arXiv:2303.02977v2 [math.PR] 1 Oct 2023

确定性时域上 Lévy 过程指数泛函的矩——恒等式与显式表达式

Z. Palmowski*,[a]，H. Sariev†,‡,[b] 和 M. Savov‡,†,[c]

摘要

本文研究确定性时域上 Lévy 过程指数泛函的矩。我们推导出关于这些矩的两个卷积恒等式。第一个恒等式将一般 Lévy 过程的指数泛函在确定性时刻之前的复矩，与其对偶 Lévy 过程的相应复矩联系起来。第二个卷积恒等式则将非复合泊松 Lévy 过程的指数泛函复矩，与其上升/下降梯子高度在由相应局部时确定的随机时域上的指数泛函复矩联系起来。由此，我们为任意对称 Lévy 过程的指数泛函半负矩推导出一个普适表达式；其普适性与对称随机游走的通过时类似。文中还讨论了 $(n-1/2)^{th}$, $n \geq 0$ 矩。另一方面，在极其宽松的条件下，我们得到了子ordinator 指数泛函复矩（包括实部为负的复矩）的级数展开。这显著拓展了以往的结果，并为负实矩提供了简洁的表达式。在一个特殊情形下，黎曼ζ函数恰好是按时间取值的伽马子 ordinator 指数泛函的负一阶矩。

关键词：伯恩斯坦函数、指数泛函、梅林变换

1 引言、背景与动机

设 $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ 是一个可能被杀死、取值于实数线上的 Lévy 过程，并具有 Lévy–Khintchine 指数 Ψ。记

$$I_\Psi(t) := \int_0^t e^{-\xi_s} ds, \quad t \in (0, \infty],$$

相应的确定性时域上的指数泛函。当 $t = \mathbf{e}_q$ 是一个参数为 $q > 0$、且独立于 ξ 的指数分布随机变量时，关于 $I_\Psi(\mathbf{e}_q)$ 的泛函分析性质（包括其矩）已得到广泛研究；包含一般结果和方法的一小部分参考文献见 [7, 15, 17, 20, 22, 26, 29]。包含 $I_\Psi(\mathbf{e}_q)$ 应用的论文数量极为庞大，其中一些讨论见 [16, 22]。对于 $t \in (0, \infty)$, $I_\Psi(t)$ 的泛函分析性质则鲜为人知。据我们所知，

*弗罗茨瓦夫科技大学纯数学与应用数学学院应用数学系，ul. Janiszewskiego 14a, 50-372 Wroclaw, 波兰，
[a]zbigniew.palmowski@pwr.edu.pl
†保加利亚科学院数学与信息研究所，Georgi Bonchev str. bl.8, Sofia 1113, 保加利亚，[b]h.sariev@math.bas.bg
‡索非亚大学数学与信息学院“圣克莱门特·奥赫里德斯基”，5 James Bourchier blvd., Sofia 1164, 保加利亚，
[c]msavov@fmi.uni-sofia.bg

唯一能得到 $I_\Psi(t)$ 密度相对明确表达式的情形，是 ξ 为带漂移布朗运动的情形，详见 [1, 28] 及 [14] 的综述。当 ξ 为子ordinator 时， $I_\Psi(t)$ 的矩得到了一定程度的研究，值得一提的参考文献包括 [2, 24, 25, 27]。事实上， [24, 25] 研究了加性过程的指数泛函，并推导出其矩之间的递推关系；对于 $I_\Psi(t)$，当 ξ 为子ordinator、带漂移布朗运动，或具有标准正态跳跃的复合泊松过程时，他们给出了正整数阶矩的一些显式公式，见 [24, 推论 1、例 5-6]。基于 [9] 中关于马尔可夫加性泛函整数阶矩的公式， [8, 25], 给出了 $\mathbb{E}[I^n_\Psi(t)], n \geq 0$ 的多重积分表达式，其研究动机源于亚式期权的应用，另见 [11, 19]。有趣的是，与出现在各种理论研究中的 $I_\Psi(\mathbf{e}_q)$ 不同，人们对 $I_\Psi(t)$ 的兴趣似乎主要源自应用。

本文的首要目标是建立涉及 $I_\Psi(t)$ 的矩的两个卷积恒等式。第一个恒等式见引理 2.1，它将 $I_\Psi(t)$ 的矩与 $I_{\hat{\Psi}}(t)$ 的矩联系起来，其中 Ψ 是对偶 Lévy 过程 $\xi = (-\xi_t)_{t\geq 0}$ 的 Lévy–Khintchine 指数。对于具有无限活动的对称 Lévy 过程，这一关系式给出通用表达式 $\mathbb{E}[I_\Psi^{-1/2}(t)] = t^{-1/2}$；对于弥散型有限活动 Lévy 过程，该表达式同样成立。迄今为止，这一恒等式仅对布朗运动已知，见 [28]。在第 2.4 节中，我们讨论对称 Lévy 过程的 $(n-1/2)^{th}$ 矩。第二个卷积恒等式见引理 2.6，它将 $I_\Psi(t)$ 的矩与 ξ 的梯级高度过程在相应局部时处的矩联系起来。我们指出了一条冗长且技术性很强的途径，可将后者的矩展开为级数；这为研究 $I_\Psi(t)$ 本身的矩提供了一种很有前景的方法。

本文的第二个目标是显著改进 [2] ，并在 ξ 为子ordinator时，为 $I_\Psi(t)$的所有矩（包括负阶矩）提供级数展开。这是在远弱于 [2, 定理 2.14]中那些已属宽松的假设的条件下实现的。除了一般的复矩之外，我们的定理 2.10还为 $I_\Psi(t)$的负整数阶矩提供了相当简洁的表达式。在一个特殊情形下，$\mathbb{E}[I_\Psi^{-1}(t)] = \zeta(t+1)$，其中 ζ 是著名的黎曼ζ函数，详见第 2.4 小节。我们的结果还给出了级数的收敛速度，从而可以进行适当的截断和近似。

本文结构如下：第 2 节介绍记号，展示我们研究的主要结果，给出示例并讨论结果的适用性；第 3 节包含证明。

2 主要结果

2.1 初步定义和记号

我们使用 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数线、半直线和复平面。对于任意 $z \in \mathbb{C}$，记 $z = a + ib = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$。

回顾一下，一维 L´évy 过程 $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$是在适当概率空间上定义的实值随机过程，具有平稳独立增量。在本文中，我们允许按通常方式对 ξ 进行独立的指数杀死：若 $\mathbf{e}_q$ 是参数为 $q \geq 0$且独立于 ξ的指数分布随机变量，则对于 $t \geq \mathbf{e}_q$，我们令 $\xi_t = \infty$ 。使用 L´évy 过程时，我们默认它可能以所述方式被杀死。这种扩展在确定性时域上的指数泛函语境中很有用，

因为杀死实际上就是它们的拉普拉斯变换。回顾一下，任意 ξ 的 L´évy–Khintchine 指数Ψ 由下式给出

$$\Psi(z) := \log \mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right] = az + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{zy} - 1 - zy\mathbb{I}_{\{|y|\leq 1\}}\right)\Pi(dy) - q, \quad z \in i\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

其中， $a \in \mathbb{R}$、 $\sigma^2 \geq 0$、 $q \geq 0$ 分别为线性项、布朗分量和杀死率； Π 是满足 $\int_{-\infty}^{\infty} \min\left\{x^2, 1\right\}\Pi(dy) < \infty$ 的 σ-有限测度，用于表征 ξ的跳跃强度和大小； $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}$ 表示示性函数。注意，当$q = 0$时， ξ 是守恒的，即不会被杀死。对于任意 Ψ，众所周知，以下维纳–霍普夫分解成立

$$\Psi(z) = h(q)\kappa_+(q, -z)\kappa_-(q, z), \quad z \in i\mathbb{R}, \tag{2.2}$$

其中， $\kappa_\pm$ 是与上升/下降梯子时的逆及上升/下降梯子高度相关的上升/下降二元子ordinator的二元伯恩斯坦函数。更具体地，若 $L_\pm = (L_\pm(t))_{t\geq 0}$ 是强马尔可夫过程（$(\xi_t^+)_{t\geq 0} = (\sup_{s\leq t}\xi_s - \xi_t)_{t\geq 0}$ 和 $(\xi_t^-)_{t\geq 0} = (\xi_t - \inf_{s\leq t}\xi_s)_{t\geq 0}$的局部时，则 $L_\pm^{-1} = (L_\pm^{-1}(t))_{t\geq 0}$ 是上升/下降梯子时， $H_\pm = (H_\pm(t))_{t\geq 0} = (\xi_{L_\pm^{-1}(t)})_{t\geq 0}$ 是上升/下降梯子高度，并且

$$-\log \mathbb{E}\left[e^{-qL_\pm^{-1}(1) - zH_\pm(t)}\right] = \kappa_\pm(q, z) = e^{\int_0^\infty \int_{[0,\infty)}\left(e^{-t} - e^{-qt - zx}\right)\frac{\mathbb{P}(\xi_t \in \pm dx)}{t}dt}, \quad \mathtt{Re}(z) \geq 0,$$

是二元伯恩斯坦函数，或者用 L´évy 过程的术语来说，是 $(L_\pm^{-1}, H_\pm)$ 的二元拉普拉斯指数；更多信息请参见 [5, 第 VI 章] 。此外，

$$h(q) = e^{-\int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-qt}\right)\mathbb{P}(\xi_t = 0)\frac{dt}{t}}, \tag{2.3}$$

当且仅当 ξ 不是复合泊松过程时， $h(q) \equiv 1$ ，也就是说，它是一个跳跃强度有限的 L´évy 过程（$\Pi(\mathbb{R}) < \infty$）。此外，对于每个二元伯恩斯坦函数 κ，我们都可以关联一个二元伯恩斯坦–伽马函数 W_κ；对于任意固定的 $\zeta \in \mathbb{C}$ ，若 $\mathtt{Re}(\zeta) \geq 0$ ，它是下式的解：

$$W_\kappa(\zeta, z+1) = \kappa(\zeta, z)W_\kappa(\zeta, z), \quad W_\kappa(\zeta, 1) = 1, \quad \text{on } \mathtt{Re}(z) > 0. \tag{2.4}$$

事实上，对于任意 $q = \zeta \in \mathbb{R}^+$， $W_\kappa(q, \cdot)$ 是一个正随机变量的梅林变换，也就是说，存在 $Y \geq 0$ 使得 $\mathbb{E}[Y^z] = W_\kappa(q, z+1)$，当 $\mathtt{Re}(z) > -1$ 时成立，见 [2, 定理 2.8]。二元伯恩斯坦–伽马函数 W_κ 的泛函分析性质（包括斯特林型渐近性质）已在 [2] 中得到详细研究。单变量情形下的各种类似结果可见于 [16, 21, 22, 23]。

对于任意的 ξ 和 $t \geq 0$，我们考虑指数泛函

$$I_\Psi(t) := \int_0^t e^{-\xi_s}ds = \int_0^{\min\{t, \mathbf{e}_q\}} e^{-\xi_s}ds,$$
$$I_\Psi \equiv I_\Psi(\infty) := \int_0^\infty e^{-\xi_s}ds = \int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi_s}ds.$$

根据强大数定律， $I_\Psi < \infty$ 当且仅当 $q > 0$ 或 $\lim_{s\to\infty}\xi_s = \infty$ 几乎必然成立。我们引入 I_Ψ的梅林变换，其形式化定义为对某个 $z \in \mathbb{C}$ 有

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z) := \mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}\right].$$

当 $h(q) \equiv 1$时，由 [22] 中的定理 2.4 可得

$$\mathcal{M}_{I_\Psi}(z) = \kappa_-(q,0)\frac{\Gamma(z)}{W_{\kappa_+}(q,z)}W_{\kappa_-}(q,1-z), \quad \mathtt{Re}(z) \in (0,1), \tag{2.5}$$

由于在 [22, 引理 A1], 的记号下，我们有 $\kappa_\pm = \phi_\pm$。事实上，根据 [22, 引理 A1], ，对于任意固定的 $q \geq 0$，有 $\phi_+(z) = h(q)\kappa_+(q,z)$，因此由 [22, 定理 4.1.(5)], 可得 (2.5)。关系式 (2.5)一直是指数泛函领域中最精细结果的核心，这主要是因为该表达式至少在长度为单位长度的复条带上成立，并且 W_κ 的渐近性质在复半平面内是可得的。后者最精确的版本包含于 [16]中。

2.2 一般卷积恒等式

在本节中，我们考虑关于确定性时域上指数泛函的矩的一般卷积恒等式。第一个恒等式联系了 $I_\Psi(t)$ 与 $I_{\hat{\Psi}}(t)$ 的矩，其中 $\hat{\ }\hat{\Psi}(z) = \Psi(-z)$ 是对偶 Lévy 过程 $\xi = (-\xi_t)_{t\geq 0}$ 的 L´évy–Khintchine 指数。由此，我们可以为任意对称的 L´évy 过程的 $-1/2^{th}$阶指数泛函矩找到一个通用公式。

$\hat{\ }\hat{\ }$引理 2.1. 设 Ψ 和 Ψ 分别为非复合泊松过程 ξ 和 ξ 的 L´évy–Khintchine 指数。那么，对于任意 $t > 0$ 且 $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$，有

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[I_\Psi^{-z}(t-s)\right]\mathbb{E}\left[I_{\hat{\Psi}}^{z-1}(s)\right]ds = \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{2.6}$$

若 ξ 是 具有连续测度 $\Pi(dx)$ 和 $\lambda = \Pi(\mathbb{R})$ 的复合泊松过程，

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[I_\Psi^{-z}(t-s)\right]\mathbb{E}\left[I_{\hat{\Psi}}^{z-1}(s)\right]ds = \Gamma(1-z)\Gamma(z)\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}\right)\mathbb{I}_{\{t>0\}}. \tag{2.7}$$

注 2.2. 如果能从一般原理出发，利用 L´évy 过程的平稳性和增量独立性等性质证明 (2.6)，那也不足为奇。然而，梅林变换的表达式 (2.5) 显然揭示了这一恒等式，而证明也很直接。

我们立即给出一个推论，它揭示了对称 L´évy 过程中的一个有趣不变性；这让人联想到对称随机游走的进入时刻分布，见 (2.9)。

推论 2.3. 设 ξ 为对称的 L´evy 过程，使得 $\xi \overset{w}{=} \hat{\xi}$ 且 $\Psi \equiv \hat{\Psi}$。若 ξ 不是复合泊松过程，则对于任意 $t > 0$,

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[I_\Psi^{-z}(t-s)\right]\mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}(s)\right]ds = \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{2.8}$$

and

$$\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-1/2}(t)\right] = t^{-1/2}. \tag{2.9}$$

若 ξ 为具有连续测度 $\Pi(dx)$ 和 $\lambda = \Pi(\mathbb{R})$ 的复合泊松过程，则对于任意$t > 0$,

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[I_\Psi^{-z}(t-s)\right]\mathbb{E}\left[I_{\hat{\Psi}}^{z-1}(s)\right]ds = \Gamma(1-z)\Gamma(z)\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}\right)\mathbb{I}_{\{t>0\}}, \tag{2.10}$$

and

$$\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-1/2}(t)\right] = (\lambda+1)\sqrt{\pi}e^{-\lambda t}\int_0^t \frac{e^{\lambda s}}{\sqrt{s}}ds. \tag{2.11}$$

注记 2.4。在布朗运动的情形下，恒等式 (2.9) 已见于 [28] 。

第二个恒等式同样是卷积恒等式，但不同时涉及 $I_\Psi(t)$ 和 $I_{\hat{\Psi}}(t)$。在陈述该恒等式之前，我们先将 (2.5) 中的比值与一个适当的拉普拉斯变换联系起来。这一点本身也很有意义，因为 (2.12) 左端出现在 I_Ψ 的梅林变换表示式中，见 [22]。

引理 2.5。设 κ 是一个二维子ordinator 的拉普拉斯指数，该二维子ordinator 是某个 L ´évy 过程 ξ 的 L ´évy–Khintchine 指数的 Wiener–Hopf 因子。那么，对任意 $q > 0$，有

$$\frac{1}{q}\frac{\Gamma(z)}{W_\kappa(q,z)} = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\kappa^{z-1}\left(L(t)\right)\right]dt, \quad \mathtt{Re}(z) > 0, \tag{2.12}$$

其中，$I_\kappa(t) = \int_0^t e^{-H(s)}ds$，$(L^{-1}(s)\ H(s))_{s\geq 0}$ 是与 κ 相关的二维上升高度过程，而 $L(t)$ 是与上升时 $L^{-1}(t)$ 相关的局部时。

这一结果为第二个卷积恒等式铺平了道路。

引理 2.6. 设 Ψ 为一个非复合泊松过程的 L ´évy-Khintchine 指数，其中过程为 L ´évy 过程 ξ 。那么，对任意 $t > 0$ ，且 $\mathrm{Re}(z) \in (0, 1)$，有

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}(t-s)\right]\mathbb{E}\left[I_{\kappa_-}^{-z}(L_-(s))\right]dsdt = \Gamma(1-z)\int_0^t U_{L_+^{-1}}(dt-s)\mathbb{E}\left[I_{\kappa_+}^{z-1}(L_+(s))\right]ds, \tag{2.13}$$

其中，$I_{\kappa_\pm}(t) = \int_0^t e^{-H_\pm(s)}ds$、$t \geq 0$ 分别为上升高度次 subordinators $H_\pm$、$L_\pm$ 的指数泛函；$L_\pm^{-1}$为上升时的局部时，而 $U_{L_\pm^{-1}}$ 为相应的势测度。

接下来，我们给出一个特殊情形下的推论。

推论 2.7. 设 Ψ 为一个非复合泊松对称 L ´évy 过程的 L ´évy-Khintchine 指数 ξ 。那么 $\kappa_\pm = \kappa$，且 $L_\pm = L$ 和 $L_\pm^{-1} = L^{-1}$ 为指标为 $1/2$的稳定次 subordinators；对任意 $\mathrm{Re}(z) \in (0, 1)$，有

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}(t-s)\right]\mathbb{E}\left[I_\kappa^{-z}(L(s))\right]ds = \int_0^t \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{t-s}}\mathbb{E}\left[I_\kappa^{z-1}(L(s))\right]ds. \tag{2.14}$$

注 2.8。在卷积层面上，$I_\Psi(t)$的矩与在局部时 $L(v)$ 处取值的 $I_\kappa(\cdot)$ 的矩相关。设 ξ为标准布朗运动。则 $I_\kappa(L(v)) = 1 - e^{-L(v)}$，由此可进一步得到指数泛函的经典矩结果

布朗运动，参见 [28]。一般而言，若设 $z = 1/2$，则 $\mathbb{E}[I_\kappa^{-1/2}(L(v))]$ 会同时出现在 (2.14) 的两个卷积中，从而得到 $\mathbb{E}[I_\Psi^{-1/2}(t)] = t^{-1/2}$，参见 (2.9)。遗憾的是，即使对于 $z = 1/2 + ib$，这一论证也不成立，因为此时我们有一个形如 $f_1 * g = f_2 * \overline{g}$ 的恒等式。

注 2.9。若能为 $\mathbb{E}\left[I_\kappa^z(L(v))\right]$ 推导出类似于 (2.18) 的级数展开，则公式 (2.13) 和 (2.14) 将有助于理解 $\mathbb{E}[I_\Psi^z(t)]$, 。从证明 [2] 中的细节以及稍后处理最简单情形时的推导可以看出，这虽是一项技术性很强但可行的工作，即 $(L^{-1}(t)\ H(t)) = (t, H(t))$。我们将此留待未来工作。

2.3 子ordinator 的指数泛函的矩

本部分的主要结果扩展并拓展了 [2] 中的定理 2.14，并为一大类子ordinator ξ 的 $\mathbb{E}[I_\phi^z(t)] = \int_0^t e^{-\xi_s} ds$ 给出了无穷级数表示。注意，非递减 L´évy 过程的拉普拉斯指数与伯恩斯坦函数之间存在一一对应关系，其对应关系为

$$\phi(z) = -\log \mathbb{E}\left[e^{-z\xi_1}\right] = -\Psi(-z), \quad \mathtt{Re}(z) \geq 0,$$

因此，使用 I_ϕ 而非 I_Ψ。回顾一下，函数 ϕ 是伯恩斯坦函数，当且仅当

$$\phi(z) = \phi(0) + dz + \int_0^\infty \left(1 - e^{-zy}\right) \mu(dy), \quad \mathtt{Re}(z) \geq 0, \tag{2.15}$$

其中，$\phi(0)$、$d \in \mathbb{R}^+$，以及 μ 是定义在 $(0, \infty)$ 上并满足 $\int_0^\infty \min\{y, 1\} \mu(dy) < \infty$ 的 σ-有限测度。根据 [22, (2.5)-(2.7)], ，对于任意伯恩斯坦函数 ϕ，我们定义

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\phi &= \inf\left\{u < 0 : \phi \in \mathbf{A}_{(u,\infty)}\right\} \in [-\infty, 0], \\ \mathbf{u}_\phi &= \inf\left\{u \in [\mathbf{a}_\phi, 0] : \phi(u) = 0\right\} \in [-\infty, 0], \\ \bar{\mathbf{a}}_\phi &= \max\left\{\mathbf{a}_\phi, \mathbf{u}_\phi\right\} \in [-\infty, 0], \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中，采用约定 $\sup \emptyset = -\infty$ 和 $\inf \emptyset = 0$；$\mathbf{A}_{(u,\infty)}$, $u \in \mathbb{R}$ 是定义在 $\{z \in \mathbb{C}$ 上、满足 $\mathtt{Re}(z) > u\}$ 的全纯函数空间。

伯恩斯坦-伽马函数 W_ϕ 是 W_κ 的单变量类比（见 (2.4)），它是在正随机变量的梅林变换空间中满足下列方程的唯一解

$$W_\phi(z+1) = \phi(z) W_\phi(z), \quad W_\phi(1) = 1, \quad \mathtt{Re}(z) \geq 0. \tag{2.17}$$

对于下一个定理，记 $\lim_{x\to\infty} = \overline{\lim}\sup_{x\to\infty}$，以及 $\lim \overline{_{x\to\infty}} = \liminf_{x\to\infty}$。

定理 2.10. 设 ϕ 是任意一个伯恩斯坦函数，即某个可能被杀死的子ordinator 的拉普拉斯指数。设 $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{\phi'(x)/\phi'(2x)} < \infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\phi'(x) = \infty$ 且 $\phi(\infty) = \infty$。那么，对所有 $t > 0$ 以及 $\mathtt{Re}(z) > -1 + \mathbf{a}_\phi \mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}$，有

$$\mathbb{E}\left[I_\phi^z(t)\right] = \frac{\Gamma(z+1)}{W_\phi(z+1)} - \sum_{k\geq 1} \frac{\prod_{j=1}^k \left(\phi(z+j) - \phi(k)\right)}{\prod_{j=1}^{k-1} \left(\phi(j) - \phi(k)\right)} \frac{e^{-\phi(k)t}}{\phi(k)} \frac{\Gamma(z+1)}{W_{\phi_{(k)}}(z+1)}, \tag{2.18}$$

其中 $\phi_{(n)}(z) := \phi(n+z) - \phi(n)$, $n \geq 1$ 是伯恩斯坦函数。

R注 2.11。让我们将结果与 [2], 中的定理 2.14 进行比较，该定理要求 s

$$\varliminf_{x\to\infty} \phi'(\lambda x)/\phi'(x) \geq C\lambda^{\beta}, \qquad \beta > -1, \tag{2.19}$$

对于 $\Lambda > 1$，在 $\lambda \in [1, \Lambda]$ 上一致地。由 (2.19) 可立即得出 $\lim_{x\to\infty}\phi'(\overline{x)/}\phi'(2x) < \infty$。此外，对于某个 $\rho > 0$，当所有 x 足够大时，$\phi'(x) \geq Cx^{\rho-1}$，参见围绕 (6.16) 的讨论] [2, 。因此，$\lim_{x\to\infty} x^2\phi'(x) = \infty$，定理 2.10 的条件均得到满足。为说明我们结果的适用范围，取 $\phi(x) = \ln\ln(x+e)$，这是一个伯恩斯坦函数。这是 [2, 注 2.15] 中的一个例子，而定理 2.14 在 [2] 中并不适用。此时$\phi'(x) = 1/((x+e)\ln(x+e))$，我们的条件也立即成立。对于更病态的情形，结论同样成立，例如 $\phi(x) = \ln\ln\ln(x+e^e)$ 和 $\phi(x) = \ln\ln\ln\ln(x+e^{e^e})$；这些情形用 [2, 定理 2.14] 完全无法处理。定理 2.10 的证明步骤与 [2], 中的步骤一致；不过，我们不得不显著加强其中借用的大多数界，例如通过在引理 3.8 中对关键乘积进行新的近似。

注 2.12。我们给出定义 (2.15) 中 L´évy 测度 μ 和漂移项 d 的一些条件，这些条件可推出定理 2.10 中关于 ϕ 的条件。首先注意到，$\phi(\infty) = \infty$ 等价于 $\mu(\mathbb{R}^+) = \infty$ 或 $d > 0$。如果 $d > 0$, 那么 $\phi'(\infty) = d > 0$，且我们的条件成立。令$d = 0$。于是，令 $\bar{\mu}(x) := \int_x^\infty \mu(dy)$，关于 $\lim_{x\to\infty} x^2\phi'(x) = \infty$的、以 μ 表示的充分条件可由以下结论得到

$$x^2\phi'(x) = x^2\int_0^\infty ye^{-xy}\mu(dy) \geq x^2e^{-1}\int_0^{\frac{1}{x}} y\mu(dy) \geq \frac{e^{-1}}{2}x\left(\bar{\mu}\left(\frac{1}{2x}\right) - \bar{\mu}\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

在我们测试的所有情形中，均有 $\lim_{x\to\infty} x^2\int_0^{1/x} y\mu(dy) = \infty$。考虑 $\lim_{x\to\overline{\infty}}\phi'(x)/\phi'(2x) < \infty$。由 ϕ' 是递减的，且 $x\phi'(x) \leq \phi(x)$，参见 [2, 命题 3.1，(3.3)], ，可知我们的条件由 $\lim_{x\to\infty}\phi(2x)/\phi(x) > 1$蕴含；例如，该条件可由~~$\lim$~~$\lim_{x\to 0+}\bar{\mu}(x/2)/\bar{\mu}(x) > 1$推出。我们强调，后一个条件~~过于~~严格，还可以从 [10]推导出其他充分条件。

注 2.13。请注意，在本文中，我们还扩展了（2.18）成立的范围。我们的结果适用于 $\mathrm{Re}(z) > -1 + \mathsf{a}_\phi\mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}$，而不是 [2], 中的定理 2.14；后者仅考虑 $\mathrm{Re}(z) > 0$。

注 2.14。L´évy 过程的指数泛函与奥恩斯坦–乌伦贝克过程有关。例如，I_Ψ 是这类过程某个子类的平稳分布，见 [3, 4, 13], ；这是由于 $I_\Psi(t)$ 描述了这类奥恩斯坦–乌伦贝克过程的演化，见 [3, 6]。因此，指数泛函的正矩与奥恩斯坦–乌伦贝克过程的正矩有关，而负矩则与适当的费勒半群相关，见[18]。

注 2.15. 在 [24, 25, 27], 中，矩的确定基于可用于数值计算的递推公式。请注意，只要找到W_ϕ 和 $W_{\phi_{(k)}}$，公式 (2.18) 也可用于此目的。为此，可通过递推公式 (2.17) 计算正整数阶矩,

从而得到 $W_\phi(n) = \prod_{k=1}^{n} \phi(k)$，而对于任意满足 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 的 $W_\phi(z)$，均可表示为包含 ϕ 的魏尔斯特拉斯无穷乘积（参见例如 [22]），

$$W_\phi(z) = \frac{e^{-\gamma_\phi z}}{\phi(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\phi(k+z)} e^{\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} z},$$

其中 $\gamma_\phi = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\phi'(k)}{\phi(k)} - \log \phi(n) \right)$。$W_\phi$ 的其他半显式表达式可见于 [12, 第 4]，节，另见 [22, 定理 4.7]此外，q-伽马函数和双伽马函数都是 W_ϕ的实例，见 [22]的引言。进一步地，对于一般的 W_ϕ，存在斯特林型近似，见 [2, 16], ，这些近似也可用于数值计算。

当 $\phi(0) = 0$ 且 $\mathsf{a}_\phi < 0$ 时，我们至少可以计算 $I_\phi(t)$ 的一些负整数阶矩 .

推论 2.16。设 ϕ 是一个伯恩斯坦函数，使得 $\phi(0) = 0$且 $\mathsf{a}_\phi < 0$。假设 $\varlimsup_{x\to\infty} \phi'(x)/\phi'(2x) < \infty$，$\lim_{x\to\infty} x^2 \phi'(x) = \infty$ 且 $\phi(\infty) = \infty$。那么，对于任意满足$-1 + \mathsf{a}_\phi < l < 0$的 $l \in \mathbb{Z}$，对于 $t > 0$，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_\phi^l(t) \right] &= \phi'(0) \frac{\prod_{j=1}^{-l-1} -\phi(j+l)}{(-l-1)!} + \sum_{k\geq 1} \frac{\prod_{j=1}^{-l-1} (\phi(k) - \phi(j+l))}{(-l-1)!} \phi'(k) e^{-\phi(k)t} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{\prod_{j=1}^{-l-1} (\phi(k) - \phi(j+l))}{(-l-1)!} \phi'(k) e^{-\phi(k)t}, \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

其中，$\phi'(0)$ 的存在性源于这样一个事实：$\mathsf{a}_\phi < 0$。

注 2.17. 对于 $l = -1$，关系式 (2.20) 始终成立，此时可得简洁的表达式

$$\mathbb{E}\left[I_\phi^{-1}(t) \right] = \sum_{k\geq 0} \phi'(k) e^{-\phi(k)t} = \mathbb{E}\left[\xi_1\right] + \mathbb{E}\left[\frac{\xi_t e^{-\xi_t}}{1 - e^{-\xi_t}} \right], \qquad (2.21)$$

其中最后一部分源自 $\mathbb{E}[\xi_t e^{-k\xi_t}] = \phi'(k) e^{-\phi(k)}$。如果 $\mathsf{a}_\phi < -1$，则利用 (2.20) 和 (2.21)，第二个负矩可表示为

$$\mathbb{E}\left[I_\phi^{-2}(t) \right] = \sum_{k\geq 0} \phi'(k) \left(\phi(k) - \phi(-1) \right) e^{-\phi(k)t} = -\frac{d}{dt} \mathbb{E}\left[I_\phi^{-1}(t) \right] - \phi(-1) \mathbb{E}\left[I_\phi^{-1}(t) \right].$$

最后一个方程也见于 [24, 定理 2 (42)]，而我们在此求得了它的解。事实上，[24] 中的定理 2 给出了 $I_\phi(t)$ 的负矩的一般递推关系，其解由 (2.20) 给出。

2.4 示例与讨论

我们首先给出引理 2.1 的一些进一步推论，涉及 $I_\Psi(t)$ 的 $n - 1/2$ 阶矩，其中 $n \geq 1$。考虑一个未杀死的对称 L´évy 过程 ξ，其 Lévy–Khintchine 指数 Ψ 不是复合泊松过程。假设对于某个 $\epsilon > 0$，有 $\Psi(-1/2 - \epsilon) < \infty$，

并注意到，根据 [22], (2.5) 中的定理 2.4 和推论 2.3，对于 $q > \Psi(-1/2) = \Psi(1/2)$，我们得到

$$\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\Psi^{\frac{1}{2}}(t)\right]dt = \frac{1/2}{q-\Psi\left(-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-\frac{1}{2}}(t)\right]dt = \frac{1/2}{q-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{q}}.$$

右侧是拉普拉斯变换的乘积，并且由于该恒等式对所有 $q > \Psi(-1/2) = \Psi(1/2)$ 都成立，我们得到

$$\mathbb{E}\left[I_\Psi^{\frac{1}{2}}(t)\right] = \frac{e^{\Psi\left(\frac{1}{2}\right)t}}{2}\int_0^t e^{-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)s}\frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

假设对某个 $\varepsilon > 0$，$\Psi(n-1/2+\varepsilon) = \Psi(-n+1/2-\varepsilon) < \infty$，并在 [22], 中递归应用定理 2.4，我们得到对于 $q > \Psi(n-1/2)$

$$\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\Psi^{n-\frac{1}{2}}(t)\right]dt = \left(\prod_{k=1}^n \frac{k-\frac{1}{2}}{q-\Psi\left(k-\frac{1}{2}\right)}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{q}}.$$

因此，$\mathbb{E}[I_\Psi^{n-1/2}(t)]$ 是测度 $t^{-1/2}dt$ 和 $\nu_k(dt) = (k-1/2)e^{\Psi(k-1/2)t}dt$, $1 \le k \le n$的 $(n+1)$ 重卷积，其中这些测度定义在 $\mathbb{R}^+$ 上。

我们接下来给出一些由定理 2.10 引出的例子。为此，我们先介绍几个后文将用到的伯恩斯坦函数。设

$$\phi^{\mathbf{ln}}(x) = \ln(x+1), \quad \phi_\alpha(x) = x^\alpha,\ \alpha \in (0,1), \quad \phi^{\mathbf{ln_2}}(x) = \ln\ln(x+e).$$

我们首先讨论 $W_{\phi_{(k)}}$、$k \ge 1$，其出现在定理 2.10 中。注意，由 (2.15) 可知，

$$\phi_{(k)}(z) := \phi(k+z) - \phi(k) = dz + \int_0^\infty (1-e^{-zy})e^{-ky}\mu(dy)$$

它们是伯恩斯坦函数，具有 L´évy 测度 $e^{-ky}\mu(dy)$ 和相同的漂移项。一般而言，除了使用注 2.15 中提到的斯特林近似，并将其与 W_ϕ 的近似联系起来之外，没有显式方法将 $W_{\phi_{(k)}}$ 与 W_ϕ 联系起来。然而，考虑 ϕ_α 并令$\phi^*(x) = \phi_{(1)}$，$_\alpha(x) = (x+1)^\alpha - 1$。设 $\phi_{(k)}$，$_\alpha(z) = k^\alpha\phi^*(z/k) = k^\alpha\phi^*_{(k)}(z)$，其中 $\phi^*_{(k)}$ 是一个伯恩斯坦函数。根据 [22, 定理 4.1 (5)], ，我们有 $W_{\phi_{(k)}}$，$_\alpha(z) = k^{\alpha(z-1)}W_{\phi^*_{(k)}}(z)$，因此由 (2.17) 可得 $W_{\phi^*_{(k)}}(z) = W_{\phi^*}(z/k)$。因此，级数 (2.18) 仅取决于$W_{\phi_\alpha}$ 和 W_{ϕ^*}。另一方面，对于 $\phi^{\mathbf{ln}}$，我们看到 $\phi^{\mathbf{ln}}_{(k)}(x) = \ln(x/(k+1)+1) = \phi^{\mathbf{ln}}(x/(k+1))$，在这种情况下，级数 (2.18) 仅取决于 W_ϕ。

现在我们给出使用定理 2.10 计算矩的具体示例。注意，$\phi^{\mathbf{ln}}$ 是伽马子ordinator 的指数，其 L´evy 测度为 $\mu(dy) = y^{-1}e^{-y}dy$，根据注 2.11，它满足定理 2.10 的假设。由于 $\phi^{\mathbf{ln}}(0) = 0$，推论 2.16 也适用于 $\mathsf{a}_{\phi^{\mathbf{ln}}} = -1$。因此

$$\mathbb{E}\left[I^{-1}_{\phi^{\mathbf{ln}}}(t)\right] = \sum_{k\ge1}\frac{1}{k^{t+1}} = \zeta(t+1),$$

这就是著名的黎曼ζ函数。由 (2.21) 可见，黎曼ζ函数可以表示为伽马子ordinator在某个固定点处的特定函数的期望，

$$\zeta(t+1) = \mathbb{E}[\xi_1] + \mathbb{E}\left[\frac{\xi_t e^{-\xi_t}}{1-e^{-\xi_t}}\right],$$

由此，利用 ξ 是子ordinator，我们可以很容易地验证 ζ 在 1 处有一个简单极点，因为 $\lim_{t\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{\xi_t e^{-\xi_t}}{1-e^{-\xi_t}}\right]=1$。事实上，这也可由 [22, 定理 2.18, （2.40）], 推出，该定理断言 $\lim_{t\to 0}\mathbb{E}[I_{\phi^{\ln}}^{-1}(t)]=1$。在这种情况下， -2nd 矩并未定义良好。

考虑具有截断 Lévy 测度 $\mu_1(dy)=y^{-1}e^{-y}\mathbb{I}_{\{y<1\}}dy$ 和拉普拉斯指数 $\phi_1(x)$的子ordinator。那么

$$\phi_1'(x)=\left(1-e^{-x-1}\right)/(x+1) \text{ and } \phi_1(x)=\int_0^x\frac{1-e^{-y-1}}{y+1}dy=\phi^{\ln}(x)-A(x),$$

其中 $A(x)=\int_0^x\frac{e^{-y-1}}{y+1}dy$; 因此， $\mathbb{E}[I_{\phi_1}^{-1}(t)]=\sum_{k\geq 0}\frac{1-e^{-k-1}}{k+1}()_{t+1}e^{tA(k)}$。由于 $\mathrm{a}_{\phi_1}=-\infty$，我们可以计算所有负矩，其中第二个负矩为

$$\mathbb{E}\left[I_{\phi_1}^{-2}(t)\right]=\sum_{k\geq 0}\frac{1-e^{-k-1}}{(k+1)^{t+1}}\left(\ln(k+1)-A(k)+\int_0^1\frac{1-e^{-y}}{y}dy\right)e^{tA(k)}.$$

最后，对于 $\phi^{\ln_2}$，我们可以轻松计算出 $\mathbb{E}[I_{\phi^{\ln_2}}^{-1}(t)]=\sum_{k\geq 0}[(k+e)\ln^{t+1}(k+e)]^{-1}$。人们可以构造许多类似的可计算示例，其中近似效果足够好。

级数展开还给出了收敛速度，因为 $t\to\infty$。若 $z=a+ib$，则我们可以利用 (3.23) 估计级数尾项。更准确地说，对于任意 $l>1$，由引理 3.8 可得

$$\begin{aligned}&e^{\phi(l+1)t}\left|\mathbb{E}\left[I_\phi^z(t)\right]-\frac{\Gamma(z+1)}{W_\phi(z+1)}+\sum_{k\leq l}\frac{\prod_{j=1}^k(\phi(z+j)-\phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j)-\phi(k))}\frac{e^{-\phi(k)t}}{\phi(k)}\frac{\Gamma(z+1)}{W_{\phi_{(k)}}(z+1)}\right|\\&\leq K\sum_{k\geq l+1}\frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^{1+a}}e^{c\left(|a|+\frac{a^2}{2}\right)\phi(k)\left(\frac{8\ln k}{k^2\phi'(k)}+\frac{\varphi'(y_k)}{\varphi^2(y_k)}\right)}e^{-(\phi(k)-\phi(l+1))t},\end{aligned}$$

其中级数　　右侧的级数在定理 2.10 的条件下收敛。

3 证明

我们从引理 2.1 的证明开始。

引理 2.1 的证明。利用 (2.5) 可得，当 $\mathrm{Re}(z)\in(0,1)$ 时，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-z}(t)\right]dt&=\frac{\mathcal{M}_{I_\Psi}(1-z)}{q}=\frac{h^z(q)}{\kappa_+(q,0)}\frac{\Gamma(1-z)}{W_{\kappa_+}(q,1-z)}W_{\kappa_-}(q,z),\\\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_{\hat\Psi}^{1-z}(t)\right]dt&=\frac{\mathcal{M}_{I_{\hat\Psi}}(z)}{q}=\frac{h^{1-z}(q)}{\kappa_-(q,0)}\frac{\Gamma(z)}{W_{\kappa_-}(q,z)}W_{\kappa_+}(q,1-z),\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中我们使用了 $h(q)=h(q)$，参见 (2.3)，以及 $\hat{}\kappa_\pm=\kappa_{\mp}$。

将最后两个表达式相乘，我们很容易得到

$$\frac{\mathcal{M}_{I_\Psi}(1-z)}{q}\frac{\mathcal{M}_{\hat\Psi}(z)}{q}=\frac{h^2(q)}{h(q)\kappa_+(q,0)\kappa_-(q,0)}\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{h^2(q)}{q}\Gamma(1-z)\Gamma(z).\tag{3.2}$$

如果 ξ 不是复合泊松过程，那么 $h(q) \equiv 1$。在这种情况下，(3.2) 的左侧是卷积的拉普拉斯变换，它出现在 (2.6) 的左侧；而 (3.2) 的右侧则是赫维赛德函数的拉普拉斯变换，由此我们得到 (2.6)。否则，如果 $\Pi(\mathbb{R}) = \lambda < \infty$ 且 Π 连续，那么由 (2.3) 得到如下结果

$$h(q) = e^{-\int_0^\infty \left(e^{-t}-e^{-qt}\right)e^{-\lambda t}\frac{dt}{t}} = e^{\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+q}\right)} = \frac{\lambda+1}{\lambda+q}, \tag{3.3}$$

其中我们用到了 $\mathbb{P}(\xi_t = 0) = e^{-\lambda t}$ 和弗鲁拉尼积分。因此， $h^2(q)$是函数 $(\lambda+1)^2 e^{-\lambda t} t \mathbb{I}_{\{t>0\}}$ 的拉普拉斯变换，而 $h^2(q)/q$ 是.....的拉普拉斯变换

$$\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}\right)\mathbb{I}_{\{t>0\}}.$$

由此我们得证。 □

推论 2.3 的证明。利用 $I_\Psi(t) \overset{d}{=} I_{\hat{\Psi}}(t)$（当$\xi$ 为对称的时），关系式 (2.8) 可由 (2.6) 直接得出。为证明 (2.9)，我们对 $z = 1/2$ 使用 (2.8)，并注意到此时 (2.8) 就是 $\mathbb{E}[I_\Psi^{-1/2}(s)]$ 与自身的卷积。接着利用 (3.1) 得到

$$\frac{\mathcal{M}_{I_\Psi}\left(\frac{1}{2}\right)}{q} = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\Psi^{-\frac{1}{2}}(t)\right]dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q}} = \int_0^\infty e^{-qt}t^{-\frac{1}{2}}dt.$$

这就证明了 (2.9)。关系式 (2.10) 可由 (2.7) 直接得出，而 (2.11) 则可通过类似方法，在 (2.10) 中令 $z = 1/2$，并借助上文的 (3.3) 对测度进行识别，从而得出。 □

引理 2.5 的证明。固定 $q > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$，使得 $\mathrm{Re}(z) > 0$。众所周知，参见 [2, (4.1)] 或 [22, 定理 2.4]，中的一般表达式，

$$\frac{\Gamma(z)}{W_\kappa(q,z)} = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\mathbf{e}_{\kappa(\mathbf{q},\mathbf{0})}} e^{-V_s}ds\right)^{z-1}\right],$$

其中，$V = (V_s)_{s\geq 0}$ 是与伯恩斯坦函数 $\kappa_q(z) = \kappa(q,z) - \kappa(q,0)$ 相关的非杀死子ordinator，且 $\mathbf{e}_{\kappa(\mathbf{q},\mathbf{0})}$ 是一个与 V 独立的指数随机变量，其参数为$\kappa(q,0) > 0$。接下来，我们证明 $(V_s)_{s\leq \mathbf{e}_{\kappa(\mathbf{q},\mathbf{0})}} \overset{w}{=} (H_s)_{s\leq L(\mathbf{e}_q)}$，其中 (L^{-1}, H) 是二元梯子子ordinator， L 是局部时，$\mathbf{e}_q$ 是一个与 (L^{-1}, H) 独立的指数随机变量，其参数为 q。取 $s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ 和 θ_1，.....，$\theta_n \in \mathbb{R}$。由此可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \theta_j\left(V_{s_j}-V_{s_{j-1}}\right)}\mathbb{I}_{\{\mathbf{e}_{\kappa(\mathbf{q},\mathbf{0})}>s_n\}}\right] &= \kappa(q,0)\int_0^\infty e^{-\kappa(q,0)t}\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \theta_j\left(V_{s_j}-V_{s_{j-1}}\right)}\mathbb{I}_{\{t>s_n\}}\right]dt \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \theta_j\left(V_{s_j}-V_{s_{j-1}}\right)}\right]e^{-\kappa(q,0)s_n} = e^{-\kappa(q,0)s_n}\prod_{j=1}^n e^{(s_j-s_{j-1})(-\kappa(q,-i\theta_j)+\kappa(q,0))} \\
&= \prod_{j=1}^n e^{-(s_j-s_{j-1})\kappa(q,-i\theta_j)},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \theta_j\left(H_{s_j}-H_{s_{j-1}}\right)}\mathbb{I}_{\{L(\mathbf{e}_q)>s_n\}}\right] &= q\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \theta_j\left(H_{s_j}-H_{s_{j-1}}\right)}\mathbb{I}_{\{L(t)>s_n\}}\right]dt \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \theta_j\left(H_{s_j}-H_{s_{j-1}}\right)}e^{-qL^{-1}(s_n)}\right] = \prod_{j=1}^n e^{-(s_j-s_{j-1})\kappa(q,-i\theta_j)};
\end{aligned}$$

因此，$(V_s)_{s\le \mathbf{e}_{\kappa(\mathbf{q},\mathbf{0})}} \overset{w}{=} (H_s)_{s\le L(\mathbf{e}_q)}$。将其代入上式，得到

$$\frac{\Gamma(z)}{W_\kappa(q,z)} = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{L(\mathbf{e}_q)} e^{-H_s} ds\right)^{z-1}\right].$$

至此，证明完成。 □

接下来，我们继续证明引理 2.6。

引理 2.6 的证明。由于 ξ 不是复合泊松过程，因此 $\kappa_+(q,0)\kappa_-(q,0) = q$且 $\kappa_\pm = \phi_\pm$，由 (2.5) 可知，对于任意 $q>0$ 且 $\mathrm{Re}(z)\in(0,1)$，

$$\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}(t)\right] dt = \frac{1}{\kappa_+(q,0)}\frac{\Gamma(z)}{W_{\kappa_+}(q,z)} W_{\kappa_-}(q,1-z).$$

整理上述方程，得到

$$\left(\frac{1}{q}\frac{\Gamma(1-z)}{W_{\kappa_-}(q,1-z)}\right)\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[I_\Psi^{z-1}(t)\right] dt = \frac{\Gamma(1-z)}{\kappa_+(q,0)}\left(\frac{1}{q}\frac{\Gamma(z)}{W_{\kappa_+}(q,z)}\right).$$

最后，利用 (2.12)，并注意到 κ_+^{-1}是势测度$U_{L_+^{-1}}$ 的拉普拉斯变换（见 [5, 第三章],），通过辨认两个卷积的拉普拉斯变换，即可完成证明。

□

推论 2.7 的证明。该证明可由引理 2.6 和 (2.13) 得出。首先注意，由于 ξ不是复合泊松过程，因此 $h(q)\equiv 1$。其次，由对称性，$\kappa_\pm(q,0)=\sqrt{q}$，因此$U_{L_\pm^1}(ds) = ds/(\sqrt{s}\Gamma((1/2)))$。将这些信息代入 (2.13)，即可得到 (2.14)。 □

我们从一些预备结果开始证明定理 2.10。回顾式 (2.16) 中的量，$\mathrm{a}^\phi = \inf\{u<0:\ \phi\in A_{(u,\infty)}\}\in[-\infty,0]$, $\mathrm{u}^\phi = \inf\{u\in[\mathrm{a}^\phi,0]:\ \phi(u)=0\}\in[-\infty,0]$, $^-\mathrm{a}^\phi = \max\{\mathrm{a}^\phi,\mathrm{u}_\phi\}\in[-\infty,0]$.

引理 3.1. 设 ϕ 为任意伯恩斯坦函数。那么，对于任意满足 $a>\mathrm{a}^\phi$ 的 $z=a+ib$ 以及满足 $x-y-a\neq 0$的实数 $x>y\ge 0$，有

$$\begin{aligned}|\phi(x)-\phi(z+y)| &\le \frac{|x-y-z|}{|x-y-a|}\,|\phi(x)-\phi(a+y)|\\ &\le |x-y-z|\,\phi'(\min\{x,a+y\}),\end{aligned} \tag{3.4}$$

并且，若 $x-y-a=0$，则

$$|\phi(x)-\phi(x+ib)| \le \int_0^{|b|}\left|\phi'(x+iv)\right| dv \le |b|\phi'(x). \tag{3.5}$$

此外，对于 $x>y>0$,

$$(x-y)\phi'(x)\le \phi(x)-\phi(y)\le (x-y)\phi'(y). \tag{3.6}$$

证明。设 $a \geq 0$。若 $\mathrm{Re}(z) + y = x$，则（3.5）由此得出

$$|\phi(x) - \phi(x+ib)| \leq \int_0^{|b|} \left|\phi'(x+iv)\right| dv \leq |b|\phi'(x),$$

其中我们使用了 $|\phi'(z)| \leq \phi'(\mathrm{Re}(z))$，见 [2, 命题 5.2，（5.9）]。若 $x - y - a \neq 0$，则

$$|\phi(x) - \phi(z+y)| = \left|\int_{z+y\mapsto x} \phi'(w)dw\right| = \left|1 - \frac{z}{x-y}\right| \left|\int_0^{x-y} \phi'\left(z+y+\left(1-\frac{z}{x-y}\right)s\right) ds\right|$$
$$\leq \left|1 - \frac{z}{x-y}\right| \left|\int_0^{x-y} \phi'\left(a+y+\left(1-\frac{a}{x-y}\right)s\right) ds\right| = \frac{|x-y-z|}{|x-y-a|} |\phi(x) - \phi(a+y)|,$$

在不等式中，我们使用了 $|\phi'(z)| \leq \phi'(\mathrm{Re}(z))$。因此，（3.4）的第一部分得证，而第二部分利用了 ϕ' 单调不减这一事实，见 [2, 命题 3.1 (2)]。（3.6）中的关系式是显然的。

□

下一个引理同样源自 [2] 中最初较为粗略的估计。

引理 3.2。设 W_ϕ 是一个伯恩斯坦-伽马函数。则 $W_\phi^{-1} \in \mathrm{A}_{(\mathbf{a}_\phi,\infty)}$ 并且，对于任意 $\mathrm{Re}(z) > \max\{-2 + \bar{\mathrm{a}}_\phi, -1 + \mathrm{a}_\phi\}$，

$$\left|\frac{1}{W_\phi(z+1)}\right| \leq C \frac{\left|\phi(z+1)\sqrt{|\phi(z+2)|}\right|}{\sqrt{\phi(1)}} e^{-\int_1^{2+\mathrm{Re}(z)} \ln\phi(x)dx}, \tag{3.7}$$

其中 $C > 0$ 是 ϕ 和 z 中的通用常数。

证明。陈述 $W_\phi^{-1} \in \mathrm{A}_{(\mathbf{a}_\phi,\infty)}$ 源自 [22, 定理 4.1，（1）]，，该定理表明 W_ϕ 在 $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{a}_\phi$ 中无零点且亚纯。随后，（3.7）的证明沿用 [2, 引理 4.4，第 491]，页中的思路，但不对含有 ϕ 的因子使用任何估计，并注意到 $\ln\phi(x)$ 在 $x > \bar{\mathrm{a}}_\phi$ 上有定义，因为 $\bar{\mathrm{a}}_\phi$ 控制着 ϕ 的第一个零点或解析性丧失。作者慷慨地应用了他们自己关于 W_ϕ 的渐近展开（见 [2, 定理 2.9，（2.15）]），但省略了分母中的平方根，见上文（1） $\sqrt{\phi}$。这个平方根~~对于~~我们的估计至关重要。

□

下面的估计显而易见，但其一般性足以使我们将其单独陈述。

引理 3.3. 设 ϕ 是一个非常数伯恩斯坦函数，且 $z = a + ib$。若 $a > -1 - \mathrm{a}_\phi$ 且 $a \notin \{1, 2, \cdots, k-1\}$，则存在 $K := K(z) > 0$ 使得

$$\left|\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(z+j) - \phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j) - \phi(k))}\right| \leq K \left|\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(k) - \phi(a+j))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(k) - \phi(j))}\right|. \tag{3.8}$$

此外，$K(z)$ 在 $\{z : \mathrm{Re}(z) > -1+\mathrm{a}_\phi\}\backslash\{1, 2, \cdots, k-1\}$ 上局部有界。若 $a \in \{1, 2, , \cdots, k-1\}$，则存在 $K > 0$ 使得

$$\left|\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(z+j) - \phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j) - \phi(k))}\right| \leq K \frac{|b|\phi'(k)}{\phi(k) - \phi(k-a)} \left|\frac{\prod_{j=1, j+a\neq k}^{k-1} \phi(k) - \phi(j+a)}{\prod_{j=1, j+a\neq k}^{k-1}(\phi(k) - \phi(j))}\right|. \tag{3.9}$$

证明。由引理 3.1 的关系式 (3.4) 可得，当 $a \notin \{1, 2, \cdots, k-1\}$ 时，

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(z+j) - \phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(j) - \phi(k))} \right| \leq \prod_{j=1}^{k-1} \left| 1 - \frac{ib}{k-j-a} \right| \left| \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(k) - \phi(j+a))}{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(k) - \phi(j))} \right|.$$

显然，第一个乘积局部一致收敛，因此 (3.8) 成立。提出含有 $j = k - a$ 的项后，关系式 (3.9) 可由 (3.5) 得出。 □

下一个引理以更便于使用的形式概括并拓展了 [2] 中的引理 4.3。

引理 3.4. 设 ϕ 是一个非恒定伯恩斯坦函数。则对任意 $c > 0$ 和 $A > 1$，存在 $C_{\phi,\ c,\ A} \in [1, \infty)$，当 A 固定时关于 c 单调递增，当 c 固定时关于 A 单调递减，使得

$$\frac{\phi'(x)}{\phi'(x+c)} \leq C_{\phi,c,A}, \quad \text{for all } x > A. \tag{3.10}$$

此外，$C^*_{\phi,\ c} := \lim_{A\to\infty} C_{\phi,\ c,\ A} = \lim_{x\to\infty} \phi'(x)/\phi'(x+c) \in [1, \infty)$。若对某个 $y_0 > 0$，

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\phi'(x)}{\phi'(x+y_0)} := \beta(y_0) > 1,$$

那么，对任意 $y > 0$，$\underline{\lim}\, \phi'(x)/\phi'(x+y) = \beta(y) > 1$ 且 $\phi(\infty) < \infty$，也就是说，底层次级过程实际上是一个复合泊松过程，并且存在 $\gamma > 0$，使得 $\lim_{x\to\infty} e^{\gamma x}\phi'(x) = 0$。

证明。第一部分是对 [2] 中引理 4.3 的直接改写。假设对于某个 $y > 0$，有 $\underline{\lim}_{x\to\infty} \phi'(x)/\phi'(x+y) = \beta(y) = \beta > 1$。由 ϕ' 的单调性可知，这对任意 $y > 0$ 都成立。因此，对于任意 $\delta < 1 - \beta^{-1}$，存在 $x_0 > 0$，使得对任意 $x \geq x_0$，$\phi'(x+y) \leq \beta_\delta \phi'(x)$，其中 $\beta_\delta = \beta^{-1} + \delta < 1$。递归地，我们得到 $\phi'(x_0 + ny) \leq \beta_\delta^n \phi'(x_0)$。由此，再结合 ϕ 是非增函数这一事实（见 [2, 命题 3.1, （2）], ），我们首先得出

$$\phi(\infty) - \phi(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \phi'(x)dx \leq \sum_{n\geq 1} \beta_\delta^n \phi'(x_0) = \frac{\beta_\delta}{1-\beta_\delta} \phi'(x_0) < \infty,$$

因此 $\phi(\infty) < \infty$，这等价于相应的子ordinator 具有有限活动，见[5, 第 I 章]。其次，对于任意 $x \in [x_0 + ny, x_0 + (n+1)y]$，我们得到

$$\phi'(x) \leq \phi'(x_0 + ny) \leq \beta_\delta^n \phi'(x_0),$$

由此我们得出，存在 $\gamma > 0$，使得 $\lim_{x\to\infty} e^{\gamma x}\phi'(x) = 0$。 □

下一个引理将在相当一般的情形下阐明 (3.8)。

引理 3.5. 设 ϕ 为伯恩斯坦函数，满足 $\lim_{x\to\infty} \phi''(x)/\phi'(x) = 0$。那么，对于任意 $1 > \epsilon > 0$ 和 $z = a + ib$，若满足 $a \geq 0$，则对所有充分大的 k，有：

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(z+j) - \phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(j) - \phi(k))} \right| \leq K \left(\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} \right)^{a(1-\epsilon)}, \tag{3.11}$$

其中某个 $K = K(z) > 0$在 $\{z\colon \mathrm{Re}(z) > -1 + \mathsf{a}_\phi\} \setminus \{1, 2, \cdots\}$ 上局部有界。若改为$a \in (\mathsf{a}_\phi - 1, 0)$，则对于任意 $1 > \epsilon > 0$，对所有充分大的 k，有：

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(z+j) - \phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1} (\phi(j) - \phi(k))} \right| \leq K \left(\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} \right)^{a(1+\epsilon)}, \tag{3.12}$$

对于某个 $K = K(z) > 0$，它在 $\{z$ 上局部有界：$\mathrm{Re}(z) > -1 + \mathsf{a}_\phi\} \setminus \{1, 2, \cdots\}$。

证明。设 $a \geq 0$ 为非整数。我们利用不等式 (3.8) 将 z 替换为 $a = \mathrm{Re}(z)$。K 的性质由该不等式得出。此后出现的常数都是显式的，且在 a 中局部有界。于是，对于任意固定的 $j \geq 1$，有

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\phi(k) - \phi(a+j)}{\phi(k) - \phi(j)} \right| \in (0, \infty).$$

因此，此后对于固定的 $j_0 \geq 1$，我们总可以使用 $k \geq j_0$，并将前 j_0 项替换为常数。接下来，注意到

$$\left| \frac{\phi(k) - \phi(a+j)}{\phi(k) - \phi(j)} \right| = 1 - \frac{\phi(a+j) - \phi(j)}{\phi(k) - \phi(j)}. \tag{3.13}$$

于是，无论 $a > 0$ 如何，令 $l > a$，由 (3.13) 可得，对于 $j \leq k - l$，

$$\left| \frac{\phi(k) - \phi(a+j)}{\phi(k) - \phi(j)} \right| = 1 - \frac{\phi(a+j) - \phi(j)}{\phi(k) - \phi(j)} > 0,$$

因为 $\phi(j+a) < \phi(k)$。对于含有 $k - 1 \geq j > k - l$ 的项，利用 ϕ' 单调不增这一性质（见 [2,命题 3.1，(2)]），可以验证

$$\frac{\phi(a+j) - \phi(j)}{\phi(k) - \phi(j)} \leq a \frac{\phi'(k-l)}{\phi'(k)},$$

根据引理 3.4，当 k 足够大时，这些项都有界。只需引入一个关于 $a > 0$ 局部有界的常数，便可省去这些项。然后，在 (3.13) 中使用标准不等式 $\ln(1-x) \leq -x$（对 $x \in \in (0, 1)$），得到

$$\begin{aligned}
\prod_{j=j_0}^{k-l} \left| \frac{\phi(k) - \phi(a+j)}{\phi(k) - \phi(j)} \right| &\leq \exp\left\{ - \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi(a+j) - \phi(j)}{\phi(k) - \phi(j)} \right\} \\
&= \exp\left\{ -a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi'(j)}{\phi(k) - \phi(j)} - \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\int_j^{j+a} \int_j^x \phi''(y) dy dx}{\phi(k) - \phi(j)} \right\} \\
&\leq \exp\left\{ -a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi'(j)}{\phi(k) - \phi(j)} - \frac{a^2}{2} \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j)}{\phi(k) - \phi(j)} \right\} \\
&\leq \exp\left\{ -a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi'(j-1)}{\phi(k) - \phi(j)} - a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j-1)}{\phi(k) - \phi(j)} - \frac{a^2}{2} \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j)}{\phi(k) - \phi(j)} \right\} \\
&\leq \exp\left\{ -a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi'(j-1)}{\phi(k) - \phi(j)} - \left(a + \frac{a^2}{2} \right) \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j-1)}{\phi(k) - \phi(j)} \right\},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

在最后三个不等式中，我们用到了 $-\phi''$ 为正且单调不增这一性质；这是因为 ϕ' 完全单调（见 [2, 命题 3.1，(2)]），且 $\phi'(j) \geq \phi'(j-1) + \phi''(j-1)$。用积分估计 (3.14) 中的第一项，得

$$-a\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi'(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)} \leq -a\int_{j_0-1}^{k-l}\frac{\phi'(x)}{\phi(k)-\phi(x)}dx,$$

我们得到最后一个不等式中借助引理 3.4 可得，对于所有足够大的 k ，

$$\begin{aligned}\prod_{j=j_0}^{k-l}\left|\frac{\phi(k)-\phi(a+j)}{\phi(k)-\phi(j)}\right| &\leq \left(\frac{\phi(k)-\phi(k-l)}{\phi(k)-\phi(j_0-1)}\right)^a \exp\left\{-\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi''(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)}\right\}\\ &\leq \left(l\frac{\phi'(k-l)}{\phi(k)-\phi(j_0-1)}\right)^a \exp\left\{-\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi''(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)}\right\}\\ &\leq (2C_{\phi,l}l)^a\left(\frac{\phi'(k)}{\phi(k)-\phi(j_0-1)}\right)^a \exp\left\{-\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi''(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)}\right\}. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

若 $\lim_{x\to\infty}\phi''(x)/\phi'(x) = 0$，则由于 $-\phi''$ 为正且单调不增，

$$-\phi''(j-1) = \mathrm{o}\left(\phi'(j-1)\right),$$

通过用 (3.15) 最后一个指数项所对应的同一积分进行估计，我们便可得出对任意 $\epsilon > 0$ 都成立的 (3.11)；此前在推导 (3.15) 的步骤中我们也用到了该积分。下面简要概述$a \in (\mathsf{a}_\phi - 1, 0)$ 的证明。我们同样可以只考虑大于某个固定 j_0 的指标。在这种情况下，由于

$$\left|\frac{\phi(k)-\phi(a+j)}{\phi(k)-\phi(j)}\right| = 1 + \frac{\phi(j)-\phi(a+j)}{\phi(k)-\phi(j)},$$

我们无需舍弃含 $j \geq k-l$ 的项，但仍保留这一截断。然后，利用对于 $x \in \in(0,1)$，$\ln(1+x) \leq x$，且 $\phi'(j) \geq \phi'(j-1) + \phi''(j-1)$，

$$\begin{aligned}\prod_{j=j_0}^{k-l}\left|\frac{\phi(k)-\phi(a+j)}{\phi(k)-\phi(j)}\right| &\leq \exp\left\{\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi(j)-\phi(a+j)}{\phi(k)-\phi(j)}\right\}\\ &= \exp\left\{a\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi'(j)}{\phi(k)-\phi(j)} - \sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\int_{j+a}^{j}\int_{x}^{j}\phi''(y)dydx}{\phi(k)-\phi(j)}\right\}\\ &\leq \exp\left\{a\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi'(j)}{\phi(k)-\phi(j)} - \frac{a^2}{2}\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi''(j+a)}{\phi(k)-\phi(j)}\right\}\\ &\leq \exp\left\{a\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi'(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)} + a\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi''(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)} - \frac{a^2}{2}\sum_{j=j_0}^{k-l}\frac{\phi''(j+a)}{\phi(k)-\phi(j)}\right\}.\end{aligned}$$

现在，根据引理 3.4 和这些假设，我们得到

$$\phi''(j+a) = \mathrm{o}\left(\phi'(j)\right), \qquad \phi''(j-1) = \mathrm{o}\left(\phi'(j)\right),$$

证明与 $a>0$ 的情形相同。

当 a 为正整数时，可类似地将 (3.9) 应用于 (3.14) 来处理，并按照处理 (3.14) 中其余项的相同方式进行；在 (3.14) 中转到指数层面后，我们可以添加一个指标为 $j=k-a$ 的项，代价是引入一个常数。

□

下面的结果改进了前一个引理。由于 ϕ 是递增的，我们用 φ 表示其反函数。

引理 3.6. 设 ϕ 是一个伯恩斯坦函数，满足 $\lim_{x\to\infty}\phi''(x)/\phi'(x)=0$。设 $z=a+ib$。若$a\geq 0$, 则对所有充分大的 k，有

$$\left|\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(z+j)-\phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j)-\phi(k))}\right|\leq K\left(\frac{\phi'(k)}{\phi(k)}\right)^a e^{8C\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\frac{\phi(k)}{k\phi'(k)}\left(\frac{\ln(k)}{k}+\frac{1}{\varphi(\phi(k)/2)}\right)}, \tag{3.16}$$

对于某个 $K:=K(z)>0$，它在 $\{z:\mathrm{Re}(z)\geq 0\}\setminus\{1,2,\cdots\}$ 上局部有界，且为常数$C>0$。若 $\overline{\lim_{x\to\infty}}\phi'(x)/\phi'(2x)<\infty$，则对于 $a\geq 0$，有

$$\left|\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(z+j)-\phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j)-\phi(k))}\right|\leq K\left(\frac{\phi'(k)}{\phi(k)}\right)^a e^{C\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\phi(k)\left(\frac{8c\ln k}{k^2\phi'(k)}+\frac{\varphi'(y_k)}{\varphi^2(y_k)}\right)}, \tag{3.17}$$

对于某个 $K:=K(z)>0$，它在 $\{z:\mathrm{Re}(z)\geq 0\}\setminus\{1,2,\cdots\}$ 上局部有界，而常数$C>0$ 和 $c>0$ 是常数，其中 $y_k\in[\phi(k)/2,\phi(k/2)]$ 是方程的解

$$\phi(k)=\phi(x)+x\phi'(x).$$

当 $a\in(-1+a_\phi,0)$ 时，上述指数中的 $-a+a^2/2$ 取值为 $-a+a^2/2$，这些结论仍然成立，只需将常数改为可能不同的 C；在此情形下，该常数可能依赖于 a。

备注 3.7. 我们注意到，$\overline{\lim_{x\to\infty}}\phi'(x)/\phi'(2x)<\infty$ 意味着 $\lim_{x\to\infty}\phi''(x)/\phi'(x)=0$。事实上，由下面的证明可知，

$$\phi'(x)\geq-\int_x^{2x}\phi''(v)dv\geq -x\phi''(2x)>0.$$

因此，根据假设，我们有 $\lim_{x\to\infty}x\phi''(2x)/\phi'(2x)<\infty$。

引理 3.6 的证明。对于 $a>0$ 的情形，我们使用不等式 (3.15)，其中 $u_a=a+a^2/2$，并取某个固定的 l，使得 $l>a$。我们考虑 $k>j_0+2l$。对于 $j_0\leq j<k-l$，我们有以下一系列不等式

$$\phi(j)-\phi(j-2)\leq 2\phi'(j-2)\leq 2C_{\phi,2,j_0-2}\phi'(j),$$

其中我们利用了 ϕ' 是非增的（见 [2, 命题 3.1, (2)]）以及 (3.10)。因此，利用 $\phi(k)-\phi(j)\geq(k-j)\phi'(j)$，可得存在某个 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}\phi(k)-\phi(j-2)&\leq\phi(k)-\phi(j)+2\phi'(j-2)\leq\phi(k)-\phi(j)+2C_{\phi,2,j_0-2}\phi'(j)\\&\leq\phi(k)-\phi(j)+2C_{\phi,2,j_0-2}\frac{\phi(k)-\phi(j)}{k-j}\leq(\phi(k)-\phi(j))\left(1+\frac{2C_{\phi,2,j_0-2}}{l}\right)\\&=C\left(\phi(k)-\phi(j)\right).\end{aligned}$$

我们利用这一事实以及 $-\phi''$ 为正且非增，按如下方式估计 $j_0 > 2$ 的指数 (3.15)

$$-u_a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)} \le C u_a \int_{j_0-2}^{k-l} \frac{-\phi''(x)}{\phi(k)-\phi(x)} dx. \tag{3.18}$$

接下来，回想 $\varphi = \phi^{-1}$，我们设 $b_k = \varphi(\phi(k)/2)$。利用如下事实：对于$x > 0$，有 $2\phi(x/2) \ge \phi(x)$，见 [5, 第三章 (6)], ，可推得 $b_k \le k/2.$。通过如下方式估计 (3.18)，即可得到 (3.16)：

$$\begin{aligned} -u_a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)} &\le C u_a \int_{j_0-2}^{k-l} \frac{-\phi''(x)}{\phi(k)-\phi(x)} dx \\ &\le C u_a \left(\int_{j_0-2}^{b_k} \frac{1}{x^2} dx + \frac{2\phi(k)}{\phi'(k)} \int_{b_k}^{k-l} \frac{1}{x^2\,(k-x)} dx \right) \\ &\le u_a \left(\frac{4}{j_0-2} + \frac{2\phi(k)}{k^2\phi'(k)} \int_{\frac{b_k}{k}}^{1-\frac{1}{k}} \frac{1}{x^2(1-x)} dx \right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中，第一个不等式用到了 (i) $-\phi''(x) \le 2\phi(x)/x^2$ （见 [22, 命题 3.1, (3.3)]），(ii) ϕ 为递增函数，以及 (iii) $\phi(k)-\phi(x) \ge (k-x)\phi'(k)$，因为 ϕ' 为递减函数（见 [2, 命题 3.1, (2)]）。由于 $b_k \le k/2$，我们可以在 $1/2$ 处分割上述积分，并估计有界项，从而得到

$$\frac{\phi(k)}{k^2\phi'(k)} \int_{\frac{b_k}{k}}^{1-\frac{1}{k}} \frac{1}{x^2(1-x)} dx \le 8 \frac{\phi(k)}{k\phi'(k)} \left(\frac{1}{\varphi(\phi(k)/2)} + \frac{\ln(k)}{k} \right).$$

将此代入 (3.18)，应用 (3.15) 即可完成 (3.16) 的证明。为证明 (3.17)，我们不采用 (3.19) 的方法，而是用另一种方式估计 (3.18) 中的积分。首先，根据 $-\phi''$ 的单调性，我们注意到：

$$\phi'(x) = -\int_x^\infty \phi''(v) dv \ge -\int_x^{2x} \phi''(v) dv \ge -x\phi''(2x).$$

由于 $\overline{\lim}_{x\to\infty} \phi'(x)/\phi'(2x) < \infty$，存在一个常数 c，使得对于 $x > (j_0-1)/2$，有$-\phi''(x) \le c\phi'(x)/x$。将其代入 (3.19) 中的积分，得到

$$\begin{aligned} -u_a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j-1)}{\phi(k)-\phi(j)} &\le C u_a \left(\frac{4}{j_0-2} + c \int_{b_k}^{k-l} \frac{\phi'(x)}{x\,(\phi(k)-\phi(x))} dx \right) \\ &= C u_a \left(\frac{4}{j_0-2} + c \int_{b_k}^{\frac{k}{2}} \frac{\phi'(x)}{x\,(\phi(k)-\phi(x))} dx + c \int_{\frac{k}{2}}^{k-l} \frac{\phi'(x)}{x\,(\phi(k)-\phi(x))} dx \right). \end{aligned}$$

回顾一下， $\varphi = \phi^{-1}$. 那么

$$\int_{b_k}^{\frac{k}{2}} \frac{\phi'(x)}{x\,(\phi(k)-\phi(x))} dx = \int_{\frac{\phi(k)}{2}}^{\phi(\frac{k}{2})} \frac{1}{\varphi(y)\,(\phi(k)-y)} dy.$$

注意，令 $f_k(y) := \varphi(y)\,(\phi(k) - y)$ $f_k'(y) = \varphi'(y)\,(\phi(k) - y) - \varphi(y)$，我们有

$$f_k'\left(\frac{\phi(k)}{2}\right) = \varphi'\left(\frac{\phi(k)}{2}\right)\frac{\phi(k)}{2} - \varphi\left(\frac{\phi(k)}{2}\right) \geq 0;$$
$$f_k'\left(\phi\left(\frac{k}{2}\right)\right) = \frac{\phi(k) - \phi\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{k}{2}\phi'\left(\frac{k}{2}\right)}{\phi'\left(\frac{k}{2}\right)} \leq 0,$$

其中，第一个不等式由 $\varphi'(x)x \geq \varphi(x)$ 得出，这源于以下观察：$\phi'(x) \leq \phi(x)/x$；第二个不等式则由 ϕ' 是递减函数这一事实得出。因此，存在 $y_k \in [\phi(k)/2, \phi(k/2)]$，使得 f_k 在此区域内达到最小值，$\phi(k) - y_k = \varphi(y_k)/\varphi'(y_k)$ 且 $f_k(y_k) = \varphi^2(y_k)/\varphi'(y_k)$。由此还可得到 $\varphi(y_k)/\varphi'(y_k) \geq \phi(k) - \phi(k/2)$。因此，我们得到

$$\int_{b_k}^{\frac{k}{2}} \frac{\phi'(x)}{x\,(\phi(k) - \phi(x))}dx \leq \frac{\varphi'(y_k)}{\varphi^2(y_k)}\left(\phi\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{\phi(k)}{2}\right) \leq \phi(k)\frac{\varphi'(y_k)}{\varphi^2(y_k)}.$$

回忆一下，$\phi'(x) \leq \phi(x)/x$（见 [22, 命题 3.1, (3.3)]），并且 ϕ 和 ϕ' 分别是递增函数和递减函数。于是，我们可以对剩余的积分作如下估计

$$\int_{\frac{k}{2}}^{k-l} \frac{\phi'(x)}{x\,(\phi(k) - \phi(x))}dx \leq \int_{\frac{k}{2}}^{k-l} \frac{\phi(x)}{x^2\,(\phi(k) - \phi(x))}dx \leq \frac{\phi(k)}{\phi'(k)}\int_{\frac{k}{2}}^{k-l} \frac{1}{x^2\,(k-x)}dx \leq \frac{4\phi(k)\ln k}{k^2\phi'(k)}.$$

至此，我们证明了 (3.17)。情形 $a < 0$ 的证明类似，只需改用 (3.15)。下面简述论证过程。取 $j_0 > -2a$、$l > -a$ 和 $k > 2l + j_0$。(3.15) 中的前两项与上文完全相同，最后一项则按如下方式处理

$$-u_a \sum_{j=j_0}^{k-l} \frac{\phi''(j+a)}{\phi(k) - \phi(j)} \leq C' u_a \int_{j_0+a-1}^{k-l} \frac{-\phi''(x)}{\phi(k) - \phi(x)}dx, \tag{3.20}$$

其中，C' 的选取与 (3.20) 前的论证完全相同，这要求我们用 $C'(\phi(k) - \phi(j+a-1))$ 从下方估计 $\phi(k) - \phi(j)$。对固定的 a，这是可行的。 □

接下来，对于任意的 ϕ 和 $z = a + ib$，我们定义

$$H_\phi(z,k) := \frac{\prod_{j=1}^{k}(\phi(k) - \phi(z+j))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(k) - \phi(j))}\frac{1}{\phi(k)}\frac{\Gamma(z+1)}{W_{\phi(k)}(z+1)}, \tag{3.21}$$

其中 $\phi_{(k)}(x) = \phi(x+k) - \phi(k)$，$k \geq 0$ 是一个伯恩斯坦函数。我们给出 H_ϕ 的一些估计。

引理 3.8。设 ϕ 是一个伯恩斯坦函数，满足 $\lim_{x\to\infty} \phi''(x)/\phi'(x) = 0$。那么，对于任意满足 $a \geq 0$ 的 $1 > \epsilon > 0$ 和 $z = a + ib$，当 k 足够大时，我们有

$$|H_\phi(z,k)| \leq K\frac{(\phi'(k))^{1-a\epsilon}}{(\phi(k))^{1+a-a\epsilon}},$$

对于某个 $K := K(z) > 0$，它在区域 $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\} \setminus \{1, 2, \cdots\}$ 上局部有界。如果$a \in (a_{\phi^{\mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}}} - 1, 0)$，则

$$|H_\phi(z,k)| \leq K\frac{(\phi'(k))^{1+a\epsilon}}{(\phi(k))^{1+a+a\epsilon}}, \tag{3.22}$$

对于某个 $K := K(z)$，它在 $\{z:\ 0 \geq \mathrm{Re}(z) > -1 + \mathsf{a}_\phi \mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}\}$ 上局部有界。在引理 3.6 的条件下，对于 $a > -1 + \mathsf{a}_\phi \mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}$，我们有如下界

$$\begin{aligned} |H_\phi(z,k)| &\leq K \frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^{1+a}} e^{8C\left(|a|+\frac{a^2}{2}\right)\frac{\phi(k)}{k\phi'(k)}\left(\frac{\ln(k)}{k}+\frac{1}{\varphi(\phi(k)/2)}\right)}, \\ |H_\phi(z,k)| &\leq K \frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^{1+a}} e^{C\left(|a|+\frac{a^2}{2}\right)\phi(k)\left(\frac{8c\ln k}{k^2\phi'(k)}+\frac{\varphi'(y_k)}{\varphi^2(y_k)}\right)}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中常数具有与引理 3.6 中相同的性质，且 $y_k \in [\phi(k)/2, \phi(k/2)]$ 是方程 $\phi(k) = \phi(x) + x\phi'(x)$的一个解。

证明。当 $a \geq 0$ 时，证明可由 (3.11) 和不等式 (3.7) 得出，从而对所有足够大的k ，

$$\begin{aligned} |H_\phi(z,k)| \leq K\,|\phi(k)-\phi(k+a)|\,\frac{(\phi'(k))^{a-a\epsilon}}{(\phi(k))^{a(1-\epsilon)+1}}\frac{\left|(\phi(z+1+k)-\phi(k))\sqrt{|\phi\,(z+2+k)-\phi(k)|}\right|}{\sqrt{\phi(k+1)-\phi(k)}} \\ \times e^{-\int_1^{2+a}\ln(\phi(x+k)-\phi(k))dx}, \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(z+1)$ 属于 K。首先对模中的各项应用 (3.4) 中的第二个不等式，然后应用 (3.10) 和 $\phi(k+1) - \phi(k) \geq \phi'(k+1)$（见 [2, 命题 3.1, (2)]），可得

$$|H_\phi(z,k)| \leq K' \frac{(\phi'(k))^{2+a-a\epsilon}}{(\phi(k))^{a(1-\epsilon)+1}} e^{-\int_1^{2+a}\ln(\phi(x+k)-\phi(k))dx},$$

对于某个 $K' = K(z) > 0$。由于 $\phi(x+k) - \phi(k) \geq x\phi'(2+a+k)$（见 [2, 命题 3.1, (2)]），我们得到

$$\ln\left(\phi(x+k)-\phi(k)\right) \geq \ln(x) + \ln\left(\phi'(2+a+k)\right).$$

现在，利用 (3.10) 比较 $\phi'(2+a+k)$ 与 $\phi'(k)$，我们得到，至多相差一个常数，

$$|H_\phi(z,k)| \leq K'' \frac{(\phi'(k))^{1-a\epsilon}}{(\phi(k))^{a(1-\epsilon)+1}},$$

其中 $K'' = K(z) > 0$。设 $a \in (\mathsf{a}_\phi \mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}} - 1, 0)$，且 z不是负整数。选取 $l \geq 1$使得 $a + l \in [0,1)$。利用 W_ϕ的递推关系，我们得到

$$|H_\phi(z,k)| = \left|(\phi(k)-\phi(z+k))\,\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(k)-\phi(z+j))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(k)-\phi(j))}\frac{1}{\phi(k)}\frac{\Gamma(z+1+l)}{W_{\phi_{(k)}}(z+1+l)}\frac{\prod_{j=1}^{l}\phi_{(k)}(z+j)}{\prod_{j=1}^{l}z+j}\right|. \tag{3.24}$$

Usi利用估计式 (3.4)、(3.7)、(3.12) 以及上述类似论证，我们得到

$$\begin{aligned} |H_\phi(z,k)| &\leq K\left(\phi'(k)\right)^{l+1}\left(\frac{\phi'(k)}{\phi(k)}\right)^{a(1+\epsilon)}\frac{1}{\phi(k)}\frac{\left|(\phi(z+1+k)-\phi(k))\sqrt{|\phi\,(z+2+k)-\phi(k)|}\right|}{\sqrt{\phi(k+1)-\phi(k)}} \\ &\quad\times e^{-\int_1^{2+l+a}\ln(\phi(x+k)-\phi(k))dx} \\ &\leq K' \frac{(\phi'(k))^{a(1+\epsilon)+l+2}}{(\phi(k))^{a+a\epsilon+1}} e^{-\int_1^{2+l+a}\ln(\phi(x+k)-\phi(k))dx}, \end{aligned}$$

其中 K、K' 是与 k 无关的正常数。与上述类似，我们估计 $\phi(x+k)-\phi(k)\geq x\phi'(2+l+a+k)$，并利用 (3.10) 得到

$$|H_\phi(z,k)|\leq K''\frac{(\phi'(k))^{1+a\epsilon}}{(\phi(k))^{1+a+a\epsilon}},$$

满足 $K''>0$。最后，当 $\mathsf{a}_\phi\mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}<0$ 时，令 $z=a>\mathsf{a}_\phi\mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}-1$ 为负整数。对于任意 $k\geq 1$，$\phi_{(k)}(0)=0$ 且 $\mathsf{a}^{\phi_{(k)}}=\mathsf{a}_\phi+k$，参见 (2.16)。根据 [22, 定理 2.1，(2.10)], 函数 $\Gamma(z)/W_{\phi_{(k)}}(z)$ 在 $\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z)>\mathsf{a}_\phi+k\}$ 上解析。选取 $z'=a+w$ 和 $w\in\mathbb{C}$，使得 $\mathrm{Re}(z')>-1-\mathsf{a}_\phi\mathbb{I}_{\{\phi(0)=0\}}$。按照 (3.24) 中的论证，我们得到

$$\frac{\Gamma(z'+1)}{W_{\phi_{(k)}}(z'+1)}=\frac{\Gamma(z'+1-a)}{W_{\phi_{(k)}}(z'+1-a)}\frac{\prod_{j=1}^{-a}\phi_{(k)}(z'+j)}{\prod_{j=1}^{-a}z'+j}=\frac{\Gamma(w+1)}{W_{\phi_{(k)}}(w+1)}\frac{\prod_{j=1}^{-a}\phi_{(k)}(a+w+j)}{\prod_{j=1}^{-a}a+w+j},$$

因此，我们得到

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Gamma(a+w+1)}{W_{\phi_{(k)}}(a+w+1)}=\lim_{w\to 0}\frac{\Gamma(w+1)}{W_{\phi_{(k)}}(w+1)}\frac{\prod_{j=1}^{-a}\phi_{(k)}(a+w+j)}{\prod_{j=1}^{-a}a+w+j}=\phi'(k)\prod_{j=1}^{-a-1}\frac{\phi_{(k)}(a+j)}{a+j},$$

其中用到了 $\phi'_{(k)}(0)=\phi'(k)$。因此，在 (3.21) 中，我们得到

$$|H_\phi(a,k)|=\left|(\phi(k)-\phi(a+k))\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(k)-\phi(a+j))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(k)-\phi(k))}\frac{\phi'(k)}{\phi(k)}\prod_{j=1}^{-a-1}\frac{\phi_{(k)}(a+j)}{a+j}\right|.$$

最后，由引理 3.1，我们推出

$$\left|\phi'(k)\prod_{j=1}^{-a-1}\frac{\phi_{(k)}(a+j)}{a+j}\right|\leq\left(\phi'(k)\right)^{-a},$$

这对上述界的贡献相同。因此，我们得出 (3.22) 的证明。通过调用引理 3.6，可用相同的方法推导出界 (3.23)；该引理为以下量给出了更好的界：

$$\left|\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(z+j)-\phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j)-\phi(k))}\right|.$$

其余部分相同。因此，证明完毕。 □

现在我们证明定理 2.10。

定理 2.10 的证明。我们将使用 [2], 中定理 2.14 的证明，因为其中将 $I_\phi(t)$ 的矩的一般表示写成了无限卷积（见 [2, 定理 2.12]），从而得到，对于 $\mathrm{Re}(z)>0$,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[I_\phi^z(t)\right]=\sum_{k\geq 1}\frac{\prod_{j=1}^{k}(\phi(z+j)-\phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j)-\phi(k))}e^{-\phi(k)t}\frac{\Gamma(z+1)}{W_{\phi_{(k)}}(z+1)}=\sum_{k\geq 1}\phi(k)H_\phi(z,k)e^{-\phi(k)t},\quad(3.25)$$

前提是该级数绝对收敛且 $\phi(\infty)=\infty$。那么 (2.18) 可由

$$\mathbb{E}\left[I_\phi^z(t)\right]=\mathbb{E}\left[I_\phi^z(\infty)\right]-\int_t^\infty\frac{d}{ds}\mathbb{E}\left[I_\phi^z(s)\right]ds,$$

对 (3.25) 中的指数进行积分，并利用经典恒等式 $\mathbb{E}[I_\phi^z(\infty)] = \Gamma(z+1)/W_\phi(z+1)$ 成立这一事实，即可得到。固定 $z = a + ib$，使得 $a > 0$。接下来证明 (3.25) 中的级数绝对收敛。首先注意，由于 $\lim_{x\to\infty}\phi'(x)/\phi'(2x) < \infty$，根据备注 3.7 可知 $\lim_{x\to\infty}\phi''(x)/\phi'(x) = 0$，因此引理 3.8 中的所有估计均成立。其次，由于 $\varphi = \phi^{-1}$，我们有

$$\infty = \lim_{x\to\infty} x^2\phi'(x) = \lim_{y\to\infty}\frac{\varphi^2(y)}{\varphi'(y)}.$$

第三，回顾引理 3.8 中 y_k 的定义，并且由于 $\phi(\infty) = \infty$，我们可知

$$\infty = \lim k\phi(k) = \lim_{k\to\infty}\left(\phi(y_k) + y_k\phi'(y_k)\right).$$

此后，$\lim_{k\to\infty} y_k = \infty$ 和 $\lim_{k\to\infty}\varphi'(y_k)/\varphi^2(y_k) = 0$。因此，对于任意 $a > -1 - \mathsf{a}_\phi$，(3.23) 中的第二个界意味着，对于任意 $\varepsilon > 0$ 及所有 $k \geq k_\varepsilon$，

$$|\phi(k)H_\phi(z,k)| \leq K\frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^a}e^{C\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\phi(k)\left(\frac{8c\ln k}{k^2\phi'(k)}+\varepsilon\right)}. \tag{3.26}$$

令 $\mathcal{K}_\varepsilon := \left\{k \geq k_\varepsilon\colon \frac{8}{k^2\phi'}\ln() \leq \varepsilon\right\}$。利用 (3.11) 中的界，并令 $\epsilon = \varepsilon$ 作用于 $\mathcal{K}_\varepsilon^c$，可得统一的界

$$|\phi(k)H_\phi(z,k)| \leq K\frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^a}e^{2c\varepsilon\left(a+\frac{a^2}{2}\right)\phi(k)}\mathbb{I}_{\{k\in\mathcal{K}_\varepsilon\}} + K\frac{(\phi'(k))^{1-a\varepsilon}}{(\phi(k))^{1+a-a\varepsilon}}\mathbb{I}_{\{k\in\mathcal{K}_\varepsilon^c\}}. \tag{3.27}$$

选择 $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\quad a,c,C) > 0$，通过估计 $\phi'(k)$ 在 $\mathcal{K}_\varepsilon^c$ 上的值，我们证明对于任意足够小的 $\delta > 0$,

$$|\phi(k)H_\phi(z,k)| \leq K\frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^a}e^{\delta\phi(k)} + K\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\ln k}{k^2}\right)^{1-\delta}\frac{1}{(\phi(k))^{1+a-a\varepsilon}}. \tag{3.28}$$

由 (3.25) 可得，对于 $t > \delta$,

$$\sum_{k\geq k_\varepsilon}|\phi(k)H_\phi(z,k)|\,e^{-\phi(k)t} \leq K\sum_{k\geq k_\varepsilon}\left(\frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^a}e^{-(t-\delta)\phi(k)} + \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)^{1-\delta}\frac{1}{(\phi(k))^{1+a-a\varepsilon}}\right).$$

第二个级数显然收敛；对于第一个级数，我们使用积分比较，并注意到由于 ϕ' 递减且 ϕ递增,

$$\sum_{k\geq k_\varepsilon}\frac{\phi'(k)}{(\phi(k))^a}e^{-(t-\delta)\phi(k)} \leq \int_{k_\varepsilon-1}^{\infty}\frac{\phi'(x)}{\phi^a(x)}e^{-(t-\delta)\phi(x)}dx = \int_{\phi(k_\varepsilon-1)}^{\infty}x^{-a}e^{-(t-\delta)x}dx < \infty.$$

由于 δ 是任意的，我们证明了 (3.25) 中级数的绝对连续性，并根据前述对 [2], 中证明的引用，验证 (2.18) 对所有满足$a > 0$的 $t > 0$ 和 $z = a + ib$ 均成立。我们强调，当$a \in (-1 - \mathsf{a}_\phi, 0]$时，与 (3.26)、(3.27) 和 (3.28) 中完全相同的估计也成立，只需在 (3.26) 的指数中用 $-a$ 替换 a。因此，(3.25) 中的级数绝对收敛。由此，通过解析延拓，我们得出本定理的证明。 □

推论 2.16 的证明。我们仅简述 $l = -1$ 的情形；其余情形类似。我们对带有 $\varepsilon > 0$ 的 $z = -1 + \varepsilon$ 应用 (2.18)，得到

$$\mathbb{E}\left[I_\phi^{-1+\varepsilon}(t)\right] = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{W_\phi(\varepsilon)} - \sum_{k\geq 1}\frac{\prod_{j=1}^{k}\left(\phi(-1+\varepsilon+j)-\phi(k)\right)}{\prod_{j=1}^{k-1}\left(\phi(j)-\phi(k)\right)}\frac{e^{-\phi(k)t}}{\phi(k)}\frac{\Gamma(\varepsilon)}{W_{\phi_{(k)}}(\varepsilon)}.$$

由于 $\phi'(0) < \infty$ 且 $\phi'_{(k)}(0) = \phi'(k), \quad k \geq 1$，递推关系 (2.5) 得出

$$\mathbb{E}\left[I_\phi^{-1+\varepsilon}(t)\right] = \frac{\Gamma(\varepsilon+1)}{W_\phi(\varepsilon+1)}\frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon} - \sum_{k\geq 1}\frac{\prod_{j=1}^{k}(\phi(-1+\varepsilon+j)-\phi(k))}{\prod_{j=1}^{k-1}(\phi(j)-\phi(k))}\frac{e^{-\phi(k)t}}{\phi(k)}\frac{\Gamma(\varepsilon+1)}{W_{\phi_{(k)}}(\varepsilon+1)}\frac{\phi_{(k)}(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 且 u　　利用 $\phi(0) = 0$ 和 $W_\phi(1) = 1$，对任意 ϕ，我们便完成了此情形的证明。 □

致谢

Z. Palmowski 谨此说明，本研究部分由波兰国家科学中心资助，资助项目编号为 2018/29/B/ST1/00756。H. Sariev 和 M. Savov 谨此说明，本研究由欧盟 NextGenerationEU 通过保加利亚共和国国家恢复与韧性计划资助，项目编号为 BG-RRP-2.004-0008。

参考文献

[1] L. Alili、H. Matsumoto 和 T. Shiraishi。《关于布朗运动指数泛函的三元组》。载于《概率研讨会 XXXV》，第 396–415 页。Springer Berlin Heidelberg，2001年。[2] A. Barker 和 M. Savov。《二元伯恩斯坦–伽马函数与次分子指数泛函的矩》。《随机过程及其应用》，131：454–497，2021年。[3] A. Behme、A. Lindner 和 R. Maller。《具有 L´évy 噪声的随机微分方程的平稳解》。《随机过程及其应用》，121(1)：91–108，2011年。[4] A. Behme、A. Lindner 和 J. Reker。《关于杀死的指数泛函的概率律》。《电子概率学杂志》，26：1–35，2021年。[5] J. Bertoin。《L´évy 过程》。剑桥：剑桥大学出版社，1996年。[6] J. Bertoin。《与 L´évy 过程相关的某些奥恩斯坦–乌伦贝克型过程的遍历性质》。《随机过程及其应用》，129(4)：1443–1454，2019年。[7] J. Bertoin 和 M. Yor。《L´évy 过程的指数泛函》。《概率调查》，2：191–212，2005年。[8] R. Brignone。《积分 Lévy 过程的指数泛函的矩及其在亚式期权定价中的应用》。《定量金融》，22(9)：1717–1729，2022年。[9] P.J. Fitzsimmons 和 J. Pitman。《马尔可夫过程加性泛函的卡茨矩公式与费曼–卡茨公式》。《随机过程及其应用》，79(1)：117–134，1999年。[10] T. Grzywny、L. Leˇzaj 和 B. Trojan。《正阶子ordinator 的转移密度》。《朱西厄数学研究所杂志》，22：1119–1179，2023年。[11] D. Hackmann 和 A. Kuznetsov。《亚式期权与亚纯 Lévy 过程》。《金融与随机》，18(4)：825–844，2014年。[12] F. Hirsch 和 M. Yor。《子ordinator 相关的永续随机变量及余项变量的梅林变换》。《伯努利》，19(4)：1350–1377，2013年。[13] A. Kuznetsov、J.C. Pardo 和 M. Savov。《L´évy 过程指数泛函的分布性质》。《电子概率学杂志》，17：1–35，2012年。

[14] H. Matsumoto 和 M. Yor。《布朗运动的指数泛函 I：固定时刻的概率律》。《概率调查》，2：312–347，2005年。[15] Kr. Maulik 和 B. Zwart。《L´évy 过程指数泛函的尾部渐近》。《随机过程及其应用》，116(2)：156–177，2006年。[16] M. Minchev 和 M. Savov。《子 ordinator 指数泛函密度的渐近性质》。《伯努利》，29(4)：3307–333，2023年。[17] J. C. Pardo、P. Patie 和 M. Savov。《L´évy 过程指数泛函的一种 Wiener-Hopf 型分解》。《伦敦数学会杂志》，86(3)：930–956，2012年。[18] P. Patie。《某些奥恩斯坦-乌伦贝克半群推广的 q-不变函数》。《ALEA：拉丁美洲概率与数理统计杂志》，4：32–43，2008年。[19] P. Patie。《单边 Lévy 模型下的亚式期权》。《应用概率杂志》，50(2)：359–373，2013年。[20] P. Patie 和 M. Savov。《L´évy 过程指数泛函的扩展分解》。《电子概率学杂志》，17：1–22，2012年。[21] P. Patie 和 M. Savov。《L´évy 过程的指数泛函：广义魏尔斯特拉斯乘积与 Wiener–Hopf 分解》。《巴黎科学院数学报告》，351(9-10)：393–396，2013年。[22] P. Patie 和 M. Savov。《伯恩斯坦伽马函数与 L´évy 过程的指数泛函》。《电子概率学杂志》，23：1–101，2018年。[23] P. Patie 和 M. Savov。《非自伴广义拉盖尔半群的谱展开》。《美国数学会回忆录》，272(1336)：1–182，2021年。[24] P. Salminen 和 L. Vostrikova。《关于独立增量过程的指数泛函》。《概率论及其应用》，63(2)：267–291，2018年。[25] P. Salminen 和 L. Vostrikova。《关于加性过程积分指数泛函的矩》。《统计与概率通讯》，146：139–146，2019年。[26] K. Urbanik。《随机过程某些泛函的无限可分性》。《概率与数理统计》，15：493–513，1995年。[27] L. Vostrikova。《关于独立增量过程指数泛函的分布》。《现代随机理论与应用》，7(3)：291–313，2020年。[28]M. Yor。《关于布朗运动的某些指数泛函》。《应用概率进展》，24(3)：509–531，1992年。[29] M. Yor。《布朗运动及相关过程的指数泛函》。施普林格金融。施普林格出版社，柏林，2001年。