arXiv:2303.02963v1 [cond-mat.quant-gas] 6 Mar 2023

超冷原子的量子时间反射与折射

Zhaoli Dong, [1], * Hang Li, [1], * Tuo Wan, [1], * Qian Liang, [1] Zhaoju Yang, [1], † 和 Bo Yan[1], ‡

[1] *Interdisciplinary Center of Quantum Information, State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Zhejiang Province Key Laboratory of Quantum Technology and Device, School of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*（日期：2023年3月7日）

时间反射与折射是空间边界效应在时间上的类比现象，源自费马原理。当经典波遇到时间边界时，介质属性会发生突变，从而产生时间反射与折射。时间反射波和折射波的主要特征是频率偏移和动量守恒，这为引导极端波和调控物质相提供了新的自由度。五十多年前，人们最初提出这一概念，旨在操控光波。然而，由于光学材料超快工程面临极大挑战，时间边界效应的实验实现仍难以实现。在此，我们在超冷原子的动量晶格中引入时间边界，并首次通过实验同时展示时间反射与折射。通过将高斯叠加态注入 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）原子链，我们观测到输入态遇到时间边界时产生的时间反射波和折射波。此外，我们探测到随着无序强度增加，系统从时间反射/折射转变为局域化，并表明时间边界效应在相当程度的无序下仍具有鲁棒性。本研究为未来探索时间边界与时空晶格，以及它们与非厄米性和多体相互作用之间的相互作用，开辟了新途径。

引言。几个世纪以来，由费马原理推导出的反射定律和折射定律一直支配着撞击空间边界的经典波。时空二象性表明，空间边界效应存在时间上的对应现象 [1–5]，而这些时间边界效应近年来引发了日益浓厚的兴趣 [6–8]。通常，波穿过时间边界时，如果介质的性质发生突然而均匀的变化，就会经历时间反射和时间折射。与空间边界效应形成鲜明对比的是，时间反射波和折射波的频率会发生偏移，而波矢保持不变，这是因果关系所要求的，因为因果关系揭示了波不可能在时间上逆向传播。直接操控时间边界可能带来许多机遇，例如光子时间晶体 [7, 9–12]和Floquet超材料 [13, 14]。尽管这些方向颇具吸引力，但要观测时间边界效应，需要使折射率发生足够大且足够迅速的变化，这对光学材料而言极具挑战性 [15, 16]。直到最近，时间折射才在光学频率 [6, 15]下被观测到，而时间反射仅在经典水波 [17] 和传输线系统 [18]中有所报道。由于缺乏实验实现，各种时间边界效应的研究在很大程度上仍未得到探索。

另一方面，基于超冷原子的量子平台对于现代量子技术至关重要，其应用范围从量子模拟到量子计算 [19–22]。在过去十年中，另一种边界效应——拓扑边界效应——引起了广泛关注，并已通过超冷原子加以探索 [23–25]。例如，Haldane模型和量子霍尔效应已在超冷原子系统中通过实验实现 [26–28]，并通过利用囚禁冷原子中的合成维度探测到了手性边缘电流 [27, 28]。支持拓扑界面态的 SSH 模型已在光学超晶格 [29, 30]和动量空间晶格 [31, 32]中利用超冷原子得到实现。我们的研究团队从厄米系统转向非厄米 [33, 34] 系统，利用有损SSH原子链 [35, 36]报道了非厄米趋肤效应。直观而言，这些进展促使我们思考：前述时间边界效应能否在量子系统中实现并得到轻松控制。超冷原子所具备的灵活可控性和卓越的量子特性，为解决这些问题以及未来探索各种时间边界效应提供了新的途径。

在本研究中，我们通过实验构建了一条 SSH 链，以研究超冷原子动量晶格中的时间反射与折射效应 [37, 38]。通过突然改变 SSH 链的耦合，我们能够引入时间边界。在系统中制备一个具有确定波矢的初始波包，并记录其撞击时间边界时的演化动力学。我们观测到了时间反射波包和折射波包，且它们的行为符合时间反射与折射定律。此外，在时间边界之后向晶格中引入准周期无序，我们发现时间反射与折射能够抵御相当程度的无序。我们的结果将时间边界的概念引入量子气体，突破了绝热近似的适用范围，并为进一步探索各种时间边界效应（如动量带隙和时空光学

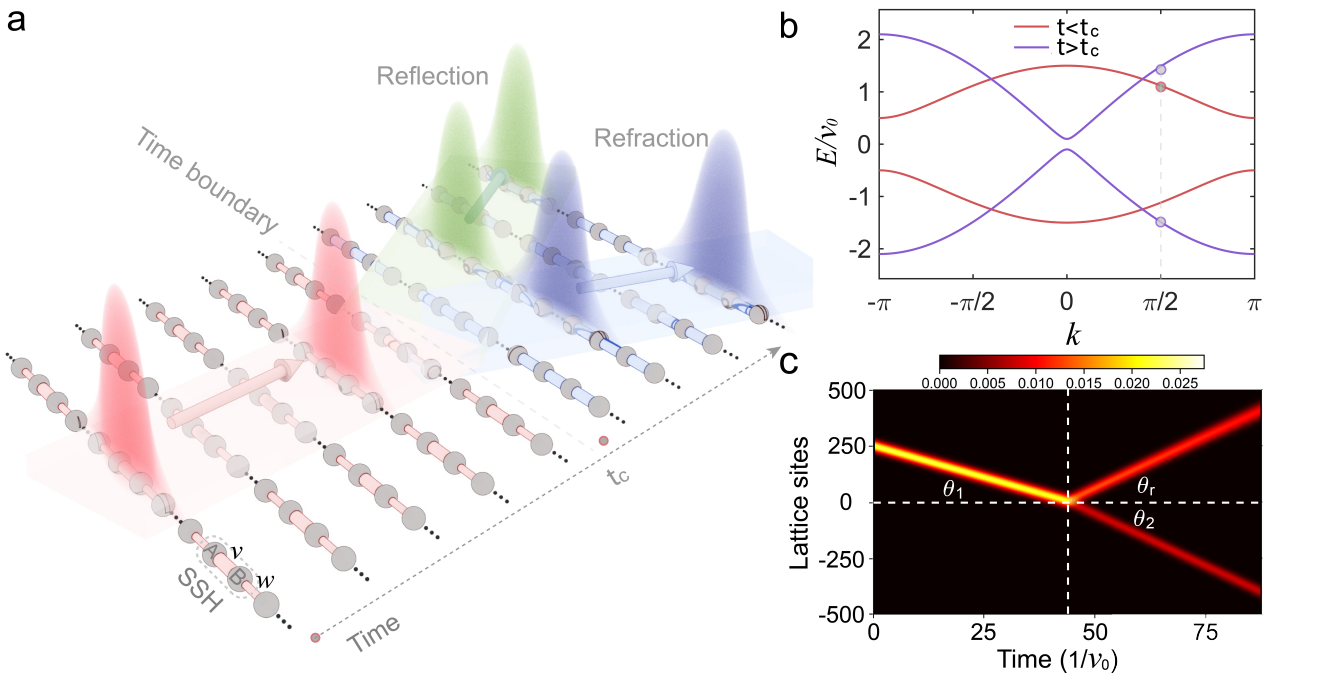


图 1. **时间反射与折射示意图。a.** 超冷原子系统中 SSH 模型的时间反射与折射。通过均匀地引入耦合振幅的突变来实现时间边界。**b.** 时间边界前后的能带结构。时间边界前的耦合振幅为 $w_0 = v_0/2$，时间边界后的耦合振幅为 $w_1 = -1.1v_0$。此外，图中还展示了包含 $M = 500$ 个元胞（$N = 1000$ 个晶格点）的时间边界动力学数值模拟。**c.** 初始高斯波包由公式 (2) 确定，其中 $k_0 = \pi/2$, $m_0 = -120$ 和 $\sigma = 12.5$。

晶格 [9–11], 及其与非厄米性的相互作用[33, 34] 和多体相互作用 [39, 40]。

理论模型。模型示意图如图 1a 所示。我们从 SSH 模型出发，其哈密顿量为

$$H = \sum_n [v\hat{a}_n^\dagger \hat{b}_n + w(t)\hat{a}_n^\dagger \hat{b}_{n+1}] + h.c. \qquad (1)$$

其中，v（w）表示最近邻格点之间的耦合强度，$\hat{a}_n$、$\hat{b}_n$（$\hat{a}_n^\dagger$、$\hat{b}_n^\dagger$）分别是第 n 个晶胞中 A、B 格点上粒子的湮灭（产生）算符。为实现时间边界，我们将耦合强度 v 设为常数 $v = v_0$，并将 $w(t)$ 设为随时间变化的变量。容易得出，SSH 模型是一个双带系统，其色散关系为 $E_\pm(k) = \pm\sqrt{w^2 + v^2 + 2wv\cos k}$，对应的本征态为 $\phi_\pm(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, \pm e^{i\theta_k}]$，且 $\tan\theta_k = w\sin k/(v + w\cos k)$。受参考文献[16], 启发，我们在 t_c 时刻突变$w(t)$ 的耦合强度，以便在超冷原子系统中引入时间边界。图 1b 展示了 SSH 模型在时间边界前（$w(t) = w_0 = v_0/2$，红色曲线）和时间边界后（$w(t) = w_1 = -1.1v_0$，紫色曲线）的典型能带结构。

在时间边界之前，$t < t_c$激发一个初始波包，它是图 1b 中红点附近对应于波矢的本征态的叠加为 k_0。波包将以正群速度（$\partial E_+/\partial k$）$_{k=k_0}$向右传播。时间边界之后，$t > t_c$能带结构突然切换为紫色曲线，初始态将投影到新的本征态上。由于时间边界处耦合强度的突变在空间上均匀，动量是守恒量。因此，在 $t = t_c$，初始态将分裂成两个传播波包，它们对应相反的能量（由图 1b 中的紫色点表示）和大小相同、符号相反的群速度。群速度符号与初始态相同的波包称为时间折射波，而群速度符号相反的波包称为时间反射波，如图 1a 所示。

基于上述模型，我们在图 1c 中展示了时间边界效应的数值结果。初始高斯波包满足

$$|\psi_0^m(k_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\sqrt[4]{\pi}} e^{-(m-m_0)^2/2\sigma^2} e^{ik_0 m} |\phi_+(k_0)\rangle, \qquad (2)$$

其中，$|\psi_0^m(k_0)\rangle$ 表示第 m个晶胞的初始态，m_0 是波包的中心晶胞编号，σ 表示波包的宽度。正如我们清楚看到的，初始波包首先向右传播，撞击时间边界，然后

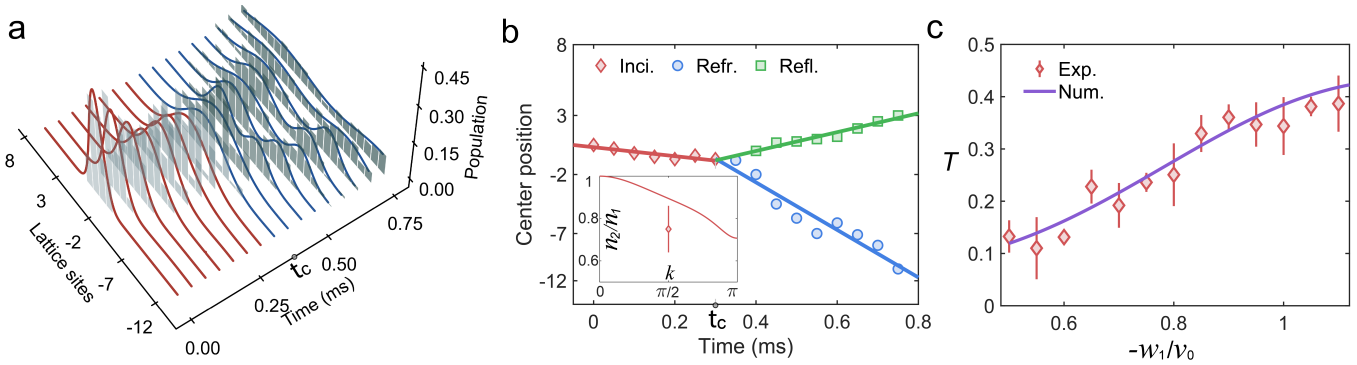


图 2. **时间反射与折射的实验观测。a.** 动量晶格中的时间边界效应。初始叠加态为 $\Psi_0 = 0.12e^{(-i\pi/2)}|-2\rangle + 0.38|-1\rangle + 0.38|0\rangle + 0.12e^{(i\pi/2)}|1\rangle$ [41]。红色和蓝色曲线分别是在时间边界前后进行的双高斯拟合。**b.** 原始入射波（红色虚线）、时间反射波（绿色虚线）和时间折射波（蓝色虚线）的中心位置。插图中的线条显示了不同 n_2/n_1 对应的 k，圆点表示 $k = \pi/2$的实验数据。 **c.** 时间折射比随耦合率 w_1/v_0的变化。红点表示实验结果。紫色曲线表示基于四格点初始高斯波包得到的数值结果。

分裂成群速度符号相反的时间折射波和时间反射波，这与上述讨论非常吻合。

在我们的量子系统中，时间反射和折射定律不像光学中的定律那么直接[3, 6, 42], ，因为对于量子气体而言，在时间维度上不存在定义明确的速度或折射率。幸运的是，借助由 $(\partial E_+/\partial k)_{k=k_0}$ 定义的群速度，我们可以引入有效折射率，并将时间折射定律推广如下（更多详情见 [41]）：

$$n_2/n_1 = \cos\theta_2/\cos\theta_1, \tag{3}$$

其中 n_1 (n_2) 是 $t < t_c (t > t_c)$ 的有效折射率，$\theta_{1,\ 2}$ 分别是图1c 中定义的入射角和折射角。因此，可由上述方程求得时间边界效应的有效折射率，且 $n_2/n_1 = 0.89$ 对于 $k = \pi/2$。对于我们系统中的时间反射，由于能带结构关于零能量对称，很容易得到反射角为 $\theta_r = \theta_2$ 。推导详情见 [41]。

时间边界效应的实验观测。在实验中，我们首先将约2×10^5 ^{87}Rb原子的玻色–爱因斯坦凝聚体置于偶极阱 [43–45]中。多个布拉格激光对（λ= 1064 nm）耦合21个离散动量态（标记为 $|n\rangle$ $(n \in \mathbb{Z})$），形成SSH链，其典型耦合率的能量尺度为 kHz。在我们的实验中，通过声光调制器改变布拉格激光来实现时间边界，其速度最快可达MHz，远高于系统的能量尺度（$\sim k$Hz）。因此，这确保了我们能够在超冷原子系统中观测到时间边界效应。有关实验的更多细节可参见 [41]。

为观测时间边界效应，我们根据方程（2）制备了一个初始叠加态，并将其 $k_0 = \pi/2$ [41] 施加在动量晶格中心的四个格点上。耦合振幅选择为 $v_0 = 3.47(3)$ kHz, $w_0 = 1.75(1)$ kHz。初始态的时间演化如图2a中的红色曲线所示。在 t_c=0.33 ms时，耦合突然变为 $w_1 = -3.50(2)$ kHz，从而在时间维度上形成边界。在 $t > t_c$时，波的演化如图2a中的蓝色曲线所示。波包明显分裂成两部分：时间折射波和时间反射波。为进一步刻画演化特征，我们采用双高斯拟合，从波包包络中提取中心位置。图2b展示了入射波、时间反射波和时间折射波的中心位置随时间的变化。提取出的有效折射率为 $n_2/n_1 = (0.75 \pm 0.11)$ ，这与图2b插图中所示的理论计算结果接近。需要注意的是，数值结果的偏差源于四格点激发和有限尺寸效应 [41]。这些实验的核心观测结果是：初始波包向右传播，撞击时间边界，随后分裂成时间折射波和时间反射波，从而直接观测到了时间边界效应。

根据实验观测，可以轻松计算出时间折射比 [41]。接下来，我们扫描w_1/v_0 ，时间折射比随 w_1/v_0 变化的情况如图2c 所示。当 w_1/v_0 处于实验中可达到的 $[-0.5, -1.1]$ 范围内时，时间折射比约为 0.1 至 0.4。实验结果与数值模拟 [41]吻合良好。沿着这一思路，可通过 $1 - T$ 提取时间反射比，其范围为 0.6 至 0.9。我们的系统中时间反射效果显著，是因为在

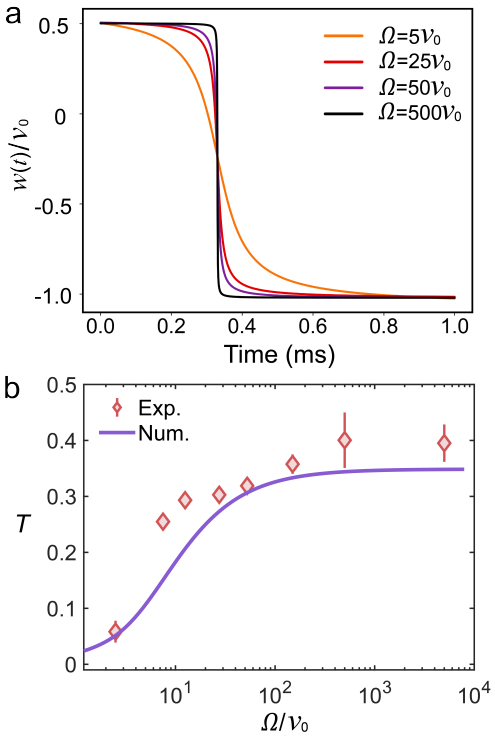


图3. **变化的时间边界**。**a.** 参数为 δ =3 和 α = 0.5时， $w(t)$的不同变化波形。**b.** 时间折射比随Ω的变化。红点表示实验结果。紫色曲线表示数值模拟结果。

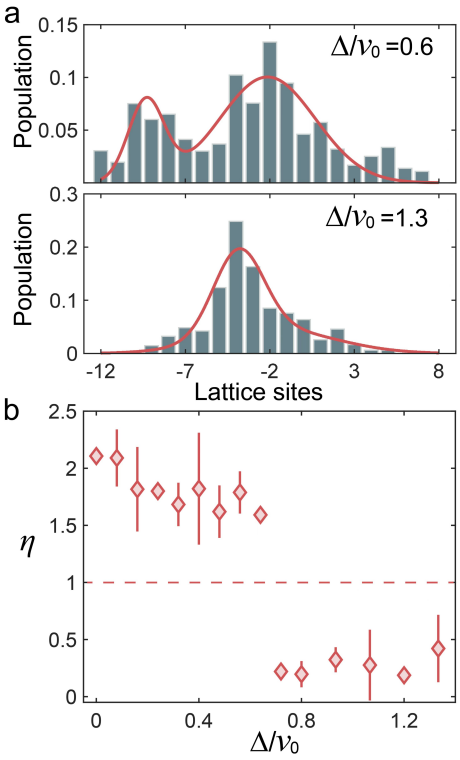


图4. **时间边界效应的稳健性**。**a.** 在 t=0.7 ms时测得的布居分布，无序强度分别为 $\Delta/v_0 = 0.6$ （上图）和 $\Delta/v_0 = 1.3$ （下图）。 $\varphi = 5\pi/8$ 其他参数与图2a相同。实线为用函数 $P_d = A_1\exp[-(n-n_1)^2/2\sigma_1^2] + A_2\exp[-(n-n_2)^2/2\sigma_2^2]$拟合得到的拟合曲线。**b.** 距离与宽度之比随无序强度 Δ/v_0的变化。临界点 $\eta = 1$ 表示双峰曲线转变为单峰曲线的转变点。

之前上本征态的投影概率 t_c 以及 t_c之后的投影概率 [41]，相对较大。这一模型的独特特性使其比光学材料更容易观察到时间反射。值得注意的是，将哈密顿量变为负号 [41], 即可实现入射波的完全时间反射，这种方法称为“洛施密特回波”，如今已成为量子控制中的标准方法 [46, 47]。

变化的时间边界。 在上述实验中，耦合强度的突变是阶跃函数。如果 $w(t)$变化得足够缓慢，系统的能带结构将从图 1b中的红线绝热地变形为蓝线，其中包含群速度的反向变化。因此，最终只会留下时间反射。自然会引出这样一个问题：如果时间边界变化得既不那么快也不那么慢，会怎样?

为研究这一问题，我们采用具有解析形式的不同平滑时间边界 $w(t) = [-(\delta/\pi)\arctan(\Omega(t-t_c) - \alpha]w_0$，其中参数$\delta$ 和 α 为常数，用于确保变化函数具有明确的初始值和终值；参数 Ω 控制波形的陡峭程度。如图3a 所示， $w(t)$ 以不同速率从 w_0/v_0=0.5 变化到 $w_1/v_0 = -1$ 。较小的 Ω/v_0 表示 $w(t)$ 的波形变化较慢，而无限 Ω/v_0 对应阶跃函数。

通过扫描参数 Ω，在 2 到 5000 的范围内，时间折射比 T 受到定量控制，如图3b 所示。当时间边界足够尖锐时（$\Omega/v_0 > 100$），时间折射比保持在 T=0.35 的稳定平台上，这表明图2中观测到的时间边界效应对时间边界存在的显著不理想性具有稳健性。当 Ω 足够小时（$\Omega/v_0 < 10$），时间折射波和时间反射波均在实验中消失，这验证了时间边界效应需要足够快的时间边界切换速率这一事实。

时间边界效应的稳健性。既然我们已经证明，即使时间边界存在缺陷，时间边界效应仍能持续存在，我们预计这些效应对无序也具有稳健性。为揭示无序与时间边界效应之间的相互作用，我们在系统中通过实验引入了位点准周期性无序 [48–51]，，无序的附加哈密顿量写为 $H_{\rm dis} = -(\Delta_n^{(a)}\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n + \Delta_n^{(b)}\hat{b}_n^\dagger\hat{b}_n)$,

其中 $\Delta_n^{(i)} = \Delta$余弦$[2\pi\alpha(2n + n_0) + \varphi]$, $n_0 = 0$ (当 $i = a$) 或 $n_0 = 1$ (当 $i = b$), Δ, φ 分别为准周期性的振幅和相位,– $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/4$为无理数。如图4a所示，图中展示了无序强度不同时，时间边界效应的两种演化动力学。在相对较强、达到 $\Delta/v_0 = 0.6$的无序下，时间反射波和折射波（两个峰）仍然存在，这有力地证明了时间边界效应具有稳健性。如果无序强度足够大，系统最终会进入安德森局域化状态，此时图4a下图中只能观察到一个峰，这意味着时间边界效应消失。

为进一步表征时间边界效应的稳健性，我们使用双高斯函数拟合了测得的分布。结果如图4a 中的红色曲线所示。具体而言，我们定义了距离宽度比 $\eta = |\Delta n| / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ 来描述这一转变。测得的η不同无序强度下的数值如图4b 所示，这表明双峰曲线在相当大的无序强度范围内都能保持。从双峰到单峰的转变出现在 $\Delta/v_0 \simeq 0.7$，这与约 0.8 的数值结果一致（更多详情见 [41]）。

结论。我们在超冷原子的动量晶格中通过实验展示了时间边界效应。通过控制耦合振幅和时间边界的陡峭程度，我们同时观测到了超冷原子的时间反射和折射，并对其进行了调控。此外，我们还表明，时间边界效应能够抵御相当程度的无序。我们的结果为未来在超冷动量晶格系统中探索时间晶体及时空晶体 [9, 11]铺平了道路，尤其是研究动量带隙中的放大现象 [52], 及其与拓扑相 [9], 、非厄米性 [33, 34]和多体相互作用 [40, 53]之间的相互作用。

致谢：我们感谢国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1404203）、国家自然科学基金（项目编号：U21A20437、12074337 和 12174339）、浙江省自然科学基金（项目编号：LR21A040002 和 LR23A040003）、浙江省科技计划（项目编号：2020C01019）、中央高校基本科研业务费（项目编号：2021FZZX001-02）以及海外优秀青年科学基金项目的支持。

* 这些作者对本研究作出了同等贡献

† zhaojuyang@zju.edu.cn

‡ yanbohang@zju.edu.cn

[1] A. Akhmanov 和 A. Chirkin，《苏联物理学报〈实验与理论物理学杂志〉》28, 748 (1969). [2] B. Kolner，《IEEE量子电子学杂志》30, 1951 (1994). [3] J. T. Mendonca 和 P. K. Shukla，《物理学文摘》65, 160 (2002). [4] Y. Z. Xiao、D. N. Maywar 和 G. P. Agrawal，《光学快报》39, 574 (2014). [5] S. Vezzoli、V. Bruno、C. DeVault、T. Roger、V. M. Sha- laev、A. Boltasseva、M. Ferrera、M. Clerici、A. Dubietis 和 D. Faccio，《物理评论快报》120, 043902 (2018). [6] Y. Zhou、M. Z. Alam、M. Karimi、J. Upham、O. Reshef、C. Liu、A. E. Willner 和 R. W. Boyd，《自然·通讯》11, 2180 (2020). [7] M. Lyubarov、Y. Lumer、A. Dikopoltsev、E. Lustig、Y. Sharabi 和 M. Segev，2021年激光与电光学会议（CLEO），IEEE（2021）。[8] A. Dikopoltsev、Y. Sharabi、M. Lyubarov、Y. Lumer、S. Tsesses、E. Lustig、I. Kaminer 和 M. Segev，《美国国家科学院院刊》119, e2119705119 (2022). [9] E. Lustig、Y. Sharabi 和 M. Segev，《光学》5, 1390 (2018). [10] Y. Sharabi、E. Lustig 和 M. Segev，《物理评论快报》126, 163902 (2021). [11] Y. Sharabi、A. Dikopoltsev、E. Lustig、Y. Lumer 和 M. Segev，《光学》9, 585 (2022). [12] Y. Peng，《物理评论快报》128, 186802 (2022). [13] S. Yin、E. Galiffi 和 A. Al`u，《光电子》2, 8 (2022). [14] C. Weitenberg 和 J. Simonet，《自然·物理》17, 1342 (2021). [15] E. Lustig、S. Saha、E. Bordo、C. DeVault、S. N. Chowdhury、Y. Sharabi、A. Boltasseva、O. Cohen、V. M. Shalaev 和 M. Segev，载于《激光与电光学会议》（Optica出版集团，2021），第 FF2H.1 页。[16] A. D. Olivia Y. Long、Kai Wang 和 S. Fan，arXiv:2209.03539v2 (2022). [17] V. Bacot、M. Labousse、A. Eddi、M. Fink 和 E. Fort，《自然·物理》12, 972 (2016). [18] H. Moussa、G. Xu、S. Yin、E. Galiffi、Y. Radi 和 A. Al`u，arXiv:2208.07236 (2022). [19] I. Bloch、J. Dalibard 和 W. Zwerger，《现代物理评论》80, 885 (2008). [20] I. Bloch、J. Dalibard 和 S. Nascimbene，《自然·物理》8, 267 (2012). [21] C. Gross 和 I. Bloch，《科学》357, 995 (2017). [22] F. Schafer、T. Fukuhara、S. Sugawa、Y. Takasu 和 Y. Takahashi，《自然综述：物理》2, 411 (2020). [23] H. Zhai，《物理学进展报告》78, 026001 (2015). [24] N. Goldman、J. C. Budich 和 P. Zoller，《自然·物理》12, 639 (2016). [25] N. R. Cooper、J. Dalibard 和 I. B. Spielman，《现代物理评论》91, 015005 (2019). [26] G. Jotzu、M. Messer、R. Desbuquois、M. Lebrat、T. Uehlinger、D. Greif 和 T. Esslinger，《自然》515, 237 (2014). [27] M. Mancini、G. Pagano、G. Cappellini、L. Livi、M. Rider、J. Catani、C. Sias、P. Zoller、M. Inguscio、M. Dalmonte 和 L. Fallani，《科学》349, 1510 (2015). [28] B. K. Stuhl、H. I. Lu、L. M. Aycock、D. Genkina 和

I. B. Spielman, 《科学》349, 1514 (2015). [29] S. Folling、S. Trotzky、P. Cheinet、M. Feld、R. Saers、A. Widera、T. Muller 和 I. Bloch, 《自然》448, 1029 (2007). [30] M. Atala、M. Aidelsburger、J. T. Barreiro、D. Abanin、T. Kitagawa、E. Demler 和 I. Bloch, 《自然·物理》9, 795 (2013). [31] E. J. Meier、F. A. An 和 B. Gadway, 《自然·通讯》7, 13986 (2016). [32] D. Xie、W. Gou、T. Xiao、B. Gadway 和 B. Yan, 《npj 量子信息》5, 55 (2019). [33] S. Yao 和 Z. Wang, 《物理评论快报》121, 086803 (2018). [34] K. Ding、C. Fang 和 G. Ma, 《自然综述：物理》4, 745 (2022). [35] Q. Liang、D. Xie、Z. Dong、H. Li、H. Li、B. Gadway、W. Yi 和 B. Yan, 《物理评论快报》129, 070401 (2022). [36] W. Gou、T. Chen、D. Xie、T. Xiao、T.-S. Deng、B. Gad- way、W. Yi 和 B. Yan, 《物理评论快报》124, 070402 (2020). [37] E. J. Meier、F. A. An 和 B. Gadway, 《物理评论A》93, 051602 (2016). [38] E. J. Meier、F. A. An、A. Dauphin、M. Maffei、P. Massig- nan、T. L. Hughes 和 B. Gadway, 《科学》362, 929 (2018). [39] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn, 《现代物理评论》91, 021001 (2019). [40] J. Randall、C. E. Bradley、F. V. van der Gronden、A. Galicia、M. H. Abobeih、M. Markham、D. J. Twitchen、F. Machado、N. Y. Yao 和 T. H. Taminiau, 《科学》374，abk0603（2021）。[41] 详情请参阅补充信息。[42] B. W. Plansinis、W. R. Donaldson 和 G. P. Agrawal, 《物理评论快报》115，183901（2015）。[43] D. Xie、D. Wang、W. Gou、W. Bu 和 B. Yan, 《美国光学学会杂志 B》35，500（2018）。[44] T. Chen、W. Gou、D. Z. Xie、T. Xiao、W. Yi、J. Jing 和 B. Yan, 《npj量子信息》7，78（2021）。[45] H. Li、Z. Dong、S. Longhi、Q. Liang、D. Xie 和 B. Yan, 《物理评论快报》129，220403（2022）。[46] U. Raitzsch、V. Bendkowsky、R. Heidemann、B. Butscher、R. L¨ow 和 T. Pfau, 《物理评论快报》100，013002（2008）。[47] B. Yan、L. Cincio 和 W. H. Zurek, 《物理评论快报》124，160603（2020）。[48] F. A. An、K. Padavi´c、E. J. Meier、S. Hegde、S. Ganeshan、J. H. Pixley、S. Vishveshwara 和 B. Gadway, 《物理评论快报》126，040603（2021）。[49] H. Yao、H. Khoudli、L. Bresque 和 L. Sanchez-Palencia, 《物理评论快报》123，070405（2019）。[50] F. Liu、S. Ghosh 和 Y. D. Chong, 《物理评论 B》91，014108（2015）。[51] S. Iyer、V. Oganesyan、G. Refael 和 D. A. Huse, 《物理评论 B》87，134202（2013）。[52] M. Lyubarov、Y. Lumer、A. Dikopoltsev、E. Lustig、Y. Sharabi 和 M. Segev, 《科学》377，425（2022）。[53] T. L. Heugel、M. Oscity、A. Eichler、O. Zilberberg 和 R. Chitra, 《物理评论快报》123，124301（2019）。