arXiv:2303.02889v1 [math.GT] 6 Mar 2023

带符号和分次的曲面粘合与去范畴化 Heegaard Floer 理论

ANDREW MANION

Abstract. 关于沿区间粘合的曲面的去范畴化带边（缝合）Heegaard Floer 不变量的一个先前结果，推广了 Rouquier 以及作者在带角 Heegaard Floer 同调中的基于高阶张量积的粘合定理的去范畴化内容，但该结果仅在 $\mathbb{F}_2$ 上且未包含分次的情况下得到证明。本文加入符号，并在 $\mathbb{Z}$上证明带分次的区间粘合定理，从而能够将去范畴化 Heegaard Floer 理论的这些方面，与数学和物理学中关于非半单三维拓扑量子场论的现代研究进行更为细致的比较。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 9 2.1. 缝合曲面与开闭余 bordism 9 2.2. 外幂上的作用 10 2.3. 张量积 12 3. 带符号和分次的粘合定理 15 3.1. 主粘合引理 15 3.2. 定理 1.2 的证明 25 3.3. 推论1.3 的证明 27 4. 次数与奇偶性的约束 29 参考文献 31

1. Introduction

在 [MR20], Rapha¨el Rouquier 和作者重新表述并扩展了 Douglas– Manolescu [DM14]的工作，从而为带边缝合海加德·弗洛尔同调 [LOT18, Zar11] 赋予曲面的代数证明了一个结构更丰富的粘合定理。 [MR20] 的粘合定理基于一种新的张量积构造，用于某个与 $\mathfrak{gl}(1|1)^+$相关的特定微分分次幺半范畴 [Kho14] 的高阶表示。给定这样一个粘合定理，自然会去寻找一种拓扑量子场论解释。为此，一些初步讨论着重于其与二维开闭余边界的联系，见 [MR20, Section 7.2.5]。

从带边缝合 Heegaard Floer 理论的完整版本转向其去范畴化后，还可以进一步说明；在去范畴化中，高阶张量积变为普通

霍普夫代数表示的张量积。事实上，在 [Man22], 中，作者为曲面的去范畴化带边缝合 Heegaard Floer 不变量证明了一个粘合定理，将 [MR20] 中的粘合定理去范畴化加以推广，并将其置于一种更加灵活、更具拓扑量子场论风格的框架中。然而， [Man22] 中的结果仅在不带分次、系数取自 $\mathbb{F}_2$的情况下进行表述和证明；在这种情况下，可以忽略正负号（鉴于 [MR20] 中的分次结构并不容易导出去范畴化到 $\mathbb{Z}$上，这样处理是合理的）。

为 [Man22] 的研究结果添加分次和符号的一个原因，是使去范畴化带边缝合 Heegaard Floer 理论更贴近近年来活跃发展的非半单三维拓扑量子场论领域 [ADO92, CGPM14, Mik15, BCGPM16, GPV17, AGPS18, GPPV20, GHN$^+$21, CGP21, Jag22, GY 22], ，尤其是 Mikhaylov 所称的 $\mathfrak{psl}(1|1)$ Chern–Simons 理论 [Mik15] ；而 Geer–Young 提出了一种对其同调截断的数学描述 $\mathcal{D}^{q,\ \mathrm{int}}$ 即针对一般 q [GY22] 的拓扑量子场论。基于 Heegaard Floer 同调与 $\mathfrak{gl}(1|1)$之间的联系（[GPV17 第 3 节3], 从统一视角对此作了解释），人们希望去范畴化带边缝合 Heegaard Floer 理论中的思想能够推动对这些非半单三维拓扑量子场论的研究，反之亦然。然而，很难直接将这些拓扑量子场论与 [Man22]进行比较：它们定义在 $\mathbb{C}$ 之上，而非 $\mathbb{F}_2$；分次是 [Mik15, GY22]中的关键方面，却未出现在[Man22]中。参见 [CGP21 第 5] 节，了解分次在一般非半单三维拓扑量子场论中所发挥的重要作用。

本文的主要结果是对 [Man22] 中广义粘合定理的一个带分次与符号的版本。为陈述该结果，令 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 表示 Lauda–Pfeiffer 的开闭陪边范畴 [LP08]；非正式地说，$\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的对象 M 是定向圆与区间的不交并，而态射是二维开闭余边界。若 $F\colon M_1 \to M_2$ 是这样的态射，我们将[1] $S_+ = M_2 \sqcup (-M_1)$ 记作 ∂F 中分别对应源 M_1 与目标 M_2 的子集。对于 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的一个对象 M，我们将 $A(M)$ 记作对 M 的所有区间分支取张量积所得的环：每个区间分支对应一个 $\mathbb{Z}$ 分次的超环[2] $\mathbb{Z}[E]/(E^2) = U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{gl}(1|1)^+)$，其中 E 是奇元，且其 $\mathbb{Z}$ 次数为 -1。

设 $F\colon M_1 \to M_2$ 是 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的一个态射（我们认为 M_1 位于右侧， M_2位于左侧）。Zarev 的带边缝合 Heegaard Floer 不变量在 $\mathbb{F}_2$ 上的去范畴化与 $\wedge^* H_1(F, S_+; \mathbb{F}_2)$ 同构。若令 $A^{\mathbb{F}_2}(M_i) := A(M_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2$，那么将 [MR20] 的高阶作用去范畴化后，便赋予 $\wedge^* H_1(F, S_+; \mathbb{F}_2)$ 一个关于 $(A^{\mathbb{F}_2}(M_2)\ A^{\mathbb{F}_2}(M_1))$ 的双模结构，如 [Man22], 所示，并得到一个函子

$$\wedge^* H_1(F, S_+; \mathbb{F}_2) \otimes_{A^{\mathbb{F}_2}(M_1)} -$$

[1]如 [MR20, Man22] 中所述，并将在下文回顾，态射 $F\colon M_1 \to M_2$ in $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 可以正则地识别为 Zarev [Zar11, Definition 1.2], 意义下的缝合曲面 (F, Λ, S_+, S_-)，它允许 F 包含闭分支，也允许 ∂F 中的连通分支与 Λ 不相交且完全包含于 S_+ 或S_-中；此外，还将 S_+ 划分为“源” M_1 和“目标” M_2 ，并对 M_i 的连通分支进行排序，以适用于 $i \in \{1, 2\}$。[2]一般而言，在本文讨论 $\mathbb{Z}$-或 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群时，我们不会让分次影响对称化算子中的符号；只有作为超阿贝尔群的奇偶性会起作用。

从 $A^{\mathbb{F}_2}(M_1)$ 上左模的范畴到 $A^{\mathbb{F}_2}(M_2)$ 上左模的范畴。对于 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中仅涉及沿区间而非圆进行粘合的态射复合，根据 [Man22，定理 1.3]，与粘合曲面相关联的双模或函子，是与两个部分相关联的双模或函子的张量积或复合。

在 $\mathbb{Z}$ 上，我们将考虑 $\mathbb{Q}$ 分次的[3] 超阿贝尔群

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F) := \left(\mathbb{Z}^{0|1}\right)^{\otimes \pi(F)} \otimes \wedge^* H_1(F, S_+; \mathbb{Z})\{\delta(F)\}$$

（除非另有说明，同调系数将为 $\mathbb{Z}$ ），其中：

- $\mathbb{Z}^{0|1}$ 表示 $\mathbb{Z}$ ，它是集中在 $\mathbb{Q}$ 次数零处的纯奇超阿贝尔群；
- 不带移位的外代数位于 $\mathbb{Q}$ 次数 0、1、.....、 h ，其中

$$h := \operatorname{rank} H_1(F, S_+)$$

（关于 h的组合公式，见下文公式 (9)）；

- $\delta\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}$和 $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$（其中 $\mathcal{S}$是缝合曲面的集合）是定义在 $\mathcal{S}$上的“次数平移”和“奇偶性”函数，取自此类函数的参数化族 Π ，我们将在下文加以描述；

- 括号 $\{\cdot\}$表示将 $\mathbb{Q}$次数向上平移括号内的量。

我们将在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$ 上定义 $(A(M_2), A(M_1))$ 的双模结构。

注 1.1. 我们希望将奇偶移位视为由一个显式前因子 $\left(\mathbb{Z}^{0|1}\right)^{\otimes \pi(F)}$ 所介导的移位，该前因子出现在 $\wedge^* H_1(F, S_+)$ 的一侧或另一侧，而不是像 $[\pi(F)]$ 那样仅仅是抽象平移；这是因为，为了使粘合定理中的符号正确，试图作用于 $\wedge^* H_1(F, S_+)$ 的奇代数元素是否需要带上一个符号，取决于它们是否需要越过该前因子交换位置。

定理 1.2。设 M_1、 M_2 和 M_3 是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的对象，并假设 M_2 只有区间而没有圆。令

$$M_3 \xleftarrow{F'} M_2 \xleftarrow{F} M_1$$

是态射 hisms in $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$。对于族 Π 中任意选择的一对 (δ, π)，我们有 e

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F' \circ F) \cong \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F') \otimes_{A(M_2)} \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$$

作为 $(A(M_3), A(M_1))$ 上的双模。

我们将使用定理 1.2 推导出以下推论。

推论1.3. 令 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\pitchfork}$ 表示 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$中满对称幺半子范畴，其对象仅由区间构成，不含圆。对于任意 $(\delta, \pi) \in \Pi$，赋值$M \mapsto A(M)$ 和 $F \mapsto \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$ 给出一个对称幺半函子 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}$ ，从 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\pitchfork}$ 到

[3]在选择下面的函数 $\delta\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}$ 时，可以决定将任意复杂的分数，甚至在改变 δ 的陪域后将实数或复数纳入其定义。然而，最有动机的选择似乎只涉及简单分数，例如半整数和 $(1/4)$-整数（如果确实涉及分数的话）；如果坚持采用此类选择，那么 $\mathbb{Q}$ 的元素中将不会出现分母任意复杂的元素。

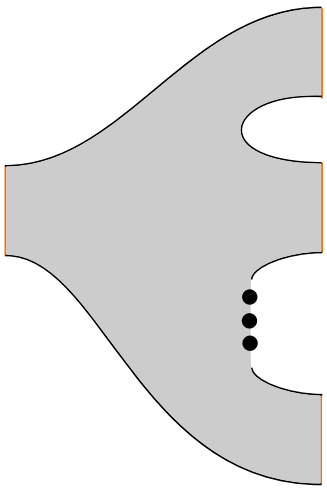


FIGURE 1. 开口的 p裤子三元组 $\mathcal{P}$，其右侧有 p 个区间，左侧有一个区间。

由 $\mathbb{Z}$-分次超环和 $\mathbb{Q}$-分次双模构成、以同构为等价的对称幺半范畴 $\mathbf{SAlg}_{\mathbb{Z}}$ 。

我们简要介绍 Π 次数与奇偶移位函数族，关于这些函数的更详细说明将推迟到第 4 节。对于一个满足 $h := \operatorname{rank} H_1(F, S_+)$ 的缝合曲面 F，以及任意一个 $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathbb{Q}^4$，定义

$$\begin{aligned}\delta_{A_1,A_2,A_3,A_4}(F) := &- A_1 h + (A_1 - 1)\#\{\text{no-}S_+ \text{ non-closed components of } F\} \\ &+ A_2\#\{\text{no-}S_- \text{ non-closed components of } F\} \\ &+ A_3\#\{\text{closed components of } F\} + ((A_1 - 1)/2)\#\{S_+ \text{ intervals}\} \\ &+ A_4\#\{S_+ \text{ circles}\}.\end{aligned} \tag{1}$$

对于任意一个 $(N_1, N_2, N_3, N_4) \in \{0, 1\}^4$，定义

$$\begin{aligned}\pi_{N_1,N_2,N_3,N_4}(F) = &\, h + N_1\#\{\text{no-}S_- \text{ non-closed components of } F\} \\ &+ N_2\#\{\text{closed components of } F\} + N_3\#\{S_+ \text{ intervals}\} \\ &+ N_4\#\{S_+ \text{ circles}\}\end{aligned} \tag{2}$$

模 2。注意，$\delta_{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4}$ 和 $\pi_{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4}$ 均关于缝合曲面的不交并具有可加性。Π 的任意元素 $(\delta_{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4}, \pi_{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4})$ 由 (A_1, A_2, A_3, A_4) 和 (N_1, N_2, N_3, N_4) 的选取指定，而两者之间可以没有关联。

例1.4。对于输入边界上有 $p \geq 0$ 个区间的开 p元裤子曲面 $\mathcal{P}$ （见图1），我们可以问，哪些选择 $(\delta_{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4},\ \pi_{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4}) \in \Pi$ 会使 $\mathcal{P}$ 被赋予 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)^{\otimes p}$，成为其自身上的右模，而 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的左作用由反复迭代余乘给出

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + 1 \otimes E$$

（或余单位 t ε（E）$=0$，当 $p=0$）。注意，若这一识别成立，那么取 g

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_{A_1,A_2,A_3,A_4},\pi_{N_1,N_2,N_3,N_4}}(\mathcal{P})\otimes_{(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}}(X_1\otimes_{\mathbb{Z}}\cdots\otimes_{\mathbb{Z}}X_p)$$

对于左模 X_i 在 $A(M_1)$ 上的情形，得到幺半范畴中 Hopf 超代数 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的表示的张量积 $X_1\otimes_{\mathbb{Z}}\cdots\otimes_{\mathbb{Z}}X_p$，这与 [MR20] 中粘合定理的高阶张量积解释一致。

对于 $\mathcal{P}$，我们有 $h=p$； $\mathcal{P}$ 的一个分支是非闭合的，并且与 S_+ 和 S_- 都有非平凡交。它在 S_+ 中有 $p+1$ 个区间，在 S_+ 中没有圆。于是得到

$$\delta_{A_1,A_2,A_3,A_4}(\mathcal{P})=-pA_1+((A_1-1)/2)(p+1)=-p(A_1+1)/2+(A_1-1)/2$$

and

$$\pi_{N_1,N_2,N_3,N_4}(\mathcal{P})=p+N_3(p+1).$$

事实证明（见命题 2.7），我们希望将 $\wedge^* H_1(\mathcal{P},S_+)$ 中次数最高的基元素对应于 $\pm 1\in(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$。因此，我们希望 $\delta_{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4}(\mathcal{P})=-p$以及（模 2）$\pi_{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4}(\mathcal{P})=p$。对于任意参数选择，满足

$$A_1=1\quad\text{and}\quad N_3=0,$$

我们得到一个分次移位，使得对于所有 p，从开裤子曲面 $\mathcal{P}$中恢复 Rep($\mathbb{Z}[E]/(E^2)$) 里的张量积。选择 $(A_1,A_2,A_3,A_4)=(1,0,0,0)$ 以及 $(N_1,N_2,N_3,N_4)=(0,0,0,0)$ 尤其简单而突出；对于一般的 F，我们有

$$\delta_{1,0,0,0}(F):=-h\quad\text{and}\quad\pi_{0,0,0,0}(F)=h.$$

如果我们只关注 $p=1$（区间上的恒等余边界）这一情形，而不是一般的 p，那么对于这个恒等余边界被赋予 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 作为其自身上的双模，无需对 (A_1,A_2,A_3,A_4) 和 (N_1,N_2,N_3,N_4) 施加任何条件。

注 1.5. 与 [Man22], 中的 $\mathbb{F}_2$ 情形一样，超阿贝尔群 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}$、$(F)$ 似乎不承认定理 1.2 的类比结果：当沿圆而非区间进行粘合时，相关地，尽管 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}$、$(F)$ 对于 S_+ 的区间分支具有 $U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{gl}(1|1)^+)=\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的作用，但当给定 S_+ 的一个圆分支时，它似乎不具有任何与完整的 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 相关对象的有趣作用（其中 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的两个奇生成元 E 和 F 都在作用）。在 [Man], 中，我们计划通过引入 $\mathbf{Z}^{P}_{\delta},_{\pi}(F)$ 的更大的变体来解决这两个局限；这些空间是 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}$、$(F)$ 的变体，使得对于 S_+ 的圆分支，$\mathbf{Z}^{P}_{\delta},_{\pi}(F)$ 具有 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的有趣作用，同时对于 S_+ 的区间分支具有 $U(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$ 的有趣作用。这些空间 $\mathbf{Z}^{P}_{\delta},_{\pi}(F)$ 将在沿圆以及沿区间进行粘合时满足定理 1.2 的类比结果。

与三维非半单拓扑量子场论进行比较。考虑一个亏格为 g、在 S_+ 中有 $p\geq 1$ 个边界圆且没有其他边界的连通缝合曲面$F=F_{g,\ p}$（因此 $S_-=\varnothing$）。我们有 $h=2g-1+p$。由于 $\partial F_{g,\ p}=S_+$，我们有

$$H_1(F,S_+)=H_1(F,\partial F)\cong H^1(F);$$

在本节关于与非半单拓扑量子场论进行比较的部分（但不包括其他部分），我们将以 $\mathbb{C}$ 为底域； $H^1(F)$ 表示 $H^1(F;\mathbb{C})$。

在 [Mik15 第 5.2 节中，2],Mikhaylov 考察了这个缝合曲面 $F_{g,\ p}$ 其中将边界圆视为穿孔点，并以线算符 $L_{\mathsf{t}_i,\ n_i}$标记。他假设参数 $\mathsf{t_i} \in \mathbb{C}^\times$ 是“一般的”，也就是说不等于 1（但它们的乘积等于 1），并且参数 n_i 是整数。参数 $\mathsf{t_i}$（以及在 $\mathbb{C}^\times$ 中选取的一些额外整体 holonomy，条件为 $g>0$）指定了 $F_{g,\ p}$上的一个带平坦联络的非平凡复线丛 $\mathcal{L}$。Mikhaylov 定义

$$h_{\mathrm{gen}} = 2g-2+p = \dim H^1(F_{g,p};\mathcal{L})$$

（Mikhaylov 将这个量称为 h，但为避免混淆，我们将 h 留作 $H_1(F,S_+)$ 的维数；本例中该维数为 $2g-1+p = h_{\mathrm{gen}}+1$）。对于一般的整体 holonomy $\mathsf{t_i}$，维数 h_{gen}比我们的维数 h 小 1，原因是 [Mik15 图 2]中图示的关系。Mikhaylov 将 3 维 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 陈-西蒙斯拓扑量子场论描述为具有如下态空间

$$(\det H^1(F_{g,p};\mathcal{L}))^{\otimes(-1/2+N/h_{\mathrm{gen}})} \otimes \wedge^* H^1(F_{g,p};\mathcal{L})$$

在由 $\mathcal{L}$ 装饰的 $F_{g,p}$ 上，其中 $N=\sum_{i=1}^p(-1/2+n_i)$。参见 [Mik15, equation (5.6)]。他给出的该空间的分次超维数为

$$t^N(t^{1/2}-t^{-1/2})^{h_{\mathrm{gen}}} \tag{3}$$

（参见 [Mik15, equation (5.8)]），其中 t 的幂对应于我们在态空间上的 $\mathbb{Q}$-分次，即 Mikhaylov 的 $U(1)_{\mathrm{fl}}$ 荷。

Geer–Young 在 [GY22, Section 6.1] 中指出，在他们的 $\mathcal{D}^{q,\mathrm{int}}$ 拓扑量子场论中，关于一般曲面希尔伯特空间的分次维数公式 [GY22, equation (19)] 与 Mikhaylov 的公式 (3) 一致，至少除前面的符号外如此。更具体地说，将 $F_{g,p}$ 的边界分支标记为 [GY22, Section 2.3.2], 中定义的表示 $V(\alpha_i,n_i)_{\overline{0}}$，并令 $N=\sum_i(n_i-1/2)$ 如 Mikhaylov 的论文中所述，则 Geer–Young 的公式 (19) 给出的态空间分次维数为

$$(-1)^{g-1}t^N(t^{1/2}-t^{-1/2})^{h_{\mathrm{gen}}} \tag{4}$$

这里我们将 Geer–Young 的 q^β 写作 $t^{-1/2}$（见 [GY22，定理 3.5]），并取 $t^\mu=1$，因为 $\mathsf{t_i}$ 的乘积为 1。

自然会想知道，对于次数平移和奇偶函数的不同选择 $(\delta,\pi)\in\Pi$，我们这些空间的分次超维数与上述公式相比如何。我们的空间基于 $H^1(F;\mathbb{C})$，它是在取 $\mathcal{L}$ 为平凡局部系统时得到的，因此我们将在 Mikhaylov 的分析中取极限 $\mathsf{t}_i\to 1$（相应地，在 Geer–Young 的分析中取 $\alpha_i\to 0$），而不考虑这些极限可能涉及的微妙之处，正如 [Mik15，第 5.3 节5]所述。换言之，我们关注的是非一般曲面或临界曲面的态空间，而非一般曲面的态空间。

如果 Mikhaylov 的所有 $\mathsf{t_i}$ 都是 1，那么 [Mik15 的图 2] 中的关系就变得平凡。在一般情形的分次维数公式中，凡是出现 h_{gen} 的地方，都应改为 h。我们还将

把所有标签 n_i 也设为零，这样每个穿孔点的标签都是 $V(0,0)$；直接外推 (4) 可得

$$(-1)^{g-1}t^{-p/2}(t^{1/2}-t^{-1/2})^h. \tag{5}$$

后续论文 [Man]（正在撰写中）中关于圆粘合的观察表明，由于我们处于非一般情形，我们实际上应该将（5）乘以 $-t^{1/2}$，并尝试恢复分次维数公式

$$(-1)^{g}t^{-p/2+1/2}(t^{1/2}-t^{-1/2})^h. \tag{6}$$

目前请注意，在（6）以及一般情形的公式（3）和（4）中，t 的所有幂次都是整数，但（5）中并非如此。我们希望确定哪些参数取值能够恢复分次维数公式（6）。

- 为了恢复（6），我们希望选择参数，使我们的次数平移 $\delta_{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4}(F_{g,\ p})$ 等于

$$-p/2+1/2-(1/2)(2g-1+p) = -h/2-p/2+1/2.$$

因此，我们应设定

$$A_1 = 1/2, \quad A_2 = 1/2, \quad A_4 = -1/2$$

其中 A_3 保持为自由变量。请注意，条件 $A_1 = 1/2$ 与例1.4中的条件 $A_1 = 1$ 不相容。这也是我们在本文中选择研究分次移位的参数化族，而非单独指定某个移位作为典范选择的原因之一，因为我们认为来自开 p 元裤子的两个张量积，以及与三维非半单拓扑量子场论的联系，在这一理论中都很重要。

- 为了恢复 (6)，我们还希望我们的奇偶函数 $\pi(F_{g,\ p})$ 满足

$$g+(2g-1+p) = g+p = h/2+p/2-1/2.$$

由于我们的奇偶函数 $\pi_{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4}$ 前的系数都是 1，而非 $1/2$ h，因此不存在可行的 N_1。不过，从 [Man] 的角度来看，自然的做法是取

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (1/2,\ 1/2,\ 0,\ -1/2)$$

在 (1) 中，为一般的开闭余 bordism F 定义一个移位

$$\begin{aligned}\delta_{1/2}(F) = &-h/2-(1/2)\#\{\text{no-}S_+ \text{ non-closed components of } F\}\\ &+(1/2)\#\{\text{no-}S_- \text{ non-closed components of } F\}\\ &-(1/4)\#\{S_+ \text{ intervals}\}-(1/2)\#\{S_+ \text{ circles}\}.\end{aligned}$$

当 F 的 S_+ 区间数量模 4 等于与 S_- 非平凡相交的 F 的边界分支数量的两倍时，可以证明 $\delta_{1/2}(F)$ 是一个整数，因此我们可以令

$$\pi_{1/2}(F) = \delta_{1/2}(F) \mod 2.$$

对于$F = F_{g,\ p}$，没有 S_+ 区间，也没有与S_- 非平凡相交的 F 的边界分支，因此 $\pi_{1/2}(F_{g,\ p})$ 有意义，并且我们有

$$\pi_{1/2}(F_{g,p}) = -h/2 - p/2 + 1/2.$$

这个量模 2 等于 $h/2 + p/2 - 1/2$，因此我们看到次数平移 $\delta_{1/2}$与奇偶性 $\pi_{1/2}$ 结合起来，便可恢复分次维数公式 (6)。

猜想 1.6. 将 Geer–Young 拓扑量子场论 $\mathbf{Z}^{GY}$ 应用于曲面 $F_{g,\ p}$ 时，其中 $p \geq 1$，假设我们将 $F_{g,\ p}$ 的所有边界分支都视为标记为 $V(0,0)\overline{0}$ 的穿孔点。将态空间 $\mathbf{Z}^{GY}(F_{g,\ p})$ 视为按 Geer–Young 分次的第二个 $\mathbb{Z}$ 因子分出的 $\mathbb{Z}$ 分次空间，其中分次为 $Z = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。对于上文定义的次数平移函数 $\delta_{1/2}$和奇偶函数 $\pi_{1/2}$，有

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_{1/2},\pi_{1/2}}(F_{g,p}) \cong \mathbf{Z}^{GY}(F_{g,p})$$

作为 $\mathbb{Z}$ 分次超向量空间。

假设与 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_{1/2},\ \pi_{1/2}}(F_{g,\ p})$ 一样，$\mathbb{Z}$ 分次超向量空间 $\mathbf{Z}^{GY}(F_{g,\ p})$ 在每个 $\mathbb{Z}$ 次数上都是纯偶或纯奇的。那么猜想 1.6 就意味着等式两边的分次维数相等；由于根据 $\delta_{1/2}$ 和 $\pi_{1/2}$ 的选取，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_{1/2},\ \pi_{1/2}}(F_{g,\ p})$ 的分次维数由 (6) 给出，该猜想便断言，公式 (6) 是将公式 (4) 从一般装饰推广到我们的非一般装饰时正确的外推。

注 1.7。去范畴化带边 Floer 同调与 H_1 群的外幂之间的联系，最早见于 Petkova 的工作 [Pet18]。当 F 连通且有一个边界分支，并且 $|\Lambda| = 2$，使得 $\{C_1, C_2\}$ 中一个是区间，另一个为空时，Petkova 在 $\mathbb{Z}$ 上定义了 F的带边 Heegaard Floer 不变量的去范畴化，并将其与 $\wedge^* H_1(F; \mathbb{Z})$等同；根据上述假设，它同构于$\wedge^* H_1(F, S_+; \mathbb{Z})$。另见 Hom–Lidman–Watson [HLW17]，其中进一步探讨了三维层面与带边 Heegaard Floer 理论的联系。

暂且不论与 Heegaard Floer 理论的联系，向量空间 $\wedge^* H_1(F)$也曾作为曲面的态空间出现在 Frohman–Nicas [FN91] 和 Donaldson [Don99] 关于 Alexander 多项式的早期拓扑量子场论构造中（另见 Kerler [Ker03]）；这些空间的近亲也在文献中的许多其他相关语境中出现。据作者所知，[Man22] 和本文是首次专门针对这些由第一同调外幂构成的态空间，探讨一维和二维中的拓扑量子场论结构的研究（大多数涉及 $\wedge^* H_1$ 的拓扑量子场论文献仅讨论闭曲面，并考察二维和三维中的结构）。

结构安排。第2.1节讨论缝合曲面及其与开-闭余边界的关系，并在第2.2节中定义 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$ 上的作用，其中 F 为缝合曲面。在第2.3节中，我们更详细地考察开 p 重裤子示例，并探讨其与霍普夫代数张量积的关系。在第3.1节中，我们证明主要的粘合引理；在第3.2节中，我们利用该引理推导出定理 1.2，并

在第3.3节中证明推论1.3。在第 4 节中，我们讨论参数化族 (1)和 (2) 背后的依据。

致谢。作者谨向 Sergei Gukov 和 Matthew Young 致谢，感谢他们进行了有益的交流。作者获得了美国国家科学基金会 DMS-2151786 号资助的部分支持。

2. Preliminaries

2.1. 缝合曲面与开闭余 bordism。我们首先回顾 Zarev 对缝合曲面的定义 [Zar11，定义 1.2]，，并将其推广以去除 Zarev 所施加的一些拓扑限制，同时加入一些有助于处理本文中符号的额外数据。

定义 2.1. 缝合曲面是一个五元组 $(F, \Lambda, S_+, S_-, \ell)$，其中：

- F 是一个紧致定向曲面，边界可以为空；
- Λ 是为 F的每个边界分支选取偶数个 ≥ 0 点；
- $\partial F \setminus \Lambda$ 的连通分支标记为 S_+ 或 S_-，并在 Λ的各点之间交替排列。

- S_+ 的每个连通分支都标记为“入射”或“出射”，并分别为 S_+ 的入射连通分支集合和出射连通分支集合指定顺序（我们用 ℓ 表示这些标记和排序数据）。

与 Zarev 不同，我们允许闭曲面，以及完全包含在 S_+ 或 S_-中的 F 的圆形边界分支，并要求指定入射/出射数据及排序数据 ℓ 。

注 2.2。根据上述定义，缝合曲面所包含的数据与开闭定向余边范畴 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的态射所包含的数据相同，该范畴定义于 [LP08]中。我们将 F 视为从 M_1 到 M_2 的态射，其中 M_1 由 S_+ 的入射部分（按顺序排列的定向区间和圆的不交并）经定向反转得到，而 M_2 由 S_+的出射部分给出。我们取 F 边界所有部分的定向为通常由 F 的定向诱导得到的定向，而不考虑缝合结构。根据边界定向，我们有 $S_+ = M_2 \sqcup (-M_1)$，其中负号表示定向反转。

注 2.3。我们需要排序数据，是为了明确指定：对于 $F\colon\ M_1 \to M_2$ 在 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的一个态射，$^{\mathrm{ext}}$ 的左作用

$$A(M_1) := \mathbb{Z}[E]/(E^2) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}[E]/(E^2)$$

以及 $A(M_2)$ 在我们将与 F 关联的超阿贝尔群上的右作用。我们需要知道 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的哪个因子对应哪个区间。

图2展示了两个缝合曲面，它们在范畴 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中被表示为可复合的态射。我们的主要粘合定理——定理 1.2——将适用于图2所示的复合类型

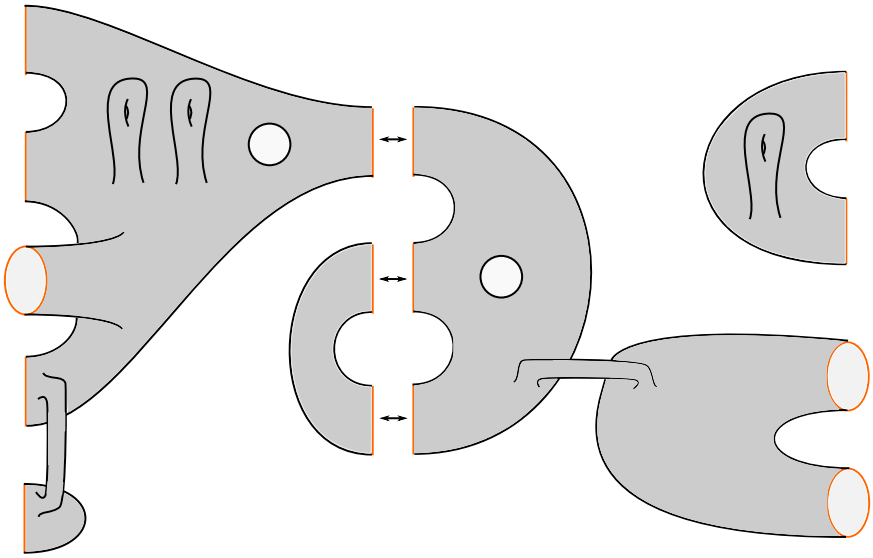


FIGURE 2. 两个缝合曲面（右侧和左侧）被视为 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的态射；要复合这些态射，应按照箭头所示进行粘合。在缝合曲面的表述中，S_+ 以橙色绘制，S_- 以黑色绘制，而 Λ 是橙色和黑色边界区间之间的界面点集合。将这些曲面视为 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的态射时，每个曲面的源 1-维流形绘制在右侧（从上到下排列），目标 1-维流形绘制在左侧。为简化图示，我们没有绘制定向。

其中，进行粘合所沿的 1-维流形仅由区间组成，不包含任何圆。

2.2. 作用　外幂上的作用。设 $(F, \Lambda, S_+, S_-, \ell)$ 为一个缝合曲面。选择 e

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathbb{Q}^4$$

并令 $\delta := \delta_{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4}$ 如（1）中所定义。同样，选择

$$(N_1, N_2, N_3, N_4) \in \{0,1\}^4$$

并令 $\pi := \pi_{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4}$ 如（2）中所定义。考虑 $\mathbb{Z}$-分次超阿贝尔群

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F) := \left(\mathbb{Z}^{0|1}\right)^{\otimes \pi(F)} \otimes \wedge^* H_1(F, S_+)\{\delta(F)\}$$

其中，$\mathbb{Z}^{0|1}$ 表示视为纯奇超阿贝尔群的 $\mathbb{Z}$。我们用 ε_F 表示 $\left(\mathbb{Z}^{0|1}\right)^{\otimes \pi(F)}$的标准基元；$\varepsilon_F$ 的奇偶性与 $\pi(F)$ 的奇偶性相同。

在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$ 上，对于每个 I 的区间分支 S_+，我们将通过在 $\mathbb{F}_2$ 上的定义中加入符号来定义超代数 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的作用，其中 E 为奇且次数为 -1，该定义位于[Man22]中。只需定义：给定 I，一个 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$ 上的（$\mathbb{Z}$-线性）奇端同态 E，其次数为 -1 且平方为零。

定义 2.4。设 $(F, \Lambda, S_+, S_-, \ell)$ 为一个缝合曲面，并设 I 为 S_+的一个出射区间分支。我们定义

$$E = E_I \colon \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F) \to \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$$

如下。

- 定义 $\phi_I \colon H_1(F, S_+) \to \mathbb{Z}$ 为复合

$$\phi_I := H_1(F, S_+) \xrightarrow{\partial} H_0(S_+) \xrightarrow{[I]^* \cdot -} \mathbb{Z}$$

  其中，$[I]^*$ 是与 $[I] \in H_0(S_+)$ 对偶的 $H^0(S_+)$ 的类。
- 对于 $k \geq 1$，定义 $\Phi_I \colon T^k H_1(F, S_+) \to T^{k-1} H_1(F, S_+)$ 为

$$\begin{aligned} \Phi_I := \sum_{i=1}^{k} \Big(& T^{i-1} H_1(F, S_+) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(F, S_+) \otimes_{\mathbb{Z}} T^{k-i} H_1(F, S_+) \\ & \xrightarrow{(-1)^{i-1} \mathrm{id}_{T^{i-1}H_1(F,S_+)} \otimes \phi_I \otimes \mathrm{id}_{T^{i-1}H_1(F,S_+)}} T^{i-1} H_1(F, S_+) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} T^{k-i} H_1(F, S_+). \Big) \end{aligned} \tag{7}$$

- 由于 (7) 中的符号 $(-1)^{i-1}$，我们得到一个诱导映射

$$\overline{\Phi_I} \colon \wedge^k H_1(F, S_+) \to \wedge^{k-1} H_1(F, S_+).$$

  定义

$$\overline{\Phi_I}' \colon \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F) \to \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$$

  by

$$\overline{\Phi_I}'(\varepsilon_F \otimes \omega) := (-1)^{\pi(F)} \varepsilon_F \otimes \overline{\Phi_I}(\omega).$$

- 令 E 为 $\overline{\Phi_I}'$ 在所有 $k \geq 1$上的映射之和。E 是一个次数为 -1 的奇映射，而定义 Φ_I 时的符号 $(-1)^{i-1}$ 确保了 $E^2 = 0$。

当 I 是 S_+的入射区间分支时，以类似方式定义 E，但有以下区别：

- 我们用 $(-1)^{k-i}$ 代替 $(-1)^{i-1}$ 作为式（7）中的符号；
- 我们定义

$$\overline{\Phi_I}' \colon \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F) \to \mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$$

  by

$$\overline{\Phi_I}'(\varepsilon_F \otimes \omega) := \varepsilon_F \otimes \overline{\Phi_I}(\omega),$$

  不带有 $(-1)^{\pi(F)}$的符号。

注 2.5。由于我们对上述符号的选择方式，$\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)$ 上的作用，对于 S_+ 的出射区间分支而言是左作用，而对于 S_+ 的入射区间分支而言是右作用。相应地，在开闭合边 cobordism 范畴中，我们将 F 看作一个“从右到左”的余边界。

例 2.6。为简单起见，选择 (N_1, N_2, N_3, N_4)，使得对于图 3 中所示的缝合曲面 F（改编自 [Man22, 图 12]），奇偶移位 $\pi(F)$ 为偶数，并且相应地 ε_F 为偶数。若令 α_i 对于 $1 \leq i \leq 4$ 表示图中所示的弧和圆，

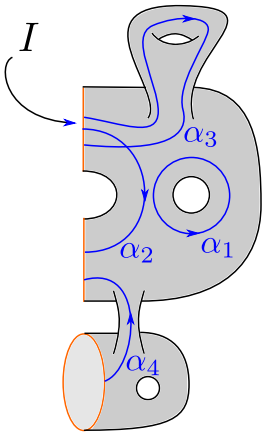


FIGURE 3. 缝合曲面中的定向弧和圆的示例；利用这些数据可以构造 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}$, (F) 中的元素 $\varepsilon_F \otimes (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)$，而例 2.6 计算了作用于该元素的 E_I。直观地说，可以将这一作用理解为：对所有与 I 相接的弧端点求和，从外积中移除相应的弧（并乘以适当的符号，即 inward-pointing 弧对应 $+$，outward-pointing 弧对应 $-$；此处先通过交换将 E_I 从左侧移入）。

图 3，则有

$$E_I(\varepsilon_F \otimes (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4)) = \varepsilon_F \otimes (-\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 + \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4)$$
$$= \varepsilon_F \otimes (\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4).$$

我们本可以通过将 α_3 画成圆，而非两个端点都在 I 上的弧，来更直接地进行同样的计算（在 $H_1(F, S_+)$ 中，两者没有区别），这样 E_I 中“移除 α_3”和“移除 $-\alpha_3$”这两项就完全不会出现。我们按照图 3 所示画出 α_3，因为这类弧常见于带边界的Heegaard Floer同调中。

导致 $E^2 = 0$ 的同一符号现象确保：若 I 和 I' 是 S_+ 的两个不同入射区间或两个不同出射区间，则 E_I 和 $E_{I'}$ 反交换。若 I 是入射区间而 I' 是出射区间，或反之，则 E_I 和 $E_{I'}$ 交换。

令 m_{in} 表示 S_+ 的入射区间分支数，m_{out} 表示其出射区间分支数，则有 $A(M_1) = (\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes m_{\text{in}}}$ 和 $A(M_2) = (\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes m_{\text{out}}}$。因此，我们得到一个定义在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}$, (F) 上的、关于超代数 $(A(M_1)\ A(M_2))$ 的（左、右）双模结构，其中 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes m}$ 上的超代数结构是超代数的张量积（因此不同因子中的奇元素反交换）。

2.3. 张量积。这里我们将更详细地讨论例1.4，即关于开 p元裤子曲面 $\mathcal{P}$的例子。将图4中的弧从上到下标记为 e_1、……、e_p。按图示为它们定向，从 e_p 开始；它从出射边界指向入射边界；e_{p-1} 应从入射边界指向出射边界，依此类推，交替定向，使得当 e_1 为奇数时，它从出射边界指向入射边界，而当 p 为奇数时，它从入射边界

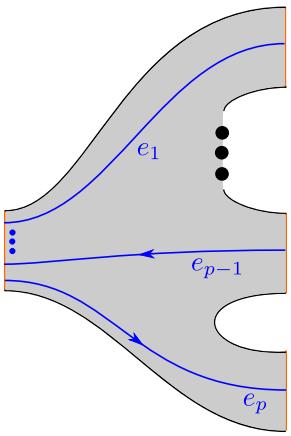


FIGURE 4. 弧上的定向 e_1, ..., e_p，给出 $H_1(\mathcal{P}, S_+)$ 的一组基。

指向出射边界；若 p 为偶数，则指向出射边界。见图4。如例1.4所示，任取(A_1, A_2, A_3, A_4)和(N_1, N_2, N_3, N_4)，使得 $A_1 = 1$ 和 $N_3 = 0$。令$\delta = \delta_{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4}$ 以及$\pi = \pi_{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4}$。

命题 2.7。设给定整数

$$1 \le i_1 < \cdots < i_k \le p,$$

并将 $\{1, \ldots, p\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ 的元素标记为

$$1 \le j_1 < \cdots < j_{p-k} \le p.$$

对于 $1 \le q \le p - k$，令

$$E_{j_q} := 1 \otimes \cdots 1 \otimes E \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1,$$

$(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 中的一个元素；我们可以在 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 中对这类元素取乘积。该识别

$$\varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \quad \leftrightarrow \quad E_{j_1} \cdots E_{j_{p-k}} \tag{8}$$

给出一个同构

$$\mathcal{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(\mathcal{P}) \cong (\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$$

它是 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2)$,$(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p})$ 上的 $\mathbb{Q}$ 分次（或 $\mathbb{Z}$ 分次）双模，其中 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 在 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 上的右作用由乘法给出，而 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 在 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 上的左作用则由余乘诱导

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + 1 \otimes E.$$

证明。例1.4确保对应关系 (8) 保持次数和奇偶性；由于它在基元素上给出双射，因此是 $\mathbb{Z}$-分次超向量空间的同构。我们要验证 (8) 保持 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的左作用和 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 的右作用。

首先考虑 $E \in \mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的左作用。在整数环$\overset{S_+}{\delta\,\pi}$，$(\mathcal{P})$ 中，

$$\begin{aligned} E \cdot (\varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) &= (-1)^{\pi(\mathcal{P})} \varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (E \cdot (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) \\ &= (-1)^p \varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (E \cdot (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})). \end{aligned}$$

作用 $E \cdot (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})$ 是对 $1 \leq r \leq k$ 求和，结果为

$$(-1)^{r-1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r-1}} \wedge E(e_{i_r}) \wedge e_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

根据我们对 e_{i_r} 所作的定向选择，有

$$E(e_{i_r}) = (-1)^{p-i_r+1} \cdot 1.$$

因此，$E \cdot (\varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}))$ 是对 $1 \leq r \leq k$ 求和，结果为

$$(-1)^{i_r+r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

其中，$\widehat{e_{i_r}}$ 表示我们从外积中移除因子 e_{i_r}。

同时，记

$$E_{j_1} \cdots E_{j_{p-k}} = E \otimes \cdots \otimes E \otimes 1 \otimes E \otimes \cdots\cdots\cdots \otimes E \otimes 1 \otimes E \otimes \cdots \otimes E.$$

当在左侧乘以 E 时，第一项会将位置i_1 上的 1 替换为 E，并产生符号 $i_1 - 1$。第二项会将位置 i_2上的 1 替换为 E，并产生符号 $i_2 - 2$。一般来说会有 k 项，对于 $1 \leq r \leq k$，第 r^{th} 项会产生符号 $i_r - r$。由于

$$(-1)^{i_r+r} = (-1)^{i_r-r},$$

识别 (8) 与 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的左作用相容。

现在考虑 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 的 m^{th} 因子中 E 的右作用，其中 $1 \leq m \leq p$；将此元素记为 E_m。我们有

$$(\varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) \cdot E_m = 0$$

除非对于某个 r 有 $m = i_r$，且我们有

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) \cdot E_{i_r} \\ &= (-1)^{k-r} \varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r-1}} \wedge (e_{i_r} \cdot E) \wedge e_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}). \end{aligned}$$

根据我们对 e_{i_r} 的定向选择，有 $e_{i_r} \cdot E = (-1)^{p-i_r} \cdot 1$，因此 $(\varepsilon_F \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})) \cdot E_{i_r}$ 等于

$$(-1)^{p+k-i_r-r} \varepsilon_{\mathcal{P}} \otimes (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}).$$

同时，像上面那样将 $E_{j_1} \cdots E_{j_{n-k}}$ 写成若干个 1 的张量积，并将 E 写成若干个 E，我们看到，除非对于某个 r，$m = i_r$，否则 $(E_{j_1} \cdots E_{j_{n-k}}) \cdot E_m$ 也为零。

- 对于 $r = k$，计算 $(E_{j_1} \cdots E_{j_{n-k}}) \cdot E_{i_k}$ 时，为了到达将被 E 替换的 1，奇元素 E_{i_k} 需要与 $p - i_k$ 个 E 交换顺序，从而产生符号 $(-1)^{p-i_k}$。

• 对于 $r = k-1$，计算 $(E_{j_1} \cdots E_{j_{n-k}}) \cdot E_{i_{k-1}}$ 时，奇元素 $E_{i_{k-1}}$ 需要与 $p - i_{k-1} - 1$ 个 E 交换顺序，从而产生符号 $(-1)^{k-i_{k-1}-1}$。

一般而言，在计算 $(E_{j_1} \cdots E_{j_{n-k}}) \cdot E_{i_{k-q}}$ 时，奇元素 $E_{i_{k-q}}$ 需要越过 $p - i_{k-q} - q$ 个 E，从而得到一个 $(-1)^{p-i_{k-q}-q}$ 的符号。将 $k-q$ 重新编号为 r 后，我们看到 $(E_{j_1} \cdots E_{j_{n-k}}) \cdot E_{i_r}$ 前的符号为 $(-1)^{p-i_r-(k-r)}$，这正好等于 $(-1)^{p+k-i_r-r}$ 。□

如例1.4所述，对应关系 (8) 将 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}(\mathcal{P})$ 的最高次数元素（在符号意义下定义）与 $\pm 1 \in (\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 对应起来。

3. A gluing theorem with signs and gradings

3.1. 主粘合引理。下面给出的是 [Man22] 中主粘合引理的一个带符号和分次的版本。设 $(F, \Lambda, S_+, S_-, \ell)$ 是一个缝合曲面，其中所有 S_+边界分支均视为出射的，并设 I_1, I_2 是 S_+ 的区间连通分支。如 [Man22], 中所述，将 I_1 与 I_2 粘合得到定向曲面 $\overline{F}$ 的方式在同胚意义下唯一；该曲面本身也可视为一个缝合曲面，其中所有 S_+边界分支均为出射的（我们将让 S_+ 表示 S_+ 或 F、$\overline{F}$ 的边界，具体取决于上下文）。令 $\delta = \delta_{A_1,A_2,A_3,A_4}$ 以及 $\pi = \pi_{N_1,N_2,N_3,N_4}$ 分别对应任意 $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathbb{Q}^4$ 和 $(N_1, N_2, N_3, N_4) \in \{0,1\}^4$。令 E_1 和 E_2 表示由 I_1 和 I_2 分别产生的 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}, (F)$ 的 E-端同态。

引理 3.1（参见 [Man22]的引理 4.1）。我们有一个同构

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(\overline{F}) \cong \frac{\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)}{\mathrm{im}(E_1 + E_2)}$$

它是 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群之间的同构，并且与来自 F 中不属于 $\{I_1, I_2\}$的区间的 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 左作用相容。

在证明引理 3.1 之前，我们将参照[Man22 的引理 4.1]的证明，讨论一种为 $\wedge^* H_1(F, S_+)$选取基的方法。

定义 3.2。对于缝合曲面 F，选取 F 与有限个互不相交的“标准”缝合曲面之并之间的一个同胚（图 5）。每个标准缝合曲面都是一个球面与若干个环面作连通和后，再去掉若干个开圆盘所得，并且每个边界分支上都有偶数条缝合线。然后按如下方式在每个标准缝合曲面中定义一组弧和圆。

- 在每个通过连通和拼接上的环面中，取两条构成第一同调一组基的圆。

- 对于所有与 S_- 非平凡相交的边界分支，除选定的一个边界分支外，都取一条环绕该边界分支的圆。
- 取一个嵌入在 F 中的连通无圈图 Γ_F，其顶点位于 S_+ 中（ S_+的每个分支中各有一个顶点）。

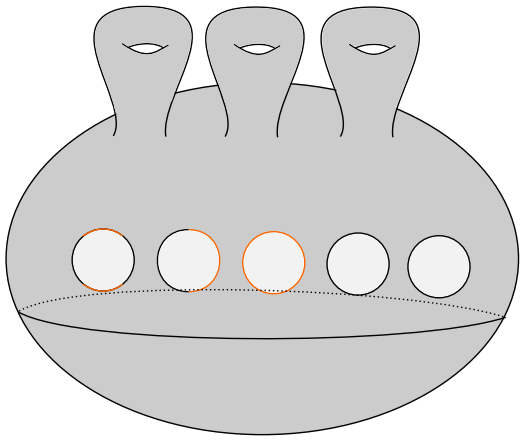


FIGURE 5. 标准的（连通）缝合曲面；在边界上，S_+ 以橙色绘出，S_- 以黑色绘出。缝合线是边界橙色区域与黑色区域之间的界面点。

- 由于我们是在 $\mathbb{Z}$上工作，因此还需要为用于定义此基的弧和圆选定定向。

图示见图 6。圆和 Γ_F 的边构成 $H_1(F, S_+)$的一组基，因此，弧与圆组成的集合的子集（对应于外积）构成$\wedge^* H_1(F, S_+)$的一组基。同样的构造给出 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\pi}$, (F)的一组基。我们将圆和 Γ_F 的边称为基弧和基圆。

注 3.3. 如果我们始终采用定义 3.2 中的基（下文均如此），那么量 $h = \operatorname{rank} H_1(F, S_+)$ 就是基弧与基圆的数量。在下文中，将 F 自粘合得到新曲面 $\overline{F}$ 时，要了解 h 如何变化，只需比较自粘合前后基弧与基圆的数量。组合地说，我们有

$$\begin{aligned} h = &-2\#\{\text{components of } F\} + 2\#\{\text{genus}\} \\ &+ \#\{\text{no-}S_+ \text{ non-closed components of } F\} \\ &+ \#\{\text{no-}S_- \text{ non-closed components of } F\} \\ &+ 2\#\{\text{closed components of } F\} \\ &+ \#\{S_+ \text{ intervals}\} + \#\{S_+ \text{ circles}\} \\ &+ \#\{S_- \text{ circles}\} + \#\{\text{boundary circles of } F \text{ with both } S_+ \text{ and } S_-\} \end{aligned} \tag{9}$$

其中 b 我们所说的 F 的亏格，是指 F 各个分支亏格之和。

引理 3.1 的证明。我们将分情况证明。

情形 1： I_1 和 I_2 位于 F的不同连通分支上。假设 I_1 和 I_2 分别位于 F的不同连通分支上。首先，按照定义 3.2，为 $\wedge^* H_1(F, S_+)$选取一个 $\mathbb{Z}$-基；不失一般性，可以假设 I_1 和 I_2 各自至多与一条基弧相接。

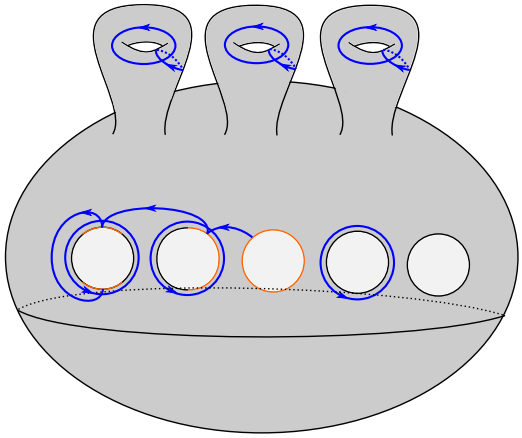


FIGURE 6. 用于指定$\wedge^* H_1(F, S_+)$的基的定向弧和圆的示例。

情形 1-1： I_1 和 I_2 都单独存在。假设 F 中包含 I_1和 I_2 的连通分支各自不包含 S_+的其他连通分支。在这种情况下，没有基弧与 I_1或 I_2相接。我们有 $\delta(F) = \delta(\overline{F})$、 $\pi(F) = \pi(\overline{F})$，以及 $H_1(F, S_+) \cong H_1(\overline{F}, S_+)$。 E_1和 E_2 在$\mathsf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}(F)$上均作用为零，这便得到了引理所述结论。

情形 1-2：只有 I_2 是孤立的。现在假设 $\{I_1, I_2\}$ 中恰有一个（不失一般性地设为I_2）是 F 的某个连通分支中 S_+ 的唯一分支。在这种情况下， I_1 与一条基弧 e_1相交，而 I_2 不与任何基弧相交。不失一般性地，假设e_1 从曲面指向 I_1。

$\mathsf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}(F)$上的端同态 E_2 为零。令 ω 为 $\wedge^* H_1(F, S_+)$的一个基元素；除非 e_1 是某个 i对应的 ω 的 i^{th} 楔因子，否则 E_1 对 $\varepsilon_F \otimes \omega$ 的作用为零，此时记为

$$\omega = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{i-1} \wedge e_1 \wedge \gamma_{i+1} \wedge \cdots \wedge \gamma_k$$

其中 γ_j 是 $H_1(F, S_+)$的基元素。若令

$$\omega' = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{i-1} \wedge \gamma_{i+1} \wedge \cdots \wedge \gamma_k,$$

于是 $E_1(\varepsilon_F \otimes \omega) = (-1)^{\pi(F)+i-1}\varepsilon_F \otimes \omega'$。我们看到，引理陈述中的商等价于：当 ω' 是 $\wedge^* H_1(F, S_+)$ 的一个不被 e_1 整除的基元素时，将 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ 置为零。因此，我们可以取这些元素

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega'),$$

其中 ω' 不被 e_1 整除，作为该商的一个 $\mathbb{Z}$-基。

现在，如果我们取所有基弧与圆，并移除 e_1，则剩余的弧与圆可用于定义 $H_1(\overline{F}, S_+)$的一个基。$\mathsf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}(\overline{F})$ 的对应 $\mathbb{Z}$- 基由元素集合 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$ 给出，其中 ω' 如上所述。该识别

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega' \tag{10}$$

给出从商到 $\mathsf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}(\overline{F})$ 的映射。

从 F 过渡到 $\overline{F}$ 时，与 δ 和 π 的定义相关的量变化如下。

- h减少了 1。
- 区间的数量减少了 2。

δ 的变化因此为 $A_1 - (A_1 - 1) = +1$，而 π 的变化模 2 为 $-1 - 2N_3 = 1$。因此，(10) 是一个零度偶映射；它是超阿贝尔群同构，因为它给出了基元素双射。

为证明这个同构与剩余作用相互交织，令 $I \notin \{I_1, I_2\}$ 为 S_+ 的一个区间分支。首先假设 e_1 不与 I 相接。在这种情况下，与 I 对应的 $\mathbf{z}^{S_+}_{\delta\,\pi,\,(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)}$ 上的端同态 E_I 将基元素 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$ 映射为 $(-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_I(\omega'))$。同时，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,\,(\overline{F})}$ 上的端同态 E_I 将 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$ 映射为 $(-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_I(\omega')$。我们的识别将

$$(-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_I(\omega')) \quad \leftrightarrow \quad (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_I(\omega')$$

因为 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) - 1$。如果 e_1 与 I 相接，则分析不变，因为我们将在 整数环$^{S_+}_{\delta\,\pi\,,\,(F)}$ 中得到的额外项在该商中消失

$$\frac{\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)}{\mathrm{im}(E_1 + E_2)} = \frac{\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)}{\mathrm{im}(E_1)}.$$

情形 1-3： I_1 和 I_2 均非单独存在。现在我们考虑一般情形；对于 $j \in \{1, 2\}$，I_j 与用于定义 $H_1(F, S_+)$ 的基的唯一弧 e_j 相接。定向 e_1，使其从曲面指向 I_1；并定向 e_2，使其从 I_2 指向曲面。任意选择其他定向。

作为 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes 2}$ 上的左模（其中与 $j \in \{1, 2\}$ 的 E_j 对应的因子为 j^{th}），整数环$^{S_+}_{\delta\,\pi\,,\,(F)}$ 是自由的，其一组基由以下元素集合给出

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega'),$$

其中，ω' 是 $\wedge^* H_1(F, S_+)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基元素，且不以 e_1 或 e_2 为因子。将 E_1（其“移除 e_1”）作用于 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$，得到

$$(-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega'),$$

将 E_1 作用于 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$ 得到

$$(-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes \omega',$$

而将 E_1 作用于 $\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')$ 或 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ 则得到零。类似地，将 E_2（它会“移除 $-e_2$”）作用于 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$ 得到

$$(-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega'),$$

将 E_2 应用于 $\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')$ 得到

$$(-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes \omega',$$

而将 E_2 应用于 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$ 或 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ 得到零。

由此可知，$\mathbb{Z}_{\delta^{S_+}_{\pi},\,(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)}$ 的 $\mathbb{Z}$-基通过取元素 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$ 以及下列元素来指定

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega').$$

现在，令 e 为 $\overline{F}$ 中通过拼接 e_1 和 e_2 得到的定向弧，则 $\mathbb{Z}_{\delta^{S_+}_{\pi},\,(\overline{F})}$ 的 $\mathbb{Z}$-基由元素 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega')$ 和 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$ 组成，其中 ω' 遍历与上述相同的集合。作出如下识别

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega')$$

and

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega';$$

这是一个次数为零的偶映射，因为 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$（前一种情形中的相同论证同样适用）。因此，我们得到如引理陈述中所述的 $\mathbb{Z}$-分次超阿贝尔群之间的同构。

为证明该同构与剩余作用相交换，令 $I \notin \{I_1, I_2\}$ 为 S_+ 的一个区间分支。

情形1-3a： I 与 $\{e_1, e_2\}$不相交。首先假设 e_1 和 e_2 都不与I关联。在这种情况下，与 I对应的$\mathbb{Z}_{\delta^{S_+}_{\pi},\,(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)}$上的端同态 E_I将基元素$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$映为

$$(-1)^{\pi(F)} \varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge E_I(\omega')) .$$

它将基元素 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$映为

$$(-1)^{\pi(F)+1} \varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_I(\omega')).$$

与此同时，$\mathbb{Z}_{\delta^{S_+}_{\pi},\,(\overline{F})}$上的端同态 E_I 将$\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega')$映为

$$(-1)^{\pi(\overline{F})+1} \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge E_I(\omega')) = (-1)^{\pi(F)} \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge E_I(\omega'))$$

并且它将$\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$ 映为

$$(-1)^{\pi(\overline{F})} \varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_I(\omega') = (-1)^{\pi(F)+1} \varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_I(\omega').$$

我们的识别将

$$(-1)^{\pi(F)} \varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge E_I(\omega')) \quad \leftrightarrow \quad (-1)^{\pi(F)} \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge E_I(\omega'))$$

and

$$(-1)^{\pi(F)+1} \varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_I(\omega')) \leftrightarrow (-1)^{\pi(F)+1} \varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_I(\omega'),$$

因此，它交织了两侧 E_I 的作用。

情形1-3b： I 与 e_1关联。现在假设 I 与 e_1关联；由于 e_1 从曲面指向 I_1，它就必定从 I 指向曲面。$\overline{F}$中的 e 也同样如此。

两侧作用于 E_I 的某些项（其中 e_1 和 e 均未被移除）与情形1-3a中的项相似，因此在我们的识别下彼此对应。我们还



FIGURE 7. 情形 2-1a 中，弧 e_1 和 e_2 以及圆 σ 的圆 C 附近的局部模型。

有 $E_I(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega'))$ 的一个新项，即“移除 $(-e_1)$”项

$$(-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega'),$$

以及 $E_I(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega'))$ 的一个新项，即“移除 $(-e)$”项

$$(-1)^{\pi(\overline{F})+1}\varepsilon_F \otimes \omega' = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes \omega'.$$

在我们的识别下，这些项彼此对应。

情形 1-3c： I 与 e_2 相接。

在这种情形下， e_2 和 e 从曲面指向 I，因此新项是 $E_I(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega'))$ 的“移除 e_2”项，即

$$(-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega'),$$

以及 $E_I(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega'))$ 的“移除 e”项，即

$$(-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega' = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'.$$

在我们的识别下，这些项彼此对应。

情形 2： I_1 和 I_2 位于 F的同一个分支上。我们进一步考虑一些子情形。

情形 2-1： I_1 和 I_2 位于 ∂F的同一个分支上。令 γ 为 ∂F中包含 I_1 和 I_2的分支。将定义 3.2 应用于为 $H_1(F, S_+)$选择一组基时，选择γ 作为其所在的 F 分支中唯一未完全-S_+ 的边界分支；该分支周围不取基圆，并且 I_1 和 I_2 各与一条基弧相接，分别记为e_1 和 e_2（可能有 $e_1 = e_2$）。定向 e_1，使其从曲面指向 I_1；定向 e_2，使其从 I_2 指向曲面；即使 $e_1 = e_2$，这样做也有意义。

情形 2-1a： I_1 和 I_2 在 F的同一连通分支中并非孤立。假设包含 I_1 和 I_2 的 F 连通分支还包含至少一个其他 S_+ 区间或 S_+ 圆。在这种情况下，我们可以假设 $e_1 \neq e_2$，并且还可以假设 e_1 和 e_2 共享一个端点q，如 [Man22 图 19] 所示；或者是该图的类似情形，其中 q 与 I_1 和 I_2位于 ∂F 的同一连通分支中。此处的图 7 展示了这两种可能性。

关于 e_1 和 e_2，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\pi}(F)$ 中有四类 $\mathbb{Z}$-基元素，分别为 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$、$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$、$\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')$，以及 $\varepsilon_F \otimes \omega'$，其中 ω' 不能被 e_1 或 e_2整除。我们有

$$E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')$$

因为 E_1 从左侧移除了 e_1，并且

$$E_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$$

因为 E_2从左侧移除 $(-e_2)$。因此，在商 $\mathbb{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,\,(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)}$ 中，我们有

$$\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$$

以及

$$\varepsilon_F \otimes \omega' = 0.$$

与此同时，为了定义 $\Gamma_{\overline{F}}$，移除 e_1 和 e_2 作为基弧，并添加一个与 e_1 和 e_2 方向相容的基圆 σ（见图 7）。$\mathbb{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,\,(\overline{F})}$ 的基元素有两种类型，即 $\varepsilon_F \otimes (\sigma \wedge \omega')$ 型和 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ 型，其中 ω' 不能被 σ 整除。作如下识别

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\sigma \wedge \omega') \tag{11}$$

and

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'. \tag{12}$$

从 F 变到 $\overline{F}$ 时，与 δ 和 π 的定义相关的量的变化与上文所述相同。因此，δ 的变化为 $A_1 - (A_1 - 1) = +1$，而 π 的变化模 2 为 $-1-2N_3 = 1$。由于 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$，识别 (11) 和 (12) 给出了一个零度偶映射，因此是 $\mathbb{Z}$ 分次超阿贝尔群之间的同构。关系 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$ 也确保此识别与 $E_{I'}$ 对任意不属于 $\{I_1, I_2\}$ 的 S_+ 区间分支的作用相交织，但包含 q 的区间 I 可能除外（若 q 包含在区间而非圆中）。若 q 包含在区间 I S_+ 中，则有

$$\begin{aligned}
&E_I(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) \\
&= (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega') + (-1)^{h\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') + (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge E_I(\omega')) \\
&= (-1)^{\pi(F)}\left(-\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') + \varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') + \varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge E_I(\omega'))\right) \\
&= (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge E_I(\omega'))
\end{aligned}$$

and

$$E_I(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_I(\omega'))$$

（注意，$\varepsilon_F \otimes \omega'$ 在我们的商中为零）。在 $\overline{F}$ 这一侧，我们有

$$E_I(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\sigma \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(\overline{F})+1}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\sigma \wedge E_I(\omega'))$$

and

$$E_I(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_I(\omega').$$

因此，我们的识别 intertwines E_I的作用。

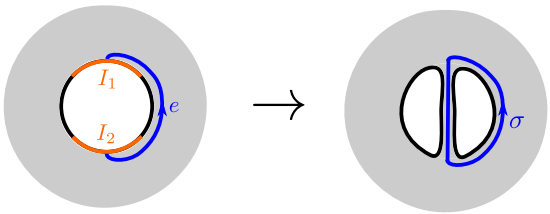


FIGURE 8. 情形 2-1b 中弧 e 与圆 σ 附近的圆 γ 的局部模型。

情形 2-1b: I_1 和 I_2 单独位于 F的一个连通分支中。现在假设 I_1 和 I_2是 S_+ 在其所在的 F连通分支中的唯二连通分支；我们有 $e_1 = e_2 =: e$。我们在 F 和 $\overline{F}$ 中 γ 附近选取的弧和圆如图 8 所示。

$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,\,(F)}$ 有两类基元素，分别为 $\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')$ 和 $\varepsilon_F \otimes \omega'$，其中$\omega'$ 不能被 e整除。我们有

$$E_1(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)} \varepsilon_F \otimes \omega'$$

因为 E_1 从左侧移除了 e，并且

$$E_2(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1} \varepsilon_F \otimes \omega'$$

因为 E_2 从左侧移除了 $(-e)$。它们的和为零，因此商表达式 $\mathbf{z}^{S_+}_{\delta\,\pi,\,(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)}$ 中的分母是平凡的。同时，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,\,(\overline{F})}$ 有两类基元素，分别为 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\sigma \wedge \omega')$ 和 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$。作如下识别

$$\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\sigma \wedge \omega') \tag{13}$$

and

$$\varepsilon_F \otimes \omega' \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'. \tag{14}$$

从 F 变为 $\overline{F}$时，与 δ 和π 的定义相关的量发生如下变化。

- 区间的数量减少 2。
- 非闭分支的数量增加 1。

δ 的变化因此为 $(A_1 - 1) - (A_1 - 1) = 0$，而 π 的变化也为零。因此，(13) 和 (14) 给出了一个零度偶映射，它是超阿贝尔群同构，因为它在基元素上给出了一个双射。S_+ 区间对应的 E_I 剩余作用都发生在 F 中与包含 I_1 和 I_2的连通分支不相交的连通分支上，因此我们的识别与这些剩余作用相容。

情形 2-2: I_1 和 I_2 位于 ∂F的不同连通分支上。令 γ_1 和 γ_2 分别为 ∂F 中包含 I_1 和 I_2 的连通分支。在图 5 的标准模型中，我们可以将 γ_1 和 γ_2 画成最左侧的两个边界圆。

情形 2-2a: I_1 和 I_2 在 F的分支中并非孤立。假设包含 I_1 和 I_2 的 F 分支还包含至少一个其他 S_+ 区间或 S_+ 圆；我们可以

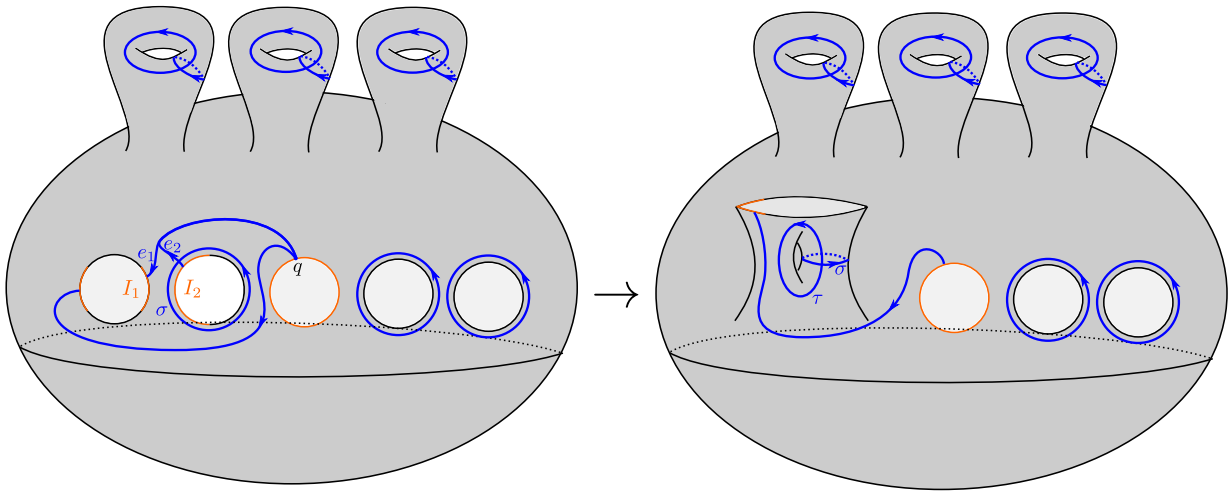


FIGURE 9. 在粘合 I_1 到 I_2之前和之后，当 I_1 和 I_2 位于 F 的同一连通分支上，但位于 ∂F的不同连通分支上时。

因此可以假设 $e_1 \neq e_2$。我们还可以假设 e_1 和 e_2 共享一个顶点 q，并且 γ_1 是 F 这一分支中选定的非完全S_+ 边界分支，在此处我们不在 γ_1周围画基圆。令 σ 为围绕 γ_2的基圆；参见图 9。

我们将 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(F)$ 的基元素分为四种类型，即 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$、$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$、$\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')$，以及 $\varepsilon_F \otimes \omega'$，其中 ω 不能被 e_1 或 e_2 整除（但可以被 σ 整除）。因此，在商 $\mathbf{z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)$ 中，我们有~~以下类型~~的基元素

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$$

and

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega').$$

同时，我们通过选取一个从 $\overline{F}$ 到图 9 所示标准缝合曲面的同胚来为 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(\overline{F})$ 选取一组基，并将 F 中的 σ 映到 $\overline{F}$ 中的圆 σ。虽然图 $\Gamma_{\overline{F}}$ 可以取为删去 e_1 和 e_2 后的 Γ_F，但我们还需要一个额外的闭圈 τ 来定义 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(\overline{F})$ 的基，因为我们的粘合操作使亏格增加了一。e_1 和 e_2 上的定向为 τ 提供了一个定向，如图 9 所示。对于 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(\overline{F})$，我们有两类基元素 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge \omega')$ 和 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$，其中 ω' 不能被 τ 整除，但可以被 σ 整除。作出识别

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge \omega') \tag{15}$$

and

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'. \tag{16}$$

从 F 过渡到 $\overline{F}$时，与 δ 和π 的定义相关的量发生如下变化。

- h减少 1。

- 区间的数量减少 2。

δ 的变化因此为 $A_1 - (A_1 - 1) = +1$，而 π 的变化模 2 为 $-1 - 2N_3 = 1$。因此，(15) 和 (16) 给出一个零度偶映射。它是超阿贝尔群同构，因为它给出了基元素之间的双射。对于任何不在 $\{I_1, I_2\}$ 中的 S_+ 区间分支 I'，该同构都与 $E_{I'}$ 的所有作用相交错；唯一可能的例外是包含 q 的区间I（如果 I 是区间而非圆）。若 q 位于一个 S_+ 区间 I中，则有

$$\begin{aligned} &E_I(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) \\ &= (-1)^{\pi(F)+1}(\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')) + (-1)^{\pi(F)+1}(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) \\ &\quad + (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge E_I(\omega')) \\ &= (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge E_I(\omega')) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &E_I(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) \\ &= (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes \omega' + (-1)^{h_F+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_I(\omega')) \\ &= (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_I(\omega')). \end{aligned}$$

与此同时，在 $\overline{F}$ 中有

$$E_I(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})+1}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge E_I(\omega'))$$

and

$$E_I(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_I(\omega').$$

关系 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$ 确保我们的识别与 E_I的作用相交错 .

情形 2-2b: I_1 和 I_2 在其 F分支中是仅有的元素。如果包含 I_1 和 I_2的 F 分支中没有其他 S_+区间或 S_+ 圆，那么在图 9 中，我们应将 e_1 和 e_2 替换为一条从 I_2 到 I_1的单一弧 e。$\mathbf{Z}_{\delta\,\pi,}^{S_+}(F)$ 的两种可能的基元素类型为 $\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')$ 和 $\varepsilon_F \otimes \omega'$。有

$$E_1(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes \omega'$$

and

$$E_2(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes \omega',$$

因此，$E_1 + E_2$是零映射，而$\mathbf{z}^{+}_{\delta\,\pi,(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)}$的分母是平凡的。同时，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(\overline{F})$ 的基元素有两种可能类型，分别是$\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge \omega')$和 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$；作出以下识别

$$\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega') \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge \omega') \tag{17}$$

and

$$\varepsilon_F \otimes \omega' \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'. \tag{18}$$

从 F 过渡到 $\overline{F}$时，与 δ 和 π的定义相关的量的变化如下。

- 区间的数量减少了 2。 S_+
- 非闭分支的数量增加了 1。S_+

因此， δ的变化为（A_1-1）$-$（A_1-1）$=0$，而 π的变化也为零。因此，（17）和（18）给出了一个零度偶映射，它是超阿贝尔群同构，因为它在基元素上给出了一个双射。由于 S_+ 的所有区间分支 $I\notin\{I_1,I_2\}$都位于 F 的不同于 I_1 和 I_2所在的连通分支上，该同构与 E_I的剩余作用相交换。□

3.2. 定理 1.2 的证明。

定理 1.2 的证明。定理 1.2 陈述中的同构右侧可以写成如下商

$$\frac{\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)}{\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{(\varepsilon_{F'}\otimes x)a\otimes(\varepsilon_F\otimes y)-(\varepsilon_{F'}\otimes x)\otimes a(\varepsilon_F\otimes y)\}}$$

其中，分母中的 a 是任意的乘法生成元

$$a=1\otimes\cdots\otimes1\otimes E\otimes1\otimes\cdots\otimes1$$

$A(M_2)$ 的元素， x 是 $\wedge^*H_1(F',S_+)$ 的任意基元素，而 y 是 $\wedge^*H_1(F,S_+)$ 的任意基元素（我们用 S_+ 表示任意缝合曲面的 S_+ 边界，具体含义由上下文决定）。

$\mathbb{Q}$分次超阿贝尔群[4]

$$\operatorname{Left}_{A(M_1)}\left[\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)\right]$$

在 $A(M_3)$ 和 $A(M_1)$ 的左作用下，同构于一个 $\mathbb{Q}$分次超阿贝尔群

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}((F'\sqcup F)_{\text{left}}),$$

其中，$(F'\sqcup F)_{\text{left}}$ 是 $F'\sqcup F$，并将所有 S_+ 边界分支视为出边界；该映射为 Φ，它将

$$\varepsilon_{F'}\otimes x\otimes\varepsilon_F\otimes y\mapsto(-1)^{|x|\pi(F)}\varepsilon_{(F'\sqcup F)_{\text{left}}}\otimes(x\wedge y).$$

注意， Φ 与 F'的出射区间上的 E 的左作用相容，并且它通过一个负[5] 符号关联了 F 的入射区间上的 E 的左作用。

[4]“Left$_{A(M_1)}$”这一记号表示，应将超交换超代数 $A(M_1)$ 的右作用视为左作用；在从左侧移到右侧、以执行原来的右作用时， $A(M_1)$ 的元素会带上一个符号。下面的“Right$_{A(M_1)}$”记号与此类似。[5]示意而言，若我们在序列 $XXOXXX$ 的左侧施加一个奇的“remove O”算子，其中 X 和 O 都是奇的，那么在移过两个 X 后，会得到两个负号，然后我们从“左侧”移除 O。另一方面，如果先将这个算子一路移到最右侧（得到六个负号），再将它移回左侧，直到它可以与“右侧”的 O 抵消，我们会再得到三个负号，总共九个负号。九个负号与两个负号给出的整体符号不同，而且一般情形下也会出现这种情况。

映射 Φ 将 $(\varepsilon_{F'} \otimes x)\ a \otimes\ (\varepsilon_F \otimes y)$ 映射为

$$(-1)^{(|x|+1)\pi(F)}\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (xa \wedge y)$$

其中 xa 仍是在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(F')$ 中计算的。用 $\bullet_1$（来自 F'）在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}((F' \sqcup F)_{\text{left}})$ 上的 $A(M_2)$ 左作用来表示，我们可以将这个元素写成

$$-(-1)^{(|x|+1)\pi(F)+\pi(F')+\pi(F)+|x|}a \bullet_1 \left(\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\right),$$

化简后得到

$$-(-1)^{|x|\pi(F)+\pi(F')+|x|}a \bullet_1 \left(\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\right);$$

额外的负号来自与上文脚注中相同的现象。类似地，Φ 将

$$(\varepsilon_{F'} \otimes x) \otimes a(\varepsilon_F \otimes y) = (-1)^{\pi(F)}(\varepsilon_{F'} \otimes x) \otimes (\varepsilon_F \otimes ay)$$

to

$$(-1)^{\pi(F)+|x|\pi(F)}\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge ay)$$

其中 ay 仍是在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(F)$ 中计算的。用 $\bullet_2$（来自 F）在 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}((F' \sqcup F)_{\text{left}})$ 上的 $A(M_2)$ 左作用来表示，我们可以将这个元素写成

$$(-1)^{\pi(F)+|x|\pi(F)+\pi(F')+\pi(F)+|x|}a \bullet_2 \left(\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\right),$$

化简后得到

$$(-1)^{|x|\pi(F)+\pi(F')+|x|}a \bullet_2 \left(\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\right),$$

因此，作为 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群，我们可以将推论陈述中同构右侧识别为

$$\text{Right}_{A(M_1)}\left[\frac{\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}((F' \sqcup F)_{\text{left}})}{\text{span}_{\mathbb{Z}}\{a \bullet_1 \left(\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes z\right) + a \bullet_2 \left(\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes z\right)\}}\right] \tag{19}$$

其中，分母中的 a 是上述 $A(M_2)$ 的任意乘法生成元，而 z 是 $\wedge^* H_1((F' \sqcup F)_{\text{left}}, S_+)$ 的任意基元素。此识别保持了 F' 出射区间对应的 E 左作用，并且它将 F 入射区间对应的 E 右作用联系起来，二者相差一个负号。

(19) 的分母可以看作对 M_2 的所有连通分支求和（每个连通分支对应于 $(F' \sqcup F)_{\text{left}}$ 的目标中的一对区间 $\{I_1, I_2\}$），所得各子空间之和

$$\text{im}(E_1 + E_2)$$

（19）的分子的，其中 E_1 和 E_2 分别是与 I_1 和 I_2 对应的分子的端同态。令 $\overline{F}$ 表示将 $(F' \sqcup F)_{\text{left}}$中这样一对区间 $\{I_1, I_2\}$ 粘合在一起的结果，这两个区间均来自 M_2的一个连通分支 m。根据引理 3.1，（19）中的商同构于 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(\overline{F})$ 的商，除 m 以外，对 M_2 的所有连通分支m'（对应于区间对 I'_1 和 I'_2）取子空间之和：

$\mathrm{im}(E_1' + E_2')$，其中 E_1' 和 E_2' 分别是与 I_1' 和 I_2'对应的 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi,}(\overline{F})$ 的端同态。

对 M_2 的连通分支数进行归纳，可知 (19) 中的商同构于

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}((F' \circ F)_{\mathrm{left}})$$

与 $A(M_3)$ 和 $A(M_1)$ 的左作用相容。因此，推论陈述中的同构右侧同构于

$$\mathrm{Right}_{A(M_1)}\left[\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}((F' \circ F)_{\mathrm{left}})\right],$$

与 E 对 F' 的出射区间的左作用相容，并将 E 对 F 的入射区间的右作用以负号关联起来，从而得到

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F' \circ F)$$

与 $A(M_3)$ 的左作用和 $A(M_1)$ 的右作用相容。 □

3.3. 推论1.3的证明。设 A 和 B 是 $\mathbb{Z}$ 上的超代数，且 $f\colon A \to B$ 是超代数的同态（即保持乘法、单位元及任何附加分次的偶映射），令 X_f 为由 $X_f := B$ 定义的 (B, A) 上的双模，其作用规定为

$$b \cdot x \cdot a := bxf(a)$$

对于 b、$x \in B$ 和 $a \in A$。对应关系 $f \mapsto X_f$ 给出一个从超代数及其同态范畴到超代数及双模范畴的函子，其中从 A 到 B 的态射是关于 (B, A) 的双模的同构类。

定义 3.4。令 $\mathbf{SAlg}_{\mathbb{Z}}$ 表示具有以下结构的对称幺半范畴：

- 对象：定义在 $\mathbb{Z}$上的 $\mathbb{Z}$-分次超代数（即 $\mathbb{Z}$-分次超环）。
- 从 A 到 B的态射：关于 (B, A) 的 $\mathbb{Q}$-分次双模，按同构取等价类；复合由中间超代数上的张量积给出，而 A 上的恒等态射由 A 作为其自身上的双模给出。

- 对象上的张量积：超代数的张量积 $A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2$。
- 态射上的张量积：若 X 是关于 (B_1, A_1) 的双模，且 Y 是关于 (B_2, A_2) 的双模，则定义它们的张量积为 $X \otimes_{\mathbb{Z}} Y$，其双模结构由下式给出

$$\begin{aligned}&(b_1 \otimes b_2) \cdot (x \otimes y) \cdot (a_1 \otimes a_2)\\ &:= (-1)^{|b_2||x|+|a_1||y|+|b_2||a_1|}(b_1 \cdot x \cdot a_1) \otimes (b_2 \cdot y \otimes a_2).\end{aligned}$$

这个张量积运算在双模的同构类上是良定义的。

- 幺半群单位： $\mathbb{Z}$ 作为超代数（纯偶且集中于零度）。
- 结合子 $\alpha_{A_1,\ A_2,\ A_3}$：双模 X_α 的同构类，其中

$$\alpha\colon A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3) \to (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3$$

是超代数之间的典范同构。

- 左单位约束 λ_A：双模 X_λ 的同构类，其中

$$\lambda\colon \mathbb{Z}\otimes A\to A$$

是超代数的规范同构。右单位约束的定义类似。

- 对称化子 $\sigma_{A_1,\ A_2}$：双模 X_σ 的同构类，其中

$$\sigma\colon A_1\otimes A_2\to A_2\otimes A_1$$

是由下式指定的超代数的规范同构：

$$\sigma(a_a\otimes a_2)=(-1)^{|a_1||a_2|}a_2\otimes a_1.$$

$\mathsf{SAlg}_{\mathbb{Z}}$ 的相容条件可以作为超代数之间同态的恒等式加以验证；因此，从同态 f 过渡到双模 X_f的同构类时，这些条件仍然成立。

推论1.3的证明。由定理 1.2 可知，推论陈述中的赋值与复合相容。由例1.4和命题 2.7（取 $p=1$）可知，单个区间上的恒等余边界被映为 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 上的恒等双模；由于 δ、π 和 $H_1(F,S_+)$ 关于不交并具有可加性，因此一般而言，对象 M 上的恒等余边界被映为 $A(M)$ 上的恒等双模。

对于幺半函子的相干映射，我们需要一个关于 $(\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi},(\varnothing)\ \mathbb{Z})$ 的双模 ε 的同构类，其中 $\varnothing$ 是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ open 的幺半群单位；对于 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ open 的任意一对对象 (M,M')，我们需要一个关于 $(\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi},(M\sqcup M'),\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi},(M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi},(M'))$ 的双模 $\mu_{M,M'}$ 的同构类。由于 $\varnothing$ 没有区间分支，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,,\mu}(\varnothing)$ 是由 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的副本构成的空张量积，它是 $\mathsf{SAlg}_{\mathbb{Z}}$ 的幺半群单位 $\mathbb{Z}$，因此我们可以取 ε 为 $\mathbb{Z}$ 作为其自身上的双模时的同构类。设 M 和 M' 是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ open 的对象；定义 $\mu_{M,M'}$ 为双模 X_μ 的同构类，其中

$$\mu\colon A(M)\otimes A(M')\to A(M\sqcup M')$$

是去括号同构。为了证明该映射在 M 和 M'中是自然的，设F和 F'分别是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\mathcal{H}}$ 中从 M_1到 M_2以及从 M_1'到 M_2'的态射。我们要证明

$$X:=(\mu_{M_2,M_2'})\otimes_{A(M_2)\otimes A(M_2')}(\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F'))$$

and

$$Y:=\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\pi}(F\sqcup F')\otimes_{A(M_1\sqcup M_1')}(\mu_{M_1,M_1'})$$

在 $(A(M_2\sqcup M_2')\ A(M_1)\otimes A(M_1'))$ 上作为双模同构。事实上，δ、π 和 $H_1(F,S_+)$ 关于不交并的可加性给出了一个 $\mathbb{Q}$ 分次阿贝尔群的同构；对代数的每个乘法生成元 E_I 分别考察，即可得出其与代数作用相容，因此括号的放置以及 μ 双模都无关紧要。

$\mu_{M,\ M'}$ 与 2Cob$^{\text{ext}}$ 开 和 SAlg$_{\mathbb{Z}}$ 的结合子之间的相容性，在相容性方块中所有映射所对应的代数同态层面成立；这相当于说明，从 $(A(M_1) \otimes A(M_2)) \otimes A(M_3)$ 到 $A(M_1 \sqcup (M_2 \sqcup M_3))$ 的两个去括号同构相等。因此，这种相容性在双模层面成立至同构。$\mu_{M,\ M'}$、ε 与 SAlg$_{\mathbb{Z}}$ 和 2Cob$^{\text{ext}}$ 开 的单位子之间的相容性，在代数同态层面也成立；由左单位子相容性方块中两条路径得到的同态，均为从 $\mathbb{Z} \otimes A(M)$ 到 $A(M)$ 的左乘映射，右单位子方块中的同态也同样如此。因此，与单位子的相容性在双模层面成立至同构。

最后，为了说明 $\mu_{M,M'}$ 与 SAlg$_{\mathbb{Z}}$ 的对称化子相容，设 M_1 和 M_2 是 2Cob$^{\text{ext}}$ open 中的对象。2Cob$^{\text{ext}}$ open 中 M_1 和 M_2 的对称化子 σ_{M_1,M_2} 可描述为 $(M_1 \sqcup M_2) \times [0,1]$：将右侧的 $t=1$ 切片 $M_1 \sqcup M_2$（按该顺序）到左侧的 $t=0$ 切片 $M_2 \sqcup M_1$（按该顺序）之间视为一个余边界。换言之，它是 $M_1 \sqcup M_2$ 上的恒等余边界，但其目标中的不交并顺序反转为 $M_2 \sqcup M_1$。根据例1.4 和命题 2.7，取 $p=1$，我们可以将 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}(\sigma_{M_1,M_2})$ 识别为 $A(M_1) \otimes A(M_2)$：其具有 $A(M_1) \otimes A(M_2)$ 的通常右作用，该作用由乘法给出；并具有 $a_2 \otimes a_1 \in A(M_2) \otimes A(M_1)$ 的左作用，该作用由乘以 $(-1)^{|a_1||a_2|}a_1 \otimes a_2$ 给出。因此，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\pi}(\sigma_{M_1,M_2})$ 是 SAlg$_{\mathbb{Z}}$ 中 $(A(M_1)\ AM_2)$ 的对称化子（更准确地说，涉及对称化子和幺半群范畴相干同构的相容性方块是交换的，但我们省略了对诸如 $A(M_1 \sqcup M_2) \cong A(M_1) \otimes A(M_2)$ 等幺半群范畴相干同构的明确提及）。□

4. Constraints on degree and parity

最后，我们简要讨论一下为何选择参数化表达式 (1) 和 (2) 来表示次数平移和奇偶移位。在 Mikhaylov [Mik15, 5.2.2], 中，由 $\wedge^* H^1$ 构造的态空间上的次数平移与 H^1 的维数成正比；在 [GY22, 第 3 节2]中同样如此。类似地，对我们而言，量 $h = \operatorname{rank} H_1(F, S_+)$ 及其组合公式为定义次数平移和奇偶移位提供了一个合理的起点。在 (9) 中，h取决于与缝合曲面相关的各种数据：

- 连通分支的 k_1 数量
- 亏格 k_2（对所有连通分支求和）
- 闭分支的 k_3 数量
- 不带有 S_+ 的非闭分支的 k_4 数量
- 非闭分支的数量（不含 S_-）
- 区间的数量
- 圆的数量
- 圆的数量
- 具有 S_+ 和 S_-的 F 的边界圆数量

当我们改变缝合曲面时，上述参数 $k_1, \ldots, k_9$ 之间不存在任何线性关系；另一方面，其他相关数据可以由 $k_1, \ldots, k_9$计算得出。对于

例如，同时与 S_+和 S_-相交的 F的连通分支数为 $k_1-k_3-k_4-k_5$， S_- 区间的数量为 k_6，而 F的边界分支数为 $k_7+k_8+k_9$。类似地，(9) 将 h表示为 k_i的线性组合。

由引理 3.1 的证明可推知，若分次平移函数 δ 有一个一般公式，将 F 映为某个线性组合

$$C_1k_1+\cdots+C_9k_9$$

（由 k_i组成），则当且仅当满足以下方程组时， δ 与引理 3.1 一致：

$$-C_1+C_4-2C_6+C_8-2C_9=0 \quad \text{(Case 1-1)} \tag{20}$$

$$-C_1-2C_6-C_9=1 \quad \text{(Case 1-2 or 1-3, no } S_- \text{ circle created)} \tag{21}$$

$$-C_1-2C_6+C_8-2C_9=1 \quad \text{(Cases 1-2 or 1-3, one } S_- \text{ circle created)} \tag{22}$$

$$-2C_6+C_9=1 \quad \text{(Case 2-1a, no } S_- \text{ circle created)} \tag{23}$$

$$-2C_6+C_8=1 \quad \text{(Case 2-1a, one } S_- \text{ circle created)} \tag{24}$$

$$-2C_6+2C_8-C_9=1 \quad \text{(Case 2-1a, two } S_- \text{ circles created)} \tag{25}$$

$$C_4-2C_6+2C_8-C_9=0 \quad \text{(Case 2-1b)} \tag{26}$$

$$C_2-2C_6-C_9=1 \quad \text{(Case 2-2a, no } S_- \text{ circle created)} \tag{27}$$

$$C_2-2C_6+C_8-2C_9=1 \quad \text{(Case 2-2a, one } S_- \text{ circle created)} \tag{28}$$

$$C_2+C_4-2C_6+C_8-2C_9=0 \quad \text{(Case 2-2b)} \tag{29}$$

将（23）与（24）相减，得到 $C_8=C_9$，因此（21）和（22）化为同一个方程，而（23）、（24）和（25）化为同一个方程。这个第二方程可解得 $C_6=(C_9-1)/2$。将（21）与（23）相减，得到 $2C_9+C_1=0$，从而 $C_1=-2C_9$。现在（26）变为

$$C_4-(C_9-1)+2C_9-C_9=0$$

由此得到 $C_4=-1$。化简（20），得到

$$2C_9-1-(C_9-1)+C_9-2C_9=0$$

这现在是恒等式。对于最后三个方程，（27）和（28）都变为

$$C_2-(C_9-1)-C_9=1$$

或等价地， $C_2=2C_9$；将此结果代入（29），得到

$$2C_9-1-(C_9-1)+C_9-2C_9=0$$

这是显然成立的。因此，就系数 C_i 而言，要解上述方程组，我们可以将 C_3、C_5、C_7 和 C_9 视为自由参数，其他参数则由这四个参数确定。现在，利用 (9)，我们有

$$C_9h=-2C_9k_1+2C_9k_2+2C_9k_3+C_9k_4+C_9k_5+C_9k_6+C_9k_7+C_9k_8+C_9k_9.$$

因此，我们可以将线性组合表示为

$$-2C_9k_1+2C_9k_2+C_3k_3-k_4+C_5k_5+((C_9-1)/2)k_6+C_7k_7+C_9k_8+C_9k_9$$

as

$$C_9h+C_3k_3+(-C_9-1)k_4+C_5k_5+((-C_9-1)/2)k_6+C_7k_7$$

其中参数 C_3、C_5、C_7 已吸收了 h 中 k_3、k_5、k_7 的系数。将 $(C_3$、C_5、C_7、$C_9)$ 重写为 $(A_3$、A_2、A_4、$-A_1)$ 后，我们的线性组合变为

$$-A_1h+A_3k_3+(A_1-1)k_4+A_2k_5+((A_1-1)/2)k_6+A_4k_7, \tag{30}$$

对于 $(A_1$、A_2、A_3、$A_4)\in\mathbb{Q}^4$，这是与引理 3.1 兼容的一般次数平移。该计算促使我们在 (1) 中定义了 $\delta_{A_1、A_2、A_3、A_4}$。

对于奇偶移位，我们可以考察 (30) 何时给出 $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ 的一个元素。如果这对所有缝合曲面 F 都成立，那么取 F 为一个圆盘，其边界由一个 S_+ 区间和一个 S_- 区间组成，我们得到 $(A_1-1)/2\in\mathbb{Z}$，因此对于某个 $N\in\mathbb{Z}$，有 $A_1=2N+1$。代入 (30) 得

$$-(2N+1)h+A_3k_3+2Nk_4+A_2k_5+Nk_6+A_4k_7,$$

其模 2 等于

$$-h+A_3k_3+A_2k_5+Nk_6+A_4k_7.$$

取 $F=S^2$，得到 $A_3\in\mathbb{Z}$；取两个边界分支都在S_+ 中的 $F=S^1\times[0,1]$，得到 $A_2\in\mathbb{Z}$；再令 $\sqcup D^2$ 为（$S^1\times[0,1]$） F，且其所有边界分支都在S_+ 中，得到 $A_4\in\mathbb{Z}$。这样我们便得到了（2）。

References

[ADO92] Y. Akutsu、T. Deguchi 和 T. Ohtsuki。彩色链环的不变量。《结理论及其分支》，1(2):161–184，1992。[AGPS18] N. Aghaei、A. M. Gainutdinov、M. Pawelkiewicz 和 V. Schomerus。GL(1|1) Chern-Simons 理论的组合量子化 I：环面，2018。arXiv:1811.09123。[BCGPM16] C. Blanchet、Francesco C.、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。非半单拓扑量子场论、Reidemeister 扭率与卡沙耶夫不变量。《数学进展》，301:1–78，2016。arXiv:1404.7289。[CGP21] F. Costantino、S. Gukov 和 P. Putrov。非半单拓扑量子场论与 BPS q 级数，2021。arXiv:2107.14238。[CGPM14] F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。通过链环手术表示和非半单范畴构造三维流形的量子不变量。《拓扑学杂志》，7(4):1005–1053，2014。arXiv:1202.3553。[DM14] C. L. Douglas 和 C. Manolescu。论角化 Floer 同调的代数。《拓扑学杂志》，7(1):1–68，2014。arXiv:1105.0113。[Don99] S. K. Donaldson。拓扑场论以及卡森和孟-陶布斯的公式。载于《基尔比节论文集》（加利福尼亚州伯克利，1998），《几何与拓扑专著》第 2 卷，第 87–102 页。几何与拓扑出版社，考文垂，1999。arXiv:math/9911248。[FN91] C. Frohman 和 A. Nicas。通过拓扑量子场论得到 Alexander 多项式。载于《微分几何、整体分析与拓扑学》（新斯科舍省哈利法克斯，1990），《加拿大数学学会会议录》第 12 卷，第 27–40 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991。

[GHN+21] S. Gukov、P.-S. Hsin、H. Nakajima、S. Park、D. Pei 和 N. Sopenko。库仑分支的 Rozansky-Witten 几何与对数结不变量。《几何物理杂志》，168:论文编号 104311，共 22 页，2021。arXiv:2005.05347。[GPPV20] S. Gukov、D. Pei、P. Putrov 和 C. Vafa。BPS 谱与三维流形不变量。《结理论及其分支》，29(2):2040003，共 85 页，2020。arXiv:1701.06567。[GPV17] S. Gukov、P. Putrov 和 C. Vafa。五膜与三维流形同调。《高能物理杂志》，(7):071，前置部分+80，2017。arXiv:1602.05302。[GY22] N. Geer 和 M. B. Young。由 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ 和 $U(1|1)$ Chern–Simons 理论构造三维拓扑量子场论，2022。arXiv:2210.04286。[HLW17] J. Hom、T. Lidman 和 L. Watson。Alexander 模、Seifert 形式与范畴化。《拓扑学杂志》，10(1):22–100，2017。arXiv:1501.04866。[Jag22] M. Jagadale。装饰化拓扑量子场论及其希尔伯特空间，2022。arXiv:2206.14967。[Ker03] T. Kerler。通过霍普夫代数与缠结图理论研究同调拓扑量子场论及三维流形的 Alexander-Reidemeister 不变量。《加拿大数学杂志》，55(4):766–821，2003。arXiv:math/0008204。[Kho14] M. Khovanov。如何将量子 $\mathfrak{gl}(1|2)$ 的一半范畴化。载于《波兰结论集 III》第 III 部分，《巴拿赫中心出版物》第 103 卷，第 211–232 页。波兰科学院数学研究所，华沙，2014。arXiv:1007.3517。[LOT18] R. Lipshitz、P. S. Ozsv´ath 和 D. P. Thurston。带边界的Heegaard Floer同调。《美国数学学会回忆录》，254(1216):viii+279，2018。arXiv:0810.0687。[LP08] A. D. Lauda 和 H. Pfeiffer。开闭弦：二维扩展拓扑量子场论与 Frobenius 代数。《应用拓扑学》，155(7):623–666，2008。arXiv:math/0510664。[Man] A. Manion。去范畴化的 Heegaard Floer 理论以及 E 和 F 的作用。准备中。[Man22] A. Manion。关于 Heegaard Floer 同调中某些高阶作用的去范畴化，2022。arXiv:2203.00094。[Mik15] V. Mikhaylov。解析扭率、三维镜像对称与超群 Chern-Simons 理论，2015。arXiv:1505.03130。[MR20] A. Manion 和 R. Rouquier。高阶表示与角化海加德·弗洛尔同调，2020。arXiv:2009.09627。[Pet18] I. Petkova。带边界的Heegaard Floer同调的去范畴化。《辛几何杂志》，16(1):227–277，2018。arXiv:1212.4529。[Zar11] R. Zarev。带边界缝合 Floer 同调。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2011。博士论文——哥伦比亚大学。arXiv:0908.1106。

Department of Mathematics, North Carolina State University, 2108 SAS Hall, Raleigh,NC 27695电子邮箱地址：ajmanion@ncsu.edu