zo
3[[$i3,j3$]]]&]; zo3[[$i3,j3$]] = Select[zo3[[$i3,j3$]], TriIneqQ2[#, zo3[[$j3,j3$]], zo3[[$i3,i3$]]]
&]; zo3[[$j3,j3$]] = Select[zo3[[$j3,j3$]], TriIneqQ2[#, zo3[[$i3,i3$]], zo3[[$i3,j3$]]]&];

zo3[[$j3,i3$]] = zo3[[$i3,j3$]]; wo3[[$i3,i3$]] = Select[wo3[[$i3,i3$]], TriIneqQ2[#,wo 3[[$j3,j3$]], wo3[[$i3,j3$]]]&]; wo3[[$i3,j3$]] = Select[wo3[[$i3,j3$]], TriIneqQ2[#, wo3[[$j3,j3$]], wo3[[$i3,i3$]]]&]; wo3[[$j3,j3$]] = Select[wo3[[$j3,j3$]], TriIneqQ2[#, wo3[[$i3,i3$]], wo 3[[$i3,j3$]]]&]; wo3[[$j3,i3$]] = wo3[[$i3,j3$]]; {$i3, j3+1, n$}, {$j3, 1, n-1$}]; Do[Do[Do[zo 3[[$i3,j3$]] = Select[zo3[[$i3,j3$]], TriIneqQ2[#, zo3[[$j3,k3$]], zo3[[$i3,k3$]]]&]; zo3[[$j3,k3$]] = Select[zo3[[$j3,k3$]], TriIneqQ2[#, zo3[[$i3,j3$]], zo3[[$i3,k3$]]]&]; zo3[[$i3,k3$]] = Select[zo 3[[$i3,k3$]], TriIneqQ2[#, zo3[[$i3,j3$]],zo3[[$j3,k3$]]]&]; zo3[[$j3,i3$]] = zo3[[$i3,j3$]]; zo 3[[$k3,i3$]] = zo3[[$i3,k3$]]; zo3[[$k3,j3$]] = zo3[[$j3,k3$]]; wo3[[$i3,j3$]] = Select[wo3[[$i3,j3$]], TriIneqQ2[#, wo3[[$j3,k3$]], wo3[[$i3,k3$]]]&]; wo3[[$j3,k3$]] = Select[wo3[[$j3,k3$]], TriIneqQ2[#, wo3[[$i3,j3$]], wo3[[$i3,k3$]]]&]; wo3[[$i3,k3$]] = Select[wo3[[$i3,k3$]], TriIneqQ2[#,wo3[[$i3,j3$]], wo3[[$j3,k3$]]]&]; wo3[[$j3,i3$]] = wo3[[$i3,j3$]]; wo3[[$k3,i3$]] = wo3[[$i3,k3$]]; wo3[[$k3,j3$]] = wo3[[$j3,k3$]]; {$i3, j3+1, n$}, {$j3, k3+1, n-1$}, {$k3, 1, n-2$}]; Return[{zo3, wo3}];) (* 命题 4.6 *) 规则2e[{zomatrix3 , womatrix 3 }] := (Clear[zo3, wo3]; zo3 =zomatrix3; wo3 =womatrix3; Do[If[$i3 \neq j3$&&$i3 \neq k3$ &&$j3 \neq k3$&&(XX1[[$i3,j3$]] * XX1[[$j3,k3$]] * XX1[[$k3,i3$]] $\neq 0$), zo3[[$i3,j3$]] = Intersection[zo3[[$i3,j3$]],zo3[[$j3,k3$]], zo3[[$k3,i3$]]]; zo3[[$j3,k3$]] = zo3[[$i3,j3$]]; zo 3[[$k3,i3$]] = zo3[[$i3,j3$]]; wo3[[$i3,j3$]] = Intersection[wo3[[$i3,j3$]],wo3[[$j3,k3$]], wo 3[[$k3,i3$]]]; wo3[[$j3,k3$]] = wo3[[$i3,j3$]]; wo3[[$k3,i3$]] = wo3[[$i3,j3$]]]; {$i3, 1, n$}, {$j3, 1, n$}, {$k3, 1, n$}]; Return[{zo3, wo3}]) (* 命题 4.7(a) *) 估计[{zomatrix3 , womatrix3 }] := (Clear[zo3, wo3]; zo3 =zomatrix3; wo3 =womatrix3; Do[If[$i3 \neq j3$, If[XX 1[[$i3,j3$]] > 0, zo3[[$i3,j3$]] = Intersection[zo3[[$i3,j3$]], Table[$6 -$ wo3[[$i3,j3$]][[$k3$]],{$k3, 1,$ Length[wo3[[$i3,j3$]]]}]]; wo3[[$i3,j3$]] = Intersection[wo3[[$i3,j3$]], Table[$6 -$ zo 3[[$i3,j3$]][[$k3$]],{$k3, 1,$Length[zo3[[$i3,j3$]]]}]];

如果[XX1[[$i3, j3$]] == 0, zo3[[$i3, j3$]] = 选择[zo3[[$i3, j3$]], # >= $6 - 2 *$ 下限[最大值[wo3[[$i3, j3$]]]/2]&]; wo3[[$i3, j3$]] = 选择[wo3[[$i3, j3$]], # >= $6 - 2 *$ 下限[最大值[zo3[[$i3, j3$]]]/2]&]]],{$i3, 1, n$}, {$j3, 1, n$}]; 返回[{zo3, wo3}])

(*命题 4.7(b) *) 质心[{zomatrix3, womatrix3 }] := (清除[zo3,wo3]; zo3 = zomatrix3; wo3 = womatrix3; MZ3 =最大值@Flatten[Table[Table[zo3[[$i3, j3$]], {$i3, j3 + 1, n$}], {$j3, 1, n - 1$}]]; MW3 = 最大值@Flatten[Table[Table[wo3[[$i3, j3$]], {$i3, j3 + 1, n$}], {$j3, 1, n - 1$}]]; 执行[zo3[[$i3, i3$]] = 选择[zo3[[$i3, i3$]], # <= MZ3&]; wo3[[$i3, i3$]] = 选择[wo3[[$i3, i3$]], # <= MW3&], {$i3, 1, n$}]; 返回[{zo3, wo3}];)

(*确定 z− 矩阵、w− 矩阵的连通分支 *) componentsZ[x3] :=(MXZ3 = zpart[x3]; ZC3 = 矩阵幂[MXZ3, $n - 1$]; zc3 = Flatten[笛卡尔积[{{0}}, $n - 1$], 1]; Pz3 = allind; $kk3 = 1$; While[Length[Pz3] > 0, zc3[[$kk3$]] = 并集[{Pz3[[1]]}, Select[Pz3, ZC3[[Pz3[[1]],#]] > 0&]]; Pz3 = 补集[Pz3, zc3[[$kk3$]]]; $kk3 + +$]; zc3 = Select[zc3,Length[#] > 1&]; Return[zc3])

componentsW[x3] :=(MXW3 = wpart[x3]; WC3 = 矩阵幂[MXW3, $n - 1$]; wc3 = Flatten[笛卡尔积[{{0}}, $n - 1$], 1]; Pw3 = allind; $kk3 = 1$; While[Length[Pw3] > 0, wc3[[$kk3$]] = 并集[{Pw3[[1]]}, Select[Pw3, WC3[[Pw3[[1]],#]] > 0&]]; Pw3 = 补集[Pw3, wc3[[$kk3$]]]; $kk3 + +$]; wc3 = Select[wc3,Length[#] > 1&]; Return[wc3])

（*命题 4.9*） Prop1[{zomatrix3 ,womatrix3 }] := (zo3 = zomatrix3; wo3 = womatrix3; Do[If[$i3! = j3$, $kk3 = 1$; Z3A = {}; W3A = {}; While[$kk3 <= n$,If[$kk3! = i3$&&$kk3! = j3$,Z3A = 并集 [Z3A,zo3[[$i3, kk3$]]]; W3A =并集[W3A,wo3[[$i3, kk3$]]];$kk3 + +$]; Z3B =并集[Z3A,zo3[[$i3, j3$]]]; W3B =并集[W3A,wo3[[$i3, j3$]]];

If[(Z3B $==\{1\}||$Z3B $==\{3\}||$Z3B $==\{5\}$)&&Max[wo3$[[i3,j3]]<$Min[W3A],wo3$[[i3,i3]]=$Select[wo3$[[i3,i3]]$, # $<=$Max@wo3$[[i3,j3]]$&]; wo3$[[j3,j3]]=$Select[wo3$[[j3,j3]]$, # $<=$Max@wo3$[[i3,j3]]$&]; wo3$[[i3,j3]]=$Select[wo3$[[i3,j3]]$, # $>=$Min@(wo3$[[i3,i3]]\sim$ 连接 $\sim$ wo3$[[j3,j3]]$)&];]; If[(W3B $==\{1\}||$W3B $==\{3\}||$W3B $==\{5\}$)&&Max[zo3$[[i3,j3]]<$Min[Z3A], zo3$[[i3,i3]]=$Select[zo3$[[i3,i3]]$, # $<=$Max@zo3$[[i3,j3]]$&]; zo3$[[j3,j3]]=$Select[zo3$[[j3,j3]]$, # $<=$Max@zo3$[[i3,j3]]$&]; zo3$[[i3,j3]]=$Select[zo3$[[i3,j3]]$, # $>=$Min@(zo3$[[i3,i3]]\sim$ 连接 $\sim$ zo3$[[j3,j3]]$)&];]],$\{i3,1,n\}$, $\{j3,1,n\}$]; Return[{zo3, wo3}]) ($*$ 命题 4.10 $*$) Prop2[{zomatrix3 , womatrix3 }] := (zo3 $=$ zomatrix3; wo3 $=$ womatrix3; Do[dis3 $=\{\}$;$jj3=1$; While[$jj3<=n$,If[$jj3!=i3$, If[XX1$[[i3,jj3]]==0$, dis3 $=$并集[dis3, Dis2[zo3$[[i3,jj3]]$, wo3$[[i3,jj3]]]]$, dis3 $=$并集[dis3, Dis2Edge[zo3$[[i3,jj3]]$, wo3$[[i3,jj3]]]]]];$jj3++$]; If[补集[dis3, $\{4,5\}]==\{\}$, ZO3 $=\{\}$; WO3 $=\{\}$; $jj3=1$; While[$jj3<=n$,If[$jj3!=i3$, ZO3 $=$ ZO3 $\sim$ 连接 $\sim$ zo3$[[jj3,jj3]]$; WO3 $=$ WO3 $\sim$ 连接 $\sim$ wo3$[[jj3,jj3]]$; $jj3++$]; If[Max[ZO3] $==2||$Max[ZO3] $==4$, zo3$[[i3,i3]]=$Select[zo3$[[i3,i3]]$, # $<=$Max[ZO3]&],zo3$[[i3,i3]]=$Select[zo3$[[i3,i3]]$, # $<$Max[ZO3]&]; If[Max[WO3] $==2||$Max[WO3] $==4$, wo3$[[i3,i3]]=$Select[wo3$[[i3,i3]]$, # $<=$Max[WO3]&],wo3$[[i3,i3]]=$Select[wo3$[[i3,i3]]$, # $<$Max[WO3]&]],$\{i3,1,n\}$]; Return[{zo3, wo3}])

($*$ 计算所有非 $-$对角元的序(1)以及所有元的序(2)的可能层级；(3)元的数量 $*$) 类型数量 2[{zomatrix3 , womatrix3 }] := ($kk3=1$ ； 执行 [执行 $[kk3=kk3*$Length[zomatrix3$[[i3,j3]]]*$Length[womatrix3$[[i3,j3]]]$, $\{i3,j3+1,n\}]$, $\{j3,1,n-1\}]$； Return$[kk3]$)

类型数量3[{zomatrix3 , womatrix3 }] := (kk3 = 1; 执行[执行
[kk3 = kk3 ∗ Length[zomatrix3[[i3, j3]]] ∗ Length[womatrix3[[i3, j3]]],
{i3, j3, n}], {j3, 1, n}]; Return[kk3])

(∗ 重复上述过程，直到可能层级保持不变 ∗) UpdateOrder[{zomatrix2 ,
womatrix2 }] := (zo2 = zomatrix2; wo2 = womatrix2;l2 = 类型数量3[{
zo2, wo2}]; L2 = l2 + 1; 当[l2! = L2,l2 = 类型数量3[{zo2, wo2}];{zo2, wo2} =
三角不等式[{zo2, wo2}];{zo2, wo2} = 规则2e[{zo2, wo2}];{zo2, wo2} = 估计[{
zo2, wo2}];{zo2, wo2} = 质心[{zo2, wo2}];{zo2, wo2} = 命题1[{zo2, wo2}];{
zo2, wo2} = 命题2[{zo2, wo2}];L2 = 类型数量3[{zo2, wo2}];]; Return[{zo2,
wo2}])

UpdateOrder部分[{zomatrix2 , womatrix2 }] :
= (zo2 = zomatrix2； wo2 = womatrix2；
l2 = 类型数量3[{zo2，wo2}]； L2 = l2 + 1； 当[l2!
= L2，l2 = 类型数量 3[{zo2，wo2}] ；{zo2，
wo2} = 三角不等式[{zo2，wo2}]； L2 = 类型数
量3[{zo2，wo2}]；]； Return[{zo2，wo2}])

(∗ PosOffDiag 用于查找包含多个元素的非 − 对角元的位置；PosDiag 类似，但针对对角
元 ∗) PosOffDiag[x2]:= (ii2 = 1; While[ii2 <= n − 1,jj2 = ii2 + 1; While[jj2 <= n,
L2 = Length[x2[[ii2, jj2]]]; If[L2 > 1, Return[{ii2, jj2, L2}]]; jj2 + +]; ii2 + +]; Return
[{1, 1, 0}]) PosDiag[x2]:= (ii2 = 1; While[ii2 <= n,L2 = Length[x2[[ii2, ii2]]];

如果[$L2 > 1$, Return[{$ii2, L2$}]];
$ii2++$]; Return[{$1, 0$}])

(* 可行序矩阵判据 *) (* 命题4.11 *) Rule2hQ[{zomatrix2 ,womatrix2 }] := (
zo2 = zomatrix2; wo2 = womatrix2; dx2 = Flatten[Dis3[{zo2, wo2}], 1]; If[计数[
dx2, {2}] == 2&&计数[dx2, {1}] == 0, Return[False], Return[True]])

(* 比较各序，找出 Z_{ij}'s W_{ij}'s *中最高阶项的候选项)

(* 比较z_{ij}'s 或 w_{ij}'s *) CompareOrderzw[序矩阵5 , {$ii5$, $jj5$ },
{$kk5$, $ll5$ }] := ($o5$ =序矩阵5; 如果[最大@$o5$[[$ii5, jj5$]] < 最小@
$o5$[[$kk5, ll5$]], $textReturn$[{-1}]]; 如果[最小@$o5$[[$ii5, jj5$]] > 最大@
$o5$[[$kk5, ll5$]], 返回[{1}]]; 如果[Length[$o5$[[$ii5, jj5$]]] == 1&&
$o5$[[$ii5, jj5$]] == $o5$[[$kk5, ll5$]]&& 补集[$o5$[[$ii5, jj5$]], {$1, 3, 5$}] == 0, 返
回[{0}]]; 如果[$ii5! = jj5$&&$kk5! = ll5$, 如果[$ii5 == kk5$&&最小@
$o5$[[$ii5, jj5$]] >= 最大@$o5$[[$jj5, ll5$]]&& 最小@$o5$[[$kk5, ll5$]] >= 最大
@$o5$[[$jj5, ll5$]], 如果[最小@$o5$[[$ii5, jj5$]] > 最大@$o5$[[$jj5, ll5$]] ||最小
@$o5$[[$kk5, ll5$]] > 最大@$o5$[[$jj5, ll5$]] ||成员Q[{$1, 3, 5$},最大@
$o5$[[$jj5, ll5$]]] == 真, 返回[{0}]]]; 如果[$jj5 == ll5$&&最小@
$o5$[[$ii5, jj5$]] >= 最大@$o5$[[$ii5, kk5$]]&& 最小@$o5$[[$kk5, ll5$]] >= 最大
@$o5$[[$ii5, kk5$]], 如果[最小@$o5$[[$ii5, jj5$]] > 最大@$o5$[[$ii5, kk5$]] ||最小
@$o5$[[$kk5, ll5$]] > 最大@$o5$[[$ii5, kk5$]] ||成员Q[{$1, 3, 5$},最大@
$o5$[[$ii5, kk5$]]] == 真, 返回[{0}]]]; 如果[$ii5 == ll5$&&最小@
$o5$[[$ii5, jj5$]] >= 最大@$o5$[[$jj5, kk5$]]&& 最小@$o5$[[$kk5, ll5$]] >= 最大
@$o5$[[$jj5, kk5$]], 如果[最小@$o5$[[$ii5, jj5$]] > 最大@$o5$[[$jj5, kk5$]] ||最小
@$o5$[[$kk5, ll5$]] > 最大@$o5$[[$jj5, kk5$]] ||成员Q[{$1, 3, 5$},最大@
$o5$[[$jj5, kk5$]]] == 真, 返回[{0}]]]; 如果[$kk5 == jj5$&&最小@
$o5$[[$ii5, jj5$]] >= 最大@$o5$[[$ll5, ii5$]]&& 最小@$o5$[[$kk5, ll5$]] >= 最大@
$o5$[[$ll5, ii5$]], 如果[最小@$o5$[[$ii5, jj5$]] > 最大@$o5$[[$ll5, ii5$]] ||最小@
$o5$[[$kk5, ll5$]] > 最大@$o5$[[$ll5, ii5$]] ||成员Q[{$1, 3, 5$}, 最大@
$o5$[[$ll5, ii5$]]] == 真,返回[{0}]]]]; 如果[$ii5 == jj5$&&$kk5! = ll5$, 如果
[$ii5 == kk5$&&最小@$o5$[[$ii5, jj5$]] >= 最大@$o5$[[$ll5, ll5$]]&& 最小@
$o5$[[$kk5, ll5$]] >= 最大@$o5$[[$ll5, ll5$]], 如果[最小@$o5$[[$ii5, jj5$]] > 最大
@$o5$[[$ll5, ll5$]] ||最小@$o5$[[$kk5, ll5$]] > 最大@$o5$[[$ll5, ll5$]] ||成员Q
[{$1, 3, 5$},最大@$o5$[[$ll5, ll5$]]] == 真, 返回[{0}]]]; 如果[$ii5 == ll5$&&最小
@$o5$[[$ii5, jj5$]] >= 最大@$o5$[[$kk5, kk5$]]&&

最小@$o5[[kk5, ll5]]$ >= 最大@$o5[[kk5, kk5]]$,如果[最小@$o5[[ii5, jj5]]$ > 最大@$o5[[kk5, kk5]]$ ||最小@$o5[[kk5, ll5]]$ > 最大@$o5[[kk5, kk5]]$ ||成员Q[$\{1, 3, 5\}$,最大@$o5[[kk5, kk5]]$ == 真, 返回[$\{0\}$]]]; 返回[$\{1, 0, -1\}$];)

(*Comparer_{ij}的或比较 r_{ij} 与 1 *) CompareOrderr[rordermatrix5 , $\{ii5, jj5\}$, $\{kk5, ll5\}$] := (ro5 = rordermatrix5; If[$ii5 != jj5$&&$kk5 != ll5$, If[Max@ro5[$[ii5, jj5]$] < Min@ro5[$[kk5, ll5]$], Return[$\{-1\}$]]; If[Min@ro5[$[ii5, jj5]$] > Max@ro5[$[kk5, ll5]$], Return[$\{1\}$]]; If[Length[ro5[$[ii5, jj5]$]] == 1&&ro5[$[ii5, jj5]$] == ro5[$[kk5, ll5]$]&& 补集[ro5[$[ii5, jj5]$], $\{1, 3, 5\}$] == 0,Return[$\{0\}$]]]; If[$ii5 == jj5$&&$kk5 != ll5$, If[Min@ro5[$[kk5, ll5]$] >= 4, Return[$\{-1\}$]]; If[Max@ro5[$[kk5, ll5]$] <= 2, Return[$\{1\}$]]; If[ro5[$[kk5, ll5]$] == $\{3\}$, Return[$\{0\}$]]]; Return[$\{1, 0, -1\}$];)

（根据 $Z_{ij} = z_{ij}^{-1/2} wij^{-3/2} = z_{ij} r_{ij}^{-3} = w_{ij}^{-1} r_{ij}^{-1} = W_{ij}^{1/3} w_{ij}^{-4/3}$ *比较 Z_{ij} 的 * ）CompareOrderZ1[{zomatrix4 , womatrix4 }, $\{ii4, jj4\}$, $\{kk4, ll4\}$] := (zo4 = zomatrix4; wo4 = womatrix4;dis = Dis3[{zo4, wo4}]; If[ZX1[$[ii4, jj4]$] == 1&&ZX1[$[kk4, ll4]$] == 0, Return[$\{1\}$]]; If[ZX1[$[ii4, jj4]$] == 1&&ZX1[$[kk4, ll4]$] == 1, Return[$\{0\}$]]; If[ZX1[$[ii4, jj4]$] == 0&&ZX1[$[kk4, ll4]$] == 1, Return[$\{-1\}$]];

比较 z = CompareOrderzw[zo4, $\{ii4, jj4\}$, $\{kk4, ll4\}$];
比较 w = CompareOrderzw[wo4, $\{ii4, jj4\}$, $\{kk4, ll4\}$];
比较 r = CompareOrderr[dis $\{ii4, jj4\}$, $\{kk4, ll4\}$];

如果[比较 z == $\{1\}$&&比较 w == $\{1\}$, Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 z == $\{1\}$&&比较 w == $\{0\}$, Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 z == $\{0\}$&&比较 w == $\{1\}$, Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 z == $\{-1\}$&&比较 r == $\{1\}$, Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 z == $\{0\}$&&比较 r == $\{1\}$, Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 z == $\{-1\}$&&比较 r == $\{0\}$, Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 w == $\{1\}$&&WX1[$[kk4, ll4]$] == 1, Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 z == $\{0\}$&&比较 w == $\{0\}$, Return[$\{0\}$]]; 如果[比较 z == $\{0\}$&&比较 r == $\{0\}$, Return[$\{0\}$]]; 如果[比较 w == $\{0\}$&&WX1[$[ii4, jj4]$] == 1&&WX1[$[kk4, ll4]$] == 1, Return[$\{0\}$]] ; 如果[比较 z == $\{-1\}$&&比较 w == $\{-1\}$, Return[$\{1\}$]]; 如果[比较 z == $\{-1\}$&&比较 w == $\{0\}$, Return[$\{1\}$]]; 如果[比较 z == $\{0\}$&&比较 w == $\{-1\}$, Return[$\{1\}$]]; 如果[比较 z == $\{1\}$&&比较 r == $\{-1\}$, Return[$\{1\}$]];

如果[比较 z $==\{0\}$&&比较 r $==\{-1\}$，Return[{1}]]；如果[比较 z $==\{1\}$&&比较 r $==\{0\}$，Return[{1}]]；如果[比较 w $==\{-1\}$ &&WX1[[$ii4, jj4$]] $==1$，Return[{1}]]；Return[$\{1,0,-1\}$]；)

(* 根据 $W_{ij}=w_{ij}^{-1/2}zij^{-3/2}=w_{ij}r_{ij}^{-3}=z_{ij}^{-1}r_{ij}^{-1}=Z_{ij}^{1/3}z_{ij}^{-4/3}$ * 比较W_{ij}'s)
CompareOrderW1[{zomatrix4，womatrix4 }，{$ii4$,$jj4$ }，{$kk4$,$ll4$ }]:=(zo4 = zomatrix4; wo4 = womatrix4; dis = Dis3[{zo4，wo4}]; If[WX1[[$ii4, jj4$]] == 1&& WX1[[$kk4, ll4$]] == 0，Return[{1}]]; If[WX1[[$ii4, jj4$]] == 1&&WX1[[$kk4, ll4$]] == 1, Return[{0}]]; If[WX1[[$ii4, jj4$]] == 0&&WX1[[$kk4, ll4$]] == 1，Return[{−1}]];

比较 z = CompareOrderzw[zo4, {$ii4, jj4$}, {$kk4, ll4$}]; 比较 w = CompareOrderzw[wo4, {$ii4, jj4$}, {$kk4, ll4$}]; 比较 r = CompareOrderr[dis {$ii4, jj4$}, {$kk4, ll4$}];

如果[比较 w $==\{1\}$&&比较 z $==\{1\}$，返回[{−1}]]；如果[比较 w $==\{1\}$&& 比较 z $==\{0\}$，返回[{−1}]]；如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 z $==\{1\}$，返回 [{−1}]]；如果[比较 w $==\{-1\}$&&比较 r $==\{1\}$，返回[{−1}]]；如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 r $==\{1\}$，返回[{−1}]]；如果[比较 w $==\{-1\}$&&比较 r $==\{0\}$，返回[{−1}]]；如果[比较 z $==\{1\}$&&ZX1[[$kk4, ll4$]] $==1$，返回 [{−1}]]；如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 z $==\{0\}$，返回[{0}]]；如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 r $==\{0\}$，返回[{0}]]；如果[比较 z $==\{0\}$&&ZX 1[[$ii4, jj4$]] == 1&&ZX1[[$kk4, ll4$]] $==1$，返回[{0}]]；如果[比较 w $==\{-1\}$&& 比较 z $==\{-1\}$，返回[{1}]]；如果[比较 w $==\{-1\}$&&比较 z $==\{0\}$，返回 [{1}]]；如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 z $==\{-1\}$，返回[{1}]]；如果[比较 w $==\{1\}$&&比较 r $==\{-1\}$，返回[{1}]]；如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 r $==\{-1\}$，返回[{1}]]；如果[比较 w $==\{1\}$&&比较 r $==\{0\}$，返回[{1}]]；如 果[比较 z $==\{-1\}$&&ZX1[[$ii4, jj4$]] $==1$，返回[{1}]]；返回[$\{1,0,-1\}$]；)

(* 比较 Zij 和z_k *)
比较序Z2[{zomatrix4，womatrix4 }，{$ii4$,$jj4$ }，-{$kk4$,$ll4$ }]:=(
zo4 = zomatrix4； wo4 = womatrix4； 距离 = Dis3[{zo4，wo4}];
如果[ZX1[[$ii4, jj4$]] == 1&&ZX1[[$kk4, ll4$]] == 0,Return[{1}]];
如果[ZX1[[$ii4, jj4$]] == 1&&ZX1[[$kk4, ll4$]] == 1,Return[{0}]];
如果[ZX1[[$ii4, jj4$]] == 0&&ZX1[[$kk4, ll4$]] == 1,Return[{−1}]];

比较z = CompareOrderzw[zo4，{$ii4, jj4$}，{$kk4, ll4$}];
比较w = CompareOrderzw[wo4，{$ii4, jj4$}，{$kk4, ll4$}];
比较r = CompareOrderr[dis {$ii4, jj4$}，{$kk4, ll4$}];

如果[比较z $==\{-1\}$&&比较r $==\{1\}$，Return[$\{-1\}$]]；如果[比较z $==\{0\}$&&比较r $==\{1\}$，Return[$\{-1\}$]]；如果[比较z $==\{-1\}$&&比较r $==\{0\}$，Return[$\{-1\}$]]；如果[比较z $==\{0\}$&&比较r $==\{0\}$，Return[$\{0\}$]]；如果[比较z $==\{1\}$&&比较r $==\{-1\}$，Return[$\{1\}$]]；如果[比较z $==\{0\}$&&比较r $==\{-1\}$，Return[$\{1\}$]]；如果[比较z $==\{1\}$&&比较r $==\{0\}$，Return[$\{1\}$]]；Return[$\{-1,0,1\}$]；)

(* 比较 Wij 和w_k *) CompareOrderW2[{zomatrix4，womatrix4 }，$\{ii4, jj4\}$，$\{kk4, ll4\}$]:=(zo4 = zomatrix4； wo4 = womatrix4; dis = Dis3[{zo4，wo4}]； 如果[WX1[$[ii4, jj4]$] == 1&&WX1[$[kk4, ll4]$] == 0, Return[{1}]]； 如果[WX1[$[ii4, jj4]$] == 1&&WX1[$[kk4, ll4]$] == 1，Return [{0}]]； 如果[WX1[$[ii4, jj4]$] == 0&&WX1[$[kk4, ll4]$] == 1，Return[{-1}]];

比较z = CompareOrderzw[zo4，$\{ii4, jj4\}$，$\{kk4, ll4\}$];
比较w = CompareOrderzw[wo4，$\{ii4, jj4\}$，$\{kk4, ll4\}$];
比较 r = CompareOrderr[dis $\{ii4, jj4\}$，$\{kk4, ll4\}$] ;

如果[比较 w $==\{-1\}$&&比较 r $==\{1\}$，Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 r $==\{1\}$，Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 w $==\{-1\}$&&比较 r $==\{0\}$，Return[$\{-1\}$]]; 如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 r $==\{0\}$，Return[$\{0\}$]]; 如果[比较 w $==\{1\}$&&比较 r $==\{-1\}$，Return[$\{1\}$]]; 如果[比较 w $==\{0\}$&&比较 r $==\{-1\}$，Return[$\{1\}$]]; 如果[比较 w $==\{1\}$&&比较 r $==\{0\}$，Return[$\{1\}$]]; Return[$\{-1,0,1\}$];)

(* 确定 z_i –方程 *中的可能极大项) MaxOrderZ[{zomatrix3 , womatrix3 }，$kk3$]:=(zo3 = zomatrix3; wo3 = womatrix3; max3 = allind;$s3$ = 补集[allind $\{kk3\}$]; $ii3 = 1$; 当[$ii3 <= n-1, jj3 = ii3+1$; 当[$jj3 <= n-1$,如果[比较序Z1[{zo3, wo3}, $\{kk3, s3[[ii3]]\}$, $\{kk3, s3[[jj3]]\}$] == {1}, max3 = 补集[max3, $\{s3[[jj3]]\}$];]; 如果[比较序Z1[{zo3, wo3}, $\{kk3, s3[[ii3]]\}$, $\{kk3, s3[[jj3]]\}$] == {-1}, max3 = 补集[max3, $\{s3[[ii3]]\}$];]; $jj3++$]; 如果[比较序Z2[{zo3, wo3}, $\{kk3, kk3\}$, $\{kk3, s3[[ii3]]\}$] == {1}, max3 = 补集[max3, $\{s3[[ii3]]\}$]; 如果[比较序Z2[{zo3,wo3}, $\{kk3, kk3\}$, $\{kk3, s3[[ii3]]\}$] == {-1}, max3 = 补集[max3, $\{kk3\}$];]; $ii3++$; Return[max3])

（* 确定 w_i –方程 *中的可能极大项）MaxOrderW[{ zomatrix3 , womatrix3 }, $kk3$]:=(-

zo3 = zomatrix3; wo3 = womatrix3; max3 = allind;$s3$ = 补集[allind $\{kk3\}$]; $ii3 = 1$; While[$ii3 <= n-1, jj3 = ii3+1$; While[$jj3 <= n-1$,If[CompareOrderW1[{zo3, wo3}, $\{kk3, s3[[ii3]]\}, \{kk3, s3[[jj3]]\} == \{1\}$, max3 = 补集[max3, $\{s3[[jj3]]\}$];]; If[CompareOrderW1[{zo3, wo3}, $\{kk3, s3[[ii3]]\}, \{kk3, s3[[jj3]]\} == \{-1\}$, max3 = 补集[max3, $\{s3[[ii3]]\}$];]; $jj3++$]; If[CompareOrderW2[{zo3,wo3}, $\{kk3, kk3\}$, $\{kk3, s3[[ii3]]\} == \{1\}$, max3 = 补集[max3, $\{s3[[ii3]]\}$]]; If[CompareOrderW2[{zo3, wo3}, $\{kk3, kk3\}, \{kk3, s3[[ii3]]\}] == \{-1\}$, max 3 = 补集[max3, $\{kk3\}$];]; $ii3++$]; Return[max3])

(* 命题 4.12 *) Rule1cQ[{zomatrix2 , womatrix2 }] := ($ii2 = 1$; While[$ii2 <=$ Length[zc1],zc2 = 交集[zc1$[[ii2]]$, Flatten@Position[对角线[ZX1], 1]]; If[Length[zc 2] > 0&&计数[Flatten@zomatrix2[[zc2, zc2]], 5] == Length[zc2],Return[False]; $ii2++$];$ii2 = 1$; While[$ii2 <=$Length[wc1],wc2 = 交集[wc1$[[ii2]]$, Flatten@Position[对角线[WX1], 1]]; If[Length[wc2] > 0&&计数[Flatten@womatrix2[[wc2, wc2]], 5] == Length[wc2],Return[False]]; $ii2++$; Return[True]) (* 命题 4.13 *) OrderQ1[{zomatrix2 , womatrix2 }] := ($kk2 = 1$; While[$kk2 <= n$,If[Length[MaxOrderZ[{zomatrix2, womatrix2}, $kk2$]] == 1|| Length[MaxOrderW[{zomatrix2, womatrix2}, $kk2$]] == 1, Return[False]]; $kk2++$;]; Return[True]) (* 命题 4.14 *) OrderQ2[{zomatrix2 , womatrix2 }] := (dis2 = Dis3[{zomatrix2, womatrix2}]; $ii2 = 1$; While[$ii2 <= n-1$, $jj2 = ii2+1$; While [$jj2 <= n$,If[MaxOrderZ[{zomatrix2, womatrix2}, $ii2$] == $\{ii2, jj2\}$&& MaxOrderZ[{zomatrix2, womatrix2}, $jj2$] == $\{ii2, jj2\}$&& 交集[dis2$[[ii2, jj2]]$, $\{3\}$] == {}, Return[False]]; If[MaxOrderW[{zomatrix2, womatrix2}, $ii2$] == $\{ii2, jj2\}$&& MaxOrderW[{zomatrix2, womatrix2}, $jj2$] == $\{ii2, jj2\}$&&

- -

Intersection[dis2[[$ii2, jj2$]], {3}] == {},
Return[False]]; $jj2++$;]; $ii2++$]; Return[True])

(* 命题 4.15 *)OrderQ3[{zomatrix2 , womatrix2 }] := (maxZ = Table[MaxOrderZ[{zomatrix2, womatrix2}, $i2$], {$i2, n$}]; maxW = Table[MaxOrderW[{ zomatrix2, womatrix2}, $i2$], {$i2, n$}];$ii2 = 1$; While[$ii2 <= n-2, jj2 = ii2+1$; While[$jj2 <= n-1, kk2 = jj2+1$; While[$kk2 <= n$,If[ZX1[[$ii2, jj2$]]ZX1[[$jj2, kk2$]]! $= 0$&&ZX1[[$kk2, ii2$]] == 0, If[maxW[[$jj2$]] == {$ii2, kk2$}, Return[False]]; If[补集[maxW[[$ii2$]] ∪ maxW[[$jj2$]] ∪ maxW[[$kk2$]], {$ii2, jj2, kk2$}] == {}, Return[False]];]; If[WX1[[$ii2, jj2$]]WX1[[$jj2, kk2$]]! $= 0$&&WX1[[$kk2, ii2$]] == 0, If[maxZ [[$jj2$]] == {$ii2, kk2$}, Return[False]]; If[补集[maxZ[[$ii2$]] ∪ maxZ[[$jj2$]] ∪ maxZ[[$kk2$]], {$ii2, jj2, kk2$}] == {}, Return[False]];]; If[ZX1[[$jj2, kk2$]]ZX1[[$kk2, ii2$]]! $= 0$&&ZX 1[[$ii2, jj2$]] == 0, If[maxW[[$kk2$]] == {$ii2, jj2$}, Return[False]]; If[补集[maxW[[$ii2$]] ∪ maxW[[$jj2$]] ∪ maxW[[$kk2$]], {$ii2, jj2, kk2$}] == {}, Return[False]];]; If[WX1[[$jj2, kk2$]] WX1[[$kk2, ii2$]]! $= 0$&&WX1[[$ii2, jj2$]] == 0, If[maxZ[[$kk2$]] == {$ii2, jj2$}, Return[False]]; If[补集[maxZ[[$ii2$]] ∪ maxZ[[$jj2$]] ∪ maxZ[[$kk2$]], {$ii2, jj2, kk2$}] == {}, Return[False]];]; If[ZX1[[$kk2, ii2$]]ZX1[[$ii2, jj2$]]! $= 0$&&ZX1[[$jj2, kk2$]] == 0, If[maxW[[$ii2$]] == {$jj2, kk2$}, Return[False]]; If[补集[maxW[[$ii2$]] ∪ maxW[[$jj2$]] ∪ maxW[[$kk2$]], {$ii2, jj2, kk2$}] == {}, Return[False]];]; If[WX1[[$kk2, ii2$]]WX1[[$ii2, jj2$]]! $= 0$&&WX1[[$jj2, kk2$]] == 0, If[maxZ[[$ii2$]] == {$jj2, kk2$}, Return[False]]; If[补集[maxZ[[$ii2$]] ∪ maxZ[[$jj2$]] ∪ maxZ[[$kk2$]], {$ii2, jj2, kk2$}] == {}, Return[False]];]; $kk2++$]; $jj2++$]; $ii2++$]; Return[True]) outputform1[ordermatrix2]:= (

OMA = 序矩阵2;
OMB = 表[如果[长度@OMA[[$i2, j2$]] > 1,
{转为字符串[最小值@OMA[[$i2, j2$]]] <> " ~" <> 转为字符串[最大值@OMA[[$i2, j2$]]]},
OMA[[$i2, j2$]]], {$i2, 1, n$}, {$j2, 1, n$}]; 返回[OMB]

（用于查找序的主程序）indOrder[x] :=
FindOrder[x, 60]; FindOrder[x , time1] :=
（$t1$ = 绝对时间[]; $N1$ = x; X1 = FMX[[x]];

Clear[zwofamily、zwotype2、zwotype3]; constrainttime = time1; TF1 = 0; Print[Style[“查找覆盖 ″的 zw − 阶矩阵”, Bold, 16],Style[“FMX[[″<>转为字符串 [N1] <>“]]″, Bold, 16, RGBColor[0.8, 0.4, 0]], Style[“...″, Bold, 16]]; zo1 = Table[{1, 2, 3, 4, 5}, {i1, 1, n}, {j1, 1, n}]; wo1 = Table [{1, 2, 3, 4, 5}, {i1, 1, n}, {j1, 1, n}]; ZX1 = zpart[X1]; WX1 = wpart[X1]; XX1 = ZX 1 + 2 ∗ WX1; zc1 = componentsZ[X1]; wc1 = componentsW[X1]; pmzw = {}; Do[If[ZX1[[pm[[i1]], pm[[i1]]]] == ZX1&&WX1[[pm[[i1]], pm[[i1]]]] == WX1, pmzw = pmzw ∼连接 ∼ {pm[[i1]]}], {i1, 1, Length[pm]}];

(∗ 命题 4.4(a) ∗) Do[If[ZX1[[i1, i1]] == 1, zo1[[i1, i1]] = {5}, zo1[[i1, i1]] = {0, 1, 2, 3, 4}]; If[WX1[[i1, i1]] == 1, wo1[[i1, i1]] = {5}, wo1[[i1, i1]] = {0, 1, 2, 3, 4}], {i1, 1, n}] ;

(∗ 命题 4.8 ∗) Do[L1 =Length[zc1[[i1]]]; Pos1 = 位置[XX1[[zc1[[i1]], zc1[[i1]]]], 1] ; Pos1 = 补集 [Pos1, Table[{j1, j1}, {j1, 1, n}]] ; If[Length[Pos1] == 2&& Total[Diagonal[ZX1[[zc1[[i1]], zc1[[i1]]]]]] > 0, Do[zo1[[zc1[[i1]][[Pos1[[j1]][[1]]]], zc1[[i1]][[Pos1[[j1]][[2]]]]]] = {5} ; wo1[[zc1[[i1]][[Pos1[[j1]][[1]]]], zc1[[i1]][[Pos1[[j1]][[2]]]]] = {1}, {j1, 1, 2}]], {i1, 1, Length[zc1]}]; Do[L1 =Length[wc1[[i1]]]; Pos1 = 位置[XX1[[wc1[[i1]], wc1[[i1]]]], 2]; Pos1 = 补集[Pos1, Table [{j1, j1}, {j1, 1, n}]]; If[Length[Pos1] == 2&& Total[Diagonal[WX1[[wc1[[i1]], wc1[[i1]]]]]] > 0, Do[wo1[[wc1[[i1]][[Pos1[[j1]][[1]]]], wc 1[[i1]][[Pos1[[j1]][[2]]]]] = {5}; zo1[[wc1[[i1]][[Pos1[[j1]][[1]]]], wc 1[[i1]][[Pos1[[j1]][[2]]]]] = {1}, {j1, 1, 2}]], {i1, 1, Length[wc1]}];

(∗ 命题 4.4(b) ∗)Do[If[i1! = j1, If[XX1[[i1, j1]] == 1, zo1[[i1, j1]] = 交集[zo1[[i1, j1]], {4, 5}]; wo1[[i1, j1]] = 交 集[wo1[[i1, j1]], {1, 2}]]], {i1, 1, n}, {j1, 1, n}]; Do[If[i1! = j1, If[XX1[[i1, j1]] == 2, wo1[[i1, j1]] = 交集[wo 1[[i1, j1]], {4, 5}]; zo1[[i1, j1]] = 交集[zo1[[i1, j1]], {1, 2}]]], {i1, 1, n}, {j1, 1, n}]; Do[If[i1! = j1,

```
        If[XX1[[i1, j1]] == 3,  wo1[[i1, j1]] = 交集[
    wo1[[i1, j1]],  {3}];  zo1[[i1, j1]] = 交集[zo1[[i1, j1]],
    {3}]],  {i1, 1, n},  {j1, 1, n}];
```

（∗ 确定 z ｛ ij｝ 与 w ｛ ij｝ 的序，若存在极大_z – 或 w –线段 ∗）

```
Do[If[i1! = j1, If[XX1[[i1, j1]] == 1&& (Total[ZX1[[i1]]] + Total[ZX1[[j1]]] −
ZX1[[i1, i1]] − ZX1[[j1, j1]]) == 2, zo1[[i1, j1]] = Intersection[zo1[[i1, j1]], {5}];
wo1[[i1, j1]] = Intersection[wo1[[i1, j1]], {1}]],{i1, 1, n}, {j1, 1, n}]; Do[If[i1!
= j1, If[XX1[[i1, j1]] == 2&& (Total[WX1[[i1]]] + Total[WX1[[j1]]] − WX
1[[i1, i1]] − WX1[[j1, j1]]) == 2, zo1[[i1, j1]] = Intersection[zo1[[i1, j1]], {1}];
wo1[[i1, j1]] = Intersection[wo1[[i1, j1]], {5}]],{i1, 1, n}, {j1, 1, n}];
```

```
(∗ 命题 4.4(b) ∗) Do[If[i1! = j1,  If[ZX1[[i1, j1]] == 0,  wo
1[[i1, j1]] = 交集[wo1[[i1, j1]],  {2, 3, 4, 5}]],  {i1, 1, n},
{j1, 1, n}]; Do[If[i1! = j1,  If[WX1[[i1, j1]] == 0,  zo
1[[i1, j1]] = 交集[zo1[[i1, j1]],  {2, 3, 4, 5}]],  {i1, 1, n},
{j1, 1, n}];
```

```
(∗ 按照更新序的原则细化 zw –阶矩阵 ∗                                    )
{zo1, wo1} = UpdateOrder[{zo1, wo1}]; Print[Style[“步骤1的结果：″,
Bold, 15]]; Print[“累计时间：″, 绝对时间[] − t1, “ \n″]; Print[“{z − 序，  w −
序 r − 阶矩阵：″]; Print[{Style[矩阵形式[outputform1@zo1], Blue],Style[矩
阵形式[outputform1@wo1], Blue],Style[矩阵形式[outputform1@Dis3[{
zo1, wo1}]], RGBColor[0, 0.5, 0]]}; Str = “共有″ <> 转为字符串[类型数量2[{
zo1, wo1}]] <>“种可能的zw − 序矩阵，类型为2.″; Print[Str, “ \n \n″];
Str = “共有″ <> 转为字符串[类型数量3[{zo1, wo1}]] <>“种可能的zw − 序
矩阵，类型为3.″; Print[Str, “ \n \n″];
```

```
    (* 步骤2：二阶型矩阵 *) zwotype2 = {};
zwotype3 = {}; TimeConstrained[zwofamily
= {{zo1，  wo1}};
```

While[Length[zwofamily] > 0,$L1$ = Length[zwofamily]; Lz1 = 0; Lw1 = 0; Del = {}; Do[If[NumberofType2[zwofamily[[$i1$]]] > 1, Del = Del ~连接~ {{$i1$}};{Pzi, Pzj, Lz1} = PosOffDiag[zwofamily[[$i1$]][[1]]]; If[Lz1 == 0,{Pwi, Pwj, Lw1} = PosOffDiag[zwofamily[[$i1$]][[2]]]; Do[zwofamily = zwofamily ~连接~ {zwofamily[[$i1$]]}; zwofamily[[−1]][[2]][[Pwi, Pwj]] = {zwofamily[[$i1$]][[2]][[Pwi, Pwj]][[$j1$]]}; zwofamily[[−1]][[2]][[Pwj, Pwi]] = {zwofamily[[$i1$]][[2]][[Pwi, Pwj]][[$j1$]]}; zwofamily[[−1]] =UniqueZeroOrder[zwofamily[[−1]]]; zwofamily[[−1]] =UpdateOrder[zwofamily[[−1]]];{$j1$, 1, Lw1}], Do[zwofamily = zwofamily ~连接~ {zwofamily[[$i1$]]}; zwofamily[[−1]][[1]][[Pzi, Pzj]] = {zwofamily[[$i1$]][[1]][[Pzi, Pzj]][[$j1$]]}; zwofamily[[−1]][[1]][[Pzj, Pzi]] = {zwofamily[[$i1$]][[1]][[Pzi, Pzj]][[$j1$]]}; zwofamily[[−1]] =UniqueZeroOrder[zwofamily[[−1]]]; zwofamily[[−1]] =UpdateOrder[zwofamily[[−1]]];{$j1$, 1, Lz1}]], {$i1$, 1, $L1$}]; zwofamily = Delete[zwofamily, Del]; zwotype2 = zwotype2 ~连接~ Select[zwofamily, NumberofType2[#] == 1&]; zwofamily = Select[zwofamily, NumberofType2[#] > 1&];]; (* While循环结束 *) zwotype2 = Select[zwotype2, Rule2hQ]; zwotype2 = Select[zwotype2, OrderQ1]; zwotype2 = Select[zwotype2, OrderQ2]; zwotype2 = Select[zwotype2, OrderQ3]; zwotype2 = Select[zwotype2, Rule1cQ]; del = {}; $ii1$ = 2; While[$ii1$ <= Length[zwotype2], $jj1$ = 1; tf1 = 0; While[$jj1$ < $ii1$&&tf1 == 0, $kk1$ = 1; While[$kk1$ <= Length[pmzw],If[zwotype2[[$ii1$]][[1]] == zwotype2[[$jj1$]][[1]][[pmzw[[$kk1$]], pmzw[[$kk1$]]]]&& zwotype2[[$ii1$]][[2]] == zwotype2[[$jj1$]][[2]][[pmzw[[$kk1$]], pmzw[[$kk1$]]]], del = del ~连接~ {{$ii1$}}; tf1 = 1]; $kk1$ + +]; $jj1$ + +]; $ii1$ + +]; zwotype2 = Delete[zwotype2, del]; Print[“ \ n”, Style[“步骤2结果：”, Bold, 15]]; Print[“累计时间：”, 绝对时间[] − $t1$, “ \ n”]; Print[“共有 ”, Style[Length[zwotype2], Bold, RGBColor[0, 0, 0.7], 14], “zw –类型 2.”] 阶矩阵; Print[“{z − 阶 w − 阶 r − 阶矩阵：”]; Print[Table[{Style[MatrixForm[outputform1@zwotype2[[$j1$, 1]]], Blue],Style[MatrixForm[outputform1@zwotype2[[$j1$, 2]]], Blue],

样式[矩阵形式[输出形式1@离散3[zwotype2[[$j1$]]]], RGB颜色[$0, 0.5, 0$]}, {$j1, 1,$ Length[zwotype2]}]]; 字符串 = “共有 ″ <>转为字符串[Sum[NumberofType3[zwotype2[[$i1$]]], {$i1, 1,$Length[zwotype2]}]] <> “ 个可能的 zw − 阶矩阵，类型为 $3.$″; 打印[字符串, “ \n″];

(* 步骤 3：类型 3 阶矩阵 *) zwofamily =zwotype2; While[Length[zwofamily] > 0, $L1$ =Length[zwofamily]; Lz1 $= 0$; Lw1 $= 0$; 删除 = {}; Do[If[NumberofType3[zwofamily[[$i1$]]] > 1, 删除 = 删除 ∼ 连接 ∼ {{$i1$}}; { Pzd, Lz1} = 对角位置[zwofamily[[$i1$]][[1]]]; If[Lz1 == 0, {Pwd, Lw1} = 对角位置[zwofamily[[$i1$]][[2]]]; Do[zwofamily = zwofamily ∼ 连接 ∼ {z wofamily[[$i1$]]}; zwofamily[[-1]][[2]][[Pwd, Pwd]] = {zwofamily[[$i1$]][[2]][[Pwd, Pwd]][[$j1$]]}; zwofamily[[-1]] = UpdateOrderPart[zwofamily[[-1]]; , {$j1, 1,$ Lw1}], Do[zwofamily = zwofamily ∼ 连接 ∼ {zwofamily[[$i1$]]}; zwofamily[[-1]][[1]][[Pzd, Pzd]] = {zwofamily[[$i1$]][[1]][[Pzd, Pzd]][[$j1$]]}; zwofamily[[-1]] = UpdateOrderPart[zwofamily[[-1]]; , {$j1, 1,$ Lz1}]], {$i1, 1, L1$}]; zwofamily = 删除[zwofamily, Del]; zwotype3 = zwotype3 ∼ 连接 ∼ Select[zwofamily, NumberofType3[#] == 1&]; zwofamily = Select[zwofamily, NumberofType3[#] > 1&];]; 删除 = {}; $ii1 = 2$; While[$ii1$ <= Length[zwotype3], $jj1 = 1$; tf1 $= 0$; While[$jj1 < ii1$&&tf1 == 0, $kk1 = 1$; While[$kk1$ <=Length[pmzw],If[zwotype3[[$ii1$]][[1]] == zwotype3[[$jj1$]][[1]][[pmzw[[$kk1$]], pmzw[[$kk1$]]]&& zwotype3[[$ii1$]][[2]] == zwotype3[[$jj1$]][[2]][[pmzw[[$kk1$]], pmzw[[$kk1$]]]], 删除 =删除 ∼连接 ∼ {{$ii1$}}; tf1 $= 1$]; $kk1++$]; $jj1++$]; $ii1++$];

zwotype3 = 删除[zwotype3,del]; zwotype 3 = 选择[zwotype3,OrderQ1]; zwotype3 = 选 择[zwotype3,OrderQ2]; zwotype3 = 选择[zwotype3,Rule1cQ];

$l1$ =Length[zwotype3]; Print[Style[“步骤 3 的结果：″,Bold, 15]]; Print[“累计时间：″,绝对时间 [] − $t1$, “ \ n″]; Print[“共有 ″, Style[$l1$, Bold, RGBColor[$0, 0, 0.7$], 14], “zw –阶矩阵，类型为 $3.$″];

(* FindOrder 的输出结果 *)

If[$l1 <= 10$,Print[“{z 阶、w 阶 − 阶矩阵：″]; Print[Table[{Style[矩阵形式[outputform1@zwotype3[[$j1, 1$]]], Blue],Style[矩阵形式[outputform1@zwotype3[[$j1, 2$]]], Blue],Style[矩阵形式 [outputform1@Dis3[zwotype3[[$j1$]]]], RGBColor[$0, 0.5, 0$]]}, {$j1, 1$, Length[zwotype3]}]]; If[Length[zwotype3] == 0, Str = “矩阵 FMX[[″<> 转为字符串 [$N1$] <> “是不可能的″; Print[“ \ n″, Str, “ \ n″]]; TF1 = 1; , 约束时间]; If[TF1 == 0, Str = “停止运行 FMX[[″<> 转为字符串[$N1$] <> “]]″; Print[Str, “ \ n″];]) (* 结束 Fi ndOrder *)

Appendix III: Program for Algorithm III by Mathematica

(* 设置变量 *) Z = Table[转为字符串[“Z″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}]; W = Table[转为字符串[“W″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}];u = Table[转为字符串[“u″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}]; v = Table[转为字符串[“v″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}]; zz = Table[转为字符串[“z″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}]; ww = Table[转为字符串[“w″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}];rr = Table[转为字符串[“r″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}]; delta = Table[转为 字符串[“δ″ <> ToString[$j1$] <> ToString[$k1$]], {$j1, 1, n$}, {$k1, 1, n$}]; z = Table[转为字符串[“z″ <> ToString[$j1$]], {$j1, 1, n$}]; w = Table[转为字符串[“w″ <> ToString[$j1$]], {$j1, 1, n$}]; zeta = Table[转为字符串[“ζ″ <> ToString[$j1$]], {$j1, 1, n$}]; omega = Table[转为字符串[“ ω″ <> ToString[$j1$]], {$j1, 1, n$}];M = Table[转为字符串[“m″ <> ToString[$j1$]], {$j1, 1, n$}]; mu = Table[转为字符串[“μ″ <> ToString[$j1$]], {$j1, 1, n$}]; Vardis = Flatten[连接[zz, ww, delta]]; Var = Flatten[连接[zz, ww, delta, z, w M]]; zpart[{zmx4 , wmx4 }] := zmx4; wpart[{zmx4 , wmx4 }] := wmx4;

(* 判断 a z_i- 或 w_i-方程中的可能最高阶项是否确实为极大项 *) CertainMaxOrderZQ[{zomatrix3 , womatrix3 }, $k3$] := (zo3 = zomatrix3; wo3 = womatrix3; max3 = MaxOrderZ[{zo3, wo3}, $k3$]; If[Length[max3] == 2, Return[True]]; If[Length[max3] > 2, Max3 = {}; Do[Do[If[max3[[$i3$]] == $k3$&&max3[[$i3$]]! = max3[[$j3$]], If[CompareOrderZ2[{zo3,wo3}, {$k3$, max3[[$i3$]]}, {$k3$, max 3[[$j3$]]}] == {0}, Max3 = Max3 ∼连接 ∼ {{max3[[$i3$]], max3[[$j3$]]}}];]; If[max 3[[$j3$]] == $k3$&&max3[[$i3$]]! = max3[[$j3$]], If[CompareOrderZ2[{zo3,wo3}, {$k3$, max3[[$j3$]]}, {$k3$, max3[[$i3$]]}] == {0}, Max3 = Max3 ∼连接 ∼ {{max3[[$i3$]], max 3[[$j3$]]}}];]; If[max3[[$i3$]]! = $k3$&&max3[[$j3$]]! = $k3$&&max3[[$i3$]]! =max3[[$j3$]], If[CompareOrderZ1[{zo3,wo3}, {$k3$, max3[[$j3$]]}, {$k3$, max3[[$i3$]]}] == {0},

Max3 = Max3 ~连接 ~ {{max3[[$i3$]], max3[[$j3$]]}};];,{$j3, i3+1$, Length[max3]}; {$i3, 1$, Length[max3] − 1}; If[Length[Max3] > 1, Do[Do[Do[If[交集[Max3[[$i3$]], Max3[[$j3$]]]! = {}, Max3[[$i3$]] = Max3[[$i3$]] ∪ Max3[[$j3$]]; Max 3[[$j3$]] = {};]; ,{$j3, i3+1$, Length[Max3]}], {$i3, 1$,Length[Max3]}], {$ii3, 1$,Length[Max3]};]; Max3 = 补集[Max3, {{}}]; If[Length[Max3] == 1&&Flatten[Max 3] == max3, Return[True],Return[False]];])

CertainMaxOrderWQ[{zomatrix3, womatrix3 }, $k3$] := (zo3 = zomatrix3; wo 3 = womatrix3; max3 = MaxOrderW[{zo3, wo3}, $k3$]; If[Length[max3] == 2, Return[True]]; If[Length[max3] > 2, Max3 = {}; Do[Do[If[max3[[$i3$]] == $k3$&& max3[[$i3$]]! =max3[[$j3$]], If[CompareOrderW2[{zo3, wo3}, {$k3$,max3[[$i3$]]}, {$k3$,max 3[[$j3$]]}] == {0}, Max3 = Max3 ~连接 ~ {{max3[[$i3$]], max3[[$j3$]]}}];]; If[max 3[[$j3$]] == $k3$&&max3[[$i3$]]! = max3[[$j3$]], If[CompareOrderW2[{zo3, wo3}, {$k3$, max3[[$j3$]]}, {$k3$,max3[[$i3$]]}] == {0}, Max3 = Max3 ~连接 ~ {{max3[[$i3$]], max 3[[$j3$]]}}];]; If[max3[[$i3$]]! = $k3$&&max3[[$j3$]]! = $k3$&&max3[[$i3$]]! =max3[[$j3$]], If[CompareOrderW1[{zo3, wo3}, {$k3$,max3[[$j3$]]}, {$k3$,max3[[$i3$]]}] == {0}, Max3 = Max3 ~连接 ~ {{max3[[$i3$]], max3[[$j3$]]}}];]; ,{$j3, i3+1$, Length[max3]}]; {$i3, 1$, Length[max3] − 1}]; If[Length[Max3] > 1, Do[Do[Do[If[Intersection[Max3[[$i3$]], Max3[[$j3$]]]! = {}, Max3[[$i3$]] = Max3[[$i3$]] ∪ Max3[[$j3$]]; Max3[[$j3$]] = {};]; , {$j3, i3+1$, Length[Max3]}], {$i3, 1$, Length[Max3]}], {$ii3, 1$,Length[Max3]}];]; Max 3 = 补集[Max3, {{}}]; If[Length[Max3] == 1&&Flatten[Max3] == max3, Return[True],Return[False]];])

(* 确定给定物体集合中每个 i对应的 zw-阶矩阵的 z_i-方程 *) EqnMZO[{ zomatrix2 , womatrix2 }, 顶点集2] := (zo2 = zomatrix2; wo2 = womatrix2; eqnset2 = {}; Do[If[CertainMaxOrderZQ[{zo2, wo2}, $i2$] == True, eqn2 = 0;max2 = MaxOrderZ[{zo2, wo2}, $i2$]; Do[If[MemberQ[max2, $j2$] == True, eqn2 = eqn 2 + M[[$j2$]] * Z[[$i2, j2$]]], {$j2, 1, n$}]; eqnset2 = eqnset2 ∪ {eqn2};], {$i2$,顶点集2}]; Return[eqnset2];)

(* 确定给定物体集合中每个 i对应的 zw阶矩阵的 w_i方程 *) EqnMWO[{zo matrix2 ,womatrix2 }, 顶点集2] := (zo2 = zomatrix2; wo2 = womatrix2; eqnset 2 = {}; Do[If[CertainMaxOrderWQ[{zo2,wo2}, $i2$] == True,eqn2 = 0;max2 = MaxOrderW[{zo2, wo2}, $i2$];

Do[If[MemberQ[max2, $j2$] == True, eqn2 = eqn2 + $M[[j2]]$ * W[[$i2, j2$]]], {$j2, 1, n$}]; eqnset2 = eqnset2 ∪ {eqn2};], {$i2$,顶点集2}]; Return[eqnset2];)

(* 定义用于搜索质量关系的函数 *)

(* 将 $m_i Z_{ii}$'s $m_i W_{ii}$'s 替换为 z_i, w_i resp. *) Relation1[x2] :=(y2 =x2; Do[Do[y2[[$j2$]] =y2[[$j2$]]/.{$M[[i2]]$ *Z[[$i2, i2$]] →z[[$i2$]], $M[[i2]]$ *W[[$i2, i2$]] →w[[$i2$]]}, {$i2, 1, n$}], {$j2$, 1, Length[y2]}]; Return[y2])

(* 对于每一对（i, j），当 $i > j$,时，分别将 Z_{ij}, W_{ij} 替换为 $-Z_{ji}$, $-W_{ji}$。 *) 关系2[x2] :=(y2 =x2; 执行[执行[执行[y2[[$k2$]] = y2[[$k2$]]/.{Z[[$i2, j2$]] → −Z[[$j2, i2$]],W [[$i2, j2$]] → −W[[$j2, i2$]]},{$i2, j2 + 1, n$}], {$j2, 1, n - 1$}], {$k2$, 1, Length[y2]}]; Return[y2])

(* 对于每一对（i, j）,, 分别将 Z_{ij}, W_{ij} 替换为 $-z_{ji}^{-1/2} w_{ij}^{-3/2}$, $w_{ji}^{-1/2} z_{ij}^{-3/2}$。 *) 关系3ver1[x2] :=(y2 =x2; 执行[执行[执行[y2[[$k2$]] = y2[[$k2$]]/.{Z[[$i2, j2$]] → zz[[$i2, j2$]] ∧ (−1/2) * ww[[$i2, j2$]] ∧ (−3/2), W[[$i2, j2$]] → zz[[$i2, j2$]] ∧ (−1/2) * ww[[$i2, j2$]] ∧ (−3/2)}, {$j2, i2 + 1, n$}], {$i2, 1, n - 1$}], {$k2$, 1, Length[y2]}]; Return[y2]) (* 对于任意 i, j, 将 Z_{ij}, W_{ij} 替换为 $u_{ij} v_{ij}^3$, $v_{ij} u_{ij}^3$ 。 *) 关系3ver2[x2] :=(y2 =x2; 执行[执行[执行[y 2[[$k2$]] = y2[[$k2$]]/.{Z[[$i2, j2$]] → u[[$i2, j2$]] ∧ (1) * v[[$i2, j2$]] ∧ (3), W [[$i2, j2$]] → v[[$i2, j2$]] ∧ (1) * u[[$i2, j2$]] ∧ (3)},{$j2, i2 + 1, n$}], {$i2, 1, n - 1$}], {$k2$, 1, Length[y2]}]; Return[y2]) (* 根据设定 $z_i = \zeta_i^2, w_i = \omega_i^2$进行变量替换*) ChangeVar1[x2] :=(y2 =x2; 执行[执行[y2[[$j2$]] = y2[[$j2$]]/.{z[[$i2$]] → zeta[[$i2$]] ∧(2), w[[$i2$]] → omega[[$i2$]] ∧ (2)},{$i2, 1, n$}], {$j2$, 1, Length[y2]}]; Return[y2])

ChangeVar1Inv[x2] :=(y2 =x2; Do[Do[y2[[$j2$]] = y 2[[$j2$]]/.{zeta[[$i2$]] → z[[$i2$]] ∧(1/2),omega[[$i2$]] → w [[$i2$]] ∧ (1/2)},{$i2, 1, n$}], {$j2$, 1, Length[y2]}]; Return[y2])

(* 根据设定进行变量替换 $m_i = \mu_i^4$ *)

ChangeVar2[x2]:= (y2 =x2; Do[Do[y2[[j2]] = y2[[j2]]/.{M[[i2]] → mu[[i2]] ∧ 4}, {i2, 1, n}], {j2, 1, Length[y2]}]; Return[y2]) ChangeVar2Inv[x2]:= (y2 =x2; Do[Do[y2[[j2]] = y2[[j2]]/.{mu[[i2]] → M[[i2]] ∧ (1/4)},{i2, 1, n}], {j2, 1, Length[y2]}]; Return[y2]) (* 根据设定进行变量替换 $u_{ij} = z_{ij}^{-1/2}$, $v_{ij} = w_{ij}^{-1/2}$ *) ChangeVar3[x2]:= (y2 =x2; Do[Do[Do[y2[[k2]] = 化简@展开[y2[[k2]]/.{zz [[i2, j2]] → u[[i2, j2]] ∧ (−2), ww[[i2, j2]] → v[[i2, j2]] ∧ (−2)}],{j2, i2 + 1, n}], {i2, 1, n − 1}], {k2, 1, Length[y2]}]; Return[y2])

ChangeVar3Inv[x2]:= (y2 =x2; Do[Do[Do[y2[[k2]] = 化简@展开[y 2[[k2]]/.{u[[i2, j2]] → zz[[i2, j2]] ∧ (−1/2), v[[i2, j2]] → ww[[i2, j2]] ∧ (−1/2)}], {j2, i2 + 1, n}], {i2, 1, n − 1}], {k2, 1, Length[y2]}]; Return[y2])

(* 若 $z_i \succ z_{ij}$ 且 $z_j \succ z_{ij}$, 则 $z_i \sim z_j$, 因此用 z_i替换 z_j , w_i也是类似情况 *) ClusterReplace[{zomatrix2 ,womatrix2}, x2] := (y2 =x2; Do[Do[Do[If[Min[zomatrix 2[[i2, i2]] ∼连接 ∼zomatrix2[[j2, j2]]▷ Max[zomatrix2[[i2, j2]]], y2[[k2]] =化简[y2[[k2]]/.{ z[[i2]] → z[[j2]]}]; If[Min[womatrix2[[i2, i2]] ∼连接 ∼womatrix2[[j2, j2]]▷ Max[womatrix2[[i2, j2]]], y2[[k2]] =y2[[k2]]/.{w[[i2]] → w[[j2]]}],{i2, j2 + 1, n}], {j2, 1, n − 1}], {k2, 1, Length[y2]}]; Return[y2])

(* 如果多项式 p 对某个变量 var_i^k 含有因子 var_i, 那么我们将p 改为 p/var_i^k *) 约去因子[x4]:= (y4 =x4; Do[变量集合4 =变量[y4[[k4]]]; Do[Ex4 = 指数[y4[[k4]],变量集合4[[j4]] ∧ (−1)]; If[Ex4 < 0,y4[[k4]] = 化简[展开[y4[[k4]] ∗ 变量集合4[[j4]] ∧ (Ex4)]]],{j4, 1, Length[变量集合4]}], {k4, 1, Length[y4]}]; Return[y4])

(* 如果有理函数 $f = q/p$ 和 p 含有因子 var_i^k 对某个变量 var_i, 然后我们将 g 改为$g * \text{var}_i^k$*) 消去分母[x3] :=(

y3 =x3；执行[变量集合3 =变量[y3[[k3]]]；执行[Ex3 = 指数[y3[[k3]]，变量集合3[[j3]] ∧ (−1)]；如果[Ex3 > 0， y3[[k3]] = 化简[展开[y3[[k3]] ∗ 变量集合3[[j3]] ∧ (Ex3)]]],{j3, 1, Length[变量集合3]}]， {k3, 1, Length[y3]}]；Return[y3])

(* 判断该多项式是否给出质量关系。如果是，那么我们就收集这个质量关系。*)

质量关系判定 [x2_] := (
如果[计数[Table[补集[变量[x2[[k2]]], M ∼连接 ∼mu], {k2, 1,Length[x2]}], {}]> 0, Return[True], Return[False])

提取质量关系[x2]:=(y2 = x2; y2 = Select[y2,补集[变量[#], M ∼连接 ∼mu] == {}&]; Return[y2])

(* 判断 zw阶矩阵是否给出任何楔形方程。如果是，那么我们就收集这些楔形方程 *)

FindWedgeV[{I2 , J2 }] := (SS2 = 选择[Table[k, {k, 1, n}], Max[对角线[I2][[#]], 对角线[J2][[#]]] == 5&];S2 = 选择[子集[SS2], Length[#] > 0&&Length[#] < n&]; jj2 = 1; 当[jj2 <= Length[S2], V2 = S2[[jj2]]; V2C = 补集[SS2,V2];U2 = 补集[allind, V2 ∼连接 ∼V2C]; 如果[补集[Flatten[I2[[V2, V2]]], {5}] == {}&& Max[Flatten[I2[[V2C, V2C]]]] < 5&& 补集[Flatten[I2[[V2, V2C]]], {5}] == {}&& Max[Flatten[J2[[V2, V2]]]] < 5&& 补集[Flatten[J2[[V2C, V2C]]], {5}] == {}&& 补集[Flatten[J2[[V2, V2C]]], {5}] == {}&& Length@U2 <= 1&& Max@(Flatten@(I2[[U2, U2]]) ∼连接 ∼Flatten@(J2[[U2, U2]])) <= 1, Return[{V2, V2C}]]; jj2 + +]; Return[{{}, {}}])

(* 确定多项式中有多少项。*) NumberofInv[S4 ,变量4] := (ii4 = 0; Do[If[Intersection[变量[S4[[j4]]], {变量4}]! = {}, ii4 + +], {j4, 1, Length[S4]}]; Return[ii4])

(* 对于多项式集合 $\{f_i\}$，如果存在某个 $f_i = g *$ 变量，其中 var 是变量，且 g 是与 var 无关的多项式，那么我们将代换 f/g 为 var，并将其应用于集合中的每个 f_j。 *)
简单代换[S3 ,varset3a]:= (
s3 = S3; varset3b = 选择[varset3a, 逆元数[s3, #] > 1&];
ii3 = 1; tf2 = 0;

While[$ii3$ <= Length[$s3$]&&tf2 == 0, If[Length[完全展开@($s3$[[$ii3$]])] == 2, 变量集合3c = Intersection[变量[$s3$[[$ii3$]]], 变量集合3b]; $jj3 = 1$; While[$jj3$ <= Length[变量集合3c]&&tf2 == 0, If[指数[$s3$[[$ii3$]],变量集合3c[[$jj3$]]] == 1, substi3 = Solve[$s3$[[$ii3$]] == 0,变量集合3c[[$jj3$]]][[1]]; Do[$s3$[[$k3$]] =化简@展开[$s3$[[$k3$]]/.substi3],{$k3, 1,$ Length[$s3$]}]; tf2 = 1]; $jj3 + +$]; $ii3 + +$]; Return[$s3$];)

(* 从某些变量的多项式集合中删除重复项 *) DelDupPoly[polyset3a , varset3] := (polyset3b = polyset3a; del = {}; Do[If[Intersection[Variables[polyset3b[[$i3$]]], varset3]! = {}, var3 = Intersection[Variables[polyset3b[[$i3$]]], varset3][[1]]; exp3 = Exponent[polyset3b[[$i3$]], var3]; Do[If[化简[polyset3b[[$i3$]] * 系数[polyset3b[[$j3$]], var 3 ∧ exp3]− polyset3b[[$j3$]] * 系数[polyset3b[[$i3$]], var3 ∧ exp3]] == 0, del = del ∼ 连接 ∼ {{$j3$}}],{$j3, i3 + 1,$ Length[polyset3b]}]], {$i3, 1,$ Length[polyset3b] − 1}]; polyset3b = 删除[polyset3b, del]; Return[polyset3b];)

(* 对于由多项式组成的集合 $\{f_i\}$ 和变量集合 V ，如果 $f_i = f_j * g$, $i < j$, 其中 g 独立于 V中的变量，则从集合中删除 f_j *) DelDupPoly2[polyset3a , varset3] := (polyset3b = polyset3a; del = {}; Do[Do[If[多项式判定[化简@(展开@(polyset3b[[$i3$]]/polyset3b[[$j3$]])), varset3] ==True&& 多项式判定[化简@(展开@(polyset3b[[$j3$]]/polyset3b[[$i3$]])), varset3] ==True, del = del ∼ 连接 ∼ {{$j3$}}],{$j3, i3 + 1,$ Length[polyset3b]}], {$i3, 1,$ Length[polyset3b] − 1}]; polyset3b = Delete[polyset3b, del]; Return[polyset3b];)

(* 如果 g 是 f的倍数，则删除 g。 *) DelDupPoly3[polyset3a , varset3] := (polyset3b = polyset3a; del = {}; Do[Do[tf3 = 0; If[多项式判定[化简@(展开@(polyset3b [[$i3$]]/polyset3b[[$j3$]])), varset3] ==True, del = del ∼ 连接 ∼ {{$i3$}}; tf3 = 1]; If[tf3 == 0&& &多项式判定[化简@(展开@(polyset3b[[$j3$]]/polyset3b[[$i3$]])), varset3] ==True, del = del ∼ 连接 ∼ {{$j3$}}],{$j3, i3 + 1$,Length[polyset3b]}], {$i3, 1,$ Length[polyset3b] − 1}]; polyset3b = Delete[polyset3b, del];Return[polyset3b];)

(* 应用上述“简单代换”，将每个成员转换为多项式，并删除常数多项式和重复项。
*) SimpleSubstitution[$S2$,varset2] := ($s2 = S2$;tf2 = 1; While[tf2 == 1, $s2 =$ simpleSubstitution[$s2$,varset2];$s2$ =消去分母[$s2$];$s2$ =约去因子[$s2$];$s2 =$ 补集 [$s2, \{1, 0, -1\}$];$s2 =$ DelDupPoly[$s2$,varset2];]; Return[$s2$])

(*如果 $f = g_1^{k_1} g_2^{k_2} \cdots g_n^{k_n}$，则将 f 替换为 $g_1 g_2 \cdots g_n$
*) MinimizeExpofFac[$S4$] :=($s4 = S4$; $L4 =$ Length[$s4$]; If [$L4 > 0$,Do[list4 =FactorList[$s4[[k4]]$]; If[Length[list4] > 1, $s4[[k4]] = 1$; Do[poly4 = list4[[$j4, 1$]]; If[Length@poly4 > 1, $s4[[k4]] =$ ExpandAll@($s4[[k4]] *$ poly4)],{$j4, 2,$ Length[list 4]}]], $\{k4, 1, L4\}$]];Return[$s4$];)

(* 如果 $f = g_1^{k_1} g_2^{k_2} \cdots g_n^{k_n} h_1^{l_1} h_2^{l_2} \cdots h_m^{l_m}$且 $h_i's$ 中的所有项符号相同，则将 f替换为 $g_1 g_2 \cdots g_n$*) MinimizeExpofFacP[$S3$]:= ($s3 = S3$; $L3 =$ Length[$s3$]; If[$L3 > 0$,Do[list3 = FactorList[$s3[[k3]]$]; If[Length[list3] > 1, $s3[[k3]] = 1$; Do[If[Length@StringPosition[ToString@(list3[[$j3, 1$]]), “$-$”] > 0&& Length@StringPosition[ToString@(–list3[[$j3, 1$]]), “$-$”] > 0, $s3[[k3]] = s3[[k3]] *$ list3[[$j3, 1$]]], $\{j3, 2,$ Length[list3]}]], $\{k3, 1, L3\}$]];Return[$s3$];)

(*消元过程：对多项式集合应用某些算法，以消去给定变量。*) Elimi[$S2$,var2] := ($s2 =$ Select[$S2$, Intersection[Variables[#], {var2}]! $= \{\}$&]; s2b $=$ Complement[$S2, s2$]; exp2c $=$ 2 $*$ Max[Table[Exponent[$s2[[k2]]$, var2], {$k2, 1$,Length[$s2$]}]];$kk2 = 0$;possfac 2 = 1; While[(Length@$s2 > 1$)&&($kk2 <$ exp2c $+ 2$),$s2 =$ SortBy[$s2$,Length[#]&];$s2 =$ SortBy[$s2$,Exponent[#, var2]&]; exp2a $=$ Exponent[$s2[[1]]$, var2]; TF2 = 1;

CoeList2 = CoefficientList[$s2$[[1]],var2]; CoeFactor2 = Replace[CoeList2, List → 多项式最大公因式, 1, Heads → True]; Do[If[Exponent[CoeFactor2, var2 b] > 0, TF2 = 0]; {var2b, 变量集1b}]; If[TF2 == 1,$s2$[[1]] =完全展开@化简[$s2$[[1]]/ CoeFactor2]; possfac2 = possfac2 ∗ CoeFactor2;]; Do[exp2b = Exponent[$s2$[[$j2$]], var2]; If[exp2b >=exp2a, poly2 = 展开[$s2$[[1]] ∗ var2 ∧ (exp2b − exp2a)]; Coe2a = Coefficient[poly2, var2 ∧ exp2b]; Coe2b = Coefficient[$s2$[[$j2$]],var2 ∧ exp2b]; $s2$[[$j2$]] =完全展开@($s2$[[$j2$]] ∗ Coe2a − poly2 ∗ Coe2b);], {$j2$, 2,Length[$s2$]}];$s2$ =约去因子[$s2$];$s2$ =MinimizeExpofFac[$s2$]; s2b = s2b ∼连接 ∼Select[$s2$, Intersection[Variables[#], {var2}] == {}&];$s2$ = Select[$s2$, Intersection[Variables[#], {var2}]! = {}&]; $kk2 + +$;];$s2$ = SortBy[$s2$, Exponent[#, var2]&];Return[{s2b, possfac2}];)

(* 对于 varset 中的每个变量 v ， 删除 $S5$ 中涉及变量 v 的多项式（如果存在且唯一）*) 删除变量[$S2$,varset2] := ($s2 = S2$; 如果[Length[$s2$] > 1, 执行[如果[Length[Select[$s2$,(Variables[#] ∩ {varset2[[$k2$]]})! = {}&]] == 1, del = {}; 执行[如果[(Variables[$s2$[[$j2$]]] ∩ {varset2[[$k2$]]})! = {}, del = del ∼ 连接 ∼ {{$j2$}}],{$j2$, 1, Length[$s2$]}]; $s2$ = Delete[$s2$,del]], {$k2$, 1, Length[varset2]}]]; Return[$s2$];)

(* 寻找质量关系的第一种算法 *) FindMassRel1[]:= ($t1$ =绝对时间[]; Str = “寻找FMX的质量关系[[″<> 转为字符串[$N1$] <> “]]″; Print[Str]; Print[]; TF1 = 0; EqnZ = (ZX 1 ∗ Z).M; EqnZ = 关系1@补集[EqnZ {0}]; EqnW = (WX1 ∗ W).M; EqnW = 关系1@补集[EqnW {0}]; Polyset1 = 并集[EqnW, EqnZ]; Print[Style[“收集的方程：″, Bold, 15, Blue]]; If[Length@EqnZ + Length@EqnW > 0, Print[Style[“主要方程：″, Bold, 13, RGBColor[0.8, 0.4, 0]]]; Do[Print[0, “ =″, EqnZ[[$k1$]]], {$k1$, 1, Length@EqnZ}]; Do[Print[0, “ =″, EqnW[[$k1$]]], {$k1$, 1, Length@EqnW}];]; If[Length@W簇[{zo1, wo1}] + Length@W簇[{zo1, wo1}] > 0, Print[Style[“簇方程：″, Bold, 13, RGBColor[0.8, 0.4, 0]]]; Do[Print[0, “ =″, Z簇[{zo1, wo1}][[$k1$]]], {$k1$, 1, Length@Z簇[{zo1, wo1}]}]; Do[Print[0,“ =″, W簇[{zo1, wo1}][[$k1$]]], {$k1$, 1, Length@W簇[{zo1, wo1}]}];];

Polyset1 = 关系1[Polyset1]; Polyset1 = 关系2[Polyset1]; Polyset1 = ClusterReplace[{zo1, wo1}, Polyset1]; Polyset1 = 补集[多项式集1, {1, 0, −1}]; Polyset1b = GroebnerBasis[多项式集1, $M \sim$ 连接 $\sim$ mu]; Polyset1 = Polyset1b; Polyset1 = 约去因子[Polyset1]; Polyset1 = 补集[多项式集1, {1, 0, −1}]; If[质量关系判定[Polyset1] ==True, TF1 = 1; Polyset1 = 提取质量关系[Polyset1]; Print[“已完成, 我们得到质量关系 ″, Style[多项式集1, Blue],“对于此图.″]]; If[TF1 == 0, Print[“我们没有找到质量关系。得到的关系如下: ″]; Print[多项式集1, “ \n″]]; Print[“耗时: ″, 绝对时间[] − $t1$];)

(* 第二算法, 用于寻找质量关系 *) indMassRel2[] :=(TF1 = 0; $t1$ = 绝对时间[]; Str = “寻找 FMX[[″<> 转为字符串[$N1$] <> “]]...″; Print[Str, “ \ n″]; If[Length[zwotype3] > 0, TF1 = 1; $jj1$ = 1; While[$jj1$ <= Length[zwotype3]&&TF1 == 1,{S1a, S1b} = FindWedgeV[zwotype3[[$jj1$]]]; If[S1a == {}, TF1 = 0;]; $jj1$ + +]; If[TF1 == 1, massrellcm = 1;PossFaclcm = 1; $jj1$ = 1; While[$jj1$ <= Length[zwotype3], {S1a, S1b} = FindWedgeV[zwotype3[[$jj1$]]]; WedgeV1a = Flatten@Table[M[[$j1$]]M[[$i1$]](zeta[[$i1$]]omega[[$j1$]]) ∧(−1),{$i1$, S1a}, {$j1$, S1b}]; sign1 = 笛卡尔积[{1, −1}, {Length[S1a], Length[S1b]}]; WedgeV1b = Table[Dot[WedgeV1a, Flatten[sign1[[$j1$]], 1]],{$j1$, 1, Length[sign1]}]; VarSet1a = 变量[WedgeV1a]; WedgeV1b = WedgeV1b[[1; ; 2 ∧ (Length[S1b] ∗ Length[S1a] − 1)]]; Do[WedgeV1b[[$j1$]] =完全展开@WedgeV1b[[$j1$]],{$j1$, 1, Length@WedgeV1b}]; index1 = 1; Circledzc = Table[Intersection[zc1[[$i1$]], Flatten[位置[Diagonal[ZX1], 1]]], {$i1$, 1, Length[zc1]}]; Circledwc = Table[Intersection[wc1[[$i1$]], Flatten[位置[Diagonal[WX1], 1]]], {$i1$, 1, Length[wc1]}]; MassCenRela = Flatten[Table[Sum[M[[Circledzc[[$i1$, $j1$]]]] ∗z[[Circledzc[[$i1$, $j1$]]]], {$j1$, 1,Length[Circledzc[[$i1$]]]}], {$i1$, 1,Length[Circledzc]}]] $\sim$ 连接 Flatten[Table[Sum[M[[Circledwc[[$i1$, $j1$]]]] ∗ w[[Circledwc[[$i1$, $j1$]]]],

$\{j1,1$,Length[Circledwc[[$i1$]]]}, $\{i1,1,$Length[Circledwc]}]; Str = “使用 zwotype 寻找质量关系3[[″<> 转为字符串[$jj1$] <> “]]″; Print[Str, “ \ n″]; Print[“ 阶矩阵为 ″]; Print[{矩阵形式[zwotype3[[$jj1,1$]]], 矩阵形式[zwotype3[[$jj1,2$]]]}]; Print[Style[“楔形方程：″, Bold, 13, RGBColor[$0.8,0.4,0$]]; Replace[Prepend[Insert[WedgeV1a, “±″, Table[{$k1$}, {$k1,2$, Length@WedgeV1a}

]],

“ one of 0 =″], List → Print, 1, Heads → True]; While[index1 <= Length[WedgeV1b],Polyset1 = MassCenRela; Polyset1 = 补集[Polyset1, $\{1,0,-1\}$]; Polyset1 = Polyset1 ∼ 连接 ∼ {WedgeV1b[[index 1]]}; Str = “正在运行楔形方程 ″ <> 转为字符串[index1] <>“...″; Print[Str, “ \ n″, “ \ n″, “多项式：″, “ \ n″, Polyset1]; PossFac = 1; Polyset1 = Relation1[Polyset1]; Polyset1 = Relation2[Polyset1]; Polyset1 = ChangeVar1[Polyset1]; Polyset1 = ChangeVar2[Polyset1]; Polyset1 = 消去分母[Polyset1]; Polyset1 = ClusterReplace[zwotype3[[$jj1$]], Polyset1]; Polyset1 = Table[化简[Polyset1[[$j1$]]], {$j1,1$,Length[Polyset1]}]; Polyset 1 = 补集[Polyset1, $\{1,0,-1\}$]; VarSet1a = {}; VarSet1a = Variables[Polyset1]; VarSet1b = 补集[VarSet1a, Union[M, mu]]; VarSet1b = 按序排序[VarSet1b, Max[Table[指数[Polyset1[[$k1$]], #],{$k1,1$, Length[Polyset 1]}]]&]; Polyset1 = MinimizeExpofFac[Polyset1]; While[Length[VarSet1b] > 0&&Length[Polyset1] > 1&&质量关系判定[Polyset1] == False, VA1 = Elimi[Polyset1, VarSet1b[[1]]]; Polyset1 = VA1[[1]]; PossFac = PossFac ∗VA1[[2]]; Polyset1 = 补集[Polyset1, $\{0\}$]; Polyset 1 = 约去因子[Polyset1]; If[Length[Polyset1] > 1, Polyset1 = 删除变量[Polyset1, VarSet1b]; Polyset1 = DelDupPoly2[Polyset1, VarSet1b];]; VarSet1a = {}; Do[VarSet1a = VarSet1acupVariables[Polyset1[[$k1$]]], $\{k1,1$,Length[Polyset1]}]; VarSet1b = 补集[VarSet1a, Union[M,mu]]; VarSet1b = 按序排序[VarSet1b, Max[Table[指数[Polyset1[[$k1$]], #],{$k1,1$, Length[Polyset1]}]]&];]; Polyset1 = 约去因子[Polyset1];

Polyset1 = 补集[Polyset1, {1, 0, −1}]; If[质量关系判定[Polyset1] ==True, Polyset1 = 化简[提取质量关系[Polyset1]]; Polyset1 = MinimizeExpofFacP[Polyset1]; Polyset1 = ChangeVar2Inv[Polyset1]; PossFac =ChangeVar2Inv[{PossFac}][[1]]; PossFac = MinimizeExpofFacP[{PossFac}][[1]]; Str = “对于 zwotype3 [[″<> 转为字符串[jj1] <> “]] andWedgeV[[″<>转为字符串[index1] <> “]],我们得到以下质量关系 ″; Print[Str]; Print[Style[Polyset1, Blue]]; Do[massrellcm = PolynomialLCM[massrellcm, poly1]; ,{poly1, Polyset1}]; PossFaclcm = PolynomialLCM[PossFaclcm, PossFac]; Print[“或 ″, Style[PossFac, RGBColor[0, 0.5, 0]], “（由系数因子得到的部分）″, “ \n \n″];]; If[质量关系判定[Polyset1] ==False, TF1 = 0; Str = “对于 zwotype3 [[″<> 转为字符串[jj1] <> “]] 和 WedgeV[[″<> 转为字符串[index1]<> “]],我们得到以下关系″; Print[Str]; Print[Polyset1];]; index1 + +;]; jj1 + +];]; If[TF1 == 1, Print[“处理完毕，对于此图，我们得到以下质量关系 ″, Style[massrellcm, Blue], “ 或 ″, Style[PossFaclcm, RGBColor[0, 0.5, 0]], “（由系数因子得到的部分）″], Print[“处理完毕，对于此图，我们没有得到任何质量关系.″]];]; Print[“耗时: ″, 绝对时间[] − t1, “ \n \n \n″]; (* 寻找质量关系的第三种算法 *) FindMassRel3[{ zomatrix1 , womatrix1 }, VertexSet1a , VertexSet1b]:=FindMassRel3[{zomatrix1, womatrix1}, VertexSet1a, VertexSet1b, False {}]; FindMassRel3[{zomatrix1 , womatrix1 }, VertexSet1a , VertexSet1b , RandomTF , additionaleqnset] := (t1 =绝对时间[]; ODind1 = Flatten[Table[Table[{j1, i1}, {i1, j1 + 1, n}], {j1, 1, n − 1}], 1]; EdgePos1 = Select[ODind1, XX1[[#[[1]], #[[2]]]] > 0&]; 三角形集合 = {}; Do[Do[Do[If[补集 [{{i1, j1}, {j1, k1}, {i1, k1}}, EdgePos1] == {}, AppendTo[TriangleSet {i1, j1, k1}];], {i1, 1, j1 − 1}]; {j1, 2, k1 − 1}]; {k1, 3, n}]; Idenu = Table[u[[s1[[1]], s1[[2]]]] ∧ (−2) + u[[s1[[2]], s1[[3]]]] ∧ (−2)− u[[s1[[1]], s1[[3]]]] ∧ (−2) {s1, TriangleSet}]; Idenv = Table[v[[s1[[1]], s1[[2]]]] ∧ (−2) + v[[s1[[2]], s1[[3]]]] ∧ (−2)− v[[s1[[1]], s1[[3]]]] ∧ (−2) {s1, TriangleSet}]; Print[“正在寻找 FMX[[″<> 转为字符串[N1] <> “]]的质量关系，使用″];

打印[{矩阵形式[outputform1@zomatrix1], 矩阵形式[outputform1@womatrix1]}]; TF 1 = 0; 可能因子 = 1; 方程Z =关系1@EqnMZO[{zomatrix1, womatrix1}, 顶点集1a]; 方程W =关系1@EqnMWO[{zomatrix1, womatrix1}, 顶点集1b]; 多项式集1 = 方程Z ∪方程W ∪附加方程集; 多项式集1b = {}; 多项式集1 = 关系1[多项式集1]; 多项式集1 = 关系2[多项式集1]; 多项式集1 = 关系3ver2[多项式集1]; 变量集1a = 变量[多项式集1]; 变量集1b = 补集[变量集1a, 并集[M,mu]]; 执行[如果[补集[变量[Idenu[[$k1$]]], 变量集1a] == {}, 多项式集1 = 多项式集1 ∼ 连接 ∼ {Idenu[[$k1$]]}, {$k1$, 1,Length[Idenu]}]; 执行[如果[补集[变量[Idenv[[$k1$]]], 变量集1a] == {}, 多项式集1 = 多项式集1 ∼ 连接 ∼ {Idenv[[$k1$]]}, {$k1$, 1, Length[Idenv]}]; 多项式集1 = ClusterReplace[{zomatrix1, womatrix1}, 多项式集1]; 多项式集1 = 消去分母[多项式集1]; 多项式集1 = 约去因子[多项式集1]; 多项式集1 = 补集[多项式集1, {1, 0, −1}]; 多项式集1 = ChangeVar3[多项式集1]; 多项式集1 = 消去分母[多项式集1]; 多项式集1 = 约去因子[多项式集1]; 多项式集1 = 补集[多项式集1, {1, 0, −1}]; 变量集1a = {}; 执行[变量集1a = 变量集1a ∪变量[多项式集1[[$k1$]]], {$k1$, 1,Length[多项式集1]}]; 变量集1b = 补集[变量集1a, 并集[M, mu]]; 变量集1b = 按序排序[变量集1b, Max[Table[指数[多项式集1[[$k1$]], #],{$k1$, 1, Length[多项式集1]}]]&]; 打印[“变量代换 ″, “ \ n″, 多项式集1]; 打印[转为字符串[Length[多项式集1]] <> “多项式 ″ <> 转为字符串[Length[变量集1b]] <>“变量″ <> 转为字符串[变量集1b],“ \ n简单代换″]; 多项式集1 = 简单代换[多项式集1, 变量集1b]; 多项式集1 = 约去因子[多项式集1]; 多项式集1 = 补集[多项式集1, {1, 0, −1}]; 多项式集1 = DelDupPoly2[多项式集1, 变量集1b]; 多项式集1b = 多项式集1b ∪提取质量关系(多项式集1); 多项式集1 = 补集[多项式集1, 多项式集1b]; 变量集1a = {}; 执行[变量集1a = 变量集1a ∪变量[多项式集1[[$k1$]]], {$k1$, 1,Length[多项式集1]}]; 变量集1b = 补集[变量集1a, 并集[M, mu]]; 变量集1b = 按序排序[变量集1b, Max[Table[指数[多项式集1[[$k1$]], #],{$k1$, 1, Length[多项式集1]}]]&]; 打印[多项式集1, “ \ n″, 转为字符串[Length[多项式集1]] <> “多项式 ″ <>转为字符串[Length[变量集1b]] <> “变量″ <> 转为字符串[变量集1b]]; 多项式集1 = MinimizeExpofFac[多项式集1]; 当[Length[变量集1b] > 0&&Length[多项式集1] > 1&&质量关系判定[多项式集1] ==为False时, 如果[RandomTF == 为True,

变量1 = RandomChoice[变量集1b],变量1 = 变量集1b[[1]]]; 字符串 = “消去变量 ″ <> 转为字符串[变量1] <>“...″; 打印[字符串, “ \n″]; VA1 = Elimi[多项式集1, 变量1]; 多项式集1 = VA1[[1]]; 可能因子 = PossFac ∗ VA1[[2]]; 多项式集1 = 补集[多项式集1, {0}]; 多项式集1 = 约去因子[多项式集1]; 多项式集1b = 多项式集1b ∪ 提取质量关系[多项式集1]; 多项式集1 = 补集[多项式集1, 多项式集1b]; 如果[Length[多项式集1] > 1, 多项式集1 = 删除变量[多项式集1, 变量集1b]; 多项式集1 = DelDupPoly2[多项式集1, 变量集1b];]; 变量集1a = {}; 执行[变量集1a = 变量集1a ∪ 变量[多项式集1[[k1]]], {k1, 1,Length[多项式集1]}]; 变量集1b = 补集[变量集1a, 并集[M, mu]]; 变量集1b = 按序排序[变量集1b, Max[Table[指数[多项式集1[[k1]], #],{k1, 1, Length[多项式集1]}]]&]; 字符串 = “消去 ″ <> 转为字符串[变量1]; 打印[字符串]; NV1 = Table[Length[f1], {f1, 多项式集1b}] ∼ 连接 ∼ Table[Length[f1], {f1, 多项式集1}]; 如果[Max[NV1] <= 100, 打印[多项式集1b ∼ 连接 ∼ 多项式集1]]; 打印[转为字符串[Length[多项式集1b ∼ 连接 ∼ 多项式集1]] <> “多项式, ″ <> 转为字符串[Length[变量集1b]] <> “变量″ <> 转为字符串[变量集1b]]; 打印[“项数: ″, NV1, “ \n \n″,]; 如果[多项式集1b! = {}, 多项式集1b = DelDupPoly3[多项式集1b, 变量集1b]; 多项式集1b = 补集[多项式集1b {1, −1}]; 多项式集1b =化简[多项式集1b]; 多项式集1b =MinimizeExpofFacP[多项式集1b]; 字符串 = “我们得到质量关系 ″; 打印[字符串, “ \n″, 样式[多项式集1b, 蓝色]]; 如果[可能因子 =! = 1, 打印[“或者 ″, 样式[可能因子, RGBColor[0, 0.5, 0]], “（由系数因子得到的部分）″, “ \n \n″]]; 多项式集1b =ChangeVar2[多项式集1b]; 多项式集1b =MinimizeExpofFacP[多项式集1b]; 多项式集1b =ChangeVar2Inv[多项式集1b]; 可能因子 =ChangeVar2[{可能因子}][[1]]; 可能因子 =MinimizeExpofFacP[{可能因子}][[1]]; 可能因子 =ChangeVar2Inv[{可能因子}][[1]]; 打印[“另一个表达式: ″, “ \n″, 样式[多项式集1b, 蓝色]]; 如果[可能因子 =! = 1, 打印[“或者 ″, 样式[可能因子, RGBColor[0, 0.5, 0]], “（由系数因子得到的部分）″]]; , 如果[Length[多项式集1] > 1, 因子族V1 = Table[{}, {k1, 1,Length[多项式集1]}]; 打印[因子族V1, “ \n″,]; 执行[因子族V1[[k1]] = Table[FactorList[多项式集1[[k1]]][[j1, 1]],

$\{j1,1,$Length@因子列表[多项式集1[[$k1$]]]$\}$,$\{k1,1,$Length@FacFamilyV1$\}$; Print[FacFamilyV1]; Print[]; Do[多项式集1[[$k1$]] $=1$; Do[Do[TF1b $=1$; If[多项式判定[化简 @(展开[多项式集1[[$j1$]]/FacFamilyV1[[$k1$]][[$i1$]]), 变量[多项式集1[[$j1$]]]] ==True, TF1b $=$TF1b, TF1b $=$TF1b $*0$]; $\{j1,1,$Length[多项式集1]$\}$]; If[TF1b $==1$, 多项式集 1[[$k1$]] $=$多项式集1[[$k1$]] $*$FacFamilyV1[[$k1,i1$]]]; ,$\{i1,1,$Length[FacFamilyV1[[$k1$]]]$\}$] , $\{k1,1,$Length[多项式集1]$\}$]; 多项式集1 $=$ 消去分母[多项式集1]; 多项式集1 $=$ 约去因子[多项式集1]; 多项式集1 $=$ 删除变量[多项式集1, 变量集1b]; 多项式集1 $=$ DelDupPoly2[多项式集1, 变量集1b];]; If[Length[多项式集1] $==1$, Polyset1b $=$因子列表[多项式集1[[1]]]; 多项式集1[[1]] $=1$; Do[多项式集1[[1]] $=$ 多项式集1[[1]] $*$ Polyset1b[[$i1$]][[1]], $\{i1,1,$ Length[Polyset1b]$\}$]; Print[多项式集1, ”“ $\backslash$n′′”, 转为字符串[Length[多项式集1]] <> “ 多项式′′, “ $\backslash$n′′];]; Print[“耗时：′′, 绝对时间[] $-t1$];)

Appendix IV: Some frequently appeared factors in mass relations

这里展示了质量关系中一些频繁出现的长因子的详细信息，并按长度排序。 μ 的下标表示其包含的项数。

$$
\begin{aligned}
&\mu_{15}\ (m_i, m_j, m_k)\\
=\ & m_i^6m_j^6 - 2m_i^7m_j^3m_k^2 + m_i^6m_j^4m_k^2 + 6m_i^5m_j^5m_k^2 + m_i^4m_j^6m_k^2 - 2m_i^3m_j^7m_k^2 + m_i^8m_k^4 - m_i^7m_jm_k^4\\
&+m_i^6m_j^2m_k^4 + 2m_i^5m_j^3m_k^4 - 2m_i^4m_j^4m_k^4 + 2m_i^3m_j^5m_k^4 + m_i^2m_j^6m_k^4 - m_im_j^7m_k^4 + m_j^8m_k^4,\mu_{21}\ (m_i,\\
&m_j, m_k)\\
=\ & -m_i^{11}m_j^2 + m_i^{11}m_k^2 + 4m_i^9m_j^2m_k^2 + 3m_i^8m_j^3m_k^2 + 31m_i^9m_k^4 + 31m_i^8m_jm_k^4 - 6m_i^7m_j^2m_k^4\\
&-9m_i^6m_j^3m_k^4 - 3m_i^5m_j^4m_k^4 + 31m_i^7m_k^6 + 62m_i^6m_jm_k^6 + 35m_i^5m_j^2m_k^6 + 9m_i^4m_j^3m_k^6 + 6m_i^3m_j^4m_k^6\\
&+m_i^2m_j^5m_k^6 + m_i^5m_k^8 + 3m_i^4m_jm_k^8 + 2m_i^3m_j^2m_k^8 - 2m_i^2m_j^3m_k^8 - 3m_im_j^4m_k^8 - m_j^5m_k^8,\mu_{33}\ (m_i, m_j,\\
&m_k)\\
=\ & 3m_i^{12}m_j^4 + 9m_i^{11}m_j^5 - 24m_i^{12}m_j^2m_k^2 - 30m_i^{11}m_j^3m_k^2 - 12m_i^{10}m_j^4m_k^2 - 30m_i^9m_j^5m_k^2 - 28m_i^8m_j^6m_k^2\\
&+21m_i^{12}m_k^4 + 21m_i^{11}m_jm_k^4 - 360m_i^{10}m_j^2m_k^4 - 670m_i^9m_j^3m_k^4 - 292m_i^8m_j^4m_k^4 + 36m_i^7m_j^5m_k^4\\
&+47m_i^6m_j^6m_k^4 + 29m_i^5m_j^7m_k^4 - 154m_i^{10}m_k^6 - 308m_i^9m_jm_k^6 - 514m_i^8m_j^2m_k^6 - 770m_i^7m_j^3m_k^6\\
&-472m_i^6m_j^4m_k^6 - 68m_i^5m_j^5m_k^6 - 10m_i^4m_j^6m_k^6 - 14m_i^3m_j^7m_k^6 - 10m_i^2m_j^8m_k^6 + 21m_i^8m_k^8 + 63m_i^7m_jm_k^8\\
&+39m_i^6m_j^2m_k^8 - 45m_i^5m_j^3m_k^8 - 51m_i^4m_j^4m_k^8 - 3m_i^3m_j^5m_k^8 - 3m_i^2m_j^6m_k^8 - 15m_im_j^7m_k^8 - 6m_j^8m_k^8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{45}(m_i, m_j, m_k, m_l\ )\\
=\ & -m_j^{11}m_k^2 + m_j^{11}m_l^2 + 3m_im_j^8m_k^2m_l^2 + 4m_j^9m_k^2m_l^2 + 3m_j^8m_k^3m_l^2 + 31m_im_j^8m_l^4 + 31m_j^9m_l^4\\
&+31m_j^8m_km_l^4 - 3m_i^2m_j^5m_k^2m_l^4 - 9m_im_j^6m_k^2m_l^4 - 6m_j^7m_k^2m_l^4 - 6m_im_j^5m_k^3m_l^4 - 9m_j^6m_k^3m_l^4\\
&-3m_j^5m_k^4m_l^4 + 31m_i^2m_j^5m_l^6 + 62m_im_j^6m_l^6 + 31m_j^7m_l^6 + 62m_im_j^5m_km_l^6 + 62m_j^6m_km_l^6\\
&+m_i^3m_j^2m_k^2m_l^6 + 6m_i^2m_j^3m_k^2m_l^6 + 9m_im_j^4m_k^2m_l^6 + 35m_j^5m_k^2m_l^6 + 3m_i^2m_j^2m_k^3m_l^6 + 12m_im_j^3m_k^3m_l^6\\
&+9m_j^4m_k^3m_l^6 + 3m_im_j^2m_k^4m_l^6 + 6m_j^3m_k^4m_l^6 + m_j^2m_k^5m_l^6 + m_i^3m_j^2m_l^8 + 3m_i^2m_j^3m_l^8 + 3m_im_j^4m_l^8\\
&+m_j^5m_l^8 + 3m_i^2m_j^2m_km_l^8 + 6m_im_j^3m_km_l^8 + 3m_j^4m_km_l^8 - m_i^3m_k^2m_l^8 - 3m_i^2m_jm_k^2m_l^8 + 2m_j^3m_k^2m_l^8\\
&-3m_i^2m_k^3m_l^8 - 6m_im_jm_k^3m_l^8 - 2m_j^2m_k^3m_l^8 - 3m_im_k^4m_l^8 - 3m_jm_k^4m_l^8 - m_k^5m_l^8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{84}(m_i, m_j, m_k, m_l, m_n)\\
=\ & m_i^3m_k^{11}m_l^2 + 3m_i^2m_jm_k^{11}m_l^2 + 3m_im_j^2m_k^{11}m_l^2 + m_j^3m_k^{11}m_l^2 - m_i^3m_k^{11}m_n^2 - 3m_i^2m_jm_k^{11}m_n^2\\
&-3m_im_j^2m_k^{11}m_n^2 - m_j^3m_k^{11}m_n^2 - 4m_i^3m_k^9m_l^2m_n^2 - 9m_i^2m_jm_k^9m_l^2m_n^2 - 6m_im_j^2m_k^9m_l^2m_n^2\\
&-m_j^3m_k^9m_l^2m_n^2 - 3m_i^3m_k^8m_l^3m_n^2 - 6m_i^2m_jm_k^8m_l^3m_n^2 - 3m_im_j^2m_k^8m_l^3m_n^2 + 3m_i^2m_jm_k^8m_l^2m_n^3\\
&+6m_im_j^2m_k^8m_l^2m_n^3 + 3m_j^3m_k^8m_l^2m_n^3 - 31m_i^3m_k^9m_n^4 - 62m_i^2m_jm_k^9m_n^4 - 31m_im_j^2m_k^9m_n^4\\
&-31m_i^3m_k^8m_lm_n^4 - 62m_i^2m_jm_k^8m_lm_n^4 - 31m_im_j^2m_k^8m_lm_n^4 + 6m_i^3m_k^7m_l^2m_n^4 + 9m_i^2m_jm_k^7m_l^2m_n^4\\
&+3m_im_j^2m_k^7m_l^2m_n^4 + 9m_i^3m_k^6m_l^3m_n^4 + 12m_i^2m_jm_k^6m_l^3m_n^4 + 3m_im_j^2m_k^6m_l^3m_n^4 + 3m_i^3m_k^5m_l^4m_n^4\\
&+3m_i^2m_jm_k^5m_l^4m_n^4 + 31m_i^2m_jm_k^8m_n^5 + 62m_im_j^2m_k^8m_n^5 + 31m_j^3m_k^8m_n^5 - 9m_i^2m_jm_k^6m_l^2m_n^5\\
&-12m_im_j^2m_k^6m_l^2m_n^5 - 3m_j^3m_k^6m_l^2m_n^5 - 6m_i^2m_jm_k^5m_l^3m_n^5 - 6m_im_j^2m_k^5m_l^3m_n^5 - 31m_i^3m_k^7m_n^6\\
&-31m_i^2m_jm_k^7m_n^6 - 62m_i^3m_k^6m_lm_n^6 - 62m_i^2m_jm_k^6m_lm_n^6 - 35m_i^3m_k^5m_l^2m_n^6 - 34m_i^2m_jm_k^5m_l^2m_n^6\\
&+3m_im_j^2m_k^5m_l^2m_n^6 + 3m_j^3m_k^5m_l^2m_n^6 - 9m_i^3m_k^4m_l^3m_n^6 - 6m_i^2m_jm_k^4m_l^3m_n^6 - 6m_i^3m_k^3m_l^4m_n^6\\
&-3m_i^2m_jm_k^3m_l^4m_n^6 - m_i^3m_k^2m_l^5m_n^6 + 62m_i^2m_jm_k^6m_n^7 + 62m_im_j^2m_k^6m_n^7 + 62m_i^2m_jm_k^5m_lm_n^7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+62m_i m_j^2 m_k^5 m_l m_n^7 + 9m_i^2 m_j m_k^4 m_l^2 m_n^7 + 6m_i m_j^2 m_k^4 m_l^2 m_n^7 + 12m_i^2 m_j m_k^3 m_l^3 m_n^7 \\
&+6m_i m_j^2 m_k^3 m_l^3 m_n^7 + 3m_i^2 m_j m_k^2 m_l^4 m_n^7 - m_i^3 m_k^5 m_n^8 - 31m_i m_j^2 m_k^5 m_n^8 - 31m_j^3 m_k^5 m_n^8 \\
&-3m_i^3 m_k^4 m_l m_n^8 - 2m_i^3 m_k^3 m_l^2 m_n^8 - 6m_i m_j^2 m_k^3 m_l^2 m_n^8 - 3m_j^3 m_k^3 m_l^2 m_n^8 + 2m_i^3 m_k^2 m_l^3 m_n^8 \\
&-3m_i m_j^2 m_k^2 m_l^3 m_n^8 + 3m_i^3 m_k m_l^4 m_n^8 + m_i^3 m_l^5 m_n^8 + 3m_i^2 m_j m_k^4 m_n^9 + 6m_i^2 m_j m_k^3 m_l m_n^9 \\
&+m_j^3 m_k^2 m_l^2 m_n^9 - 6m_i^2 m_j m_k m_l^3 m_n^9 - 3m_i^2 m_j m_l^4 m_n^9 - 3m_i m_j^2 m_k^3 m_n^{10} - 3m_i m_j^2 m_k^2 m_l m_n^{10} \\
&+3m_i m_j^2 m_k m_l^2 m_n^{10} + 3m_i m_j^2 m_l^3 m_n^{10} + m_j^3 m_k^2 m_n^{11} - m_j^3 m_l^2 m_n^{11}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{88}(m_i, m_j, m_k, m_l) \\
= \;& 9m_i m_j^{11} m_k^4 + 3m_j^{12} m_k^4 + 9m_j^{11} m_k^5 - 30m_i m_j^{11} m_k^2 m_l^2 - 24m_j^{12} m_k^2 m_l^2 - 30m_j^{11} m_k^3 m_l^2 \\
&-28m_i^2 m_j^8 m_k^4 m_l^2 - 30m_i m_j^9 m_k^4 m_l^2 - 12m_j^{10} m_k^4 m_l^2 - 56m_i m_j^8 m_k^5 m_l^2 - 30m_j^9 m_k^5 m_l^2 \\
&-28m_j^8 m_k^6 m_l^2 + 21m_i m_j^{11} m_l^4 + 21m_j^{12} m_l^4 + 21m_j^{11} m_k m_l^4 - 310m_i^2 m_j^8 m_k^2 m_l^4 - 670m_i m_j^9 m_k^2 m_l^4 \\
&-360m_j^{10} m_k^2 m_l^4 - 620m_i m_j^8 m_k^3 m_l^4 - 670m_j^9 m_k^3 m_l^4 + 29m_i^3 m_j^5 m_k^4 m_l^4 + 47m_i^2 m_j^6 m_k^4 m_l^4 \\
&+36m_i m_j^7 m_k^4 m_l^4 - 292m_j^8 m_k^4 m_l^4 + 87m_i^2 m_j^5 m_k^5 m_l^4 + 94m_i m_j^6 m_k^5 m_l^4 + 36m_j^7 m_k^5 m_l^4 \\
&+87m_i m_j^5 m_k^6 m_l^4 + 47m_j^6 m_k^6 m_l^4 + 29m_j^5 m_k^7 m_l^4 - 154m_i^2 m_j^8 m_l^6 - 308m_i m_j^9 m_l^6 - 154m_j^{10} m_l^6 \\
&-308m_i m_j^8 m_k m_l^6 - 308m_j^9 m_k m_l^6 - 50m_i^3 m_j^5 m_k^2 m_l^6 - 460m_i^2 m_j^6 m_k^2 m_l^6 - 770m_i m_j^7 m_k^2 m_l^6 \\
&-514m_j^8 m_k^2 m_l^6 - 150m_i^2 m_j^5 m_k^3 m_l^6 - 920m_i m_j^6 m_k^3 m_l^6 - 770m_j^7 m_k^3 m_l^6 - 10m_i^4 m_j^2 m_k^4 m_l^6 \\
&-14m_i^3 m_j^3 m_k^4 m_l^6 - 10m_i^2 m_j^4 m_k^4 m_l^6 - 168m_i m_j^5 m_k^4 m_l^6 - 472m_j^6 m_k^4 m_l^6 - 40m_i^3 m_j^2 m_k^5 m_l^6 \\
&-42m_i^2 m_j^3 m_k^5 m_l^6 - 20m_i m_j^4 m_k^5 m_l^6 - 68m_j^5 m_k^5 m_l^6 - 60m_i^2 m_j^2 m_k^6 m_l^6 - 42m_i m_j^3 m_k^6 m_l^6 \\
&-10m_j^4 m_k^6 m_l^6 - 40m_i m_j^2 m_k^7 m_l^6 - 14m_j^3 m_k^7 m_l^6 - 10m_j^2 m_k^8 m_l^6 + 21m_i^3 m_j^5 m_l^8 + 63m_i^2 m_j^6 m_l^8 \\
&+63m_i m_j^7 m_l^8 + 21m_j^8 m_l^8 + 63m_i^2 m_j^5 m_k m_l^8 + 126m_i m_j^6 m_k m_l^8 + 63m_j^7 m_k m_l^8 + 6m_i^4 m_j^2 m_k^2 m_l^8 \\
&-6m_i^3 m_j^3 m_k^2 m_l^8 - 54m_i^2 m_j^4 m_k^2 m_l^8 - 3m_i m_j^5 m_k^2 m_l^8 + 39m_j^6 m_k^2 m_l^8 + 24m_i^3 m_j^2 m_k^3 m_l^8 \\
&-18m_i^2 m_j^3 m_k^3 m_l^8 - 108m_i m_j^4 m_k^3 m_l^8 - 45m_j^5 m_k^3 m_l^8 - 6m_i^4 m_k^4 m_l^8 - 15m_i^3 m_j m_k^4 m_l^8 \\
&+27m_i^2 m_j^2 m_k^4 m_l^8 - 15m_i m_j^3 m_k^4 m_l^8 - 51m_j^4 m_k^4 m_l^8 - 24m_i^3 m_k^5 m_l^8 - 45m_i^2 m_j m_k^5 m_l^8 \\
&+6m_i m_j^2 m_k^5 m_l^8 - 3m_j^3 m_k^5 m_l^8 - 36m_i^2 m_k^6 m_l^8 - 45m_i m_j m_k^6 m_l^8 - 3m_j^2 m_k^6 m_l^8 - 24m_i m_k^7 m_l^8 \\
&-15m_j m_k^7 m_l^8 - 6m_k^8 m_l^8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{111}(m_i, m_j, m_k, m_l) \\
= \;& -m_i^3 m_j^9 m_k^6 - 3m_i^2 m_j^9 m_k^7 - 3m_i m_j^9 m_k^8 - m_j^9 m_k^9 + 3m_i^3 m_j^9 m_k^4 m_l^2 + 3m_i^2 m_j^{10} m_k^4 m_l^2 \\
&+9m_i^2 m_j^9 m_k^5 m_l^2 + 6m_i m_j^{10} m_k^5 m_l^2 + 3m_i^4 m_j^6 m_k^6 m_l^2 + 3m_i^3 m_j^7 m_k^6 m_l^2 + 9m_i m_j^9 m_k^6 m_l^2 \\
&+3m_j^{10} m_k^6 m_l^2 + 12m_i^3 m_j^6 m_k^7 m_l^2 + 9m_i^2 m_j^7 m_k^7 m_l^2 + 3m_j^9 m_k^7 m_l^2 + 18m_i^2 m_j^6 m_k^8 m_l^2 \\
&+9m_i m_j^7 m_k^8 m_l^2 + 12m_i m_j^6 m_k^9 m_l^2 + 3m_j^7 m_k^9 m_l^2 + 3m_j^6 m_k^{10} m_l^2 - 3m_i^3 m_j^9 m_k^2 m_l^4 \\
&-6m_i^2 m_j^{10} m_k^2 m_l^4 - 3m_i m_j^{11} m_k^2 m_l^4 - 9m_i^2 m_j^9 m_k^3 m_l^4 - 12m_i m_j^{10} m_k^3 m_l^4 - 3m_j^{11} m_k^3 m_l^4 \\
&+21m_i^4 m_j^6 m_k^4 m_l^4 + 42m_i^3 m_j^7 m_k^4 m_l^4 + 21m_i^2 m_j^8 m_k^4 m_l^4 - 9m_i m_j^9 m_k^4 m_l^4 - 6m_j^{10} m_k^4 m_l^4 \\
&+84m_i^3 m_j^6 m_k^5 m_l^4 + 126m_i^2 m_j^7 m_k^5 m_l^4 + 42m_i m_j^8 m_k^5 m_l^4 - 3m_j^9 m_k^5 m_l^4 - 3m_i^5 m_j^3 m_k^6 m_l^4 \\
&-6m_i^4 m_j^4 m_k^6 m_l^4 - 3m_i^3 m_j^5 m_k^6 m_l^4 + 126m_i^2 m_j^6 m_k^6 m_l^4 + 126m_i m_j^7 m_k^6 m_l^4 + 21m_j^8 m_k^6 m_l^4 \\
&-15m_i^4 m_j^3 m_k^7 m_l^4 - 24m_i^3 m_j^4 m_k^7 m_l^4 - 9m_i^2 m_j^5 m_k^7 m_l^4 + 84m_i m_j^6 m_k^7 m_l^4 + 42m_j^7 m_k^7 m_l^4 \\
&-30m_i^3 m_j^3 m_k^8 m_l^4 - 36m_i^2 m_j^4 m_k^8 m_l^4 - 9m_i m_j^5 m_k^8 m_l^4 + 21m_j^6 m_k^8 m_l^4 - 30m_i^2 m_j^3 m_k^9 m_l^4 \\
&-24m_i m_j^4 m_k^9 m_l^4 - 3m_j^5 m_k^9 m_l^4 - 15m_i m_j^3 m_k^{10} m_l^4 - 6m_j^4 m_k^{10} m_l^4 - 3m_j^3 m_k^{11} m_l^4 + m_i^3 m_j^9 m_l^6 \\
&+3m_i^2 m_j^{10} m_l^6 + 3m_i m_j^{11} m_l^6 + m_j^{12} m_l^6 + 3m_i^2 m_j^9 m_k m_l^6 + 6m_i m_j^{10} m_k m_l^6 + 3m_j^{11} m_k m_l^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+3m_i^4m_j^6m_k^2m_l^6+9m_i^3m_j^7m_k^2m_l^6+9m_i^2m_j^8m_k^2m_l^6+6m_im_j^9m_k^2m_l^6+3m_j^{10}m_k^2m_l^6\\
&+12m_i^3m_j^6m_k^3m_l^6+27m_i^2m_j^7m_k^3m_l^6+18m_im_j^8m_k^3m_l^6+4m_j^9m_k^3m_l^6+3m_i^5m_j^3m_k^4m_l^6\\
&+9m_i^4m_j^4m_k^4m_l^6+9m_i^3m_j^5m_k^4m_l^6+21m_i^2m_j^6m_k^4m_l^6+27m_im_j^7m_k^4m_l^6+9m_j^8m_k^4m_l^6\\
&+15m_i^4m_j^3m_k^5m_l^6+36m_i^3m_j^4m_k^5m_l^6+27m_i^2m_j^5m_k^5m_l^6+18m_im_j^6m_k^5m_l^6+9m_j^7m_k^5m_l^6\\
&+m_i^6m_k^6m_l^6+3m_i^5m_jm_k^6m_l^6+3m_i^4m_j^2m_k^6m_l^6+31m_i^3m_j^3m_k^6m_l^6+54m_i^2m_j^4m_k^6m_l^6\\
&+27m_im_j^5m_k^6m_l^6+6m_j^6m_k^6m_l^6+6m_i^5m_k^7m_l^6+15m_i^4m_jm_k^7m_l^6+12m_i^3m_j^2m_k^7m_l^6\\
&+33m_i^2m_j^3m_k^7m_l^6+36m_im_j^4m_k^7m_l^6+9m_j^5m_k^7m_l^6+15m_i^4m_k^8m_l^6+30m_i^3m_jm_k^8m_l^6\\
&+18m_i^2m_j^2m_k^8m_l^6+18m_im_j^3m_k^8m_l^6+9m_j^4m_k^8m_l^6+20m_i^3m_k^9m_l^6+30m_i^2m_jm_k^9m_l^6\\
&+12m_im_j^2m_k^9m_l^6+4m_j^3m_k^9m_l^6+15m_i^2m_k^{10}m_l^6+15m_im_jm_k^{10}m_l^6+3m_j^2m_k^{10}m_l^6\\
&+6m_im_k^{11}m_l^6+3m_jm_k^{11}m_l^6+m_k^{12}m_l^6.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{221}\ (m_i,m_j,m_k,m_l,m_n)\\
=\ &3m_i^4m_k^{12}m_l^4+3m_i^3m_jm_k^{12}m_l^4-9m_i^2m_j^2m_k^{12}m_l^4-15m_im_j^3m_k^{12}m_l^4-6m_j^4m_k^{12}m_l^4+9m_i^4m_k^{11}m_l^5\\
&+27m_i^3m_jm_k^{11}m_l^5+27m_i^2m_j^2m_k^{11}m_l^5+9m_im_j^3m_k^{11}m_l^5-9m_i^3m_jm_k^{11}m_l^4m_n-27m_i^2m_j^2m_k^{11}m_l^4m_n\\
&-27m_im_j^3m_k^{11}m_l^4m_n-9m_j^4m_k^{11}m_l^4m_n-24m_i^4m_k^{12}m_l^2m_n^2-66m_i^3m_jm_k^{12}m_l^2m_n^2\\
&-54m_i^2m_j^2m_k^{12}m_l^2m_n^2-6m_im_j^3m_k^{12}m_l^2m_n^2+6m_j^4m_k^{12}m_l^2m_n^2-30m_i^4m_k^{11}m_l^3m_n^2\\
&-90m_i^3m_jm_k^{11}m_l^3m_n^2-90m_i^2m_j^2m_k^{11}m_l^3m_n^2-30m_im_j^3m_k^{11}m_l^3m_n^2-12m_i^4m_k^{10}m_l^4m_n^2\\
&-18m_i^3m_jm_k^{10}m_l^4m_n^2-10m_i^2m_j^2m_k^{10}m_l^4m_n^2-14m_im_j^3m_k^{10}m_l^4m_n^2-10m_j^4m_k^{10}m_l^4m_n^2\\
&-30m_i^4m_k^9m_l^5m_n^2-34m_i^3m_jm_k^9m_l^5m_n^2+22m_i^2m_j^2m_k^9m_l^5m_n^2+26m_im_j^3m_k^9m_l^5m_n^2\\
&-28m_i^4m_k^8m_l^6m_n^2-56m_i^3m_jm_k^8m_l^6m_n^2-28m_i^2m_j^2m_k^8m_l^6m_n^2+30m_i^3m_jm_k^{11}m_l^2m_n^3\\
&+90m_i^2m_j^2m_k^{11}m_l^2m_n^3+90m_im_j^3m_k^{11}m_l^2m_n^3+30m_j^4m_k^{11}m_l^2m_n^3+30m_i^3m_jm_k^9m_l^4m_n^3\\
&+34m_i^2m_j^2m_k^9m_l^4m_n^3-22m_im_j^3m_k^9m_l^4m_n^3-26m_j^4m_k^9m_l^4m_n^3+56m_i^3m_jm_k^8m_l^5m_n^3\\
&+112m_i^2m_j^2m_k^8m_l^5m_n^3+56m_im_j^3m_k^8m_l^5m_n^3+21m_i^4m_k^{12}m_n^4+63m_i^3m_jm_k^{12}m_n^4+63m_i^2m_j^2m_k^{12}m_n^4\\
&+21m_im_j^3m_k^{12}m_n^4+21m_i^4m_k^{11}m_lm_n^4+63m_i^3m_jm_k^{11}m_lm_n^4+63m_i^2m_j^2m_k^{11}m_lm_n^4\\
&+21m_im_j^3m_k^{11}m_lm_n^4-360m_i^4m_k^{10}m_l^2m_n^4-770m_i^3m_jm_k^{10}m_l^2m_n^4-460m_i^2m_j^2m_k^{10}m_l^2m_n^4\\
&-50m_im_j^3m_k^{10}m_l^2m_n^4-670m_i^4m_k^9m_l^3m_n^4-1390m_i^3m_jm_k^9m_l^3m_n^4-770m_i^2m_j^2m_k^9m_l^3m_n^4\\
&-50m_im_j^3m_k^9m_l^3m_n^4-292m_i^4m_k^8m_l^4m_n^4-584m_i^3m_jm_k^8m_l^4m_n^4-291m_i^2m_j^2m_k^8m_l^4m_n^4\\
&-27m_im_j^3m_k^8m_l^4m_n^4-28m_j^4m_k^8m_l^4m_n^4+36m_i^4m_k^7m_l^5m_n^4+14m_i^3m_jm_k^7m_l^5m_n^4+7m_i^2m_j^2m_k^7m_l^5m_n^4\\
&+29m_im_j^3m_k^7m_l^5m_n^4+47m_i^4m_k^6m_l^6m_n^4+7m_i^3m_jm_k^6m_l^6m_n^4-40m_i^2m_j^2m_k^6m_l^6m_n^4\\
&+29m_i^4m_k^5m_l^7m_n^4+29m_i^3m_jm_k^5m_l^7m_n^4-21m_i^3m_jm_k^{11}m_n^5-63m_i^2m_j^2m_k^{11}m_n^5-63m_im_j^3m_k^{11}m_n^5\\
&-21m_j^4m_k^{11}m_n^5+670m_i^3m_jm_k^9m_l^2m_n^5+1390m_i^2m_j^2m_k^9m_l^2m_n^5+770m_im_j^3m_k^9m_l^2m_n^5\\
&+50m_j^4m_k^9m_l^2m_n^5+620m_i^3m_jm_k^8m_l^3m_n^5+1240m_i^2m_j^2m_k^8m_l^3m_n^5+620m_im_j^3m_k^8m_l^3m_n^5\\
&-36m_i^3m_jm_k^7m_l^4m_n^5-14m_i^2m_j^2m_k^7m_l^4m_n^5-7m_im_j^3m_k^7m_l^4m_n^5-29m_j^4m_k^7m_l^4m_n^5\\
&-94m_i^3m_jm_k^6m_l^5m_n^5-14m_i^2m_j^2m_k^6m_l^5m_n^5+80m_im_j^3m_k^6m_l^5m_n^5-87m_i^3m_jm_k^5m_l^6m_n^5\\
&-87m_i^2m_j^2m_k^5m_l^6m_n^5-154m_i^4m_k^{10}m_n^6-308m_i^3m_jm_k^{10}m_n^6-154m_i^2m_j^2m_k^{10}m_n^6-308m_i^4m_k^9m_lm_n^6\\
&-616m_i^3m_jm_k^9m_lm_n^6-308m_i^2m_j^2m_k^9m_lm_n^6-514m_i^4m_k^8m_l^2m_n^6-978m_i^3m_jm_k^8m_l^2m_n^6\\
&-774m_i^2m_j^2m_k^8m_l^2m_n^6-620m_im_j^3m_k^8m_l^2m_n^6-310m_j^4m_k^8m_l^2m_n^6-770m_i^4m_k^7m_l^3m_n^6\\
&-1390m_i^3m_jm_k^7m_l^3m_n^6-620m_i^2m_j^2m_k^7m_l^3m_n^6-472m_i^4m_k^6m_l^4m_n^6-800m_i^3m_jm_k^6m_l^4m_n^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-291m_i^2m_j^2m_k^6m_l^4m_n^6+7m_im_j^3m_k^6m_l^4m_n^6-40m_j^4m_k^6m_l^4m_n^6-68m_i^4m_k^5m_l^5m_n^6\\
&-84m_i^3m_jm_k^5m_l^5m_n^6+31m_i^2m_j^2m_k^5m_l^5m_n^6+87m_im_j^3m_k^5m_l^5m_n^6-10m_i^4m_k^4m_l^6m_n^6\\
&+22m_i^3m_jm_k^4m_l^6m_n^6-28m_i^2m_j^2m_k^4m_l^6m_n^6-14m_i^4m_k^3m_l^7m_n^6+26m_i^3m_jm_k^3m_l^7m_n^6\\
&-10m_i^4m_k^2m_l^8m_n^6+308m_i^3m_jm_k^9m_n^7+616m_i^2m_j^2m_k^9m_n^7+308m_im_j^3m_k^9m_n^7+308m_i^3m_jm_k^8m_lm_n^7\\
&+616m_i^2m_j^2m_k^8m_lm_n^7+308m_im_j^3m_k^8m_lm_n^7+770m_i^3m_jm_k^7m_l^2m_n^7+1390m_i^2m_j^2m_k^7m_l^2m_n^7\\
&+620m_im_j^3m_k^7m_l^2m_n^7+920m_i^3m_jm_k^6m_l^3m_n^7+1540m_i^2m_j^2m_k^6m_l^3m_n^7+620m_im_j^3m_k^6m_l^3m_n^7\\
&+168m_i^3m_jm_k^5m_l^4m_n^7+184m_i^2m_j^2m_k^5m_l^4m_n^7+27m_im_j^3m_k^5m_l^4m_n^7-29m_j^4m_k^5m_l^4m_n^7\\
&+20m_i^3m_jm_k^4m_l^5m_n^7-44m_i^2m_j^2m_k^4m_l^5m_n^7+56m_im_j^3m_k^4m_l^5m_n^7+42m_i^3m_jm_k^3m_l^6m_n^7\\
&-78m_i^2m_j^2m_k^3m_l^6m_n^7+40m_i^3m_jm_k^2m_l^7m_n^7+21m_i^4m_k^8m_n^8+21m_i^3m_jm_k^8m_n^8-154m_i^2m_j^2m_k^8m_n^8\\
&-308m_im_j^3m_k^8m_n^8-154m_j^4m_k^8m_n^8+63m_i^4m_k^7m_lm_n^8+63m_i^3m_jm_k^7m_lm_n^8+39m_i^4m_k^6m_l^2m_n^8\\
&+33m_i^3m_jm_k^6m_l^2m_n^8-460m_i^2m_j^2m_k^6m_l^2m_n^8-770m_im_j^3m_k^6m_l^2m_n^8-310m_j^4m_k^6m_l^2m_n^8\\
&-45m_i^4m_k^5m_l^3m_n^8-69m_i^3m_jm_k^5m_l^3m_n^8-150m_i^2m_j^2m_k^5m_l^3m_n^8-150m_im_j^3m_k^5m_l^3m_n^8\\
&-51m_i^4m_k^4m_l^4m_n^8-81m_i^3m_jm_k^4m_l^4m_n^8-10m_i^2m_j^2m_k^4m_l^4m_n^8+22m_im_j^3m_k^4m_l^4m_n^8\\
&-28m_j^4m_k^4m_l^4m_n^8-3m_i^4m_k^3m_l^5m_n^8-3m_i^3m_jm_k^3m_l^5m_n^8-42m_i^2m_j^2m_k^3m_l^5m_n^8+78m_im_j^3m_k^3m_l^5m_n^8\\
&-3m_i^4m_k^2m_l^6m_n^8+27m_i^3m_jm_k^2m_l^6m_n^8-60m_i^2m_j^2m_k^2m_l^6m_n^8-15m_i^4m_km_l^7m_n^8+9m_i^3m_jm_km_l^7m_n^8\\
&-6m_i^4m_l^8m_n^8-63m_i^3m_jm_k^7m_n^9-63m_i^2m_j^2m_k^7m_n^9-126m_i^3m_jm_k^6m_lm_n^9-126m_i^2m_j^2m_k^6m_lm_n^9\\
&+3m_i^3m_jm_k^5m_l^2m_n^9+27m_i^2m_j^2m_k^5m_l^2m_n^9+50m_im_j^3m_k^5m_l^2m_n^9+50m_j^4m_k^5m_l^2m_n^9\\
&+108m_i^3m_jm_k^4m_l^3m_n^9+180m_i^2m_j^2m_k^4m_l^3m_n^9+15m_i^3m_jm_k^3m_l^4m_n^9+63m_i^2m_j^2m_k^3m_l^4m_n^9\\
&+14m_im_j^3m_k^3m_l^4m_n^9-26m_j^4m_k^3m_l^4m_n^9-6m_i^3m_jm_k^2m_l^5m_n^9-54m_i^2m_j^2m_k^2m_l^5m_n^9\\
&+40m_im_j^3m_k^2m_l^5m_n^9+45m_i^3m_jm_km_l^6m_n^9-27m_i^2m_j^2m_km_l^6m_n^9+24m_i^3m_jm_l^7m_n^9+63m_i^2m_j^2m_k^6m_n^{10}\\
&+63m_im_j^3m_k^6m_n^{10}+63m_i^2m_j^2m_k^5m_lm_n^{10}+63m_im_j^3m_k^5m_lm_n^{10}-54m_i^2m_j^2m_k^4m_l^2m_n^{10}\\
&-90m_im_j^3m_k^4m_l^2m_n^{10}-18m_i^2m_j^2m_k^3m_l^3m_n^{10}-90m_im_j^3m_k^3m_l^3m_n^{10}+27m_i^2m_j^2m_k^2m_l^4m_n^{10}\\
&+27m_im_j^3m_k^2m_l^4m_n^{10}-10m_j^4m_k^2m_l^4m_n^{10}-45m_i^2m_j^2m_km_l^5m_n^{10}+27m_im_j^3m_km_l^5m_n^{10}-36m_i^2m_j^2m_l^6m_n^{10}\\
&-21m_im_j^3m_k^5m_n^{11}-21m_j^4m_k^5m_n^{11}+6m_im_j^3m_k^3m_l^2m_n^{11}+30m_j^4m_k^3m_l^2m_n^{11}-24m_im_j^3m_k^2m_l^3m_n^{11}\\
&+15m_im_j^3m_km_l^4m_n^{11}-9m_j^4m_km_l^4m_n^{11}+24m_im_j^3m_l^5m_n^{11}+6m_j^4m_k^2m_l^2m_n^{12}-6m_j^4m_l^4m_l^{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{374}(m_i,m_j,m_k,m_l,m_n)\\
=\;&m_i^3m_j^3m_k^{12}m_l^6+3m_i^2m_j^4m_k^{12}m_l^6+3m_im_j^5m_k^{12}m_l^6+m_j^6m_k^{12}m_l^6-3m_i^4m_j^2m_k^{11}m_l^7-9m_i^3m_j^3m_k^{11}m_l^7\\
&-9m_i^2m_j^4m_k^{11}m_l^7-3m_im_j^5m_k^{11}m_l^7+3m_i^5m_jm_k^{10}m_l^8+9m_i^4m_j^2m_k^{10}m_l^8+9m_i^3m_j^3m_k^{10}m_l^8\\
&+3m_i^2m_j^4m_k^{10}m_l^8-m_i^6m_k^9m_l^9-3m_i^5m_jm_k^9m_l^9-3m_i^4m_j^2m_k^9m_l^9-m_i^3m_j^3m_k^9m_l^9+3m_i^3m_j^3m_k^{11}m_l^6m_n\\
&+9m_i^2m_j^4m_k^{11}m_l^6m_n+9m_im_j^5m_k^{11}m_l^6m_n+3m_j^6m_k^{11}m_l^6m_n-6m_i^4m_j^2m_k^{10}m_l^7m_n\\
&-18m_i^3m_j^3m_k^{10}m_l^7m_n-18m_i^2m_j^4m_k^{10}m_l^7m_n-6m_im_j^5m_k^{10}m_l^7m_n+3m_i^5m_jm_k^9m_l^8m_n\\
&+9m_i^4m_j^2m_k^9m_l^8m_n+9m_i^3m_j^3m_k^9m_l^8m_n+3m_i^2m_j^4m_k^9m_l^8m_n+3m_i^4m_j^2m_k^{12}m_l^4m_n^2\\
&+9m_i^3m_j^3m_k^{12}m_l^4m_n^2+9m_i^2m_j^4m_k^{12}m_l^4m_n^2+3m_im_j^5m_k^{12}m_l^4m_n^2-6m_i^5m_jm_k^{11}m_l^5m_n^2\\
&-15m_i^4m_j^2m_k^{11}m_l^5m_n^2-9m_i^3m_j^3m_k^{11}m_l^5m_n^2+3m_i^2m_j^4m_k^{11}m_l^5m_n^2+3m_im_j^5m_k^{11}m_l^5m_n^2\\
&+3m_i^6m_k^{10}m_l^6m_n^2+3m_i^5m_jm_k^{10}m_l^6m_n^2-9m_i^4m_j^2m_k^{10}m_l^6m_n^2-15m_i^3m_j^3m_k^{10}m_l^6m_n^2\\
&-3m_i^2m_j^4m_k^{10}m_l^6m_n^2+6m_im_j^5m_k^{10}m_l^6m_n^2+3m_j^6m_k^{10}m_l^6m_n^2+3m_i^6m_k^9m_l^7m_n^2+9m_i^5m_jm_k^9m_l^7m_n^2\\
&+15m_i^4m_j^2m_k^9m_l^7m_n^2+9m_i^3m_j^3m_k^9m_l^7m_n^2-6m_i^2m_j^4m_k^9m_l^7m_n^2-6m_im_j^5m_k^9m_l^7m_n^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-9m_i^5m_jm_k^8m_l^8m_n^2-9m_i^4m_j^2m_k^8m_l^8m_n^2+9m_i^3m_j^3m_k^8m_l^8m_n^2+9m_i^2m_j^4m_k^8m_l^8m_n^2+3m_i^6m_k^7m_l^9m_n^2\\
&-3m_i^5m_jm_k^7m_l^9m_n^2-15m_i^4m_j^2m_k^7m_l^9m_n^2-9m_i^3m_j^3m_k^7m_l^9m_n^2+3m_i^6m_k^6m_l^{10}m_n^2\\
&+6m_i^5m_jm_k^6m_l^{10}m_n^2+3m_i^4m_j^2m_k^6m_l^{10}m_n^2+6m_i^4m_j^2m_k^{11}m_l^4m_n^3+15m_i^3m_j^3m_k^{11}m_l^4m_n^3\\
&+9m_i^2m_j^4m_k^{11}m_l^4m_n^3-3m_im_j^5m_k^{11}m_l^4m_n^3-3m_j^6m_k^{11}m_l^4m_n^3-6m_i^5m_jm_k^{10}m_l^5m_n^3\\
&-6m_i^4m_j^2m_k^{10}m_l^5m_n^3+18m_i^3m_j^3m_k^{10}m_l^5m_n^3+30m_i^2m_j^4m_k^{10}m_l^5m_n^3+12m_im_j^5m_k^{10}m_l^5m_n^3\\
&-9m_i^5m_jm_k^9m_l^6m_n^3-27m_i^4m_j^2m_k^9m_l^6m_n^3-35m_i^3m_j^3m_k^9m_l^6m_n^3-21m_i^2m_j^4m_k^9m_l^6m_n^3\\
&+4m_j^6m_k^9m_l^6m_n^3+18m_i^4m_j^2m_k^8m_l^7m_n^3+18m_i^3m_j^3m_k^8m_l^7m_n^3-18m_i^2m_j^4m_k^8m_l^7m_n^3\\
&-18m_im_j^5m_k^8m_l^7m_n^3-9m_i^5m_jm_k^7m_l^8m_n^3+9m_i^4m_j^2m_k^7m_l^8m_n^3+45m_i^3m_j^3m_k^7m_l^8m_n^3\\
&+27m_i^2m_j^4m_k^7m_l^8m_n^3-12m_i^5m_jm_k^6m_l^9m_n^3-24m_i^4m_j^2m_k^6m_l^9m_n^3-12m_i^3m_j^3m_k^6m_l^9m_n^3\\
&+3m_i^5m_jm_k^{12}m_l^2m_n^4+9m_i^4m_j^2m_k^{12}m_l^2m_n^4+9m_i^3m_j^3m_k^{12}m_l^2m_n^4+3m_i^2m_j^4m_k^{12}m_l^2m_n^4\\
&-3m_i^6m_k^{11}m_l^3m_n^4-3m_i^5m_jm_k^{11}m_l^3m_n^4+9m_i^4m_j^2m_k^{11}m_l^3m_n^4+15m_i^3m_j^3m_k^{11}m_l^3m_n^4\\
&+6m_i^2m_j^4m_k^{11}m_l^3m_n^4-6m_i^6m_k^{10}m_l^4m_n^4-15m_i^5m_jm_k^{10}m_l^4m_n^4+15m_i^4m_j^2m_k^{10}m_l^4m_n^4\\
&+48m_i^3m_j^3m_k^{10}m_l^4m_n^4+15m_i^2m_j^4m_k^{10}m_l^4m_n^4-15m_im_j^5m_k^{10}m_l^4m_n^4-6m_j^6m_k^{10}m_l^4m_n^4\\
&-3m_i^6m_k^9m_l^5m_n^4-51m_i^5m_jm_k^9m_l^5m_n^4-42m_i^4m_j^2m_k^9m_l^5m_n^4+66m_i^3m_j^3m_k^9m_l^5m_n^4\\
&+69m_i^2m_j^4m_k^9m_l^5m_n^4+9m_im_j^5m_k^9m_l^5m_n^4+21m_i^6m_k^8m_l^6m_n^4-42m_i^5m_jm_k^8m_l^6m_n^4\\
&-126m_i^4m_j^2m_k^8m_l^6m_n^4-48m_i^3m_j^3m_k^8m_l^6m_n^4+15m_i^2m_j^4m_k^8m_l^6m_n^4+9m_im_j^5m_k^8m_l^6m_n^4\\
&+9m_j^6m_k^8m_l^6m_n^4+42m_i^6m_k^7m_l^7m_n^4+42m_i^5m_jm_k^7m_l^7m_n^4-42m_i^4m_j^2m_k^7m_l^7m_n^4\\
&-54m_i^3m_j^3m_k^7m_l^7m_n^4-39m_i^2m_j^4m_k^7m_l^7m_n^4-27m_im_j^5m_k^7m_l^7m_n^4+21m_i^6m_k^6m_l^8m_n^4\\
&+51m_i^5m_jm_k^6m_l^8m_n^4+30m_i^4m_j^2m_k^6m_l^8m_n^4+21m_i^3m_j^3m_k^6m_l^8m_n^4+21m_i^2m_j^4m_k^6m_l^8m_n^4\\
&-3m_i^6m_k^5m_l^9m_n^4+15m_i^5m_jm_k^5m_l^9m_n^4+9m_i^4m_j^2m_k^5m_l^9m_n^4-9m_i^3m_j^3m_k^5m_l^9m_n^4\\
&-6m_i^6m_k^4m_l^{10}m_n^4+3m_i^5m_jm_k^4m_l^{10}m_n^4+9m_i^4m_j^2m_k^4m_l^{10}m_n^4-3m_i^6m_k^3m_l^{11}m_n^4\\
&-3m_i^5m_jm_k^3m_l^{11}m_n^4+3m_i^5m_jm_k^{11}m_l^2m_n^5+3m_i^4m_j^2m_k^{11}m_l^2m_n^5-9m_i^3m_j^3m_k^{11}m_l^2m_n^5\\
&-15m_i^2m_j^4m_k^{11}m_l^2m_n^5-6m_im_j^5m_k^{11}m_l^2m_n^5+12m_i^5m_jm_k^{10}m_l^3m_n^5+30m_i^4m_j^2m_k^{10}m_l^3m_n^5\\
&+18m_i^3m_j^3m_k^{10}m_l^3m_n^5-6m_i^2m_j^4m_k^{10}m_l^3m_n^5-6m_im_j^5m_k^{10}m_l^3m_n^5+9m_i^5m_jm_k^9m_l^4m_n^5\\
&+69m_i^4m_j^2m_k^9m_l^4m_n^5+66m_i^3m_j^3m_k^9m_l^4m_n^5-42m_i^2m_j^4m_k^9m_l^4m_n^5-51m_im_j^5m_k^9m_l^4m_n^5\\
&-3m_j^6m_k^9m_l^4m_n^5-42m_i^5m_jm_k^8m_l^5m_n^5+84m_i^4m_j^2m_k^8m_l^5m_n^5+252m_i^3m_j^3m_k^8m_l^5m_n^5\\
&+84m_i^2m_j^4m_k^8m_l^5m_n^5-42m_im_j^5m_k^8m_l^5m_n^5-126m_i^5m_jm_k^7m_l^6m_n^5-126m_i^4m_j^2m_k^7m_l^6m_n^5\\
&+132m_i^3m_j^3m_k^7m_l^6m_n^5+132m_i^2m_j^4m_k^7m_l^6m_n^5+9m_im_j^5m_k^7m_l^6m_n^5+9m_j^6m_k^7m_l^6m_n^5\\
&-84m_i^5m_jm_k^6m_l^7m_n^5-186m_i^4m_j^2m_k^6m_l^7m_n^5-78m_i^3m_j^3m_k^6m_l^7m_n^5+6m_i^2m_j^4m_k^6m_l^7m_n^5\\
&-18m_im_j^5m_k^6m_l^7m_n^5+9m_i^5m_jm_k^5m_l^8m_n^5-45m_i^4m_j^2m_k^5m_l^8m_n^5-27m_i^3m_j^3m_k^5m_l^8m_n^5\\
&+27m_i^2m_j^4m_k^5m_l^8m_n^5+24m_i^5m_jm_k^4m_l^9m_n^5-12m_i^4m_j^2m_k^4m_l^9m_n^5-36m_i^3m_j^3m_k^4m_l^9m_n^5\\
&+15m_i^5m_jm_k^3m_l^{10}m_n^5+15m_i^4m_j^2m_k^3m_l^{10}m_n^5+m_i^6m_k^{12}m_n^6+3m_i^5m_jm_k^{12}m_n^6\\
&+3m_i^4m_j^2m_k^{12}m_n^6+m_i^3m_j^3m_k^{12}m_n^6+3m_i^6m_k^{11}m_lm_n^6+9m_i^5m_jm_k^{11}m_lm_n^6\\
&+9m_i^4m_j^2m_k^{11}m_lm_n^6+3m_i^3m_j^3m_k^{11}m_lm_n^6+3m_i^6m_k^{10}m_l^2m_n^6+6m_i^5m_jm_k^{10}m_l^2m_n^6\\
&-3m_i^4m_j^2m_k^{10}m_l^2m_n^6-15m_i^3m_j^3m_k^{10}m_l^2m_n^6-9m_i^2m_j^4m_k^{10}m_l^2m_n^6+3m_im_j^5m_k^{10}m_l^2m_n^6\\
&+3m_j^6m_k^{10}m_l^2m_n^6+4m_i^6m_k^9m_l^3m_n^6-21m_i^4m_j^2m_k^9m_l^3m_n^6-35m_i^3m_j^3m_k^9m_l^3m_n^6\\
&-27m_i^2m_j^4m_k^9m_l^3m_n^6-9m_im_j^5m_k^9m_l^3m_n^6+9m_i^6m_k^8m_l^4m_n^6+9m_i^5m_jm_k^8m_l^4m_n^6\\
&+15m_i^4m_j^2m_k^8m_l^4m_n^6-48m_i^3m_j^3m_k^8m_l^4m_n^6-126m_i^2m_j^4m_k^8m_l^4m_n^6-42m_im_j^5m_k^8m_l^4m_n^6\\
&+21m_j^6m_k^8m_l^4m_n^6+9m_i^6m_k^7m_l^5m_n^6+9m_i^5m_jm_k^7m_l^5m_n^6+132m_i^4m_j^2m_k^7m_l^5m_n^6\\
&+132m_i^3m_j^3m_k^7m_l^5m_n^6-126m_i^2m_j^4m_k^7m_l^5m_n^6-126m_im_j^5m_k^7m_l^5m_n^6+6m_i^6m_k^6m_l^6m_n^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-9m_i^5m_jm_k^6m_l^6m_n^6+120m_i^4m_j^2m_k^6m_l^6m_n^6+269m_i^3m_j^3m_k^6m_l^6m_n^6+120m_i^2m_j^4m_k^6m_l^6m_n^6\\
&-9m_im_j^5m_k^6m_l^6m_n^6+6m_j^6m_k^6m_l^6m_n^6+9m_i^6m_k^5m_l^7m_n^6-9m_i^5m_jm_k^5m_l^7m_n^6\\
&-21m_i^4m_j^2m_k^5m_l^7m_n^6+45m_i^3m_j^3m_k^5m_l^7m_n^6+27m_i^2m_j^4m_k^5m_l^7m_n^6-27m_im_j^5m_k^5m_l^7m_n^6\\
&+9m_i^6m_k^4m_l^8m_n^6-33m_i^4m_j^2m_k^4m_l^8m_n^6+15m_i^3m_j^3m_k^4m_l^8m_n^6+54m_i^2m_j^4m_k^4m_l^8m_n^6\\
&+4m_i^6m_k^3m_l^9m_n^6-6m_i^5m_jm_k^3m_l^9m_n^6-21m_i^4m_j^2m_k^3m_l^9m_n^6-31m_i^3m_j^3m_k^3m_l^9m_n^6\\
&+3m_i^6m_k^2m_l^{10}m_n^6-9m_i^5m_jm_k^2m_l^{10}m_n^6+3m_i^4m_j^2m_k^2m_l^{10}m_n^6+3m_i^6m_km_l^{11}m_n^6\\
&-3m_i^5m_jm_km_l^{11}m_n^6+m_i^6m_l^{12}m_n^6-3m_i^5m_jm_k^{11}m_n^7-9m_i^4m_j^2m_k^{11}m_n^7-9m_i^3m_j^3m_k^{11}m_n^7\\
&-3m_i^2m_j^4m_k^{11}m_n^7-6m_i^5m_jm_k^{10}m_lm_n^7-18m_i^4m_j^2m_k^{10}m_lm_n^7-18m_i^3m_j^3m_k^{10}m_lm_n^7\\
&-6m_i^2m_j^4m_k^{10}m_lm_n^7-6m_i^5m_jm_k^9m_l^2m_n^7-6m_i^4m_j^2m_k^9m_l^2m_n^7+9m_i^3m_j^3m_k^9m_l^2m_n^7\\
&+15m_i^2m_j^4m_k^9m_l^2m_n^7+9m_im_j^5m_k^9m_l^2m_n^7+3m_j^6m_k^9m_l^2m_n^7-18m_i^5m_jm_k^8m_l^3m_n^7\\
&-18m_i^4m_j^2m_k^8m_l^3m_n^7+18m_i^3m_j^3m_k^8m_l^3m_n^7+18m_i^2m_j^4m_k^8m_l^3m_n^7-27m_i^5m_jm_k^7m_l^4m_n^7\\
&-39m_i^4m_j^2m_k^7m_l^4m_n^7-54m_i^3m_j^3m_k^7m_l^4m_n^7-42m_i^2m_j^4m_k^7m_l^4m_n^7+42m_im_j^5m_k^7m_l^4m_n^7\\
&+42m_j^6m_k^7m_l^4m_n^7-18m_i^5m_jm_k^6m_l^5m_n^7+6m_i^4m_j^2m_k^6m_l^5m_n^7-78m_i^3m_j^3m_k^6m_l^5m_n^7\\
&-186m_i^2m_j^4m_k^6m_l^5m_n^7-84m_im_j^5m_k^6m_l^5m_n^7-27m_i^5m_jm_k^5m_l^6m_n^7+27m_i^4m_j^2m_k^5m_l^6m_n^7\\
&+45m_i^3m_j^3m_k^5m_l^6m_n^7-21m_i^2m_j^4m_k^5m_l^6m_n^7-9m_im_j^5m_k^5m_l^6m_n^7+9m_j^6m_k^5m_l^6m_n^7\\
&-36m_i^5m_jm_k^4m_l^7m_n^7-6m_i^4m_j^2m_k^4m_l^7m_n^7+30m_i^3m_j^3m_k^4m_l^7m_n^7-6m_i^2m_j^4m_k^4m_l^7m_n^7\\
&-36m_im_j^5m_k^4m_l^7m_n^7-18m_i^5m_jm_k^3m_l^8m_n^7+12m_i^4m_j^2m_k^3m_l^8m_n^7+3m_i^3m_j^3m_k^3m_l^8m_n^7\\
&+33m_i^2m_j^4m_k^3m_l^8m_n^7-12m_i^5m_jm_k^2m_l^9m_n^7+36m_i^4m_j^2m_k^2m_l^9m_n^7-12m_i^3m_j^3m_k^2m_l^9m_n^7\\
&-15m_i^5m_jm_km_l^{10}m_n^7+15m_i^4m_j^2m_km_l^{10}m_n^7-6m_i^5m_jm_l^{11}m_n^7+3m_i^4m_j^2m_k^{10}m_n^8\\
&+9m_i^3m_j^3m_k^{10}m_n^8+9m_i^2m_j^4m_k^{10}m_n^8+3m_im_j^5m_k^{10}m_n^8+3m_i^4m_j^2m_k^9m_lm_n^8\\
&+9m_i^3m_j^3m_k^9m_lm_n^8+9m_i^2m_j^4m_k^9m_lm_n^8+3m_im_j^5m_k^9m_lm_n^8+9m_i^4m_j^2m_k^8m_l^2m_n^8\\
&+9m_i^3m_j^3m_k^8m_l^2m_n^8-9m_i^2m_j^4m_k^8m_l^2m_n^8-9m_im_j^5m_k^8m_l^2m_n^8+27m_i^4m_j^2m_k^7m_l^3m_n^8\\
&+45m_i^3m_j^3m_k^7m_l^3m_n^8+9m_i^2m_j^4m_k^7m_l^3m_n^8-9m_im_j^5m_k^7m_l^3m_n^8+21m_i^4m_j^2m_k^6m_l^4m_n^8\\
&+21m_i^3m_j^3m_k^6m_l^4m_n^8+30m_i^2m_j^4m_k^6m_l^4m_n^8+51m_im_j^5m_k^6m_l^4m_n^8+21m_j^6m_k^6m_l^4m_n^8\\
&+27m_i^4m_j^2m_k^5m_l^5m_n^8-27m_i^3m_j^3m_k^5m_l^5m_n^8-45m_i^2m_j^4m_k^5m_l^5m_n^8+9m_im_j^5m_k^5m_l^5m_n^8\\
&+54m_i^4m_j^2m_k^4m_l^6m_n^8+15m_i^3m_j^3m_k^4m_l^6m_n^8-33m_i^2m_j^4m_k^4m_l^6m_n^8+9m_j^6m_k^4m_l^6m_n^8\\
&+33m_i^4m_j^2m_k^3m_l^7m_n^8+3m_i^3m_j^3m_k^3m_l^7m_n^8+12m_i^2m_j^4m_k^3m_l^7m_n^8-18m_im_j^5m_k^3m_l^7m_n^8\\
&+18m_i^4m_j^2m_k^2m_l^8m_n^8-54m_i^3m_j^3m_k^2m_l^8m_n^8+18m_i^2m_j^4m_k^2m_l^8m_n^8+30m_i^4m_j^2m_km_l^9m_n^8\\
&-30m_i^3m_j^3m_km_l^9m_n^8+15m_i^4m_j^2m_l^{10}m_n^8-m_i^3m_j^3m_k^9m_n^9-3m_i^2m_j^4m_k^9m_n^9-3m_im_j^5m_k^9m_n^9\\
&-m_j^6m_k^9m_n^9-9m_i^3m_j^3m_k^7m_l^2m_n^9-15m_i^2m_j^4m_k^7m_l^2m_n^9-3m_im_j^5m_k^7m_l^2m_n^9+3m_j^6m_k^7m_l^2m_n^9\\
&-12m_i^3m_j^3m_k^6m_l^3m_n^9-24m_i^2m_j^4m_k^6m_l^3m_n^9-12m_im_j^5m_k^6m_l^3m_n^9-9m_i^3m_j^3m_k^5m_l^4m_n^9\\
&+9m_i^2m_j^4m_k^5m_l^4m_n^9+15m_im_j^5m_k^5m_l^4m_n^9-3m_j^6m_k^5m_l^4m_n^9-36m_i^3m_j^3m_k^4m_l^5m_n^9\\
&-12m_i^2m_j^4m_k^4m_l^5m_n^9+24m_im_j^5m_k^4m_l^5m_n^9-31m_i^3m_j^3m_k^3m_l^6m_n^9-21m_i^2m_j^4m_k^3m_l^6m_n^9\\
&-6m_im_j^5m_k^3m_l^6m_n^9+4m_j^6m_k^3m_l^6m_n^9-12m_i^3m_j^3m_k^2m_l^7m_n^9+36m_i^2m_j^4m_k^2m_l^7m_n^9\\
&-12m_im_j^5m_k^2m_l^7m_n^9-30m_i^3m_j^3m_km_l^8m_n^9+30m_i^2m_j^4m_km_l^8m_n^9-20m_i^3m_j^3m_l^9m_n^9\\
&+3m_i^2m_j^4m_k^6m_l^2m_n^{10}+6m_im_j^5m_k^6m_l^2m_n^{10}+3m_j^6m_k^6m_l^2m_n^{10}+9m_i^2m_j^4m_k^4m_l^4m_n^{10}\\
&+3m_im_j^5m_k^4m_l^4m_n^{10}-6m_j^6m_k^4m_l^4m_n^{10}+15m_i^2m_j^4m_k^3m_l^5m_n^{10}+15m_im_j^5m_k^3m_l^5m_n^{10}\\
&+3m_i^2m_j^4m_k^2m_l^6m_n^{10}-9m_im_j^5m_k^2m_l^6m_n^{10}+3m_j^6m_k^2m_l^6m_n^{10}+15m_i^2m_j^4m_km_l^7m_n^{10}\\
&-15m_im_j^5m_km_l^7m_n^{10}+15m_i^2m_j^4m_l^8m_n^{10}-3m_im_j^5m_k^3m_l^4m_n^{11}-3m_j^6m_k^3m_l^4m_n^{11}\\
&-3m_im_j^5m_km_l^6m_n^{11}+3m_j^6m_km_l^6m_n^{11}-6m_im_j^5m_l^7m_n^{11}+m_j^6m_l^6m_n^{12}
\end{aligned}
$$

References

1. Albouy, A., 关于 Moeckel 一篇中心构型论文。 *Regul. Chaotic Dyn.* **8**, 133–142 (2003). 2.
Albouy A. Cabral H. E. Santos A.A. *Celest.*, , , , , , *Mech. Dyn. Astron.* **113** 369 375 2012
关于经典 n 体问题的一些问题。 , – ( ) 3. Albouy, A., Chenciner, A.: n 体问题与相互距离。 *Invent. Math.* **131**, 151 184 1998– ( ). 4.
Albouy A. Kaloshin V. *Ann.*, , , , 平 *Math.* **176** 535 588 2012
面上五个物体的中心构型有限性。 , – ( ). 5. Chazy, J., 关于 n 体问题的某些轨道， *Bull. Astronom.* **35**, 321–389 (1918). 6. Dias, T., Pan, BY., 六体问题和六涡旋问题的一类对称平面中心构型的一般有限性。 *J. Dyn. Diff. Equations* **32**, 1579–1602 (2020). 7. Dziobek, O., ¨论多体问题的一个奇特情形, *Astron. Nach.* **152**, 33–46 (2003). 8. Euler. L., 关于天体运动的考察。《彼得堡科学院新评论》。第 10 卷。1764 年。第 544–558 页。柏林科学院，1762 年 4 月。另见《全集》。第 25 卷，第 2 册。第 246–257 页。附有 M. Sch¨urer 的更正与评论。9.
Hampton M. *Qual.*, , 五涡 *Theory Dyn. Syst.* **8** 349 356 2009
旋问题和五体问题中风筝形相对平衡的有限性， – ( ). 10.
Hampton M. Jensen A. *Celest.*, , , , 五 *Mech. Dyn. Astr.* 109 321 332 2011
体问题中空间中心构型的有限性， : – ( ) 11.
Hampton M. Moeckel R. *Invent. Math.*, , , , 四 **163** 289 312 2006
体问题相对平衡的有限性， , – ( ). 12. Jensen, A., Leykin, A., 一般质量下的 Smale 第六问题。预印本，2023, arXiv:2301.02305。13. Lagrange, J. L., 关于三体问题的论文。 *Œuvres.* 第 6 卷。1772 年。第 229–324 页。 14. Leandro E. *Arch.*, , 某 *Rational Mech. Anal.* **167** 147 177 2003
些对称类中心构型的有限性与分岔。 , – ( ). 15. Moczurad, M., Zgliczyński, P., $n = 5$ 为 6、7 时等质量平面 n 体问题中的中心构型。 *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **131**, 46 (2019). 16. Moczurad, M., Zgliczyński, P., $n = 5$ 为 6 时等质量空间 n 体问题中的中心构型。 *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **132**, 56 (2020). 17. Moeckel, R., 关于中心构型。 *Math. Zeit.*, 205, 499–517. (1990). 18. Moeckel, R., Dziobek 构型的一般有限性。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 353, 4673–4686。19. Moeckel, R., *Lectures on central configurations*, 2014。 http://www.math.umn.edu/~rmoeckel/notes/Notes.html 20. Moulton, F. R., N 个物体问题的直线解。 *Ann. of Math.* (2) 12, 1–17 (1910). 21. Roberts, G. E., 五体问题中相对平衡的一个连续统 *Physica D* **127**, 141–145 (1999). 22. Smale, S., 下个世纪的数学问题， *Math. Intelligencer* **20**, 第 2 期，7–15 (1998). 23. Yu, X.; Zhu, S., 库仑四体问题中心构型的有限性。预印本，2021。24. Wintner, A., *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*,《普林斯顿数学丛书》第 5 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1941。25. Xia, Z., 含许多小质量体的中心构型， *J. Differential Equations* **91**, 168–179 (1991).

Department of Mathematics, National Tsing Hua University, Hsinchu 30013, Taiwan

Email address: sc5764801@gmail.com

Department of Mathematics, National Tsing Hua University, Hsinchu 30013, Taiwan*Email address*: kchen@math.nthu.edu.tw