arXiv:2303.02935v2 [math.NT] 1 Feb 2024

下有理逼近与法里阶梯

DAVID HARRY RICHMAN

Abstract. 对于实数 x，称 $\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor$ 的第 n 个下有理逼近为 x。我们研究通过对 x 的前 n 个下有理逼近取累积平均所定义的函数，并将其称为法里阶梯函数。这列函数单调递增。我们确定这些函数的极限行为，并表明在适当归一化后，它们呈现分形结构。

1. Introduction

令 $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数。函数 $x \mapsto \lfloor x\rfloor$ 通常称为下取整函数。它的图像看起来像一座阶梯，在每个整数处都有一个单位高度的台阶；我们也可以称 $x \mapsto \lfloor x\rfloor$ 为单位阶梯函数。

对于正整数 n，函数 $x \mapsto \frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor$ 是一个经过缩放的阶梯函数。缩放后的阶梯在台阶之间仍具有“单位斜率”，但每个台阶的大小现在为 $1/n$。函数序列 $\{\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor : n = 1, 2, \ldots\}$ 从下方趋近于恒等函数 x，但这种收敛并非单调的：一般而言，若 $m \leq n$，则 $\frac{1}{m}\lfloor mx\rfloor \leq \frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor$ 并不成立。

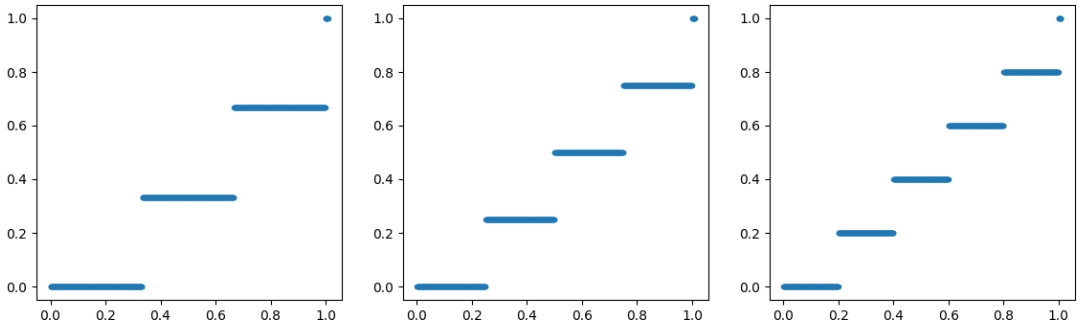

Figure 1. 下有理逼近 $\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor$，对于 $n = 3, 4, 5$。

注意，$\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor$ 是 $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ 中不大于 x 的最大元素；用符号表示，

$$\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor = \max\{y \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z} : y \leq x\},$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 11B57；次要分类号 40A30、11J70、26D15、40A25、11B83。

这促使我们将 $\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor$ 称为 x的第 n个下有理逼近。

考虑对前 n 个下界有理逼近取累积平均,

$$A_n(x) := \frac{1}{n}\Big(\lfloor x\rfloor + \tfrac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor + \tfrac{1}{3}\lfloor 3x\rfloor + \cdots + \tfrac{1}{n}\lfloor nx\rfloor\Big).$$

回顾一下，阶数为 的法雷分数 是指分母不超过 n 的所有分数;

$$\mathcal{F}_n = \left\{\frac{p}{q} : p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ q\le n\right\}.$$

函数 $A_n(x)$ 是一个阶梯函数，在阶数为 n 的法雷分数处有跳跃间断点。因此，我们将 $A_n(x)$ 的图像称为阶数为 n 的 Farey阶梯。小例子见图 2，较大的例子见图 4 。

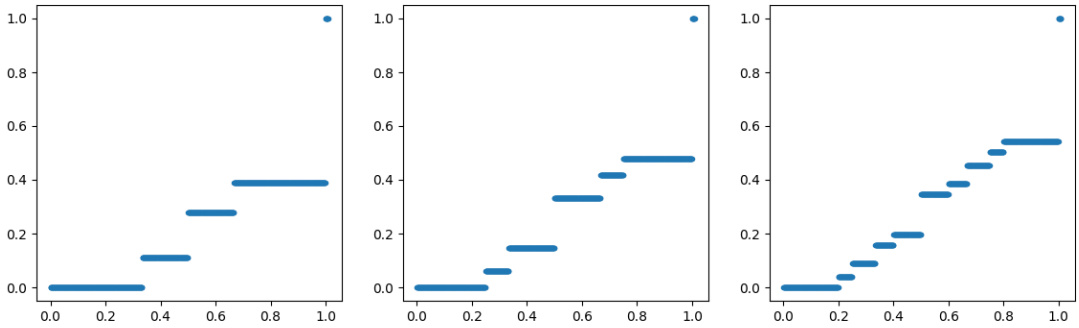

FIGURE 2. 阶数为 A_n 的 Farey阶梯 x，对应 $n=3$、4、5。

法雷阶梯函数有一个令人惊讶的性质：它们是单调递增的,

$$A_1(x)\le A_2(x)\le A_3(x)\le\cdots,$$

它们的值从下方趋近于 x 。这在 [5, 8, 11]中得到了证明；另请参见第1.2节。换言之，如果我们定义增量阶梯函数

$$D_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x),$$

那么，对于所有 $D_n(x)\ \ge 0$以及所有 x ，都有 $n\ge 2$。小例子见图3 ，较大的例子见图5 和7 。

本文旨在研究 Farey阶梯$A_n(x)$ 以及递增阶梯函数 $D_n(x)$ 在 $n\to\infty$取极限时呈现的分形行为。这种分形行为的迹象在图4 和5中已清晰可见。我们将证明若干定理，对这种类似分形的行为进行定量刻画。

因此，我们对为何应当“预期”$D_n(x)$ 在极限 $n\to\infty$ 下（经过适当缩放后）取非负值，获得了一种新视角；这一视角并未对单个 n 的 $D_n(x)$ 作出任何断言。

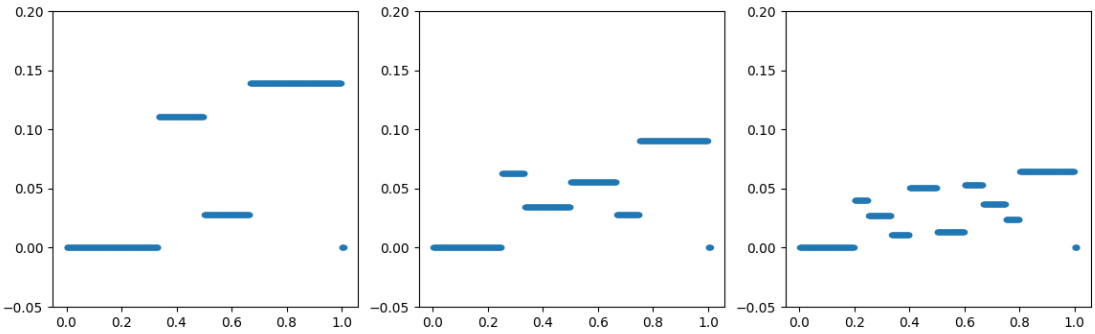

FIGURE 3. 递增阶梯函数 $D_n(x)$，其中 $n = 3$，4，5。

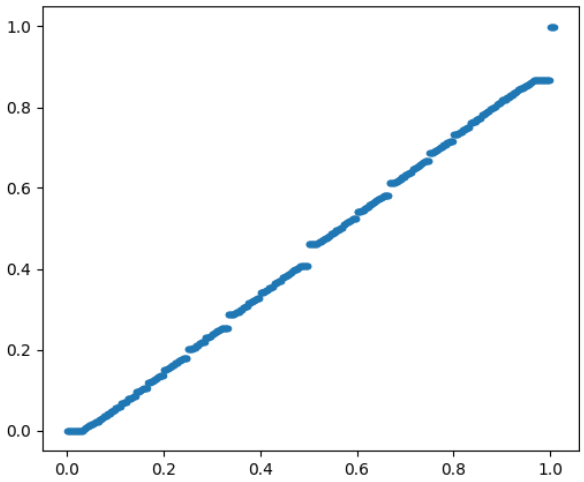

FIGURE 4. 定义域 $[0, 1]$上的 Farey 阶梯 $A_{30}(x)$。

1.1. 结果。 为捕捉 Farey阶梯的分形行为，我们首先研究 $A_n(x)$ 的以下重新缩放。令

$$B_n(x) := n\, A_n(\tfrac{1}{n}x) = \lfloor \tfrac{1}{n}x \rfloor + \tfrac{1}{2}\lfloor \tfrac{2}{n}x \rfloor + \tfrac{1}{3}\lfloor \tfrac{3}{n}x \rfloor + \cdots + \tfrac{1}{n}\lfloor x \rfloor .$$

我们通过将 A_n 在原点处放大 n倍，得到了 B_n 。在极限情形下$n \to \infty$，函数序列 B_n 收敛到一个逐点极限。

定理1。 假设 $x \geq 0$。当 $n \to \infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \log(x/k). \tag{1}$$

极限函数的图像见图6的左侧。

注记2。

(i) 令 $B(x) :=\lim_{n\to\infty} B_n(x)$ 表示式（1）中的极限函数。那么 $B(x)$ 可刻画为

$$B(x)=\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\left(\int_k^x \frac{1}{t}\,dt\right)=\int_0^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t}\,dt.$$

因此， $B(x)$ 在定义域 $x\geq 0$ 上连续，并且有如下界

$$B(x)\ \leq\ \int_0^x \mathbb{1}(t\geq 1)\,dt\ =\ x-1\ \leq\ \lfloor x\rfloor\,. \tag{2}$$

特别要注意的是，当 $0\leq x\leq 1$ 时， $B(x)\ =0$ 。

(ii) 若令 $\log^+(x) := \max\{0,\log\ x\}$，则

$$B(x)=\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\log(x/k)=\sum_{k=1}^{\infty}\log^+(x/k).$$

由于 $\log^+(x)$ 在定义域 $x\geq 0$ 上连续，这也表明 $B(x)$ 连续。

(iii) 极限函数 $B(x)$ 也可以表示为 $\lfloor x\rfloor\log\ x-\log(\lfloor x\rfloor!)$。换句话说，

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x)=\begin{cases}0 & \text{if } 0\leq x<1,\\ \log x & \text{if } 1\leq x<2,\\ 2\log x-\log 2 & \text{if } 2\leq x<3,\\ \quad\vdots & \\ k\log x-\log k! & \text{if } k\leq x<k+1.\end{cases}$$

利用斯特林近似计算 $\log k!$，可以将界（2）改进为渐近式

$$B(x)=x-\frac{1}{2}\log x+O(1)\qquad \text{as } x\to\infty.$$

定理 1 刻画了原点邻域内 Farey阶梯 $A_n(x)$ 的行为。下面的定理更一般地描述了任意有理点 $x=\frac{p}{q}$ 处上方邻域内 $A_n(x)$ 的极限行为。

定理 3. 假设 $x\geq 0$。对于正既约分数 $\frac{p}{q}$ （即， p 和 q 是正整数，且最大公约数 $(p,q)\ =1$），有

$$\lim_{n\to\infty}\left(B_n(x+\tfrac{p}{q}n)-B_n(\tfrac{p}{q}n)\right)=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\lfloor qx\rfloor}\log(qx/k).$$

换句话说，此处的极限函数是极限函数 $B(x)$ 在(1) 中的重新缩放，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(B_n(x+\tfrac{p}{q}n)-B_n(\tfrac{p}{q}n)\right)=\frac{1}{q}B(qx).$$

缩放因子 q 与分子无关 p。根据注释2，极限函数等于

$$\frac{1}{q}B(qx)\ =\ \frac{1}{q}\int_0^{qx}\frac{\lfloor t\rfloor}{t}dt\ =\ \int_0^x\frac{\lfloor qs\rfloor}{qs}ds\ =\ \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\log^+\left(\frac{qx}{k}\right).$$

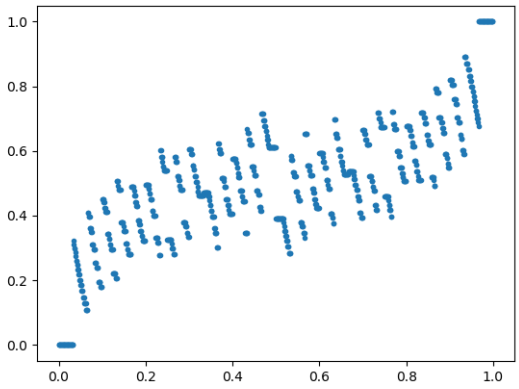

FIGURE 5. 递增阶梯函数 $D_{30}(x)$，高度归一化为 1。

接下来，我们研究由相邻法里阶梯之差所产生的分形行为。与之前一样，令

$$D_n(x) := A_n(x) - A_{n-1}(x)$$

当 $n \geq 2$时，令 $D_n^{\max} = \text{最大值}\{D_n(x) : x \in \mathbb{R}\}$. 图 5展示了$D_{30}(x)/D_{30}^{\max}$的图像。注意，图 5 展示了“负斜率条纹”的模式。这些线段的现象在极限 $n \to \infty$中依然存在，以下结果对此作出解释。

定理 4。 假设 $x \geq 0$。当 $n \to \infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} n^2 D_n\left(\tfrac{1}{n}x\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(1 - \log(\tfrac{x}{k})\right).$$

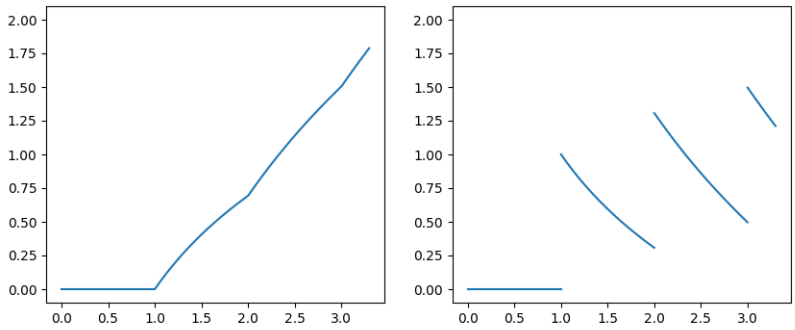

FIGURE 6. 极限函数 $B(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \log(x/k)$，左侧，以及 $\lfloor x \rfloor - B(x)$，右侧。

极限函数实际上是 $\lfloor x \rfloor - B(x)$，其中 $B(x)$ 是定理 1中的极限函数。极限函数的图像见图 6右侧。

特别地，由方程（2）可知，$n^2 D_n\left(\frac{1}{n}x\right)$ 的极限值非负。

根据斯特林近似，我们有

$$\lim_{n\to\infty} n^2 D_n\left(\frac{1}{n}x\right) = \lfloor x\rfloor - B(x) = \frac{1}{2}\log x + O(1) \qquad \text{as } x\to\infty.$$

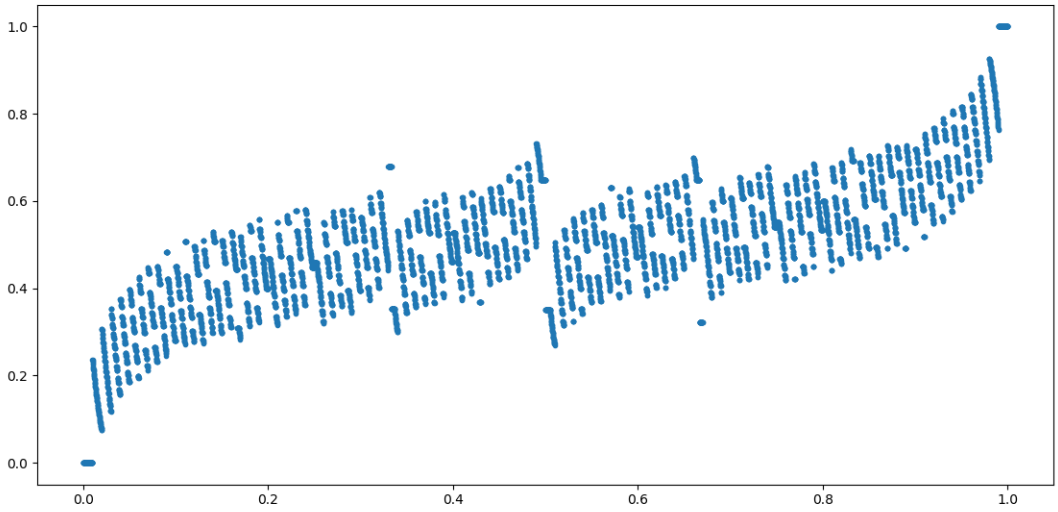

FIGURE 7. 归一化为高度为 1 的递增阶梯函数 $D_{100}(x)$。

1.2. 奥林匹克竞赛题。这里我们介绍这项工作的最初动机。1981 年美国数学奥林匹克竞赛的第5题要求证明

$$\lfloor nx\rfloor \geq \lfloor x\rfloor + \tfrac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor + \tfrac{1}{3}\lfloor 3x\rfloor + \cdots + \tfrac{1}{n}\lfloor nx\rfloor \tag{3}$$

其中 x 是一个实数，n 是一个正整数，并且 $\lfloor t\rfloor$ 表示小于或等于 t的最大整数。解答可见于 [5, 8, 11], 以及本文附录A。经过一些代数变换，奥林匹克不等式（3）等价于关于法里阶梯的条件 $A_{n-1}(x) \leq A_n(x)$。

Let

$$f_n(x) := \lfloor nx\rfloor - \left(\lfloor x\rfloor + \tfrac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor + \tfrac{1}{3}\lfloor 3x\rfloor + \cdots + \tfrac{1}{n}\lfloor nx\rfloor\right),$$

并令 S 表示 f_n 对所有 n 取值所组成的集合，

$$S = \{f_n(x) : x\in\mathbb{R},\, n = 1, 2, \ldots\}.$$

奥林匹克不等式指出：S 不包含负值。D. R. Richman 的以下结果 [11] 给出了 S更完整的描述。

定理5 (见 [11, 定理1.1])。设 $\lambda = 1 - \log 2$。

(i) 集合 S 在区间 $[\lambda, +\infty)$ 中稠密。*(ii)* 对任意 $\epsilon > 0$，交集 $S\cap(-\infty, \lambda-\epsilon]$ 都只有有限个元素。

我们的动机是想了解常数 1–log 2 在 S 的结构中出现的原因。注意,

$$f_n\left(\frac{1}{n}x\right) = \lfloor x \rfloor - B_n(x).$$

本文的主要结果——定理1——刻画了 $f_n(x$在极限 $n \to \infty$中的取值，这蕴含了以下推论。设 S_n 表示 f_k 在 $k \geq n$时所取值的集合，即

$$S_n = \{f_k(x) : x \in \mathbb{R},\, k \geq n\}.$$

推论6 （定理1的推论）。对任意 $n \geq 1$，集合 S_n 在 $[1-\log 2,\ +\infty)$中稠密。

1.3. **相关工作**。关于下取整函数组合的有趣问题由拉马努金提出 [10]，随后由 Somu 和 Kukla 进一步推广 [12]。另一个有用的下取整函数恒等式归功于埃尔米特，Aursukaree、Khemaratchatakumthorn 和 Pongsriiam 近期给出了推广 [1]。Thanatipanonda 和 Wong 研究了其他缩放下取整函数的求和 [13]。

尼德赖特 [9]和 Dress [2] 证明了法雷数列差异度的界限，这涉及相邻分数之间的间距。Kanemitsu 和 Yoshimoto [4] 将黎曼猜想与法雷分数和的某些估计联系起来。Lagarias 和 Mehta [7]将黎曼猜想与给定阶数的法雷分数乘积的性质联系起来。Kunik [6] 还研究了由法雷分数导出的一族实值函数及其极限行为。

1.4. **结构**。本文的组织如下。在第2 节中，我们推导法雷阶梯函数 $A_n(x)$ 及其增量函数 $D_n(x)$ 满足的一些基本恒等式。在第3 节中，我们证明定理 1、3 和 4。在第 4 节中，我们给出定理 1 的一种启发式论证，提供另一种视角。最后，我们在附录 A 中给出奥林匹克不等式（3）的证明。

2. Preliminaries

令 $\mathcal{F}_n$ 表示阶数为 n的法雷分数,

$$\mathcal{F}_n := \bigcup_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\mathbb{Z},$$

并令 $\mathcal{F}_n^{[0,1]} = \mathcal{F}_n \cap [0,1]$ 表示单位区间上的法雷分数。回顾一下，阶数为 n 的 *Farey*阶梯函数为

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\lfloor kx \rfloor$$

以及阶数为 n 的递增阶梯函数 为 n：

$$D_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x).$$

以下恒等式很容易验证。

命题 7。函数 $A_n(x)$ 和 $D_n(x)$ 满足以下条件，其中 $n \geq 2$。

(a) $D_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor - A_{n-1}(x)\right)$;

(b) $D_n(x) = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{n}\lfloor nx\rfloor - A_n(x)\right)$.

证明。 注意

$$nA_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\lfloor kx\rfloor = \frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor + (n-1)A_{n-1}(x). \tag{4}$$

解上式得出 $A_n(x)$，再减去 $A_{n-1}(x)$，得到 $n \geq 2$ 的

$$\begin{aligned} A_n(x) - A_{n-1}(x) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor + (n-1)A_{n-1}(x)\right) - A_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor - A_{n-1}(x)\right), \end{aligned}$$

正如 (a) 中所述。如果改用 (4) 解出 $A_{n-1}(x)$，再从$A_n(x)$ 中减去，便得到 $n \geq 2$ 满足

$$\begin{aligned} A_n(x) - A_{n-1}(x) &= A_n(x) - \frac{1}{n-1}\left(-\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor + nA_n(x)\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor - A_n(x)\right), \end{aligned}$$

正如 (b) 中所述。 □

引理 8。
(a) 对于 $n \geq 1$，有 $A_n(x) \leq \dfrac{1}{n}\lfloor nx\rfloor \leq A_n(x) +$ 对数 $\dfrac{n}{n}$。
(b) 对于 $n \geq 2$，有 $0 \leq D_n(x) \leq$ 对数 $n\ n-1()$。

证明。 (a) 下界等价于美国数学奥林匹克不等式 (3)；证明可见 [5], [8], 或 [11, 引理 2。1]。上界由 [11, 定理 6.1], 以及调和和估计 $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \log n$。

(b) 将命题 7 (b) 与本引理的 (a) 部分结合起来。 □

下面的引理允许我们将求和与积分互换。

引理 9。 假设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是满足以下条件的正整数数列

- $a_n \leq b_n$, *and*
- $a_n \to \infty$ *and* $b_n \to \infty$ *as* $n \to \infty$.

Then $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=a_n}^{b_n}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t}$.

证明。 通过考察黎曼和，

$$\sum_{k=a_n+1}^{b_n}\frac{1}{k} \quad\leq\quad \int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t} \quad\leq\quad \sum_{k=a_n}^{b_n-1}\frac{1}{k},$$

这意味着

$$\frac{1}{a_n} \quad \geq \quad \left(\sum_{k=a_n}^{b_n} \frac{1}{k}\right) - \left(\int_{a_n}^{b_n} \frac{dt}{t}\right) \quad \geq \quad \frac{1}{b_n}.$$

取 $n \to \infty$ 即可得到该结果，因为关于 a_n 和 b_n 的假设意味着 $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty} 1/b_n = 0$。□

3. 证明

3.1. **在 0 处的 Farey 阶梯。**现在我们可以证明定理 1，其表述为

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \log(x/k),$$

若 $x \geq 0$ 和 $B_n(x)$ 表示该函数

$$B_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \left\lfloor \tfrac{k}{n} x \right\rfloor = \left\lfloor \tfrac{1}{n} x \right\rfloor + \tfrac{1}{2} \left\lfloor \tfrac{2}{n} x \right\rfloor + \tfrac{1}{3} \left\lfloor \tfrac{3}{n} x \right\rfloor + \cdots + \tfrac{1}{n} \lfloor x \rfloor .$$

定理 1 的证明。 对于 x 在范围 $0 \leq x < 1$内， $B_n(x)$ 中的每个被加数都为零，因此 $B_n(x) = 0$。

假设我们将 x 固定在范围 $1 \leq x < 2$ 内。对于 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，我们有

$$\left\lfloor \tfrac{k}{n} x \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{if } 1 \leq k < \frac{n}{x}, \\ 1 & \text{if } \frac{n}{x} \leq k \leq n. \end{cases}$$

Then

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \left\lfloor \tfrac{k}{n} x \right\rfloor = \sum_{k=\lceil n/x \rceil}^{n} \tfrac{1}{k}.$$

根据引理 9,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=\lceil n/x \rceil}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \int_{\lceil n/x \rceil}^{n} \frac{dt}{t} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{n/x}^{n} \frac{dt}{t} - \int_{n/x}^{\lceil n/x \rceil} \frac{dt}{t} \right) = \log x$$

因为积分 $\int_{n/x}^{\lceil n/x \rceil} \frac{dt}{t} \leq \frac{x}{n}$ 在极限下消失。

一般来说，假设对于正整数 M， x 的取值范围为 $M \leq x < M + 1$。那么，如果我们按照 $\left\lfloor \frac{k}{n} x \right\rfloor$的值对 $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{k}{n} x \right\rfloor$ 中的被加数分组，就得到

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=\lceil n/x \rceil}^{\lceil 2n/x \rceil - 1} \tfrac{1}{k} + \sum_{k=\lceil 2n/x \rceil}^{\lceil 3n/x \rceil - 1} \tfrac{2}{k} + \cdots + \sum_{k=\lceil (M-1)n/x \rceil}^{\lceil Mn/x \rceil - 1} \tfrac{M-1}{k} + \sum_{k=\lceil Mn/x \rceil}^{n} \tfrac{M}{k} \\ &= \sum_{k=\lceil n/x \rceil}^{n} \tfrac{1}{k} + \sum_{k=\lceil 2n/x \rceil}^{n} \tfrac{1}{k} + \cdots + \sum_{k=\lceil Mn/x \rceil}^{n} \tfrac{1}{k}. \end{aligned}$$

接着，我们对每个和应用引理 9 ，

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = \sum_{j=1}^{M} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\lceil jn/x\rceil}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{M} \lim_{n\to\infty} \int_{\lceil jn/x\rceil}^{n} \frac{dt}{t}$$
$$= \sum_{j=1}^{M} \lim_{n\to\infty} \left(\int_{jn/x}^{n} \frac{dt}{t} - \int_{jn/x}^{\lceil jn/x\rceil} \frac{dt}{t} \right) = \sum_{j=1}^{M} \log(x/j).$$

这就完成了证明，因为 M 被选为 $M = \lfloor x \rfloor$。 □

3.2. **在 p/q 处的Farey阶梯。** 接下来我们讨论 $A_n(x)$ 的分形行为。对于既约分数 $\frac{p}{q}$，我们称之为

$$A_n\left(x + \frac{p}{q}\right) - A_n\left(\frac{p}{q}\right)$$

第 n 阶、以 (p/q) 为中心的 Farey阶梯。放大 n 倍后，我们将证明当 $n \to \infty$ 时，这些函数收敛到一个极限。回想引言中的内容，$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \lfloor kx \rfloor$ 以及 $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{k}{n} x \right\rfloor$.

定理 3 指出，对于既约分数 $\frac{p}{q}$ 和 $x \geq 0$，

$$\lim_{n\to\infty} \left(B_n\left(x + \frac{p}{q}n\right) - B_n\left(\frac{p}{q}n\right) \right) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\lfloor qx \rfloor} \log\left(\frac{qx}{k}\right).$$

定理 3 的证明。表达式 $B_n(x + \frac{p}{q}n) - B_n(\frac{p}{q}n)$ 中的被加数为 $\frac{1}{k}\left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{kp}{q} \right\rfloor - \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor$。如果 $r \equiv kp \mod q$，那么

$$\left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{kp}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{q} \right\rfloor.$$

此外，若整数 r 取值于范围 $\{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$，则有 $\left\lfloor \frac{r}{q} \right\rfloor = 0$。将各项按乘积 kp 的 q 同余类分组，可得

$$B_n(x + \tfrac{p}{q}n) - B_n(\tfrac{p}{q}n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{kp}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor \right)$$
$$= \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{\substack{k=1 \\ kp\equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor. \tag{5}$$

对于内层求和，有

$$\sum_{\substack{k=1 \\ kp\equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor = \sum_{\substack{k=1 \\ kp\equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(j \leq \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ kp\equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k} \mathbb{1}\left(j \leq \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor \right) \tag{6}$$

其中，$\mathbb{1}$ 表示示性函数。由于索引 k 的取值范围为 1 到 n，满足 $j \leq \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor$ 的 j 的最大值等于 $j_{\max} = \left\lfloor x + \frac{r}{q} \right\rfloor$。

条件 $j \le \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor$ 可按如下方式求解 k：

$$j \le \left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor \quad \Leftrightarrow \quad j \le \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{x}\left(j - \frac{r}{q}\right) \le k.$$

因此，我们可以将和（6）表示为

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ kp \equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor &= \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{\substack{k=1 \\ kp \equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k} \mathbb{1}\left(k \ge \frac{n}{x}\left(j - \frac{r}{q}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor x + \frac{r}{q} \rfloor} \sum_{\substack{k=\lceil \frac{n}{x}(j - \frac{r}{q}) \rceil \\ kp \equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k}. \end{aligned} \tag{7}$$

由于函数 $1/t$ 足够光滑，（7）中限制在单个 q-剩余类上的内层求和收敛为无约束求和的 $1/q$-倍，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=\lceil \frac{n}{x}(j - \frac{r}{q}) \rceil \\ kp \equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{q}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=\lceil \frac{n}{x}(j - \frac{r}{q}) \rceil}^{n} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{q}\log\left(\frac{qx}{qj - r}\right).$$

按照（7）中的方式，对指标 j 上的这些极限求和，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ kp \equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{k}{n}x + \frac{r}{q} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\lfloor x + \frac{r}{q} \rfloor} \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=\frac{n}{x}(j - \frac{r}{q}) \\ kp \equiv r\,(q)}}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\lfloor x + \frac{r}{q} \rfloor} \log\left(\frac{qx}{qj - r}\right).$$

最后，我们对 q-剩余类代表元 r 求和，如（5）所示，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(B_n\left(x + \frac{p}{q}n\right) - B_n\left(\frac{p}{q}n\right)\right) &= \sum_{r=0}^{q-1} \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{\lfloor x + \frac{r}{q} \rfloor} \log\left(\frac{qx}{qj - r}\right) \\ &= \frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv -r(q)}}^{\lfloor qx \rfloor} \log\left(\frac{qx}{\ell}\right) \\ &= \frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{\lfloor qx \rfloor} \log\left(\frac{qx}{\ell}\right) \end{aligned}$$

如所述。 □

3.3. **在 0 处的**递增阶梯函数。关于 $D_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x)$，定理 4 指出：

$$\lim_{n\to\infty} n^2 D_n\left(\frac{1}{n}x\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor}\left(1 - \log\left(\frac{x}{k}\right)\right).$$

为处理这个极限，我们将定理 1 与命题 7结合起来。

定理的证明 4。 由命题7，我们有

$$(n^2 - n)D_n\left(\frac{1}{n}x\right) = \lfloor x \rfloor - nA_n\left(\frac{1}{n}x\right) = \lfloor x \rfloor - B_n(x).$$

在极限 $n \to \infty$ 下，右侧等于

$$\lfloor x \rfloor - B(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(1 - \log\left(\frac{x}{k}\right)\right).$$

要完成证明，只需验证当 $nD_n(x) \to 0$ 趋于$n \to \infty$时的一致收敛性。这由引理8 (b) 得出，该引理指出

$$0 \leq nD_n(x) \leq \frac{\log n}{n-1} \qquad \text{for all } n \geq 2. \qquad \square$$

4. The dilation derivative

本节将引入一些额外的概念框架，以提出定理1的启发式论证。我们不会将这一启发式论证发展为严格的替代证明。

定义 10。 给定一个函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，令

$$\Delta f(x) = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\lambda^{-1} f(\lambda x) - f(x)}{\lambda - 1},$$

当极限存在时。我们称 Δf 为 f 的伸缩导数。

与通常导数的极限定义相比，水平平移 $f(x+\epsilon)$ 被伸缩 $\lambda^{-1} f(\lambda x)$ 取代，其中 $\lambda = 1 + \epsilon$。

例 11. 伸缩导数满足以下恒等式。

(1) 对任意函数 f，有 $\Delta f(0) = -f(0)$；(2) $\Delta x^\alpha = (\alpha - 1)x^\alpha$；(3) $\Delta e^{kx} = (kx - 1)e^{kx}$；(4) $\Delta \log x = 1 - \log x$。

这些例子可以推广为以下结果。

命题 12. 对于可微函数 $f(x)$,

$$\Delta f(x) = x \frac{d}{dx} f(x) - f(x).$$

证明。若 $x = 0$，则由 $\Delta f(x)$ 的定义可得该结论。现在设 $x \neq 0$。我们有

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) = \lim_{\lambda \to 1} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{f(\lambda x) - \lambda f(x)}{\lambda - 1} &= \lim_{\lambda \to 1} \frac{f(\lambda x) - f(x) + f(x) - \lambda f(x)}{\lambda - 1} \\
&= \left(\lim_{\lambda \to 1} \frac{f(\lambda x) - f(x)}{\lambda - 1}\right) - f(x) \\
&= x \left(\lim_{\lambda \to 1} \frac{f(x + (\lambda - 1)x) - f(x)}{(\lambda - 1)x}\right) - f(x).
\end{aligned}$$

最后一个表达式中的极限是 $\frac{d}{dx} f(x)$，因为 $\epsilon := (\lambda - 1)x \to 0$ 当 $\lambda \to 1$。 $\square$

断言 13 (膨胀启发式)。假设 $B(x)$ 是 $B_n(x)$的逐点极限。那么

$$\Delta B(x) = \lfloor x \rfloor - B(x).$$

命题 7意味着

$$(n-1)A_n(x) - (n-1)A_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\left(\lfloor nx \rfloor - nA_n(x)\right).$$

将 x 替换为 $\frac{1}{n-1}x$，得到

$$\frac{n-1}{n}B_n\left(\frac{n}{n-1}x\right) - B_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n}{n-1}x \right\rfloor - B_n\left(\frac{n}{n-1}x\right)\right).$$

现在令 $\lambda_n = \frac{n}{n-1}$，于是将上面的方程两边乘以 $n-1$ 后得到

$$\frac{\lambda_n^{-1}B_n(\lambda_n x) - B_{n-1}(x)}{\lambda_n - 1} = \lambda_n^{-1}\left(\lfloor \lambda_n x \rfloor - B_n(\lambda_n x)\right). \tag{8}$$

然后令 $n \to \infty$趋于极限，使得 $\lambda_n \to 1$。右边趋近于$\lfloor x \rfloor - B(x)$。左边则更微妙：根据假设 $B_n \to B$，因此我们可以将左边与以下表达式进行比较

$$\lim_{\lambda_n \to 1} \frac{\lambda_n^{-1}B(\lambda_n x) - B(x)}{\lambda_n - 1} = \Delta B(x).$$

我们希望能够说明，当 $n \to \infty$ 时，式（8）的左侧趋近于 ΔB（x）。然而，要严谨地得出这一结论，尚需完成的关键一步是对差值进行界定

$$\left| \frac{\lambda_n^{-1}B_n(\lambda_n x) - B_{n-1}(x)}{\lambda_n - 1} - \frac{\lambda_n^{-1}B(\lambda_n x) - B(x)}{\lambda_n - 1} \right|.$$

为此，有必要进一步分析收敛速率 $B_n(x) \to B(x)$，这留待今后研究。

推论14 （关于断言13）。 极限函数 B（x）是微分方程的一个解

$$xB'(x) = \lfloor x \rfloor, \qquad B(0) = 0.$$

如果我们还知道极限函数 B（x）是连续的，那么这意味着 B（x）$= \int_0^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,dt$，并可通过备注 1 （ii）恢复定理 2 。

Appendix A. Proof of Olympiad problem

最后，为求完整，我们给出该奥林匹克竞赛题（3）的证明，并在下文重述题目。

断言15 （1981年美国数学奥林匹克竞赛，第5题）。 对于任意正整数 n 以及任意 x,

$$\lfloor nx \rfloor \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\lfloor kx \rfloor.$$

证明。 我们对 n 进行归纳法。当 $n = 1$ 对所有 x 成立时，该关系显然成立，因此假设 $n \geq 2$。

给定 n 和 x，令 $d = d$（n, x）表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中满足以下条件的任意一个元素

$$\tfrac{1}{d}\lfloor dx \rfloor = \max\left\{\tfrac{1}{k}\lfloor kx \rfloor : k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

注意，对于任意实数 x 和 y，$\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$，因此我们有

$$\lfloor nx \rfloor \geq \lfloor (n-d)x \rfloor + \lfloor dx \rfloor, \tag{9}$$

并且我们可以分别对右侧的每一项进行估计。

假设 $\frac{1}{d}\lfloor dx\rfloor \geq \frac{1}{k}\lfloor kx\rfloor$对于 $k=1,2,\ldots,n$，则意味着

$$\lfloor dx\rfloor = \sum_{k=n-d+1}^{n} \frac{1}{d}\lfloor dx\rfloor \geq \sum_{k=n-d+1}^{n} \frac{1}{k}\lfloor kx\rfloor, \tag{10}$$

并根据归纳假设，

$$\lfloor (n-d)x\rfloor \geq \sum_{k=1}^{n-d} \frac{1}{k}\lfloor kx\rfloor. \tag{11}$$

将（9）与界（10）和（11）结合起来可得

$$\lfloor nx\rfloor \geq \left(\sum_{k=1}^{n-d} \tfrac{1}{k}\lfloor kx\rfloor\right) + \left(\sum_{k=n-d+1}^{n} \tfrac{1}{k}\lfloor kx\rfloor\right)$$

正如所需。 □

Acknowledgements

我感谢 Michael Filaseta 提醒我注意到这个问题，也感谢 Jeffrey Lagarias 和 Samantha Pinella 与我进行了有益的讨论。感谢匿名审稿人提出的建议，这些建议改进了本文，尤其是定理4的证明。本文中的图使用 Matplotlib [3]Python 库绘制。本研究得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1600223 和 DMS- 1701576，并获得拉克姆博士前奖学金的支持。

References

[1] S. Aursukaree、T. Khemaratchatakumthorn 和 P. Pongsriiam。埃尔米特恒等式的推广及其应用。 *Fibonacci Q.*, 57 2 126 133, 2019 7 ( ): – 。[2] F. Dress。法雷数列的差异度。, *J. Théor. Nombres Bordx.* 11 2 345 367, 1999 7 ( ): – 。[3] J. D. Hunter。Matplotlib：一个 d 维图形环境。, 9 3 90( ): – 2 *Computing in Science & Engineering* 95, 2007 14 。[4] S. Kanemitsu 和 M. Yoshimoto。法雷级数与黎曼猜想。 *Acta Arith.*, 75 4 351 374, 1996 ( ): – 。[5] 7 M. S. Klamkin。 *U.S.A. Mathematical Olympiads, 1972–1986*, 第 33 *New Mathematical* 卷，载于。美国数学协会，华盛顿特区，。[6] 1988 2, 6, 8 *Eur. J. Math.* 2 2 383 M. Kunik。法雷分数的一个缩放性质。, ( ): – 417, 2016 7 。[7] J. C. Lagarias 和 H. Mehta。法雷分数的乘积。, ( ): – 。[8] *Exp. Math.* 26 1 1 21, 2017 7 1981 *Math. Mag.* L. C. Larson。美国和加拿大数学奥林匹克题解。, 54 5 277( ): – 280, 1981 2, 6, 8 。[9] H. 尼德赖特。法雷点的分布。 *Math. Ann.*, 201 341 345, 1973 7 : – 。[10] S. 拉马努金。问题。, : – 。[11] 723 *J. Indian Math. Soc.* 10 357 358, 1918 7 *Integers* D. R. Richman。一个涉及最大整数函数的和。, 19:1–16, 2019。#A42。2, 6, 8[12] S. T. Somu 和 A. Kukla。拉马努金取整函数恒等式的一些推广。*Integers*, 22:1–11, 2022。#A33。7[13] T. Thanatipanonda 和 E. Wong。关于取整函数和的奇特界。 *J. Integer Seq.*, 21 1 1 18 1 8 7 ( ): –19, 2018。# 。 。 。

Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195, USA