arXiv:2303.02921v1 [math.NT] 6 Mar 2023

Ramanujan-Serre 导数映射的一个简单推广及其若干应用

B. RAMAKRISHNAN、BRUNDABAN SAHU 和 ANUP KUMAR SINGH

Abstract. 若 $f(z)$ 是权为 k 的模形式，则由 $\vartheta_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}f(z)-\frac{k}{12}E_2(z)f(z)$ 定义的微分算子 ϑ_k （称为 Ramanujan-Serre 导数映射）是权为 $k+2$ 的模形式。本文对该映射作了一个简单推广，并利用它（借助模形式理论）给出一种推导某些约数函数卷积和的一般方法。我们给出了四类卷积和的显式表达式，并为所有这些类型的和提供了许多例子。

1. 引言

令 $\mathbb{N}$ 表示正整数集。对于 $r,n\in\mathbb{N}$，令 $\sigma_r(n)=\sum_{d|n,\ d\in\mathbb{N}} d^r$ 表示因子函数。若 n 不是正整数，则令 $\sigma_r(n)=0$，并将 $\sigma(n)$ 记作 $\sigma_1(n)$。对于 $a,b,r,s,n\in\mathbb{N}$，我们定义 $W^{r,s}_{a,b}(n)$ 为

$$W^{r,s}_{a,b}(n):=\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ al+bm=n}}\sigma_r(l)\sigma_s(m). \tag{1}$$

这些和称为约数函数的卷积和。当 $r=s=1$ 时，记作 $W_{a,\ b}(n)$。此外，我们将 $W_{1,\ a}(n)=W_{a,\ 1}(n)=W_a(n)$ 记作。对这些和的求值历史悠久，可追溯到 Besge、Glaisher 和 Ramanujan 的研究[10, 16, 33]。文献中已有多种方法用于求得这些卷积和，包括初等求值、利用模形式与拟模形式理论，以及采用 (p,k) 参数化等。关于这一问题的历史详情，可参阅 K. S. Williams 的著作 [40] 。本文考察模形式理论中的一个基本结果，并给出一个简单的推广。

设 $f(z)$ 是全模群上权为 k 的模形式，设 $E_2(z)$ 是权为 2 的艾森斯坦级数，它是一个拟模形式。简单计算可知，函数 $\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}f(z)-\frac{k}{12}E_2(z)f(z)$ 是全模群上权为 $k+2$ 的模形式。当 f 是具有级的模形式（即相对于同余子群 $\Gamma_0(N)$）时，该结论同样成立。如果 f 是尖点形式，那么所得函数也是尖点形式。我们将此映射记为 ϑ_k，并写作

$$\vartheta_k(f)(z)=Df(z)-\frac{k}{12}E_2(z)f(z),$$

其中 $D=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}$。这称为 Ramanujan-Serre导数映射。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：11F11、11F25；次要分类：11A25。

Key words and phrases. 约数函数和、卷积和、整数权模形式。

通过对 $\Delta(z)$（权重 12 的规范化尖点形式）取对数导数，Ramanujan [33] 推导出了以下关于 $\tau(n)$ 的递推公式； $\tau(n)$ 是 $\Delta(z)$ 的第 n 个傅里叶系数（对于 $n \geq 2$）：

$$\tau(n) = \frac{24}{1-n} \sum_{m=1}^{n-1} \sigma(m)\tau(n-m). \tag{2}$$

注意，对 $\Delta(z)$ 应用 ϑ_{12} 会得到权为 14、定义在 $SL(2,\mathbb{Z})$ 上的尖点形式，因此它必为零。也就是说， $D\Delta(z) = E_2(z)\Delta(z)$。因此，上述递推公式也可由此得出。在同一篇著作中， [33], Ramanujan 深入研究了卷积和 $W^{r,\ \overset{s}{1\,1},\ }(n)$，其中 r、 s 是奇正整数。他将 $W^{r,\ \overset{s}{1\,1},\ }(n)$ 表示为主项与误差项之和，其中主项（由艾森斯坦级数产生）有明确表达式。误差项对应于来自尖点形式的系数。对于某些 (r,s)，他还得到了这些卷积和的显式表达式。

近年来，人们采用各种方法对这些卷积和进行显式求值：利用一些组合学结果进行初等求值、运用模形式理论或拟模形式理论，以及使用 (p,k) 参数化等。本文中，我们注意到，拉马努金–塞尔微分算子可以通过一种简单的方式扩展，并可用于求出其中一个因子函数为 $\sigma(n)$ 时的卷积和，也就是说，当整数 r 或 s 中有一个等于 1 时。如果二者都是大于 1 的奇整数，那么 $E_{r+1}(az)$ 和 $E_{s+1}(bz)$ 是权分别为 $r+1$ 和 $s+1$ 的模形式（定义见 (6)），因此乘积 $E_{r+1}(az)E_{s+1}(bz)$ 是群 $\Gamma_0(ab)$ 上权为 $r+s+2$ 的模形式。所需的卷积和 $W^{r,\ \overset{s}{a\,b},\ }(n)$ 可通过将此乘积表示为基元素的线性组合，再比较第 n 个傅里叶系数而得。因此，本文的方法仅在数值 r 或 s 中有一个等于 1 时才需要。对模形式应用扩展的拉马努金 - 塞尔导数映射（其中涉及艾森斯坦级数 $E_2(z)$），会得到一个模形式，因此可以利用模形式空间的一组基来求出相应的卷积和。

Ramanujan 还证明了 $E_2^2(z) - 12DE_2(z)$ 是权 4 模形式，这意味着 $E_2^2(z) - 12DE_2(z) = E_4(z)$。在本文中，我们还对这一结果作了简单推广，由此可以用权 4、级 ab 的模形式空间的一组基来计算任意 a,b 的卷积和 $W_{a,\ b}(n)$（这里只需考虑 $\gcd(a,b) = 1$ 的情形）。我们的方法的优点在于，在计算涉及因子函数 $\sigma(n)$ 的卷积和时，无须利用准模形式空间的结构；该因子函数（相差一个常数因子）是拟模形式 $E_2(z)$的第 n 个傅里叶系数。

更具体地说，首先我们证明，对于正整数 a,b，由下式定义的微分算子 $\vartheta_{k;(a,b)}$

$$\vartheta_{k;(a,b)}(f) := bDf(bz) - \frac{k}{12}aE_2(az)f(bz) \tag{3}$$

将模形式空间 $M_k(M,\chi)$ 映射到模形式空间 $M_{k+2}(N,\chi)$，其中 $N = l.c.m(Mb,a)$。（关于模形式向量空间的定义，请参阅§2。）

注1.1。为简化记号，我们将 $bDf(bz)$ 写作 $\mathcal{D}f(bz)$。如果 $f(z)$ 的傅里叶展开为 $\sum_{n\geq 0} a_f(n) e^{2\pi inz}$，那么 $\mathcal{D}f(bz)$ 的傅里叶展开为

$$\mathcal{D}f(bz) = \sum_{n\geq 0} n\ a_f(n/b) e^{2\pi inz} = bDf(bz).$$

我们还注意到，算子 $\mathcal{D}$ 对傅里叶展开的作用与 SAGE 的计算结果一致。当 $b=1$ 时，算子 D 和 $\mathcal{D}$ 相同。

鉴于上述评述，我们将 $\vartheta_{k;(a,b)}$ 的定义修改如下：

$$\vartheta_{k;(a,b)}(f) = \mathcal{D}f(bz) - \frac{k}{12} aE_2(az) f(bz). \tag{3}'$$

当 $a=b=1$ 时，$\vartheta_{k;(1,1)}$ 不过就是 ϑ_k。特别地，取 $f(z) = E_k(z)$，即全模群上的权 k 艾森斯坦级数，可利用空间 $M_{k+2}(N)$ 的一个基得到卷积和 $W^{1,\ a\ b}_{k-1}(n)$。在第 §4.1 节中，我们给出了一些运用主要结果的例子。

我们的下一个结果旨在推广这样一个事实：$E_2^2(z) - 12DE_2(z)$ 是权 4 的模形式。当 a、b 互素时，我们证明函数

$$\frac{6a}{b} DE_2(az) + \frac{6b}{a} DE_2(bz) - E_2(az)E_2(bz) \tag{4}$$

是一个模形式 空间 $M_4(ab)$ 中的 m。用算子 $\mathcal{D}$ 表示，上述内容等价于

$$\frac{6}{b}\mathcal{D}E_2(az) + \frac{6}{a}\mathcal{D}E_2(bz) - E_2(az)E_2(bz). \tag{4}'$$

作为应用，通过使用空间$M_4(ab)$的一组基，我们得到卷积和 $W_{a,\ b}(n)$。我们在第 §4.2 节给出了一些示例，以展示我们的方法。这里要指出的是，在 [9], 中，Aygin 还计算了卷积和$W_{1,\ p}(n)$、$W_{p_1,\ p_2}(n)$、$W_{1,\ p_1p_2}(n)$，其中p、p_1、p_2是素数。本研究所采用的方法不同于我们的方法，不过这两项工作都利用了所得函数是模形式这一事实。在 [9], 中，作者利用了 $E_2(z) - tE_2(tz)$ 是 $\Gamma_0(t)$ 上权为 2 的模形式这一事实，其中 $t \in \mathbb{N}$。还应注意，在 [9], 中，作者通过使用已知的和式 $W_1(n)$，得到了所需的卷积和。

在 §3 中，我们对由 (3) 给出的权 $k+2$ 模形式使用算子 $\vartheta_{k+2;(a,1)}$（其中 $f(z) = E_k(z)$），并对由 (4) 给出的权 4 模形式使用算子 $\vartheta_{4;(a,1)}$，从而得到以下卷积和的显式表达式：

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ al+bm=n}} l\sigma(l)\sigma_{k-1}(m); \qquad \sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ al+bm=n}} l\sigma(l)\sigma(m), \tag{5}$$

分别地。我们在§4.3和§4.4中给出一些具体例子。

2. Preliminaries and main results

令 k、$M \in \mathbb{N}$ 和 M_k（M、χ）分别表示权为 k 、定义在 Γ_0（M）上的模形式（尖点形式）有限维向量空间，其中 χ 是一个狄利克雷特征，满足 χ（-1）$=$（-1）^{k}。当 $M=1$时，该空间记为 M_k （ S_k）；当 χ 为主特征时，这些空间分别记为 M_k（M）和 S_k（M）。向量空间 M_k（M）的维数记为 λ_k（M）。对于偶整数 $k \geq 4$，令

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n, \tag{6}$$

是 M_k 中的艾森斯坦级数，其中 $q = e^{2\pi i z}$ 和 B_k 是第 k 个伯努利数。对于 $k=2$，我们用 E_2 (z) 表示权为 2 的艾森斯坦级数，其定义为

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma(n) q^n. \tag{7}$$

它是全模群上的拟模形式。关于模形式的基础理论，参见 [36]。

以下是本文的主要结果。

定理 2.1. 设 a, b 为正整数，且 f 是 $M_k(M, \chi)$ 中的模形式，其中 k, M 为正整数， χ 是模 M 的狄利克雷特征，使得 $\chi(-1) = (-1)^k$。那么， $\vartheta_{k;(a,b)}(f)$ 是 $M_{k+2}(N, \chi)$ 中的模形式，其中 $N = l.c.m(Mb, a)$，且 $\vartheta_{k;(a,b)}$ 是由 (3)′ 定义的扩展算子。此外，若 a, b 互素，则函数 $\frac{6a}{b} DE_2(az) + \frac{6b}{a} DE_2(bz) - E_2(az)E_2(bz) = \frac{6}{b} \mathcal{D}E_2(az) + \frac{6}{a} \mathcal{D}E_2(bz) - E_2(az)E_2(bz)$ 是空间 $M_4($ $ab)$ 中的模形式。

在开始证明此定理之前，我们先作一些观察并推导出一些应用。

注 2.1. 如前所述，当 $a = b = 1$ 时，微分算子 $\vartheta_{k;(1,1)}$ 只不过是 ϑ_k。在这种情况下，上述定理中的第二个结果不过是 Ramanujan 已证明的事实：$12DE_2(z) - E_2^2(z) = -E_4(z)$。虽然定理的第二部分无需假设互素条件，但对于应用部分，假设这一条件已足够。

设 $\{f_i(z) | 1 \leq i \leq \lambda_{k+2}(ab)\}$ 是向量空间 $M_{k+2}(ab)$ 的一组基，并用 $a_i(n)$ 表示 $f_i(z)$ 的第 n 个傅里叶系数。这里 a、b 是互素正整数。利用我们的主定理，可得以下推论。令 $f(z)$ $= E_k(z)$（其中 $k \geq 4$ 为偶整数），并假设上述定理中的 a 和 b 是互素正整数，可得卷积和 $W^{1,\ k-1}_{a\ b}$，(n)，其以 $a_i(n)$ 表示。

推论 2.2. 设 $k \geq 4$ 为偶整数且 $f(z) = E_k(z)$。若 a, b 为互素正整数，则存在常数 $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq \lambda_{k+2}(ab)$，使得

$$W^{1,k-1}_{a,b}(n) = \frac{B_k}{2k} \sigma(n/a) + \left(\frac{1}{24} - \frac{n}{2ka} \right) \sigma_{k-1}(n/b) - \frac{B_k}{4ak^2} \sum_{i=1}^{\lambda_{k+2}(ab)} \alpha_i a_i(n), \tag{8}$$

其中 B_k 是第 k 个伯努利数，而 $a_i(n)$，$1 \le i \le \lambda_{k+2}(ab)$ 是上文所述 $M_{k+2}(ab)$ 的第 i 个基元素 f_i 的第 n 个傅里叶系数。

证明。当 $f(z) = E_k(z)$ 时，函数 $\mathcal{D}E_k(bz) - \frac{k}{12}aE_2(az)E_k(bz)$ 属于 $M_{k+2}(ab)$。我们将 $M_{k+2}(ab)$ 的一组基记为 $f_i(z)$、 $1 \le i \le \lambda_{k+2}(ab)$，其 n 阶傅里叶系数由 $a_i(n)$ 给出。那么，上述模形式可以表示为这些基元素的线性组合。因此，存在常数 α_i、 $1 \le i \le \lambda_{k+2}(ab)$，使得

$$\mathcal{D}E_k(bz) - \frac{k}{12}aE_2(az)E_k(bz) = \sum_{i=1}^{\lambda_{k+2}(ab)} \alpha_i f_i(z).$$

现在，通过比较上述恒等式两边的第 n 阶傅里叶系数，我们得到

$$-\frac{2k}{B_k}n\sigma_{k-1}(n/b) + 2ka\sigma(n/a) + \frac{k^2a}{6B_k}\sigma_{k-1}(n/b) - \frac{4k^2a}{B_k}W_{a,b}^{1,k-1}(n) = \sum_{i=1}^{\lambda_{k+2}(ab)} \alpha_i a_i(n).$$

化简后，我们得到

$$W_{a,b}^{1,k-1}(n) = \frac{B_k}{2k}\sigma(n/a) + \big(\frac{1}{24} - \frac{n}{2ka}\big)\sigma_{k-1}(n/b) - \frac{B_k}{4ak^2}\sum_{i}^{\lambda_{k+2}(ab)} \alpha_i a_i(n).$$

□

令 $g_i(z)$、 $1 \le i \le \lambda_4(ab)$ 表示 $M_4(ab)$ 的一组基。利用上述定理的第二部分，将 (4) 表示为 $g_i(z)$ 的线性组合，并比较第 n 阶傅里叶系数，我们得到以下推论。

推论 2.3. 若 a、 b 是互素正整数，则存在常数 $\beta_i \in \mathbb{C}$、$1 \le i \le \lambda_4(ab)$，使得

$$W_{a,b}(n) = \frac{1}{24}\big(1 - \frac{6n}{b}\big)\sigma(n/a) + \frac{1}{24}\big(1 - \frac{6n}{a}\big)\sigma(n/b) - \frac{1}{576}\sum_{i=1}^{\lambda_4(ab)} \beta_i b_i(n), \tag{9}$$

其中， $b_i(n)$、 $1 \le i \le \lambda_4(ab)$ 是上述所记的 $M_4(ab)$ 的第 i 个基元素 g_i 的第 n 个傅里叶系数。

定理 2.1 的证明。令 $N = l.c.m(Mb, a)$，并令 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$。于是我们有 $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta b \\ \gamma/b & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$ 和 $A'' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta a \\ \gamma/a & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$。由于 $f \in M_k(M,\chi)$，我们得到如下变换:

$$f(bAz) = f(A'(bz)) = \chi(\delta)(\gamma z + \delta)^k f(bz). \tag{10}$$

对 (10) 关于 z 求导，并利用 $D = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}$ 这一事实，我们得到 t

$$bDf(bAz) = \chi(\delta)(\gamma z + \delta)^{k+2} bDf(bz) + \chi(\delta)\frac{k\gamma}{2\pi i}(\gamma z + \delta)^{k+1} f(bz). \tag{11}$$

$E_2(az)$ 的变换公式为

$$E_2(aAz) = E_2(A''(az)) = (\gamma z+\delta)^2 E_2(az) + \frac{12}{2\pi i}\frac{\gamma}{a}(\gamma z+\delta). \tag{12}$$

利用等式 (10)、(11) 和 (12)，容易得出

$$bDf(bAz) - \frac{ka}{12}E_2(aAz)f(bAz) = \chi(\delta)(\gamma z+\delta)^{k+2}\big(bDf(bz) - \frac{ka}{12}E_2(az)f(bz)\big), \tag{13}$$

由此可知，函数 $bDf(bz) - \frac{ka}{12}E_2(az)f(bz)$ 是一个模形式，且属于 $M_{k+2}(N,\chi)$。

为了证明定理的第二部分，取 $A \in \Gamma_0(N)$， $N = ab$。对 z 求 (12) 的导数，得到

$$aDE_2(aAz) = (\gamma z+\delta)^4 aDE_2(az) + \frac{2\gamma}{2\pi i}(\gamma z+\delta)^3 E_2(az) + \frac{12}{a}\big(\frac{\gamma}{2\pi i}\big)^2(\gamma z+\delta)^2, \tag{14}$$

以及将 a 替换为 b 后得到的类似恒等式。利用这两个恒等式，很容易看出

$$\begin{aligned}\frac{6a}{b}DE_2(aAz) + \frac{6b}{a}DE_2(bAz) - E_2(aAz)E_2(bAz)\\ = (\gamma z+\delta)^4\left(\frac{6a}{b}DE_2(az) + \frac{6b}{a}DE_2(bz) - E_2(az)E_2(bz)\right),\end{aligned} \tag{15}$$

由此可得模性质。证明完毕。 □

3. Convolution sums of another type

作为扩展的拉马努金-塞尔导数映射的一个应用，我们可以求出另一类卷积和，其定义如下。设 e、r、s 为自然数，且 r、s 为奇整数。对于满足 $\gcd(a,b) = 1$ 的自然数 a、b，定义如下的和。

$$W_{a,b}^{e;r,s}(n) := \sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ al+bm=n}} l^e\sigma_r(l)\sigma_s(m). \tag{16}$$

本节中，我们将算子 $\vartheta_{k+2;(a,1)}$ 作用于由 (3) 定义的模形式（其中 $f(z) = E_k(z)$），并将算子 $\vartheta_{4;(a,1)}$ 作用于由 (4) 定义的模形式，以求出卷积和 $W^{e;r}_{\substack{a\,b\\ s}}(n)$，其中 $e = r = 1$、$s = k-1$ 和 $e = r = s = 1$ 分别对应上述情形。我们将在接下来的两个小节中给出这些应用。

3.1. 卷积和 $\sum_{al+bm=n} l\sigma(l)\sigma_{k-1}(m)$ 的求值。根据定理 2.1，函数 $\mathcal{D}E_k(bz) - \frac{k}{12}aE_2(az)E_k(bz)$ 是 $M_{k+2}(ab)$ 中的模形式，其中 a 与 b 是互素正整数。现在对该函数应用算子 $\vartheta_{k+2;(a,1)}$，得到（注意到当 $b = 1$ 时， $D = \mathcal{D}$），

$$\mathcal{D}\big(\mathcal{D}E_k(bz) - \frac{k}{12}aE_2(az)E_k(bz)\big) - \frac{(k+2)}{12}aE_2(az)\big(\mathcal{D}E_k(bz) - \frac{k}{12}aE_2(az)E_k(bz)\big),$$

根据定理 2.1，它属于 $M_{k+4}(ab)$。为简化上述函数，我们利用以下事实：$E_2^2(az) = \frac{12}{a}\mathcal{D}E_2(az) + E_4(az)$，以及 $E_4(az)E_k(bz) \in M_{k+4}(ab)$，从而得出下述函数是一个模形式。事实上，我们有

$$\mathcal{D}^2E_k(bz) + \frac{ka}{12}(k+1)\mathcal{D}E_2(az)E_k(bz) - \frac{a(k+1)}{6}E_2(az)\mathcal{D}E_k(bz) \in M_{k+4}(ab).$$

（注：对于整数 $r \geq 1$，我们有 $\mathcal{D}^r f(bz) = \sum_{n\geq 0} n^r a_f(n/b)q^n$。）设 $h_i(z)$、$1 \leq i \leq \lambda_{k+4}(ab)$ 是空间 $M_{k+4}(ab)$ 的一组基。因此，存在常数 γ_i, $1 \leq i \leq \lambda_{k+4}(ab)$，使得

$$\mathcal{D}^2E_k(bz) + \frac{ka}{12}(k+1)\mathcal{D}E_2(az)E_k(bz) - \frac{a(k+1)}{6}E_2(az)\mathcal{D}E_k(bz) = \sum_{I=1}^{\lambda_{k+4}(ab)} \gamma_i h_i(z).$$

将第 i 个基元素 $h_i(z)$ 的第 n 个傅里叶系数记作 $c_i(n)$。然后，通过比较上述恒等式两边的第 n 个傅里叶系数，并利用以下事实

$$b\sum_{al+bm=n} m\sigma(l)\sigma_{k-1}(m) = nW_{a,b}^{1,k-1}(n) - a\sum_{al+bm=n} l\sigma(l)\sigma_{k-1}(m), \tag{17}$$

由此得到以下定理，其中 $W^{1,k-1}_{a\,b}(n)$ 由推论 2.2 给出。

定理 3.1。设 $k \geq 4$ 为偶整数，且 a, b 为满足 $\gcd(a,b) = 1$ 的正整数。那么对于 $n \geq 2$，存在常数 γ_i, $1 \leq i \leq \lambda_{k+4}(ab)$，使得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ al+bm=n}} l\sigma(l)\sigma_{k-1}(m) &= \frac{6n^2 - a(k+1)n}{12a^2(k+1)(k+2)}\sigma_{k-1}(n/b) + \frac{B_k}{2a(k+2)}n\sigma(n/a)\\ &\quad + \frac{2n}{a(k+2)}W_{a,b}^{1,k-1}(n) + \frac{B_k}{4a^2k(k+1)(k+2)}\sum_{i=1}^{\lambda_{k+4}(ab)}\gamma_i c_i(n),\end{aligned} \tag{18}$$

其中，B_k 是第 k 个伯努利数，$\lambda_{k+4}(ab)$是空间 $M_{k+4}(ab)$ 的维数。卷积和 $W^{1,k-1}_{a\,b}(n)$ 由推论 2.2 给出，而如上所述，$c_i(n)$ 是 $M_{k+4}(ab)$ 中第 i 个基元素 h_i 的第 n 个傅里叶系数。

注3.1. 在 §4.3 中，我们通过取 a、b、k 的特定值，给出上述卷积和的一些例子。

3.2. 卷积和 $\sum_{al+bm=n} l\sigma(l)\sigma(m)$ 的求值。现在，我们利用式 (4) 给出的权 4 模形式，并对该函数应用算子 $\vartheta_{4;(a,1)}$，得到卷积和 $\sum_{al+bm=n} l\sigma(l)\sigma(m)$ 的公式。这里同样有 $D = \mathcal{D}$，因为 $b = 1$。事实上，这意味着函数

$$\mathcal{D}\Big(\frac{6}{b}\mathcal{D}E_2(az) + \frac{6}{a}\mathcal{D}E_2(bz) - E_2(az)E_2(bz)\Big) - \frac{a}{3}E_2(az)\Big(\frac{6}{b}\mathcal{D}E_2(az) + \frac{6}{a}\mathcal{D}E_2(bz) - E_2(az)E_2(bz)\Big)$$

是 $M_6(ab)$ 中的模形式。经过化简，我们看到函数

$$\frac{6}{b}\mathcal{D}^2E_2(az) + \frac{6}{a}\mathcal{D}^2E_2(bz) - E_2(az)\big[3\mathcal{D}E_2(bz) + \frac{2a}{b}\mathcal{D}E_2(az)\big] + E_2(bz)\big[3\mathcal{D}E_2(az) + \frac{a}{3}E_4(az)\big]$$

属于 $M_6(ab)$，其中 a,b 是满足 $\gcd(a,b) = 1$ 的正整数。令 $\{F_i(z) : 1 \le i \le \lambda_6(ab)\}$ 为空间 $M_6(ab)$ 的一组基，其 n 阶傅里叶系数记为 $A_i(n)$,$1 \le i \le \lambda_6(ab)$。将上述模形式表示为基元素 F_i 的线性组合，并比较 n 阶傅里叶系数，可得以下定理。

定理 3.2. 设 a 和 b 为正整数，满足 $\gcd(a,b) = 1$，并假设其中至少一个大于 1。那么对于 $n \ge 2$，存在常数 δ_i, $1 \le i \le \lambda_6(ab)$，使得

$$\sum_{al+bm=n} l\sigma(l)\sigma(m) = \frac{1}{144a}\Big(\frac{6}{b}n^2 + 3n - \frac{2an}{b}\Big)\sigma(n/a) + \frac{1}{144a}\Big(\frac{6}{a}n^2 - 3n + \frac{a}{3}\Big)\sigma(n/b) - \frac{5}{216}\sigma_3(n/a) + \frac{n}{2a}W_{a,b}(n) + \frac{5}{9}W^{1,3}_{b,a}(n) + \frac{a}{3b}\sum_{l+m=n/a} l\sigma(l)\sigma(m) + \frac{1}{6\times 576a}\sum_{i=1}^{\lambda_6(ab)} \delta_i A_i(n), \tag{19}$$

其中 $A_i(n)$ 是 $M_6(ab)$ 的一组基的 n 阶傅里叶系数（如上所述），$W^{1,3}_{b,a}(n)$ 由推论 2.2 给出，而和式 $\sum_{l+m=n} l\sigma(l)\sigma(m)$ 由 (20) 给出（见下文的注释）。

注 3.2. 当 $a = b = 1$ 时，卷积和 $\sum_{l+m=n} l\sigma(l)\sigma(m)$ 由以下公式给出：

$$\sum_{l+m=n} l\sigma(l)\sigma(m) = \frac{5}{24}n\sigma_3(n) - \frac{1}{24}(6n^2 - n)\sigma(n) \tag{20}$$

上述结果通过对恒等式 $E_2^2(z) = 12DE_2(z) + E_4(z)$ 求导，并比较第 n 个傅里叶系数得到。在 §4.4 中，我们通过一些例子说明定理 3.2。

注 3.3. 通过使用我们扩展的 theta 算子，可以求出由 (16) 定义的卷积和，其中 $e \ge 2$。然而，所得表达式还涉及三重卷积和（当 $e = 2$ 时）。因此，要处理 $e = 2$ 的情形，需要找到类似的三重卷积和（当 $e > 2$ 时，则需要更高重的卷积和）。在我们即将发表的工作中，我们将研究涉及三个或更多因子函数的卷积和的求值问题。

4. 示例

本节将给出一些具体例子，说明如何求出推论 2.2、2.3 以及定理 3.1、3.2 中得到的卷积和。为此，我们将使用几组特定 k、a、b 值对应的模形式空间的显式基。事实上，一旦我们知道权为 k、级为 N 的模形式空间的显式基，就能明确写出第 2、3 节中推导出的所有卷积和公式。

此处使用的基元素以艾森斯坦级数（及其重复项）和新形式表示，它们生成尖点形式空间。如前所述，由（6）给出的 $E_k(z)$ 表示全模群上权为 k 的归一化艾森斯坦级数。我们用 $\Delta_{k,N}(z)$ 表示权为 k、级为 N 的唯一（归一化）新形式；当新形式空间的维数为 > 1 时，$_{N;j}(z)$ 表示第 j 个权为 k、级为 N 的（归一化）新形式。这些新形式按照 LMFDB [22] 中提供的列表排序。唯一新形式的第 n 个傅里叶系数记为 $\tau_{k,N}(n)$，而第 n 个傅里叶系数的

权为 k、级为 N 的第 j 个新形式记作 $\tau_{k,\ N;j}(n)$。我们所用基中的新形式的显式表达式见附录。

对于本文给出的示例，当 k, N 取下表所列的值时，我们使用模形式空间 $M_k(N)$ 的以下基。

表 1. 空间 $M_k(N)$ 的基。

k	N	dim	基
4	30	22	$\{E_4(t_1z)\colon t_1\mid 30, \Delta_{4,5}(t_2z)\colon t_2\mid 6, \Delta_{4,6}(t_3z)\colon t_3\mid 5, \Delta_{4,10}(t_4z)\colon t_4\mid 3,$ $\Delta_{4,15;1}(t_5z)\,\Delta_{4,15;2}(t_6z)\colon t_5, t_6\mid 2, \Delta_{4,30;1}(z)\,\Delta_{4,30;2}(z)\}$
6	4	4	$\{E_6(z)\ E_6(2z)\ E_6(4z)\Delta_{6,\ 4}(z)\}$
6	6	7	$\{E_6(tz)\ t\mid 6, \Delta_{6,3}(z)\Delta_{6,3}(2z)\Delta_{6,6}(z)\}$
8	4	5	$\{E_8(z)\ E_8(2z)\ E_8(4z)\Delta_{8,\ 2}(z)\Delta_{8,\ 2}(2z)\}$
8	6	9	$\{E_8(tz)\ t\mid 6, \Delta_{8,2}(z)\Delta_{8,2}(3z)\Delta_{8,3}(z)\Delta_{8,3}(2z)\Delta_{8,6}(z)\}$
10	4	6	$\{E_{10}(z)\ E_{10}(2z)\ E_{10}(4z)\Delta_{10,\ 2}(z)\Delta_{10,\ 2}(2z)\Delta_{10,\ 4}(z)\}$
10	6	11	$\{E_{10}(tz)\ t\mid 6; \Delta_{10,2}(z)\Delta_{10,2}(2z)\Delta_{10,3;1}(z),$ $\Delta_{10,3;1}(2z)\,\Delta_{10,3;2}(z)\,\Delta_{10,3;2}(2z)\,\Delta_{10,6}(z)\}$
12	4	7	$\{E_{12}(z)\ E_{12}(2z)\ E_{12}(4z)\ \Delta(z)\ \Delta(2z)\ \Delta(4z)\,\Delta_{12,4}(z)\}$
12	6	13	$\{E_{12}(t_1z)\ t_1\mid 6;\ \Delta(t_2z)\ t_2\mid 6;\ \Delta_{12,\ 3}(z)\Delta_{12,\ 3}(2z),$ $\Delta_{12,\ 6;1}(z)\,\Delta_{12,\ 6;2}(z)\,\Delta_{12,\ 6;3}(z)\}$

注意，当 $N=2$ 或 3 时，我们得到 $M_k(N)$的一个基，它是上述 $M_k(4)$或 $M_k(6)$的基的子集。因此，当级为 2 或 3 时，我们会利用这一事实。考虑空间 $M_4(d)$时，我们也会用到类似的事实，其中 $d\mid 30$ 关于卷积和$W_{a,\ b}(n)$。

4.1. 卷积和 $W^1_{a\ b^{k-1}}(n)$的示例。下表给出了这类卷积和的一些已知求值结果。这里列出 $k=4$、6、8、10、12 时的情形。

表2. 已知的卷积和 $W^1_{a\ b^{k-1}}(n)$。

k	(a,b)	参考文献
4	(1, 1)	[33, 19, 20, 12, 34]
	(1, 2)、(2, 1)	[17, 12, 23, 24, 34]
	(1, 3), (3, 1)	[41]
	(1, 4), (4, 1)	[12]
	(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)	[18]
6	(1, 1)	[33, 19, 20, 34]
	(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1)	[12, 23, 24, 34]
8	(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1)	[33, 19, 20, 12]
10	(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1)	[33, 19, 20, 12]
12	(1, 1)	[33, 19, 20]

为说明我们的方法，我们利用推论 2.2 证明 [12, 定理 4.2、5.2、6.2、7.2], 中在 $k=4$, 6, 8, 10 以及 (a,b) =(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1) 时得到的恒等式。下文将 $\mathcal{D}E_k(bz)-(k/12)aE_2(az)E_k(bz)$ 表示为 $M_6(ab)$ 的基元素的线性组合。比较第 n 个傅里叶系数，[12] 中定理 4.2、5.2、6.2、7.2 的结果便可直接得出。在某些情况下，[12] 公式中出现的尖点形式与我们的尖点形式不同（我们的尖点形式在这些表达式之后提及）。

$$\mathcal{D}E_4(2z)-\frac{1}{3}E_2(z)E_4(2z)=-\frac{1}{63}E_6(z)-\frac{20}{63}E_6(2z), \tag{21}$$

$$\mathcal{D}E_4(z)-\frac{2}{3}E_2(2z)E_4(z)=-\frac{10}{63}E_6(z)-\frac{32}{63}E_6(2z), \tag{22}$$

$$\mathcal{D}E_4(4z)-\frac{1}{3}E_2(z)E_4(4z)=-\frac{1}{1008}E_6(z)-\frac{5}{336}E_6(2z)-\frac{20}{63}E_6(4z)+\frac{15}{2}\Delta_{6,4}(z), \tag{23}$$

$$\mathcal{D}E_4(z)-\frac{4}{3}E_2(4z)E_4(z)=-\frac{5}{63}E_6(z)-\frac{5}{21}E_6(2z)-\frac{64}{63}E_6(4z)-120\Delta_{6,4}(z), \tag{24}$$

$$\mathcal{D}E_6(2z)-\frac{1}{2}E_2(z)E_6(2z)=-\frac{1}{170}E_8(z)-\frac{42}{85}E_8(2z)+\frac{252}{17}\Delta_{8,2}(z), \tag{25}$$

$$\mathcal{D}E_6(z)-E_2(2z)E_6(z)=-\frac{21}{85}E_8(z)-\frac{64}{85}E_8(2z)+\frac{2017}{17}\Delta_{8,2}(z), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}E_6(4z)-\frac{1}{2}E_2(z)E_6(4z)=&-\frac{1}{10880}E_8(z)-\frac{63}{10880}E_8(2z)-\frac{42}{85}E_8(4z)+\frac{819}{68}\Delta_{8,\ 2}(z)\\&+\frac{2394}{17}\Delta_{8,\ 2}(2z),\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}E_6(z)-2E_2(4z)E_6(z)=&-\frac{21}{170}E_8(z)-\frac{63}{170}E_8(2z)-\frac{128}{85}E_8(4z)+\frac{9576}{17}\Delta_{8,2}(z)\\&+\frac{209664}{17}\Delta_{8,2}(2z),\end{aligned} \tag{28}$$

$$\mathcal{D}E_8(2z)-\frac{2}{3}E_2(z)E_8(2z)=-\frac{2}{1023}E_{10}(z)-\frac{680}{1023}E_{10}(2z)+\frac{480}{31}\Delta_{10,2}(z), \tag{29}$$

$$\mathcal{D}E_8(z)-\frac{4}{3}E_2(2z)E_8(z)=-\frac{340}{1023}E_{10}(z)-\frac{1024}{1023}E_{10}(2z)-\frac{7680}{31}\Delta_{10,\ 2}(z), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}E_8(4z)-\frac{2}{3}E_2(z)E_8(4z)=&-\frac{1}{130944}E_{10}(z)-\frac{85}{43648}E_{10}(2z)-\frac{680}{1023}E_{10}(4z)+\frac{585}{62}\Delta_{10,2}(z)\\&-\frac{3240}{31}\Delta_{10,2}(2z)+\frac{105}{16}\Delta_{10,\ 4}(z),\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}E_8(z)-\frac{8}{3}E_2(4z)E_8(z)=&-\frac{170}{1023}E_{10}(z)-\frac{170}{341}E_{10}(2z)-\frac{2048}{1023}E_{10}(4z)+\frac{25920}{31}\Delta_{10,2}(z)\\&-\frac{2396160}{31}\Delta_{10,2}(2z)-1680\Delta_{10,4}(z),\end{aligned} \tag{32}$$

$$\mathcal{D}E_{10}(2z)-\frac{5}{6}E_2(z)E_{10}(2z)=-\frac{1}{1638}E_{12}(z)-\frac{682}{819}E_{12}(2z)+\frac{13860}{691}\Delta(z)+\frac{297792}{691}\Delta(2z), \tag{33}$$

$$\mathcal{D}E_{10}(z)-\frac{5}{3}E_2(2z)E_{10}(z)=-\frac{341}{819}E_{12}(z)-\frac{1024}{819}E_{12}(2z)+\frac{148896}{691}\Delta(z)+\frac{28385280}{691}\Delta(2z), \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}E_{10}(4z)-\frac{5}{6}E_2(z)E_{10}(4z)=&-\frac{1}{1677312}E_{12}(z)-\frac{341}{559104}E_{12}(2z)-\frac{682}{819}E_{12}(4z)+\frac{599445}{44224}\Delta(z)\\&+\frac{2130975}{5528}\Delta(2z)+\frac{19999584}{691}\Delta(4z)+\frac{825}{128}\Delta_{12,\ 4}\ (z)\ ,\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}E_{10}(z)-\frac{10}{3}E_2(4z)E_{10}(z)=&-\frac{341}{1638}E_{12}(z)-\frac{341}{546}E_{12}(2z)-\frac{2048}{819}E_{12}(4z)+\frac{4999896}{691}\Delta(z)\\&+\frac{272764800}{691}\Delta(2z)+\frac{39285227520}{691}\Delta(4z)-6600\Delta_{12,4}(z).\end{aligned} \tag{36}$$

我们作出一些评注；这些评注中提到的定理编号出自 Cheng 和 Williams [12] 的著作。

评注 4.1。我们关于 W^1,3 1 2 , (n), W^1,3 2 1 , (n), W^1,3 1 4 , (n), W^1,3 4 1 , (n) 的恒等式（由 (21)-(24) 得出）与定理 4.2 中得到的公式相符。请注意，定理 4.2 中出现的傅里叶系数 a (n) 不过就是 τ_6,4(n)。类似地，关于 W^1,5 1 2 , (n), W^1,5 2 1 , (n),$_{W^1}$,5 1 4 , (n), W^1,5 4 1 , (n) 的公式（由 (25)-(28) 得出）与定理 5.2 (i) 、 (iii) 、 (iv) 、 (vi) 中的公式相同。在这种情况下，他们公式中的傅里叶系数 b(n) 是新形式 Δ_8,2(z) 的第 n 个傅里叶系数。从 (33)、(34) 得到的关于 W^1,9 1 2 , (n), W^1,9 2 1 , (n) 的公式，与定理 7.2 (i)、(v) 中给出的公式相同。

*Rema*rk 4.2. 由恒等式 (29) 可得如下结果。对于自然数 n ,

$$W_{1,2}^{1,7}(n) = \frac{1}{14880}\sigma_9(n) + \frac{17}{744}\sigma_9(n/2) + \frac{(2-3n)}{48}\sigma_7(n/2) - \frac{1}{480}\sigma(n) + \frac{1}{496}\tau_{10,2}(n). \tag{37}$$

将上述恒等式与 [12, 定理 6.2 (i)], 比较，可得

$$c(n) + 32d(n) = \tau_{10,2}(n),$$

归一化新形式 $\Delta_{10,2}$(z) 的第 n 个傅里叶系数，其中 c(n) 和 d(n) 是某些 eta 乘积 [12, 式 (6.1)、式 (6.2)]的傅里叶系数。因此，我们有

$$\Delta_{10,2}(z) = \eta^{16}(z)\eta^4(2z) + 32\eta^8(z)\eta^4(2z)\eta^8(4z), \tag{38}$$

其中 η(z) $= q^{1/24}\prod_{n\geq 1}$(1 $- q^n$)，是 Dedekind η 函数， $q = e^{2\pi iz}$。由 (30) 得到的卷积和 W^1, $_{7\,21}$,(n) 也可得出类似结论，它对应于定理 6.2 (ii)。然而，由 (31) 和 (32) 得到的和 W^1,$_{7\,14}$,(n) 和 W^1,$_{7\,41}$,(n) 的公式，与定理 6.2 (v) 和 (viii) 中的公式并不一致。原因在于，Cheng 和 Williams 在他们的研究中使用了不同的尖点形式 C(z)、 D(z) 和 E(z)（参见 [12, 式 (6.1)、(6.2)、(6.3)]）。比较我们的公式与他们的公式，对于所有自然数 n，可得以下关系：

$$\begin{aligned}
\frac{529}{253952}c(n) + \frac{625}{15872}d(n) + \frac{109}{992}e(n) &= \frac{39}{31744}\tau_{10,2}(n) - \frac{27}{1984}\tau_{10,2}(n/2) + \frac{7}{8192}\tau_{10,4}(n),\\
-\frac{109}{3968}c(n) - \frac{625}{248}d(n) - \frac{1058}{31}e(n) &= \frac{27}{992}\tau_{10,2}(n) - \frac{78}{31}\tau_{10,2}(n/2) - \frac{7}{128}\tau_{10,4}(n),
\end{aligned}$$

其中， c(n) d(n) e(n)分别是 C(z) D(z)和 E(z)的第 n个傅里叶系数。

注 4.3。现在考虑卷积和 W^1, $_{9\,14}$, (n)、 W^1, $_{9\,41}$, (n)。按照 [12], 中的记号，它们分别记为 U_9, $_1$(n) 和 U_1, $_9$(n)。利用恒等式 (35) 和 (36)，并比较第 n 个傅里叶系数，对所有整数 $n \geq 1$，我们得到

$$W_{1,4}^{1,9}(n) = \frac{1}{93401088}\sigma_{11}(n) + \frac{31}{2830336}\sigma_{11}(n/2) + \frac{31}{2073}\sigma_{11}(n/4) + \frac{(5-6n)}{120}\sigma_9(n/4) + \frac{1}{264}\sigma(n) - \frac{3633}{1415168}\tau(n) - \frac{12915}{176896}\tau(n/2) - \frac{18939}{3455}\tau(n/4) - \frac{5}{4096}\tau_{12,4}(n),$$

$$W_{4,1}^{1,9}(n) = \frac{31}{33168}\sigma_{11}(n) + \frac{31}{11056}\sigma_{11}(n/2) + \frac{256}{22803}\sigma_{11}(n/4) + \frac{(10-3n)}{240}\sigma_9(n) + \frac{1}{264}\sigma(n/4) - \frac{18939}{55280}\tau(n) - \frac{12915}{691}\tau(n/2) - \frac{1860096}{691}\tau(n/4) + \frac{5}{16}\tau_{12,4}(n).$$

在 [12], 中，Cheng 和 Williams 使用 η商 $F(z) = \eta^{32}(4z)\,\eta^{8}(z)$ 的傅里叶系数 $f(n)$（除艾森斯坦级数 $E_{12}(z)$ 和 $\Delta(z)$ 外）来表示卷积和 $U_{9,\ 1}(n)$ 和 $U_{1,\ 9}(n)$。（需要注意的是，模形式 $F(z)$ 并非尖点形式。）然而，我们使用艾森斯坦级数 $E_{12}(z)$ 以及两个尖点形式 $\Delta(z)$ 和 $\Delta_{12,\ 4}(z)$ 来表示我们的公式。因此，上文给出的公式与 [12] 中所得的公式并不一致。注意到

$$F(z) = \frac{1}{4293918720}E_{12}(z) - \frac{1}{4293918720}E_{12}(2z) - \frac{347}{67928064}\Delta(z) - \frac{475}{2830336}\Delta(2z) - \frac{5}{48}\Delta(4z) + \frac{1}{196608}\Delta_{12,4}(z),$$

比较 n 阶系数后，可以得到 $f(n)$ 关于 $\sigma_{11}(n)$、$\tau(n)$ 和 $\tau_{12,\ 4}(n)$ 的表达式。将此表达式（针对 $f(n)$）代入定理 7.2 的 (vi) 和 (x)，可得$U_{9,\ 1}(n) = W^{1,\ 9\,14\,,}(n)$ 以及 $U_{1,\ 9}(n) = W^{1,\ 9\,41\,,}(n)$。

下面我们给出一些关于 $W^{1,\ a\,b}{}^{k-1}{}_{,}(n)$ 的新公式。具体而言，下面给出对应于以下情形的公式：$(a,b) = (1,3)$、$(3,1)$、$(1,6)$、$(6,1)$、$(2,3)$、$(3,2)$，其中 $k = 4,6,8,10$。为得到这些公式，我们使用表 1 中给出的 $M_{k+2}(6)$ 的基。采用我们的方法，以下公式对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

$$\begin{aligned}
W_{1,3}^{1,3}(n) &= \frac{1}{1040}\sigma_5(n) + \frac{9}{104}\sigma_5(n/3) + \frac{(1-3n)}{24}\sigma_3(n/3) - \frac{1}{240}\sigma(n) + \frac{1}{312}\tau_{6,3}(n),\\
W_{3,1}^{1,3}(n) &= \frac{1}{104}\sigma_5(n) + \frac{81}{1040}\sigma_5(n/3) + \frac{(1-n)}{24}\sigma_3(n) - \frac{1}{240}\sigma(n/3) - \frac{1}{104}\tau_{6,3}(n),\\
W_{1,6}^{1,3}(n) &= \frac{1}{21840}\sigma_5(n) + \frac{1}{1092}\sigma_5(n/2) + \frac{3}{728}\sigma_5(n/3) + \frac{15}{182}\sigma_5(n/6) + \frac{(1-3n)}{24}\sigma_3(n/6)\\
&\quad -\frac{1}{240}\sigma(n) + \frac{1}{468}\tau_{6,3}(n) + \frac{7}{468}\tau_{6,3}(n/2) + \frac{1}{504}\tau_{6,6}(n),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{6,1}^{1,3}(n) &= \frac{5}{2184}\sigma_5(n)+\frac{2}{273}\sigma_5(n/2)+\frac{27}{1456}\sigma_5(n/3)+\frac{27}{455}\sigma_5(n/6)+\frac{(2-n)}{48}\sigma_3(n)\\
&\quad -\frac{1}{240}\sigma(n/6)-\frac{7}{624}\tau_{6,3}(n)-\frac{4}{39}\tau_{6,3}(n/2)-\frac{1}{84}\tau_{6,6}(n),\\
W_{2,3}^{1,3}(n) &= \frac{1}{4368}\sigma_5(n)+\frac{1}{1365}\sigma_5(n/2)+\frac{15}{728}\sigma_5(n/3)+\frac{6}{91}\sigma_5(n/6)+\frac{(2-3n)}{48}\sigma_3(n/3)\\
&\quad -\frac{1}{240}\sigma(n/2)+\frac{7}{1872}\tau_{6,3}(n)+\frac{4}{117}\tau_{6,3}(n/2)-\frac{1}{252}\tau_{6,6}(n),\\
W_{3,2}^{1,3}(n) &= \frac{1}{2184}\sigma_5(n)+\frac{5}{546}\sigma_5(n/2)+\frac{27}{7280}\sigma_5(n/3)+\frac{27}{364}\sigma_5(n/6)+\frac{(1-n)}{24}\sigma_3(n/2)\\
&\quad -\frac{1}{240}\sigma(n/3)-\frac{1}{156}\tau_{6,3}(n)-\frac{7}{156}\tau_{6,3}(n/2)+\frac{1}{168}\tau_{6,6}(n),\\
W_{1,3}^{1,5}(n) &= -\frac{1}{19680}\sigma_7(n)-\frac{273}{6560}\sigma_7(n/3)+\frac{(1-2n)}{24}\sigma_5(n/3)+\frac{1}{504}\sigma(n)+\frac{7}{3280}\tau_{8,3}(n),\\
W_{3,1}^{1,5}(n) &= -\frac{91}{19680}\sigma_7(n)-\frac{243}{6560}\sigma_7(n/3)+\frac{(3-2n)}{72}\sigma_5(n)+\frac{1}{504}\sigma(n/3)+\frac{63}{3280}\tau_{8,3}(n),\\
W_{1,6}^{1,5}(n) &= \frac{1}{1756440}\sigma_7(n)+\frac{1}{20910}\sigma_7(n/2)+\frac{13}{27880}\sigma_7(n/3)+\frac{273}{6970}\sigma_7(n/6)+\frac{(1-2n)}{24}\sigma_5(n/6)\\
&\quad +\frac{1}{504}\sigma(n)-\frac{1}{1632}\tau_{8,2}(n)-\frac{1}{544}\tau_{8,2}(n/3)-\frac{1}{1476}\tau_{8,3}(n)-\frac{1}{738}\tau_{8,3}(n/2)-\frac{1}{1440}\tau_{8,6}(n),\\
W_{6,1}^{1,5}(n) &= \frac{91}{83640}\sigma_7(n)+\frac{104}{31365}\sigma_7(n/2)+\frac{243}{27880}\sigma_7(n/3)+\frac{648}{24395}\sigma_7(n/6)+\frac{(3-n)}{72}\sigma_5(n)\\
&\quad +\frac{1}{504}\sigma(n/6)-\frac{1}{1224}\tau_{8,2}(n)-\frac{243}{136}\tau_{8,2}(n/3)-\frac{1}{328}\tau_{8,3}(n)-\frac{16}{41}\tau_{8,3}(n/2)-\frac{1}{40}\tau_{8,6}(n),\\
W_{2,3}^{1,5}(n) &= \frac{1}{83640}\sigma_7(n)+\frac{8}{219555}\sigma_7(n/2)+\frac{273}{27880}\sigma_7(n/3)+\frac{104}{3485}\sigma_7(n/6)+\frac{(1-n)}{24}\sigma_5(n/3)\\
&\quad +\frac{1}{504}\sigma(n/2)-\frac{1}{408}\tau_{8,2}(n)-\frac{1}{136}\tau_{8,2}(n/3)-\frac{1}{2952}\tau_{8,3}(n)-\frac{16}{369}\tau_{8,3}(n/2)+\frac{1}{360}\tau_{8,6}(n),\\
W_{3,2}^{1,5}(n) &= \frac{13}{250920}\sigma_7(n)+\frac{91}{20910}\sigma_7(n/2)+\frac{81}{195160}\sigma_7(n/3)+\frac{243}{6970}\sigma_7(n/6)+\frac{(3-2n)}{72}\sigma_5(n/2)\\
&\quad +\frac{1}{504}\sigma(n/3)-\frac{1}{4896}\tau_{8,2}(n)-\frac{243}{544}\tau_{8,2}(n/3)-\frac{1}{164}\tau_{8,3}(n)-\frac{1}{82}\tau_{8,3}(n/2)+\frac{1}{160}\tau_{8,6}(n),\\
W_{1,3}^{1,7}(n) &= \frac{1}{322080}\sigma_9(n)+\frac{123}{5368}\sigma_9(n/3)+\frac{(2-3n)}{48}\sigma_7(n/3)-\frac{1}{480}\sigma(n)+\frac{1}{1647}\tau_{10,3;1}(n)\\
&\quad +\frac{7}{4752}\tau_{10,3;2}(n),\\
W_{3,1}^{1,7}(n) &= \frac{41}{16104}\sigma_9(n)+\frac{2187}{107360}\sigma_9(n/3)+\frac{(2-n)}{48}\sigma_7(n)-\frac{1}{480}\sigma(n/3)+\frac{1}{61}\tau_{10,3;1}(n)\\
&\quad -\frac{7}{176}\tau_{10,3;2}(n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{1,6}^{1,7}(n) &= \frac{1}{109829280}\sigma_9(n) + \frac{17}{5491464}\sigma_9(n/2) + \frac{123}{1830488}\sigma_9(n/3) - \frac{10455}{457622}\sigma_9(n/6) \\
&\quad + \frac{(2-3n)}{48}\sigma_7(n/6) - \frac{1}{480}\sigma(n) + \frac{1}{1488}\tau_{10,2}(n) + \frac{21}{248}\tau_{10,2}(n/3) + \frac{7}{13176}\tau_{10,3;1}(n) \\
&\quad + \frac{23}{1647}\tau_{10,3;1}(n/2) + \frac{7}{13068}\tau_{10,3;2}(n) - \frac{91}{26136}\tau_{10,3;2}(n/2) + \frac{1}{2904}\tau_{10,6}(n), \\
W_{6,1}^{1,7}(n) &= \frac{3485}{5491464}\sigma_9(n) + \frac{1312}{686433}\sigma_9(n/2) + \frac{37179}{7321952}\sigma_9(n/3) + \frac{17496}{1144055}\sigma_9(n/6) \\
&\quad + \frac{(4-n)}{96}\sigma_7(n) - \frac{1}{480}\sigma(n/6) - \frac{7}{93}\tau_{10,2}(n) - \frac{2187}{62}\tau_{10,2}(n/3) + \frac{23}{244}\tau_{10,3;1}(n) \\
&\quad + \frac{224}{61}\tau_{10,3;1}(n/2) + \frac{91}{3872}\tau_{10,3;2}(n) - \frac{448}{121}\tau_{10,3;2}(n/2) - \frac{9}{121}\tau_{10,6}(n), \\
W_{2,3}^{1,7}(n) &= \frac{17}{21965856}\sigma_9(n) + \frac{8}{3432165}\sigma_9(n/2) + \frac{10455}{1830488}\sigma_9(n/3) + \frac{3936}{228811}\sigma_9(n/6) \\
&\quad + \frac{(4-3n)}{96}\sigma_7(n/3) - \frac{1}{480}\sigma(n/2) - \frac{1}{186}\tau_{10,2}(n) - \frac{21}{31}\tau_{10,2}(n/3) + \frac{23}{6588}\tau_{10,3;1}(n) \\
&\quad + \frac{224}{1647}\tau_{10,3;1}(n/2) - \frac{91}{104544}\tau_{10,3;2}(n) + \frac{448}{3267}\tau_{10,3;2}(n/2) + \frac{1}{363}\tau_{10,6}(n), \\
W_{3,2}^{1,7}(n) &= \frac{41}{5491464}\sigma_9(n) + \frac{3485}{1372866}\sigma_9(n/2) + \frac{2187}{36609760}\sigma_9(n/3) + \frac{37179}{1830488}\sigma_9(n/6) \\
&\quad + \frac{(2-n)}{48}\sigma_7(n/2) - \frac{1}{480}\sigma(n/3) + \frac{7}{744}\tau_{10,2}(n) + \frac{2187}{496}\tau_{10,2}(n/3) + \frac{7}{488}\tau_{10,3;1}(n) \\
&\quad + \frac{23}{61}\tau_{10,3;1}(n/2) - \frac{7}{484}\tau_{10,3;2}(n) + \frac{91}{968}\tau_{10,3;2}(n/2) - \frac{9}{968}\tau_{10,6}(n), \\
W_{1,3}^{1,9}(n) &= \frac{1}{4438984}\sigma_{11}(n) + \frac{6039}{403544}\sigma_{11}(n/3) + \frac{(5-6n)}{120}\sigma_9(n/3) + \frac{1}{264}\sigma(n) - \frac{98}{35241}\tau(n) \\
&\quad + \frac{29034}{58735}\tau(n/3) - \frac{5}{4964}\tau_{12,3}(n), \\
W_{3,1}^{1,9}(n) &= \frac{671}{403544}\sigma_{11}(n) + \frac{59049}{4438984}\sigma_{11}(n/3) + \frac{(5-2n)}{120}\sigma_9(n) + \frac{1}{264}\sigma(n/3) + \frac{3226}{58735}\tau(n) \\
&\quad - \frac{1928934}{11747}\tau(n/3) - \frac{405}{4964}\tau_{12,3}(n), \\
W_{1,6}^{1,9}(n) &= \frac{1}{6059213160}\sigma_{11}(n) + \frac{31}{137709390}\sigma_{11}(n/2) + \frac{2013}{183612520}\sigma_{11}(n/3) + \frac{686433}{45903130}\sigma_{11}(n/6) \\
&\quad + \frac{(5-6n)}{120}\sigma_9(n/6) + \frac{1}{264}\sigma(n) - \frac{1715}{1691568}\tau(n) - \frac{2303}{105723}\tau(n/2) + \frac{11291}{187952}\tau(n/3) \\
&\quad + \frac{227433}{58735}\tau(n/6) - \frac{395}{431868}\tau_{12,3}(n) + \frac{9835}{215934}\tau_{12,3}(n/2) - \frac{7}{11745}\tau_{12,6;1}(n) \\
&\quad - \frac{641}{1235520}\tau_{12,6;2}(n) - \frac{1}{1344}\tau_{12,6;3}(n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{6,1}^{1,9}(n) &= \frac{228811}{550837560}\sigma_{11}(n)+\frac{85888}{68854695}\sigma_{11}(n/2)+\frac{610173}{183612520}\sigma_{11}(n/3)+\frac{2519424}{252467215}\sigma_{11}(n/6)\\
&\quad+\frac{(5-n)}{120}\sigma_9(n)+\frac{1}{264}\sigma(n/6)+\frac{75811}{704820}\tau(n)+\frac{722624}{35241}\tau(n/2)-\frac{15109983}{46988}\tau(n/3)\\
&\quad-\frac{720135360}{11747}\tau(n/6)+\frac{265545}{287912}\tau_{12,3}(n)-\frac{2730240}{35989}\tau_{12,3}(n/2)-\frac{112}{145}\tau_{12,6;1}(n)\\
&\quad+\frac{35}{52}\tau_{12,6;2}(n)-\frac{27}{28}\tau_{12,6;3}(n),\\
W_{2,3}^{1,9}(n) &= \frac{31}{550837560}\sigma_{11}(n)+\frac{128}{757401645}\sigma_{11}(n/2)+\frac{686433}{183612520}\sigma_{11}(n/3)+\frac{257664}{22951565}\sigma_{11}(n/6)\\
&\quad+\frac{(5-3n)}{120}\sigma_9(n/3)+\frac{1}{264}\sigma(n/2)-\frac{2303}{422892}\tau(n)-\frac{109760}{105723}\tau(n/2)+\frac{227433}{234940}\tau(n/3)\\
&\quad+\frac{2167872}{11747}\tau(n/6)+\frac{9835}{863736}\tau_{12,3}(n)-\frac{101120}{107967}\tau_{12,3}(n/2)-\frac{112}{11745}\tau_{12,6;1}(n)\\
&\quad-\frac{35}{4212}\tau_{12,6;2}(n)+\frac{1}{84}\tau_{12,6;3}(n),\\
W_{3,2}^{1,9}(n) &= \frac{671}{550837560}\sigma_{11}(n)+\frac{228811}{137709390}\sigma_{11}(n/2)+\frac{19683}{2019737720}\sigma_{11}(n/3)+\frac{610173}{45903130}\sigma_{11}(n/6)\\
&\quad+\frac{(5-2n)}{120}\sigma_9(n/2)+\frac{1}{264}\sigma(n/3)+\frac{11291}{563856}\tau(n)+\frac{75811}{176205}\tau(n/2)-\frac{11252115}{187952}\tau(n/3)\\
&\quad-\frac{15109983}{11747}\tau(n/6)-\frac{10665}{143956}\tau_{12,3}(n)+\frac{265545}{71978}\tau_{12,3}(n/2)-\frac{7}{145}\tau_{12,6;1}(n)\\
&\quad+\frac{35}{832}\tau_{12,6;2}(n)+\frac{27}{448}\tau_{12,6;3}(n).
\end{aligned}
$$

备注 4.4。Yao 和 Xia [41] 使用（p,k）参数化方法计算了 $W^{1}_{,3\,13\,},(n)$ 和 $W^{1}_{,3\,31\,},(n)$ 的公式。上文给出的这些和的公式与 Yao 和 Xia 得到的公式相同。K¨okl¨uce 使用相同的方法（（p,k）参数化）在 [18]，中推导出了卷积和 $W^{1}_{,a\,b\,}{}^{3}_{,}(n)$，其中（$a,b$）$=$(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)。上文给出的公式与 K¨okl¨uce 得到的公式在尖点形式部分模意义下相符。在他的公式中，K¨okl¨uce 使用了以下由 eta 乘积线性组合给出的尖点形式：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}u_1(n)q^n &= -4\eta(z)^5\eta(2z)^5\eta(3z)\eta(6z)+105\eta(z)^6\eta(3z)^6+972\eta(z)\eta(2z)\eta(3z)^5\eta(6z)^5,\\
\sum_{n\geq 1}u_2(n)q^n &= -72\eta(z)^5\eta(2z)^5\eta(3z)\eta(6z)+70\eta(z)^6\eta(3z)^6+24\eta(z)\eta(2z)\eta(3z)^5\eta(6z)^5,\\
\sum_{n\geq 1}u_3(n)q^n &= 4\eta(z)^5\eta(2z)^5\eta(3z)\eta(6z)+14\eta(z)^6\eta(3z)^6+120\eta(z)\eta(2z)\eta(3z)^5\eta(6z)^5,\\
\sum_{n\geq 1}u_4(n)q^n &= -101\eta(z)^5\eta(2z)^5\eta(3z)\eta(6z)+105\eta(z)^6\eta(3z)^6-27\eta(z)\eta(2z)\eta(3z)^5\eta(6z)^5.
\end{aligned}
$$

在这些情形下，我们的公式涉及尖点形式 $\Delta_{6,\ 3}(z)\Delta_{6,\ 3}(2z)\Delta_{6,\ 6}(z)$。将我们的公式与 [18]，中得到的相应公式进行比较，可得下列关于

$u_j(n)$ 的表达式，其中 $1 \le j \le 4$ 用 $\tau_{6,3}(n)$ 和 $\tau_{6,6}(n)$ 表示：

$$\begin{aligned} u_1(n) &= 49\tau_{6,3}(n) + 448\tau_{6,3}(n/2) + 52\tau_{6,6}(n), \\ 3u_2(n) &= 98\tau_{6,3}(n) + 896\tau_{6,3}(n/2) - 104\tau_{6,6}(n), \\ 3u_3(n) &= 28\tau_{6,3}(n) + 112\tau_{6,3}(n/2) + 26\tau_{6,6}(n), \\ u_4(n) &= 56\tau_{6,3}(n) + 392\tau_{6,3}(n/2) - 52\tau_{6,6}(n). \end{aligned}$$

由这些关系，我们可以得到以 eta 乘积表示的新形式$\Delta_{6,6}(z)$，如下所示。

$$\Delta_{6,6}(z) = \eta(z)^5\eta(2z)^5\eta(3z)\eta(6z) + 9\eta(z)\eta(2z)\eta(3z)^5\eta(6z)^5. \tag{39}$$

请注意，我们对这个新形式的表达式（见附录）与上述表达式不同。

4.2. 卷积和 $W_{a,b}(n)$ 的示例。我们先列出早期关于计算这类卷积和的研究文献。此列表可能不完整。

表 3. 已知卷积和$W_{a,b}(n)$。

(a,b) 的类型	(a,b)	级别 $N = ab$	参考文献
$(1,1)$	$(1,1)$	1	[10, 16, 33]
$(1,p)$	$(1,2)$、(1, 3)、(1, 5)、(1, 7)、(1, 11) (1, 13)、(1, 17)、(1, 23)、(1, 29)、(1, 41) (1, 47), (59), (1, 71)	2、3、5、7、11、 13、17、23、29、41 47, 59, 71	[9, 11, 13, 14, 17, 21, 32]
(p_1,p_2)	(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)	6、10、14、15、21	[8, 9, 15, 29, 32]
$(1,p_1p_2)$	(1, 6), (1, 10), (1, 14), (1, 15), (1, 21)	6、10、14、15、21	[8, 9, 29, 32, 34]
$(1,p^i)$	(1, 4), (1, 8), (1, 9), (1, 16), (1, 25), (1, 27), (1, 32)	4, 8, 9, 16, 25, 27, 32	[5, 6, 17, 38, 39, 37]
$(1,p_1^ip_2^j)$	(1, 12), (1, 18), (1, 20), (1, 24), (1, 28), (1, 36)	12, 18, 20, 24, 28, 36	[2, 4, 15, 30, 32]
(p_1^i,p_2^j)	(3, 4), (2, 9), (4, 5), (3, 8), (4, 7), (4, 9)	12, 18, 20, 24, 28, 36	[3, 4, 15, 30, 32]

以下示例对应于推论 2.3 中得到的卷积和。这里我们给出一组模形式空间的级为 30 时的示例。设 $n \in \mathbb{N}$，则对于卷积和 $W_{a,b}(n)$，其中 $ab|30$，$\gcd(a,b) = 1$，有以下公式。为了得到这些示例，我们使用了表 1 中给出的 $M_4(30)$ 的基，该基由 22 个元素组成（对于 ab 是 30 的真因数时的卷积和，我们使用级为 ab 的基，它是这些基元素的子集）。利用推论 2.3，我们得到适用于所有自然数 n的以下公式：

$$\begin{aligned} W_{15}(n) = {} & \frac{1}{624}\sigma_3(n) + \frac{3}{208}\sigma_3(n/3) + \frac{25}{624}\sigma_3(n/5) + \frac{75}{208}\sigma_3(n/15) + \frac{(5-2n)}{120}\sigma(n) \\ & + \frac{(1-6n)}{24}\sigma(n/15) - \frac{1}{455}\tau_{4,5}(n) - \frac{9}{455}\tau_{4,5}(n/3) - \frac{1}{80}\tau_{4,15;1}(n) - \frac{1}{84}\tau_{4,15;2}(n), \end{aligned} \tag{40}$$

$$W_{3,5}(n) = \frac{1}{624}\sigma_3(n) + \frac{3}{208}\sigma_3(n/3) + \frac{25}{624}\sigma_3(n/5) + \frac{75}{208}\sigma_3(n/15) + \frac{(5-6n)}{120}\sigma(n/3) + \frac{(1-2n)}{24}\sigma(n/5) - \frac{1}{455}\tau_{4,5}(n) - \frac{9}{455}\tau_{4,5}(n/3) + \frac{1}{80}\tau_{4,15;1}(n) - \frac{1}{84}\tau_{4,15;2}(n), \quad (41)$$

$$W_{2,15}(n) = \frac{1}{3120}\sigma_3(n) + \frac{1}{780}\sigma_3(n/2) + \frac{3}{1040}\sigma_3(n/3) + \frac{5}{624}\sigma_3(n/5) + \frac{3}{260}\sigma_3(n/6) + \frac{5}{156}\sigma_3(n/10) + \frac{15}{208}\sigma_3(n/15) + \frac{15}{52}\sigma_3(n/30) + \frac{(5-2n)}{120}\sigma(n/2) + \frac{(1-3n)}{24}\sigma(n/15) - \frac{3}{910}\tau_{4,5}(n) - \frac{6}{455}\tau_{4,5}(n/2) - \frac{27}{910}\tau_{4,5}(n/3) - \frac{54}{455}\tau_{4,5}(n/6) - \frac{1}{720}\tau_{4,6}(n) - \frac{5}{144}\tau_{4,6}(n/5) + \frac{1}{120}\tau_{4,10}(n) + \frac{3}{40}\tau_{4,10}(n/3) - \frac{3}{560}\tau_{4,15;1}(n) + \frac{3}{140}\tau_{4,15;1}(n/2) - \frac{1}{252}\tau_{4,15;2}(n) - \frac{1}{63}\tau_{4,15;2}(n/2) - \frac{1}{336}\tau_{4,30;1}(n) - \frac{1}{120}\tau_{4,30;2}(n), \quad (42)$$

$$W_{3,10}(n) = \frac{1}{3120}\sigma_3(n) + \frac{1}{780}\sigma_3(n/2) + \frac{3}{1040}\sigma_3(n/3) + \frac{5}{624}\sigma_3(n/5) + \frac{3}{260}\sigma_3(n/6) + \frac{5}{156}\sigma_3(n/10) + \frac{15}{208}\sigma_3(n/15) + \frac{15}{52}\sigma_3(n/30) + \frac{(5-3n)}{120}\sigma(n/3) + \frac{(1-2n)}{24}\sigma(n/10) - \frac{3}{910}\tau_{4,5}(n) - \frac{6}{455}\tau_{4,5}(n/2) - \frac{27}{910}\tau_{4,5}(n/3) - \frac{54}{455}\tau_{4,5}(n/6) - \frac{1}{720}\tau_{4,6}(n) - \frac{5}{144}\tau_{4,6}(n/5) - \frac{1}{120}\tau_{4,10}(n) - \frac{3}{40}\tau_{4,10}(n/3) + \frac{3}{560}\tau_{4,15;1}(n) + \frac{3}{140}\tau_{4,15;1}(n/2) - \frac{1}{252}\tau_{4,15;2}(n) - \frac{1}{63}\tau_{4,15;2}(n/2) + \frac{1}{336}\tau_{4,30;1}(n) + \frac{1}{120}\tau_{4,30;2}(n), \quad (43)$$

$$W_{5,6}(n) = \frac{1}{3120}\sigma_3(n) + \frac{1}{780}\sigma_3(n/2) + \frac{3}{1040}\sigma_3(n/3) + \frac{5}{624}\sigma_3(n/5) + \frac{3}{260}\sigma_3(n/6) + \frac{5}{156}\sigma_3(n/10) + \frac{15}{208}\sigma_3(n/15) + \frac{15}{52}\sigma_3(n/30) + \frac{(1-n)}{24}\sigma(n/5) + \frac{(5-6n)}{120}\sigma(n/6) - \frac{3}{910}\tau_{4,5}(n) - \frac{6}{455}\tau_{4,5}(n/2) - \frac{27}{910}\tau_{4,5}(n/3) - \frac{54}{455}\tau_{4,5}(n/6) - \frac{1}{720}\tau_{4,6}(n) - \frac{5}{144}\tau_{4,6}(n/5) - \frac{1}{120}\tau_{4,10}(n) + \frac{3}{40}\tau_{4,10}(n/3) + \frac{3}{560}\tau_{4,15;1}(n) + \frac{3}{140}\tau_{4,15;1}(n/2) + \frac{1}{252}\tau_{4,15;2}(n) - \frac{1}{63}\tau_{4,15;2}(n/2) + \frac{1}{336}\tau_{4,30;1}(n) - \frac{1}{120}\tau_{4,30;2}(n), \quad (44)$$

$$W_{30}(n) = \frac{1}{3120}\sigma_3(n) + \frac{1}{780}\sigma_3(n/2) + \frac{3}{1040}\sigma_3(n/3) + \frac{5}{624}\sigma_3(n/5) + \frac{3}{260}\sigma_3(n/6) + \frac{5}{156}\sigma_3(n/10) + \frac{15}{208}\sigma_3(n/15) + \frac{15}{52}\sigma_3(n/30) + \frac{(5-n)}{120}\sigma(n) + \frac{(1-6n)}{24}\sigma(n/30) - \frac{3}{910}\tau_{4,5}(n) - \frac{6}{455}\tau_{4,5}(n/2) - \frac{27}{910}\tau_{4,5}(n/3) - \frac{54}{455}\tau_{4,5}(n/6) - \frac{1}{720}\tau_{4,6}(n) - \frac{5}{144}\tau_{4,6}(n/5) - \frac{1}{120}\tau_{4,10}(n) - \frac{3}{40}\tau_{4,10}(n/3) - \frac{3}{560}\tau_{4,15;1}(n) - \frac{3}{140}\tau_{4,15;1}(n/2) - \frac{1}{252}\tau_{4,15;2}(n) - \frac{1}{63}\tau_{4,15;2}(n/2) - \frac{1}{336}\tau_{4,30;1}(n) - \frac{1}{120}\tau_{4,30;2}(n). \quad (45)$$

注 4.5。我们注意到，关于 $W_{15}(n)$ 和 $W_{3,\ 5}(n)$ 的恒等式，前两位作者此前已在 [29, 定理 2.2] 中通过另一种方法进行了求值。然而，新形式 $\Delta_{4,\ 15:1}(z)$ 和 $\Delta_{4,\ 15:2}(z)$ 的系数在那些公式中给错了（系数发生了互换）。上述恒等式（40）和（41）纠正了这一错误。

注 4.6。在 [1, 25, 26], 中，作者利用模形式理论，对 ab 的若干情形下的和 $W_{a,\ b}(n)$ 进行了求值；而在 [27], 中，作者针对一般的 ab 研究了同一问题。此外，在 [28], 中，作者对 ab 的某些情形下的卷积和 $W^{1,\ a\ b}_{\ 3}(n)$ 进行了求值；上述所有工作都利用模形式理论对这些和进行了求值。本文所采用的方法不同于他们的方法。在上述提到的所有工作中，作者都利用这些卷积和来寻找用某些具有 8 或 12 个变量的二次型表示自然数的表示数公式。需要指出的是，正如我们先前的工作 [31]所展示的，也可以直接使用模形式理论来求出这些公式（关于表示数）。

4.3. 卷积和 $\sum_{al+bm=n} l\sigma(l)\sigma_{k-1}(m)$ 的例子。本节给出定理 3.1 的一些例子。当 $k=4$ 为 6、8 时，我们取 $(a,b)=(1,2)$、$(1,3)$；对于 $k=10$，我们取 $(a,b)=(1,2)$。相应模形式空间的一组基列于表 1。我们的方法给出以下适用于所有自然数 n的卷积和。

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+2m=n}} l\sigma(l)\sigma_3(m) = \frac{n}{720}\sigma_5(n) + \frac{n}{36}\sigma_5(n/2) - \frac{n^2}{40}\sigma_3(n/2) - \frac{n}{240}\sigma(n) + \frac{1}{360}\tau_{8,2}(n), \tag{46}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+3m=n}} l\sigma(l)\sigma_3(m) = \frac{n}{3120}\sigma_5(n) + \frac{3n}{104}\sigma_5(n/3) - \frac{n^2}{40}\sigma_3(n/3) - \frac{n}{240}\sigma(n) + \frac{n}{936}\tau_{6,3}(n) + \frac{1}{360}\tau_{8,3}(n), \tag{47}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+2m=n}} l\sigma(l)\sigma_5(m) = \frac{n}{8568}\sigma_7(n) + \frac{2n}{204}\sigma_7(n/2) - \frac{n^2}{84}\sigma_5(n/2) + \frac{n}{504}\sigma(n) - \frac{n}{1632}\tau_{8,2}(n) - \frac{1}{672}\tau_{10,2}(n), \tag{48}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+3m=n}} l\sigma(l)\sigma_5(m) = -\frac{n}{78720}\sigma_7(n) - \frac{273n}{26240}\sigma_7(n/3) - \frac{n^2}{84}\sigma_5(n/3) + \frac{n}{504}\sigma(n) + \frac{7n}{13120}\tau_{8,3}(n) - \frac{1}{3024}\tau_{10,3;1}(n) - \frac{1}{864}\tau_{10,3;2}(n), \tag{49}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+2m=n}} l\sigma(l)\sigma_7(m) = \frac{n}{74400}\sigma_9(n) + \frac{17n}{3720}\sigma_9(n/2) + \frac{n^2}{144}\sigma_7(n/2) - \frac{n}{480}\sigma(n) - \frac{n}{2480}\tau_{10,2}(n) + \frac{1}{600}\tau(n) + \frac{2}{45}\tau(n/2), \tag{50}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+3m=n}} l\sigma(l)\sigma_7(m) = \frac{n}{1610400}\sigma_9(n) + \frac{123n}{26840}\sigma_9(n/2) + \frac{n^2}{144}\sigma_7(n/2) - \frac{n}{480}\sigma(n) + \frac{n}{8235}\tau_{10,3;1}(n)$$
$$- \frac{7n}{23760}\tau_{10,3;2}(n) + \frac{1}{850}\tau(n) - \frac{31}{170}\tau(n/3) + \frac{1}{2040}\tau_{12,3}(n), \tag{51}$$

$$\sum_{\substack{l,\ m\in\mathbb{N}\\ l+2m=n}} l\sigma\ (l)\ \sigma_9\ (m)\ =\ \frac{n}{547272}\sigma_{11}\ (n)\ +\frac{31n}{12438}\sigma_{11}\ (n/2)\ -\frac{n^2}{220}\sigma_9\ (n/2)\ +\frac{n}{264}\sigma(n)\ -\frac{21n}{31168}\tau(n/2)$$
$$- \frac{1}{704}\tau_{14,2;1}(n) - \frac{1}{576}\tau_{14,2;2}(n). \tag{52}$$

备注 4.7。我们使用了 §3.1 中给出的 $W^{1}{}_{,a}{}^{k-1}_{b}{}_{,}(n)$ 的一些公式来得到上述表达式。

4.4. 卷积和 $\sum_{al+bm=n} l\sigma(l)\sigma(m)$ 的示例。在此情形下，相应的模形式空间具有权重 6。我们考察级 2、3、4、6，并得到以下卷积和。这些级的基元素见表 1。此外，我们给出情形 $(a,b) = (1,2)$、$(1,3)$、$(1,4)$、$(1,6)$、$(2,3)$ 的公式。对于这些值，通过观察以下对互素整数 a和 b（对于 $n\in\mathbb{N}$）成立的关系，可以得到数对 (b,a) 的公式：

$$b\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ bl+am=n}} l\sigma(l)\sigma(m) = nW_{a,b}(n) - a\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ al+bm=n}} l\sigma(l)\sigma(m). \tag{53}$$

令 $n\in\mathbb{N}$。则有

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+2m=n}} l\sigma(l)\sigma(m)\ =\ \frac{n}{24}\sigma_3(n) + \frac{n}{6}\sigma_3(n/2)\ -\ \frac{(2n^2-n)}{24}\sigma(n)\ -\frac{n^2}{12}\sigma(n/2), \tag{54}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+3m=n}} l\sigma(l)\sigma(m) = \frac{n}{48}\sigma_3(n) + \frac{3n}{16}\sigma_3(n/3) - \frac{(4n^2-3n)}{72}\sigma(n) - \frac{n^2}{12}\sigma(n/3) - \frac{1}{144}\tau_{6,3}(n), \tag{55}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+4m=n}} l\sigma(l)\sigma(m) = \frac{n}{96}\sigma_3(n) + \frac{n}{32}\sigma_3(n/2) + \frac{n}{6}\sigma_3(n/4) - \frac{(n^2-n)}{24}\sigma(n) - \frac{n^2}{12}\sigma(n/4) - \frac{1}{96}\tau_{6,4}(n), \tag{56}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+6m=n}} l\sigma(l)\sigma(m) = \frac{n}{240}\sigma_3(n) + \frac{n}{60}\sigma_3(n/2) + \frac{3n}{80}\sigma_3(n/3) + \frac{3n}{20}\sigma_3(n/6) - \frac{(2n^2-3n)}{72}\sigma(n)$$
$$- \frac{n^2}{12}\sigma(n/6) - \frac{n}{240}\tau_{4,6}(n) - \frac{1}{144}\tau_{6,3}(n) - \frac{1}{18}\tau_{6,3}(n/2) - \frac{1}{144}\tau_{6,6}(n), \tag{57}$$

$$\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ 2l+3m=n}} l\sigma(l)\sigma(m) = \frac{n}{480}\sigma_3(n) + \frac{n}{120}\sigma_3(n/2) + \frac{3n}{160}\sigma_3(n/3) + \frac{3n}{40}\sigma_3(n/6) - \frac{(4n^2-3n)}{144}\sigma(n/2)$$
$$- \frac{n^2}{48}\sigma(n/3) - \frac{n}{480}\tau_{4,6}(n) - \frac{1}{288}\tau_{6,3}(n) - \frac{1}{36}\tau_{6,3}(n/2) - \frac{1}{288}\tau_{6,6}(n). \quad (58)$$

Co比较最后两个表达式，我们得到对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立的以下关系 .

$$2\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ 2l+3m=n}} l\sigma(l)\sigma(m) - \sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l+6m=n}} l\sigma(l)\sigma(m) = \frac{(2n^2-3n)}{72}\sigma(n) - \frac{(4n^2-3n)}{72}\sigma(n/2) - \frac{n^2}{24}\sigma(n/3) + \frac{n^2}{12}\sigma(n/6). \quad (59)$$

注意，上述恒等式的右侧只涉及因子函数 $\sigma(n)$。

注释 4.8。式 (54) 给出的卷积和与 [7, 定理 4.1] 中得到的相同。利用 (53) 和总和 $W_2(n)$，我们可以推导出总和 $\sum_{l,\ m\in\mathbb{N}2l+m=n} l\sigma(l)\sigma(m)$，这恰好是

[7, 定理 4.1] 中出现的第二个和。

致谢。我们使用了 L 函数与模形式数据库（LMFDB）[22]。我们还使用开源数学软件 SAGE（www.sagemath.org） [35]进行计算。感谢审稿人指出我们对扩展算子记号中的一处不准确之处，该问题现已更正。我们也感谢审稿人提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议改善了本文的表述。

数据可用性声明：由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

Appendix

下面给出表 1 中出现的新形式的表达式：权 4：

$$\begin{aligned}
\Delta_{4,5}(z) &= \eta^4(z)\eta^4(5z),\\
\Delta_{4,6}(z) &= \eta^2(z)\eta^2(2z)\eta^2(3z)\eta^2(6z),\\
\Delta_{4,10}(z) &= -\frac{3}{2}\Delta_{4,5}(z) - 4\Delta_{4,5}(2z) + \frac{5}{2}\frac{\eta^2(z)\eta^8(5z)}{\eta^2(10z)},\\
\Delta_{4,15;1}(z) &= \Delta_{4,5}(z) + 9\Delta_{4,5}(3z) + 5\Delta_{2,15}^2(z) + 2\frac{\eta^5(z)\eta^5(15z)}{\eta(3z)\eta(5z)},
\end{aligned}$$

其中$\Delta_{2,\ 15}(z) = \eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z)$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{4,15;2}(z) &= \Delta_{4,5}(z) + 9\Delta_{4,5}(3z) + 7\Delta_{2,15}^2(z),\\
\Delta_{4,30;1}(z) &= q - 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 - 6q^6 + 32q^7 - 8q^8 + 9q^9 - 10q^{10} - 60q^{11} + 12q^{12}\\
&\quad -34q^{13} - 64q^{14} + 15q^{15} + 16q^{16} + 42q^{17} - 18q^{18} - 76q^{19} + 20q^{20} + 96q^{21}\\
&\quad +120q^{22} - 24q^{24} + 25q^{25} + O(q^{26}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{4,30;2}(z) &= q+2q^2+3q^3+4q^4-5q^5+6q^6-4q^7+8q^8+9q^9-10q^10-48q^{11}+12q^{12}\\ &\quad +2q^{13}-8q^{14}-15q^{15}+16q^{16}-114q^{17}+18q^{18}+140q^{19}-20q^{20}-12q^{21}\\ &\quad -96q^{22}+72q^{23}+24q^{24}+25q^{25}+O(q^{26}).\end{aligned}$$

权重 6:

$$\begin{aligned}\Delta_{6,3}(z) &= \eta^6(z)\eta^6(3z),\\ \Delta_{6,4}(z) &= \eta^{12}(2z),\\ \Delta_{6,6}(z) &= \frac{-7}{480}\Big\{\frac{50}{1911}E_6(z)+\frac{160}{1911}E_6(2z)+\frac{135}{637}E_6(3z)+\frac{432}{637}E_6(6z)+\frac{840}{13}\Delta_{6,3}(z)\\ &\qquad +\frac{7680}{13}\Delta_{6,3}(2z)+\frac{1}{2}DE_4(z)-E_2(6z)E_4(z)\Big\}.\end{aligned}$$

权重 8:

$$\begin{aligned}\Delta_{8,2}(z) &= \eta^8(z)\eta^8(2z),\\ \Delta_{8,3}(z) &= \eta^{12}(z)\eta^4(3z)+81\eta^6(z)\eta^4(3z)\eta^6(9z)+18\eta^9(z)\eta^4(3z)\eta^3(9z),\\ \Delta_{8,6}(z) &= \frac{1}{240}(E_4(z)E_4(6z)-E_4(2z)E_4(3z)).\end{aligned}$$

权重 10:

$$\begin{aligned}\Delta_{10,2}(z) &= \frac{31}{63}\frac{\eta^{16}(2z)}{\eta^8(z)}E_6(z)-\frac{4}{2079}E_{10}(z)+\frac{4}{2079}E_{10}(2z),\\ \Delta_{10,3;1}(z) &= -\frac{45}{17248}E_{10}(z)+\frac{45}{17248}E_{10}(3z)+\frac{3355}{240\times 5292}\Big(E_4(z)-E_4(3z)\Big)E_6(z)\\ &\quad -\frac{61}{189}\Delta_{6,3}(z)E_4(z),\\ \Delta_{10,3;2}(z) &= -\frac{9}{4312}E_{10}(z)+\frac{9}{4312}E_{10}(3z)+\frac{671}{240\times 1323}\Big(E_4(z)-E_4(3z)\Big)E_6(z)\\ &\quad -\frac{11}{189}\Delta_{6,3}(z)E_4(z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{10,4}(z) &= q+228q^3-666q^5-6328q^7+32301q^9-30420q^{11}-32338q^{13}-151848q^{15}\\ &\quad +590994q^{17}+34676q^{19}-1442784q^{21}+1048536q^{23}-1509569q^{25}+O(q^{26}),\\ \Delta_{10,6}(z) &= -\frac{143}{243}\Delta_{10,2}(z)-297\Delta_{10,2}(3z)+\frac{11}{9}\Delta_{10,3;1}(z)+\frac{1408}{27}\Delta_{10,3;1}(2z)+\frac{7}{18}\Delta_{10,3;2}(z)\\ &\quad -\frac{896}{27}\Delta_{10,3;3}(2z)-\frac{11}{486}\Delta_{4,6}(z)E_6(z).\end{aligned}$$

权重 12:

$$\begin{aligned}\Delta_{12,3}(z) &= \frac{98}{81}\Delta(z)-\frac{275562}{81}\Delta(3z)-\frac{17}{81}\Delta_{6,3}(z)E_6(z),\\ \Delta_{12,4}(z) &= q-516q^3-10530q^5+49304q^7+89109q^9-309420q^{11}-1723594q^{13}\\ &\quad +5433480q^{15}-2279502q^{17}+4550444q^{19}-25440864q^{21}-7282872q^{23}\\ &\quad +62052775q^{25}+O(q^{26}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{12,6;1}(z) &= -\frac{203}{323}\Delta(z) - \frac{928}{323}\Delta(2z) - \frac{147987}{323}\Delta(3z) - \frac{676512}{323}\Delta(6z) - \frac{2727}{2261}\Delta_{12,3}(z) \\
&\quad + \frac{21600}{323}\Delta_{12,3}(2z) + \frac{783}{266}\Delta_{6,3}(z)E_6(6z) - \frac{29}{266}\Delta_{6,3}(z)E_6(2z), \\
\Delta_{12,6;2}(z) &= -\frac{16051}{16150}\Delta(z) - \frac{153728}{8075}\Delta(2z) + \frac{4781511}{16150}\Delta(3z) + \frac{340028928}{8075}\Delta(6z) - \frac{168021}{129200}\Delta_{12,3}(z) \\
&\quad + \frac{27648}{323}\Delta_{12,3}(2z) + \frac{10989}{3325}\Delta_{6,3}(z)E_6(6z) - \frac{27}{3325}\Delta_{6,3}(z)E_6(2z) - \frac{1}{400}\Delta_{4,6}(z)E_8(z), \\
\Delta_{12,6;3}(z) &= -\frac{679}{5814}\Delta(z) + \frac{112384}{8721}\Delta(2z) + \frac{311283}{646}\Delta(3z) - \frac{11477376}{323}\Delta(6z) + \frac{6223}{5168}\Delta_{12,3}(z) \\
&\quad - \frac{25600}{323}\Delta_{12,3}(2z) - \frac{27}{133}\Delta_{6,3}(z)E_6(6z) + \frac{407}{3591}\Delta_{6,3}(z)E_6(2z) + \frac{1}{432}\Delta_{4,6}(z)E_8(z).
\end{aligned}$$

References

[1] A. Alaca、S. Alaca 和 E. Ntienjem, *The convolution sum $\sum_{al+bm=n}\sigma(l)\sigma(m)$ for $(a,b) = (1, 28), (4, 7), (1, 14), (2, 7), (1, 7)$*，庆北数学杂志 59 (2019年)，第 3 期，377–389。[2] A. Alaca、S. Alaca 和 K. S. Williams, *Evaluation of the convolution sums $\sum_{l+12m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ and* ( ) ( ) ( ) ( )，高等 $\sum_{3l+4m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ **1** 2006 1, 27 48 理论与应用数学 ( )，第 – 期。[3] A. Alaca、S. Alaca 和 K. S. Williams, *Evaluation of the convolution sums $\sum_{l+18m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ and* ( ) ( ) ( ) ( )，国际 $\sum_{2l+9m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ **2** 2007 1 4, 45 68 数学论坛 ( )，第 - – 期。[4] A. Alaca、S. Alaca 和 K. S. Williams, *Evaluation of the convolution sums $\sum_{l+24m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ and* ( ) ( ) ( ) ( )，冈山 $\sum_{3l+8m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ **49** 2007 93 111 大学数学杂志 ( )，–。[5] A. Alaca、S. Alaca 和 K. S. Williams, *The convolution sum $\sum_{m<n/16}\sigma(m)\sigma(n-16m)$*，加拿大数学通报 51 (2008年)，第 1 期，3–14。[6] S. Alaca 和 Y. Kesicioglu, *Evaluation of the convolution sums $\sum_{l+27m=n}\sigma(l)\sigma(m)$ and $\sum_{l+32m=n}\sigma(l)\sigma(m)$*，数论杂志 1 (2016年)，1–13。[7] S. Alaca、F. Uygul 和 K. S. Williams, *Some arithmetic identities involving divisor functions*，函数逼近与数学评论 46 (2012年)，第 2 期，261–271。[8] S. Alaca 和 K. S. Williams, *Evaluation of the convolution sums $\sum_{l+6m=n}\sigma(l)\sigma(m)$ and $\sum_{2l+3m=n}\sigma(l)\sigma(m)$*，数论杂志 124 (2007年)，第 2 期，491–510。[9] Z.S. Aygin, *Eisenstein series and convolution sums*，拉马努金杂志 48(3) (2019年) 495–508。[10] M. Besge: *Extrait d'une lettre de M. Besge aḾ. Liouville*，纯粹与应用数学杂志 7，256 (1862年)。[11] H.H. Chan 和 S. Cooper, *Powers of theta functions*，太平洋数学杂志 235 (2008年)，1–14。[12] N. Cheng 和 K. S. Williams, *Evaluation of some convolution sums involving the sum of divisors functions*，横滨数学杂志 52 (2005年)，第 1 期，39–57。[13] B. Cho, *Convolution sums of a divisor function for prime levels*，国际数论杂志，16 (2020年)，537–546。[14] S. Cooper 和 P.C. Toh, *Quintic and septic Eisenstein series*，拉马努金杂志 19 (2009)，163–181。[15] S. Cooper 和 D. Ye, *Evaluation of the convolution sums $\sum_{l+20m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ $\sum_{4l+5m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ and* ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ), $\sum_{2l+5m=n}\sigma\ l\ \sigma\ m$ **6**，2014 1385 1394 国际数论杂志，( )–。[16] J.W.L. Glaisher, *On the square of the series in which the coefficients are the sums of the divisors of the exponents* **14**，1885 156 163 ，Mess. Math. ( ) –。[17] J. G. Huard 、 Z. M. Ou 、 B. K. Spearman 和 K. S. Williams, *Elementary evaluation of certain convolution sums involving divisor functions* 2000 ，载于《千禧年数论 II》（伊利诺伊州厄巴纳，）（A. K. Peters，马萨诸塞州纳蒂克，2002年），229–274。[18] B. K ¨ ¨ okluce, , 数学 *Evaluation of four convolution sums and representation of integers by certain quadratic forms in twelve variables* **12** 2022 52, 10 28919 7016 与计算机科学杂志 ( )，文章 ID DOI: ./jmcs/ . [19] D. B. Lahiri, *On Ramanujan's function $\tau(n)$ and the divisor function $\sigma_k(n)$-I*，加尔各答数学会通报 38 (1946年)，193–206。

[20] D. B. Lahiri, *On Ramanujan's function $\tau(n)$ and the divisor function $\sigma_k(n)$ Part II*, 《加尔各答数学会通报》39 (1947), 33–52. [21] M. Lemire and K.S. Williams,
Evaluation of two convolution sums involving the sum of divisor functions, 《Bull. Aust. Math. Soc.》73 (2005年), 107–115. [22] LMFDB, L函数、模形式及相关对象数据库, http://www.lmfdb.org/ [23] G.Melfi,
Some problems in elementary number theory and modular forms, 博士论文, 比萨大学, 1997年. [24] G. Melfi,
On some modular identities, 载于《数论、丢番图方程、计算与代数方面: 在匈牙利埃格尔举行的国际会议论文集》。Walter de Grutyer and Co. (1998), 371–382. [25] E. Ntienjem,
Evaluation of convolution sums involving the sum of divisors function for levels 48 and 64, 《Integers》17 (2017年), 论文编号A49, 共22页. [26] E. Ntienjem, *Evaluation of the convolution sum involving the sum of divisors function for 22, 44 and 52*, 《Open Math.》15 (2017年), 第1期, 446–458. [27] E. Ntienjem,
Elementary evaluation of convolution sums involving the divisor function for a class of levels, 《North-West. Eur. J. Math.》5 (2019年), 101–165. [28] E. Ntienjem,
Evaluation of convolution sums entailing mixed divisor functions for a class of level, 《New Zealand J. Math.》50 (2020年), 125–180. [29] B. Ramakrishnan and Brundaban Sahu,
Evaluation of the convolution sums $\sum_{l+15m=n} \sigma\ l\ \sigma\ m$ and ( ) ( ) ( ) ( ), 《国际数论杂志》( ) – . [30] B. Ramakrishnan and Brundaban Sahu, *Evaluation of convolution sums and some remarks on cusp forms of weight 4 and level 12* **59** 2017 [2016], 71 79 , 《Math. J Okayama Univ.》( ), 封面 – . [31] B. Ramakrishnan, Brundaban Sahu and Anup Kumar Singh, *On the number of representations by certain octonary quadratic forms with coefficients 1 2 3 4 and 6* **14** 2018 751 812 , ,, 《国际数论杂志》( ), – . [32] B. Ramakrishnan, Brundaban Sahu and Anup Kumar Singh, *On the number of representations of certain quadratic forms in 8 variables Automorphic Forms and Related Topics* 215 224, , Samuele Anni et al. (编), – Contemp. Math. 732, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2019年. [33] S. Ramanujan,
On certain arithmetical functions, 《Trans. Cambridge Philos. Soc.》22 (1916) 159–184. [34] E. Royer,
Evaluating convolution sums of the divisor function by quasimodular forms, 《国际数论杂志》3 (2007年), 第2期, 231–261. [35] SageMath, 《Sage数学软件系统》(版本6.9), Sage开发者, 2021年, https://www.sagemath.org [36] J.-P. Serre, 《算术课程》, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977年. [37] X.L. Tian, O.X.M. Yao and E.X.W.Xia,
Evaluation of the convolution sum $\sum_{l+25m=n} \sigma(l)\sigma(m)$, 《国际数论杂志》10, (2014年) 1421-1430. [38] K. S. Williams,
The convolution sum $\sum_{m<n/9} \sigma\ m\ \sigma\ n-9m$, **1** 2005 2, ( ) ( )《国际数论杂志》( ), 第 – 期.[39] K. S. Williams, *The convolution sum $\sum_{m<n/8} \sigma(m)\sigma(n-8m)$*, 《Pacific J. Math.》228 (2006年), 第2期, 387–396. [40] K. S. Williams, 《Liouville 风格的数论》, *London Mathematical Student Texts* **76**, Cambridge Univ. Press, 2011年. [41] O. X. M. Yao and E. X. W. Xia
Evaluation of the convolution sum $\sum_{i+3j=n} \sigma\ m\ \sigma_3\ j$ and ( ) ( ) ( ) ( ), 《国际数论杂志》( ), 第 – 期.

(B. Ramakrishnan) Indian Statistical Institute, North-East Centre, Punioni, Solmara, Tezpur - 784 501 , Assam, India

(Brundaban Sahu 和 Anup Kumar Singh) School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Research An OCC of Homi Bhabha National Institute Bhubaneswar Via: , , , , , , Jatni Khurda Odisha - 752 050 India. , B. Ramakrishnan: ramki@isine.ac.in, b.ramki61@gmail.com*Email address*, *Email address*
Brundaban Sahu: brundaban.sahu@niser.ac.in*Email address*, Anup Kumar Singh: anupsinghmath@niser.ac.in, anupsinghmath@gmail.com