arXiv:2303.02914v1 [math.CA] 6 Mar 2023

高阶耦合系统的振荡判据

B. V. K. Bharadwaj[1] 和 Pallav Kumar Baruah[2]

摘要

本文研究了非线性常微分方程的高阶二维耦合系统。我们给出了关于非线性函数的必要且充分条件，使得解对发生振荡。

关键词：非线性耦合常微分方程，振荡。

2000年数学主题分类：34A99, 34C11 .

1. Introduction

当我们预期解具有某些具备实际意义的特定性质时，研究微分方程解的定性性质非常有用。其中一种性质就是振荡。人们在寻找判定给定微分方程是否振荡的条件方面做了大量工作。二阶常微分方程的振荡与非振荡理论研究具有非常悠久的历史。该领域最早的理论成果实际上是由 Sturm 本人在其著名的1836年论文的摘要 [10] 中获得的，是其令人难忘的比较定理的结果。此后，人们撰写了许多论文，研究这一理论的各个方面，范围从差分方程到偏微分方程，甚至包括积分方程。我们回顾一下，若实常微分方程的解在 $[0,\infty)$上具有任意大的零点，则称其在 $[0,\infty)$上是振荡的。根据标准的存在唯一性定理，我们可以看到，在零点处必然发生符号变化，并且零点不可能在任何有限区间内聚集。如果该方程不

日期： [1,2]数学与计算机科学系 斯里·萨蒂亚·赛高等学府 Prasanthinilayam- 515134 印度。[1]电子邮件：bvkbharadwaj@sssihl.edu.in[2]电子邮件：pkbaruah@sssihl.edu.in。

振荡，则称其为非振荡的。这里所关注的问题，是确定一个一般判据，以确保形如（1.4）的二项（或多项）非线性常微分方程发生振荡，其中非线性项为一般形式。在 Atkinson [1] 之后，许多人研究了不同类型的条件，以证明微分方程具有振荡的能力。 [16, 3, 4, 5] 是这一领域中一些值得注意的研究成果。少数作者研究了微分方程系统，其中值得注意的是 Mirzov [8], [9]。在[9], 中，Mirzov 研究了以下系统

$$\begin{aligned} u_1^{'} &= f_1(t, u_1, u_2), \\ u_2^{'} &= f_2(t, u_1, u_2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

并给出了使（1.1）的正规解能够振荡的充分条件，以及充要条件。若耦合系统的正规解中， u_1 和 u_2 均振荡，则称该解为振荡解。若其中一个振荡，则称该解对为弱振荡；若两者均不振荡，则称该解对为非振荡。本文研究的所有耦合系统均采用相同的定义。

人们已开展大量工作，为系统和方程的非振荡解给出判定条件。相关文献可参见 [11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19]。在这些文章中，作者大多针对完全耦合的低阶系统或弱耦合的高阶系统，证明了非振荡或正解的条件。例如，Graef 等人 [18] 研究了以下完全耦合的二阶系统。

$$\begin{aligned} -u_1^{''} &= \lambda_1 a_1(t) f_1(u, v) \quad t \in (0, 1), \\ -v_1^{''} &= \lambda_2 a_2(t) f_2(u, v) \quad t \in (0, 1). \end{aligned} \tag{1.2}$$

而 Henderson 等人 [19]考虑了以下高阶系统。

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) + \lambda a(t) f(v) = 0 \quad t \in (0, 1), \\ v^{(n)}(t) + \lambda b(t) g(u) = 0 \quad t \in (0, 1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

本文考虑如下系统

$$\begin{aligned} x_1^{(n_1)} &= f_1(t, x_2), \\ x_2^{(n_2)} &= f_2(t, x_1), \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中，函数 f_1、f_2 在定义域的每个有限平行六面体内满足 Carathéodory条件

$$D = \{(t, x_i) : 0 \le t < \infty, -\infty < x_i < \infty\}. \tag{1.5}$$

不同于 [9] 中的处理方式，这里采用不动点技术探讨方程 (1.4) 的正规解是否能够振荡。

2. Mathematical Preliminaries

定义 2.1. 若一对实值连续函数 $y_1(t)$ $y_2(t)$ 在区间 $[t_0, \infty)$ 上同时满足 (1.4) 中的两个方程，则称它们为 (1.4) 的解。

定义 2.2. 若 (1.4) 的一个非平凡解 $x_1(t)$ $x_2(t)$ 定义在某个区间 $[t_0, \infty)$ 上，则称其为正规解，如果

$$sup\{|x_1(\tau)| + |x_2(\tau)| : \tau \ge t\} > 0 \tag{2.1}$$

对任意 $t \in [t_0, \infty)$

定义 2.3. 如果方程 (1.4) 的一个正规解满足 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都有一列零点收敛到 ∞，则称该正规解为振荡解。但如果存在一个 $t_0 > 0$，使得 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上均不为零，则称解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为非振荡解。此外，如果 $x_1(t)$ 或 $x_2(t)$ 至少有一者存在一列零点收敛到 ∞，则方程 (1.4) 的一个正规解为弱振荡解。

Schauder定理:
设 E 是一个 Banach空间， X 是 E 的任意非空凸闭子集。如果 S 是从 X 到其自身的连续映射，且 SX 相对紧，则映射 S 至少有一个不动点（即存在一个 $x \in X$，使得 $x = Sx$）。设 $E = B([0, \infty))$，其中 $B([0, \infty))$ 是区间 $[0, \infty]$ 上所有连续有界实值函数构成的 Banach空间，并赋予上确界范数 $\|.\|$:

$\|h\| = sup_{t \ge 0} |h(t)|$ 对于 $h \in B([0, \infty))$
我们需要以下关于 $B([0, \infty))$ 的紧性判据，它是 Arzelà–Ascoli定理的一个推论。该紧性判据改编自 Avramescu 的一个引理 [7]。

紧性判据:

设 H 是 Banach空间 $B([0,\infty)$ 的等度连续且一致有界子集。如果 H 在 ∞ 处等收敛，则它也是相对紧的。

注意，在区间 $[0,\infty)$ 上定义的实值函数集合 H，若其中所有函数在点 ∞ 处于 R 收敛，且对每个 $\epsilon>0$，都存在一个 $T\geq 0$，使得对于所有函数$h\in H$，当所有 $t\geq T$ 时，均有 $|h(t)-lim_{s\to\infty}h(s)|<\epsilon$，则称该集合在 ∞ 处等度收敛。

3. Main Results

定理 3.1. 假设在定义域 D 中，不等式

$$(-1)^{i-1}f_i(t,x_{3-i})\cdot signx_{3-i}\geq a_i(t)|x_{3-i}|^{\lambda_i} \tag{3.1}$$

对于 $i=1$，2 均成立，其中 $\lambda_i>0$ 对于 $i=1$，2，且 $\lambda_1\cdot\lambda_2>1$。函数$a_i(t)\geq 0$ 对于 $i=1$，2，在 $[0,\infty)$ 的每个有限区间段上均可求和，并且对于某个 $k\in\{1,2\}$，有

$$\int_0^\infty \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}a_k(t)\,dt=\infty. \tag{3.2}$$

那么，要使系统 (1.4) 的所有正规解都振荡，只需满足

$$\int_0^\infty \frac{t^{n_{3-k}-1}}{(n_{3-k}-1)!}a_{3-k}(t)\,dt=\infty, \tag{3.3}$$

否则，

$$\int_0^\infty \frac{t^{n_{3-k}-1}}{(n_{3-k}-1)!}a_{3-k}(t)\,dt<\infty \tag{3.4}$$

and

$$\int_0^\infty \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}a_k(t)\left[\int_t^\infty \frac{(\tau-t)^{n_{3-k}-1}}{(n_{3-k}-1)!}a_{3-k}(\tau)\,d\tau\right]^{\lambda_k}dt=\infty. \tag{3.5}$$

证明。我们证明 $k=1$ 的情形。 $k=2$ 的情形完全类似。

为了证明所有解都振荡，我们需要证明非振荡解对和弱振荡解对不存在。

现在，设 (1.4) 有一个非振荡的正规解对 $x_1(t)$ $x_2(t)$。根据非振荡的定义， $\exists$ 存在充分大的 t_0，使得

$$x_1(t)\cdot x_2(t)\neq 0 \tag{3.6}$$

对所有的 $t \geq t_0$ 都成立。

这意味着对于所有 $t \geq t_0$ ， $sign\ x_i(t)$都是常数，这可由(3.6)推出。由(1.4)可知

$$x_2^{(n_2)}(t) = f_2(t, x_1(t)).$$

将上述方程从 t_0 到 t积分 $n_2 - 1$ 次，得到

$$x_2^{'}(t) - k(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^{n_2-2}}{(n_2-2)!} f_2(s, x_1(s))\, ds, \tag{3.7}$$

其中， $k(t) = \sum_{j=0}^{n_2-2} x_2^{(j+1)}(t_0)\frac{(t-t_0)^j}{j!}$ 是关于 t的(n_2-2)次多项式。我们知道，当 t足够大，超过该多项式最后一个正实根（记为 t）时，此多项式的符号等于其最高次项系数的符号，在此情形下即为 $x_2^{n_2-1}(t_0)$的符号。因此，选取大于 $\hat{t}$的 t_0 后，$k(t)$的符号为常数。

现在，由(3.1)可知，对于所有 $t \geq t_0$， $sign\ f_2(t, x_1(t)) = \neg[sign\ x_1(t)] = constant$。因此，对于所有 $t \geq t_0$，(3.7)的被积函数不改变符号。事实上，对于每个~~$t \geq t_0$~~， $\int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{n_2-1-\rho}(n_2-1-\rho)!\ f_2(s, x_1(s))\, ds$, $\rho = 1, 2, .., n_2 - 1$的符号都相同。我们现在知道，对于所有 $t \geq t_0$ ，$x_2^{'}(t) - k(t)$不改变符号，且其符号与 $\int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{n_2-2}(n_2-2)!\ f_2(s, x_1(s))\, ds$相同；而这又说明，$x_2^{'}(t) - k(t)$的符号与 $x^{(n_2-1)}2(t) - x^{(n_2-1)}2(t_0) = \int_{t_0}^{t} f_2(s, x_1(s))\, ds$相同。
由于 $sign\ f_2(t, x_1(t))$ 是常数， $sign\ x_2^{(n_2)}(t)$ 是常数。因此 $x^{(n_2-1)}2(t)$是单调的。

每当 $x^{(n_2-1)}2(t_0) \geq 0$ 时，我们有， $x^{(n_2-1)}2(t) \geq x^{(n_2-1)}2(t_0) \geq 0$，这意味着$x^{(n_2-1)}2(t) - x^{(n_2-1)}2(t_0) \geq 0$。
类似地，每当 $x^{(n_2-1)}2(t_0) \leq 0$ 时，我们有， $x^{(n_2-1)}2(t) \leq x^{(n_2-1)}2(t_0) \leq 0$，这意味着 $x^{(n_2-1)}2(t) - x^{(n_2-1)}2(t_0) \leq 0$。
这意味着 $x^{(n_2-1)}2(t) - x^{(n_2-1)}2(t_0)$ 与 $x^{(n_2-1)}2(t_0)$ 具有相同的符号。总结这里的论证，我们有，

$$sign\,(x_2^{'}(t) - k(t)) = sign\,(x_2^{(n_2-1)}(t) - x_2^{(n_2-1)}(t_0)) = sign\ x_2^{(n_2-1)}(t_0) = sign\ k(t).$$

因此，对于所有 $t \geq t_0$， $sign\,(x_2^{'}(t) - k(t)) = sign\ k(t)$ 均为常数。因此，每当 $k(t) \geq 0$ 时，我们有 $x_2^{'}(t) \geq k(t)$；每当 $k(t) \leq 0$ 时，我们有 $x_2^{'}(t) \leq k(t)$。

因此，我们得出结论：对于所有 $t \geq t_0$，$x_2^{'}(t)$ 的符号不变。这意味着对于所有 $t \geq t_0$ ，$x_2(t)$ 是单调的，因此对于所有 $t \geq t_0$， $|x_2(t)| \geq |x_2(t_0)|$ 。

由 (1.4) 可知

$$x_1^{(n_1)}(t) = f_1(t, x_2(t)).$$

将上述方程从 t_0 到 t积分 $n_1 - 1$ 次，得到

$$x_1'(t) - s(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} f_1(s, x_2(s))\, ds, \tag{3.8}$$

其中，$s(t) = \sum_{j=0}^{n_1-2} x_1^{(j+1)}(t_0)\frac{(t-t_0)^j}{j!}$ 是关于 t 的一个 $n_1 - 2$ 次多项式。我们知道，当 t足够大，超过该多项式的最后一个正实根（记为 t）时，该多项式的符号等于其最高次项系数的符号；在本例中，该系数为 $x_1^{n_1-1}(t_0)$。因此，取 t_0 大于 $\widehat{t}$，$s(t)$的符号便是恒定的。

现在，由 (3.1) 可知，对于所有$t \geq t_0$，$sign\ f_1(t, x_2(t)) = sign\ x_2(t) = constant$。因此，对于所有 $t \geq t_0$，(3.8) 的被积函数不会改变符号。事实上，对于~~每个$t \geq$~~ t_0，$\int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^{n_1-1-\rho}}{(n_1-1-\rho)!} f_1(s, x_2(s))\, ds$、$\rho = 1$、2、..、$n_1 - 1$的符号都相同。现在我们知道，对于所有 $t \geq t_0$，$x_1'(t) - s(t)$不会改变符号，且其符号与 $\int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} f_1(s, x_2(s))\, ds$相同；而这又说明，$x_1'(t) - s(t)$ 的符号与 $x^{(n_1-1)}(t) - x^{(n_1-1)}(t_0) = \int_{t_0}^{t} f_1(s, x_2(s))\, ds$ 相同。

由于 $sign\ f_1(t, x_2(t))$ 是常数，因此 $sign\ x_1^{(n_1)}(t)$ 是常数。因此，$x^{(n_1-1)}{}_1(t)$是单调的。

每当 $x^{(n_1-1)}{}_1(t_0) \geq 0$ 时，我们有，$x^{(n_1-1)}{}_1(t) \geq x^{(n_1-1)}{}_1(t_0) \geq 0$，这意味着$x^{(n_1-1)}{}_1(t) - x^{(n_1-1)}{}_1(t_0) \geq 0$。

类似地，每当 $x^{(n_1-1)}{}_1(t_0) \leq 0$ 时，我们有，$x^{(n_1-1)}{}_1(t) \leq x^{(n_1-1)}{}_1(t_0) \leq 0$，这意味着 $x^{(n_1-1)}{}_1(t) - x^{(n_1-1)}{}_1(t_0) \leq 0$。

这意味着 $x^{(n_1-1)}{}_1(t) - x^{(n_1-1)}{}_1(t_0)$ 与 $x^{(n_1-1)}{}_1(t_0)$具有相同的符号。总结这里的论证，我们有

$$sign\,(x_1'(t) - s(t)) = sign\,(x_1^{(n_1-1)}(t) - x_1^{(n_1-1)}(t_0)) = sign\ x_1^{(n_1-1)}(t_0) = sign\ s(t).$$

因此，对于所有 $t \geq t_0$，$sign\,(x_1'(t) - s(t)) = sign\ s(t)$，且为常数。因此，每当 $s(t) \geq 0$ 时，我们有 $x_1'(t) \geq s(t)$；每当 $s(t) \leq 0$ 时，我们有 $x_1'(t) \leq s(t)$。

因此，我们得出结论：对于所有 $t \geq t_0$，$x_1'(t)$ 的符号不变，因此 $x_1(t)$ 单调。这意味着对于所有 $t \geq t_0$，$|x_1(t)| \geq |x_1(t_0)|$。

由上述论证可得，对于 $i = 1$，2

$$|x_i(t_1)| \geq |x_i(t_2)|. \tag{3.9}$$

对于任意 $t_1 \geq t_2 \geq t_0$。

现在我们假设

$$x_1(t) \cdot x_2(t) < 0$$

对于 $t \geq t_0$。

根据 (3.1)

$$(-1)^{i-1} x_i^{(n_i)}(t) \ sign\ x_{3-i}(t) \geq a_i(t) |x_{3-i}(t)|^{\lambda_i} \tag{3.10}$$

对于 $t \geq t_0$ 和 $i = 1$，2。

现在，将 $i = 1$ 代入 (3.10)，得到

$$x_1^{(n_1)}(t) \cdot sign\ x_2(t) \geq a_1(t) |x_2(t)|^{\lambda_1}.$$

现在，将上述不等式从 t_0 到 t 积分 n_1 次，并利用（3.9），得到:

$$|x_1(t)| \leq |x_1(t_0)| + s_1(t) sign\ x_1(t) - |x_2(t_0)|^{\lambda_1} \int_{t_0}^{t} \frac{(\tau - t_0)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(\tau)\, d\tau,$$

其中， $s_1(t)$是对（3.10）进行一系列积分后得到的关于 t 的（$n_1 - 1$）th 次多项式， $i = 1$ 从 t_0 到 t，积分 n_1 次。

由于 x_1 是该系统的一个解，因此它在定义域 D内有界，这意味着右端的每一项（包括积分项）都有界。这与（3.2）矛盾。

现在，在（3.10）中令 $i = 2$ 取相应值，并将其从 t_0 到 t 积分 n_2 次，再利用 $sign\ x_1(t) = sign\ x_2(t)$这一事实，得到

$$|x_2(t)| - |x_2(t_0)| - k_1(t) sign\ x_2(t) \leq -\int_{t_0}^{t} \frac{(\tau - t_0)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau) |x_1(\tau)|^{\lambda_2} d\tau,$$

其中， $k_1(t)$是经过一系列积分后得到的关于 t 的（$n_2 - 1$）th 次多项式。现在利用 $|x_1(t)| \geq |x_1(t_0)|$ 这一事实，可得:

$$|x_2(t)| \leq |x_2(t_0)| + k_1(t) sign\ x_2(t) - |x_1(t_0)|^{\lambda_2} \int_{t_0}^{t} \frac{(\tau - t_0)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, d\tau \tag{3.11}$$

对于 $t \geq t_0$。

由于 x_2 是该系统的一个解，因此它在定义域 D 内有界，这意味着右侧的每一项（包括积分）都是有界的。鉴于对 x_i 所作的有界假设，这与 (3.3) 矛盾。

我们还需考虑满足 (3.3) 和 (3.5) 的情形 .

现对 (3.10) 从 t 到 M 进行积分，取某个足够大的 $M > t$, n_2 次，可得

$$|x_2(t)| \geq |x_2(M)| - \widehat{k}(t)\, sign\ x_2(t) + \int_t^M \frac{(\tau - t_0)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, |x_1(\tau)|^{\lambda_2}\, d\tau,$$

其中，$\widehat{k}(t)$ 是在 t 中经过一系列积分后得到的 $(n_2-1)^{th}$ 次多项式。由于 x_2 是单调的，我们知道 $|x_2(M)| \geq |x_2(t)|$，且由于 $M \to \infty$，我们可以稳妥地得出结论：

$$|x_2(t)| \geq \int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, |x_1(\tau)|^{\lambda_2}\, d\tau$$

现在，利用 $x_1(t)$ 在 $t \geq t_0$ 上单调这一事实，我们得到

$$|x_2(t)| \geq \int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, |x_1(\tau)|^{\lambda_2}\, d\tau \geq |x_1(t)|^{\lambda_2} \int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, d\tau. \tag{3.12}$$

由 (3.10) 可知，对于 $i = 1$，我们得到：

$$x_1^{(n_1)}(t)\, sign\ x_1(t) \geq a_1(t)\, |x_2(t)|^{\lambda_1}.$$

Us将 (3.12) 中 $|x_2(t)|$ 的下界代入上述不等式，我们得到 ,

$$|x_1(t)|^{-\lambda_1\lambda_2} x_1^{(n_1)}(t)\, sign\ x_1(t) \geq a_1(t) \left[\int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, d\tau\right]^{\lambda_1}. \tag{3.13}$$

由上述不等式 (3.13)，对 n_1 次进行一系列积分，从 t_0 到 ∞，并利用 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 1$ 这一事实，我们得到：

$$\int_{t_0}^\infty \frac{(t - t_0)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(t) \left[\int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, d\tau\right]^{\lambda_1} dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{t_0}^\infty \frac{(t - t_0)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} |x_1(t)|^{-\lambda_1\lambda_2} x_1^{(n_1)}(t)\, sign\ x_1(t) dt \\
&= \left[|x_1(t)|^{-\lambda_1\lambda_2} |x_1(t)|\right]_{t_0}^\infty + \lambda_1\lambda_2 \int_{t_0}^\infty |x_1(t)|^{-\lambda_1\lambda_2-1} |x_1(t)|' \cdot |x_1(t)|\, dt \\
&= \left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1} - 1\right] |x_1(t_0)|^{1-\lambda_1\lambda_2} - |x_1(\infty)|^{1-\lambda_1\lambda_2} \left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1} - 1\right] \\
&< \left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1} - 1\right] |x_1(t_0)|^{1-\lambda_1\lambda_2}.
\end{aligned}$$

在考虑到 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 1$ 之后，这与（3.5）矛盾。因此，不存在非振荡解。

现在我们断言，弱振荡解对就是振荡解对。因为如果存在一个弱振荡解对，这意味着 $\exists$ 一个解对 x_1、 x_2 ，其中 x_1是振荡解，而 x_2 是非振荡解。因此，存在 $\exists$ 一个 $t_0 > 0$ ，使得 x_2（t） $\neq 0$对所有 $t \geq t_0$ 成立，并且 x_1 在区间 $[t_0, \infty)$ 内有任意大的零点。设t_1、 t_2 是 x_1 在 $[t_0, \infty)$ 中的两个零点，使得 $t_2 - t_1 > t_0$。

由于 x_2 是非振荡的，因此对所有 $t \geq t_0$， $sign\ x_2(t) = constant$ 。现在在(3.10) 中令 $i = 1$，并将该不等式从 t_1 到 t 积分 n_1 次，得到:

$$\left[x_1(t) - x_1(t_1) - \sum_{j=1}^{n_1-1} x_1^{(j)}(t_1)\frac{(t-t_1)^j}{j!}\right] sign\ x_2(t) \geq \int_{t_1}^{t} \frac{(s-t_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s)\,|x_2(s)|^{\lambda_1}\,ds.$$

将 $t = t_2$ 代入上述不等式，并利用 t_2 也是 x_1 的一个零点这一事实，可将该不等式化简为

$$-\left[\sum_{j=1}^{n_1-1} x_1^{(j)}(t_1)\frac{(t_2-t_1)^j}{j!}\right] sign\ x_2(t) \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s)\,|x_2(s)|^{\lambda_1}\,ds.$$

但我们知道，当 t_0 取值非常大时（超过最后一个根 o f $\sum_{j=1}^{n_1-1} x_1^{(j)}(t_1)\frac{(t-t_1)^j}{j!}$), $sign\ \left[\sum_{j=1}^{n_1-1} x_1^{(j)}(t_1)\frac{(t_2-t_1)^j}{j!}\right] = sign\ x_1^{(n_1-1)}(t_1)$.
由于 x_2 不变号，因此当 $t \geq t_0$时， f_1 也不变号。因此， $x^{(n_1)}{}_1$ 在 $t \geq t_0$上不变号。因此， $x^{(n_1-1)}{}_1(t)$ 在 $t \geq t_0$上单调。由于，

$\left[x_1^{(n_1-1)}(t) - x^{(n_1-1)}{}_1(t_1)\right] sign\ x_2(t) \geq \int_{t_1}^{t} a_1(s)\,|x_2(s)|^{\lambda_1}\,ds > 0$和 $x^{(n_1-1)}{}_1(t)$是

对于 $t \geq t_0$是单调的，我们得出，
$sign\ x_1^{(n-1)}(t_1) = sign\left[x_1^{(n_1-1)}(t) - x^{(n_1-1)}{}_1(t_1)\right] = sign\ x_2(t)$对于 $t \geq t_0$。

因此，该不等式化为

$$-\left|\sum_{j=1}^{n_1-1} x_1^{(j)}(t_1)\frac{(t_2-t_1)^j}{j!}\right| \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s)\,|x_2(s)|^{\lambda_1}\,ds > 0,$$

这与之矛盾。因此，系统(1.4)的任一弱振荡解对都是振荡解对。

因此，所有正则解都振荡。故定理得证。 □

在刚刚证明的定理中，我们给出了使(1.4)的所有正则解振荡的充分条件。对于同一组条件，为使其同时成为必要条件，还需要对 f_is施加哪些附加条件这一问题，也将在下一个定理中得到解答。

定理 3.2. 假设在定义域 D中，不等式

$$a_i(t)\,|x_{3-i}|^{\lambda_i} \leq (-1)^{i-1} f_i(t, x_{3-i}) \cdot sign\ x_{3-i} \leq M a_i(t)\,|x_{3-i}|^{\lambda_i} \tag{3.14}$$

对于 $i = 1$，2 均成立，其中 $\lambda_i > 0$ 对于 $i = 1$，2，$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 1$ 且 $M \geq 1$。函数 $a_i(t) \geq 0$ 对于 $i = 1$，2 在 $[0, \infty)$ 的每个有限区间上均可求和，且对于某个 $k \in \{1, 2\}$，条件 (3.2) 成立。则系统 (1.4) 的所有正规解均振荡的充要条件是条件 (3.4) 和 (3.5) 成立。

证明。充分性由前一定理得出。因此，我们证明必要性。

为明确起见，我们假设 $k = 1$。
利用逆否命题，我们必须证明，如果

$$\int_0^\infty \frac{t^{n_2}}{(n_2-1)!} a_2(t)\, dt < \infty \tag{3.15}$$

and

$$\int_0^\infty \frac{t^{n_1}}{(n_1-1)!} a_1(t) \left[\int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(\tau)\, d\tau \right]^{\lambda_1} dt = P < \infty, \tag{3.16}$$

那么系统 (1.4) 有一个非振荡解。我们通过使用 Schauder不动点定理来证明这一点。
令我们选择 $T > 0$，使得，

$$2^{\lambda_1\lambda_2} M \int_T^\infty \frac{(s-T)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s) \left[\int_s^\infty \frac{(r-s)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(r) K_1^{\lambda_2} dr \right]^{\lambda_1} ds < K_1 \tag{3.17}$$

对于某个 $K_1 > 0$。显然，固定$K_1^{1-\lambda_1\lambda_2} = PM$后，(3.16) 保证这样的 K_1 存在。现在肯定可以选取一个 $T' > T$，使得:

$$2^{\lambda_1\lambda_2} M \int_{T'}^\infty \frac{(s-T')^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s) \left[\int_s^\infty \frac{(r-s)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(r) K_1^{\lambda_2} dr \right]^{\lambda_1} ds < \epsilon \tag{3.18}$$

对于每个 $t \geq T'$ 以及某个 $\epsilon > 0$。
考虑带有上确界范数 $\|.\|$ 的 Banach空间 $E = B([T, \infty))$，并定义

$$X_1 = \{x_1 \in E : \|x_1\| \leq 2K_1\}.$$

显然，X_1 是 E 的非空闭凸子集。
设 x_1 为属于 X_1 的任意函数。我们看到，对于每个 $t \geq T$，都有

$$\left| \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} f_1(s, x_2(s))\, ds \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|f_1\left(s, x_2(s)\right)\right| ds \\
&\leq M \int_T^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|a_1\left(s\right)\right| \left|x_2\left(s\right)\right|^{\lambda_1} ds \\
&\leq M \int_T^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|a_1\left(s\right)\right| \left[\int_s^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \left|f_2\left(r, x_1(r)\right)\right| dr\right]^{\lambda_1} ds \\
&\leq M \int_T^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|a_1\left(s\right)\right| \left[\int_s^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \left|a_2\left(r\right)\right| \left|x_1\left(r\right)\right|^{\lambda_2} dr\right]^{\lambda_1} ds \\
&\leq 2^{\lambda_1\lambda_2} M \int_T^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s) \left[\int_s^{\infty} \frac{(r-s)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(r) K_1^{\lambda_2} dr\right]^{\lambda_1} ds < K_1.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

现在将映射 S_1 定义为

$$
\left(S_1 x_1\right)(t) = K_1 + (-1)^{n_1} \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} f_1\left(s, x_2(s)\right) ds
$$

with

$$
x_2(s) = (-1)^{n_2} \int_s^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} f_2\left(r, x_1(r)\right) dr \tag{3.20}
$$

对于每个 $t \geq T$。

鉴于 (3.19)，我们清楚地看到，S_1 将 X_1 映射到自身，且是有效的。

由于 $S_1 X_1 \subseteq X_1$ 和 X_1 一致有界，因此 $S_1 X_1$ 一致有界。此外，对于 $t \geq T'$，我们有

$$
\left|S_1 x_1(t) - K_1\right| = \left|(-1)^{n_1} \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} f_1\left(s, x_2(s)\right) ds\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|f_1\left(s, x_2(s)\right)\right| ds \\
&\leq M \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|a_1\left(s\right)\right| \left|x_2\left(s\right)\right|^{\lambda_1} ds \\
&\leq M \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|a_1\left(s\right)\right| \left[\int_s^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \left|f_2\left(r, x_1(r)\right)\right| dr\right]^{\lambda_1} ds \\
&\leq M \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left|a_1\left(s\right)\right| \left[\int_s^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \left|a_2\left(r\right)\right| \left|x_1\left(r\right)\right|^{\lambda_2} dr\right]^{\lambda_1} ds \\
&\leq 2^{\lambda_1\lambda_2} M \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s) \left[\int_s^{\infty} \frac{(r-s)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(r) K_1^{\lambda_2} dr\right]^{\lambda_1} ds.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

现在，利用 (3.18) 并选取适当的 T'，我们得出 S_1X_1 在 ∞处等度收敛。

现在，对于任意的 $x_1 \in X_1$ 以及每个 $t_2 > t_1 \geq T'$，我们有

$$\left| K_1 + (-1)^{n_1} \int_{t_2}^{\infty} \frac{(s-t_2)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} f_1\left(s, x_2(s)\right) ds - K_1 - (-1)^{n_1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{(s-t_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} f_1\left(s, x_2(s)\right) ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_2}^{\infty} \left[\int_{r}^{\infty} \frac{(s-r)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} f_1\left(s, x_2(s)\right) ds \right] dr - \int_{t_1}^{\infty} \left[\int_{r}^{\infty} \frac{(s-r)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} f_1\left(s, x_2(s)\right) ds \right] dr \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{r}^{\infty} \frac{(s-r)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} f_1\left(s, x_2(s)\right) ds \right] dr \right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{r}^{\infty} \frac{(s-r)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} \left| f_1\left(s, x_2(s)\right) \right| ds \right] dr \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[M \int_{t}^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left| a_1\left(s\right) \right| \left| x_2\left(s\right) \right|^{\lambda_1} ds \right] dr \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[M \int_{t}^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left| a_1\left(s\right) \right| \left[\int_{s}^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \left| f_2\left(r, x_1(r)\right) \right| dr \right]^{\lambda_1} ds \right] dr \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[M \int_{t}^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \left| a_1\left(s\right) \right| \left[\int_{s}^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \left| a_2\left(r\right) \right| \left| x_1\left(r\right) \right|^{\lambda_2} dr \right]^{\lambda_1} ds \right] dr \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[2^{\lambda_1\lambda_2} M \int_{t}^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} a_1(s) \left[\int_{s}^{\infty} \frac{(r-s)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} a_2(r) K_1^{\lambda_2} dr \right]^{\lambda_1} ds \right] dr.
\end{aligned}$$

利用（3.17），我们可以对上述不等式右端进行估计，而该估计取决于宽度 $|t_2 - t_1|$。通过适当选择 t_1 和t_2，使得$|t_2 - t_1| < \delta = \frac{\epsilon}{K_1}$，可以证明 S_1X_1 是等度连续的。因此，根据给定的紧性判据，我们得出 S_1 是相对紧的。

现在我们证明映射 S_1 是连续的。设 x_{1v} 是 X_1中的任意序列，并且在前面定义的范数下收敛于 x_1。由（3.14）可得

$$\left| f_1\left(t, x_{1v}(t)\right) \right| \leq M a_1(t) \left| K_1 \right|^{\lambda_1}$$

对于每个 $t \geq T$ 以及所有 v。

现在，通过应用勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&lim_{v\to\infty}(-1)^{n_1} \int_{t}^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} f_1\left(s, \int_{s}^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} f_2\left(r, x_{1v}(r)\right) dr \right) ds \\
&\quad = (-1)^{n_1} \int_{t}^{\infty} \frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} f_1\left(s, \int_{s}^{\infty} \frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} f_2\left(r, x_1(r)\right) dr \right) ds.
\end{aligned}$$

因此，我们证明了逐点收敛，即

$$\lim_{v\to\infty}\left(S_1x_{1v}\right)(t)=\left(S_1x_1\right)(t).$$

现在，考虑 S_1x_{1v} 的任意子序列 u_μ 。由于 S_1Y 是相对紧的，存在 u_μ 的一个子序列 v_λ 以及 E 中的一个 v ，使得 v_λ 一致收敛于 v。因此

$$\lim_{v\to\infty}\left(S_1x_{1v}\right)(t)=\left(S_1x_1\right)(t)=v$$

在上确界范数下对所有 $t\geq T$ 均成立。因此， S_1 是连续的。

因此，我们证明了 S_1 满足 Schauder定理 的所有假设，所以 S_1 有一个不动点 $x_1\in X_1$ ，使得 $S_1x_1=x_1$。这意味着

$$x_1(t)=K_1+(-1)^{n_1}\int_t^\infty\frac{(s-t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}f_1\left(s,x_2(s)\right)ds$$

其中

$$x_2(s)=(-1)^{n_2}\int_s^\infty\frac{(r-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}f_2\left(r,x_1(r)\right)dr$$

对所有 $t\geq T$ 均成立。

对上述方程求导 n_1 次后，我们看到

$$x_1^{(n_1)}(t)=f_1\left(t,x_2(t)\right)$$
$$x_2^{(n_2)}(t)=f_2\left(t,x_1(t)\right)$$

对所有 $t\geq T$均成立。

此外，由积分方程可观察到， $x_1\to K_1, x_2\to 0$ 当 $t\to\infty$时。这也意味着解不会有大零点，因此该解是非振荡的。

□

例3.3。考虑微分方程组

$$\begin{aligned}x_1^{''}&=a_1(t)\left|x_2\right|^2signx_2,\\x_2^{''}&=-a_2(t)\left|x_1\right|^3signx_1.\end{aligned}\tag{3.23}$$

假设 $a_1(t)=t^2$ 以及 $a_2(t)=t^4$，我们看到它们满足以下不等式

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^2a_1(t)dt&=\int_0^\infty t^4dt=\infty,\\\int_0^\infty t^2a_2(t)dt&=\int_0^\infty t^6dt=\infty.\end{aligned}$$

因此我们看到 a_i 在此满足条件 (3.2) 和 (3.3)。所以，通过应用定理 3.1，我们注意到系统 (3.23) 的所有解都是振荡的。现在考虑 $a_1(t) = t^2e^{2t}$ 以及 $a_2(t) = e^{-t}$ 的情况。我们注意到，a_1 满足 (3.2)（当 $k = 1$ 时），而 a_2 不满足 (3.3)（当 $k = 1$ 时），因为$\int_0^\infty t^2e^{-t}dt = 2 < \infty$。但是我们观察到 $\int_0^\infty t^4e^{2t}(t+1)^2\, e^{-2t}dt$ 发散，这意味着对于 $k = 1$，条件 (3.5) 得到满足。因此，该系统的所有解都将振荡。

4. Acknowledgement and Dedicattion

我们将此项工作献给斯里·萨蒂亚·赛高等学府创校校长薄伽梵·斯里·萨蒂亚·赛巴巴。利益冲突：作者声明不存在利益冲突。伦理标准：本文符合所有伦理标准。本文不适用伦理批准和知情同意。数据可用性声明：由于本文未使用任何数据，因此不适用数据可用性声明。

References

[1] F. V. Atkinson, 《二阶非线性振荡》, 《太平洋数学杂志》, 5（1955）, 643-647。[2] G. J. Butler, 《二阶非线性微分方程的非振荡行为》, Annali Mat. Pura Appl.（4）105（1975）, 73-92。[3] S. Belohorec, 《某些二阶非线性微分方程的振荡解》, 《斯洛伐克科学院数学与物理杂志》11（1961）, 250-255。[4] I. T. Kiguradze, 《关于方程 $u'' + a(t)|u|^n sgnu = 0$ 的解的振荡的注记》, 《数学与物理杂志》92（1967）, 343-350。[5] James. S. W. Wong, 《具有可积系数的二阶非线性微分方程的振荡判据》, 《美国数学会会刊》第115卷第2期, 1992, 389-395[6] J. A. Hempel, 《一阶变分的非振荡定理及其应用》, 《微分方程杂志》24（1977）, 226-234。[7] C. Avramescu, 《关于非线性微分方程组收敛解的存在性》, 《纯粹与应用数学年刊》81（1969）, 147-168。[8] D. D. Mirzov, 《非线性微分方程组的振荡性质》, Differ- entsial'nye Uravneniya, 9（1973）, 581-583。[9] D. D. Mirzov, 《非线性微分方程组解的振荡》, 《数学札记》16（1974）, 571-576。

[10] C. Sturm, 《关于依赖于二阶线性微分方程的函数的一般性质的分析性论文》, L’Institut；法国及国外学术团体科学通报；第一部分；I, （1833）, 219-233。[11] B V K Bharadwajand Pallav Kumar Baruah, 《某些二维耦合非线性常微分方程的渐近多项式型解》, 数学与计算机科学杂志, 第14卷（2015）, 第3期, 211-221。[12] B V K Bharad waj and Pallav Kumar Baruah, 《二阶非线性常微分方程的非振荡解的存在性》, 数学与应用通信, 第6卷第2期, 41-47。[13] B.V.K. Bharadwaj and Pallav Kumar Baruah, 《非线性常微分方程组的非振荡解的存在性》, 国际数学进展杂志, 2018年, 第4期, 34-43页, 2018。[14] Ch.G. Philos, I.K. Purnaras and P.Ch. Tsamatos, 《非线性微分方程的渐近多项式解》, 非线性分析, 59（2004）, 1157-1179[15] S. Dube and B. Mingarelli, 《关于Atkinson非振荡定理的注记》, EJDE, 第2004卷（2004）, 第22号, 1-6。[16] G. J. Butler, 《二阶非线性微分方程的非振荡行为》, Annali Mat. Pura Appl.（4）105（1975）, 73-92。[17] E. Wahlen, 《二阶微分方程的正解》, 非线性分析58（2004）, 359-366。[18] John R Graef and Toufik Moussaoui, 《具有三点边界条件的耦合二阶方程组的正解》, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 第42卷, 第4期, 1169-1182。[19] J Henderson, S K Ntouyas, 《n阶三点非局部边值问题组的正解》, 微分方程定性理论电子杂志, 2007, 第18号, 1-12。