arXiv:2303.02991v1 [math.DS] 6 Mar 2023

波动方程一致吸引子的 Kolmogorov ε-熵

YANGMIN XIONGAND CHUNYOU SUN*兰州大学数学与统计学院,
中国兰州，730000

Abstract. 本文研究光滑有界区域 $\mathbb{R}^3$ 上的非自治超立方半线性波动方程。利用引入的弱拓扑熵，我们得到了外力非平移紧情形下一致吸引子的 ε-熵上界。

关键词 Kolmogorov ε-熵；一致吸引子；非平移紧；波动方程；Strichartz估计

1. 引言

我们考虑以下非自治阻尼波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u - \Delta u + f(u) = g(x,t),\ x \in \Omega,\ t \geq \tau, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (u, \partial_t u)\big|_{t=\tau} = (u_\tau, u'_\tau), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，$\gamma > 0$ 是一个固定的耗散率，Δ是关于变量 x的拉普拉斯算子。非线性项 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 具有超三次增长率，即

$$|f'(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}),\ 1 \leq p < 5,\ \forall\ s \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

并满足耗散性假设:

$$f(s)s \geq -C, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

并且存在 $\alpha > 0$ 使得

$$F(s) \leq \alpha f(s)s + C, \tag{1.4}$$

其中 $F(s) = \int_0^s f(r)dr$。函数 $g(\cdot, s)$ 是给定的外力，假设其在 $L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ 中平移有界，即

$$\|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2)} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g\|_{L^2(t,t+1;L^2)} < \infty. \tag{1.5}$$

初始数据 $\xi_u(\tau) = (u_\tau, u'_\tau) := \xi_\tau$取自标准能量空间 $\mathcal{E} := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$，其能量范数

$$\|\xi_u\|^2_{\mathcal{E}} := \|(u, \partial_t u)\|^2_{\mathcal{E}} = \|\nabla u\|^2 + \|\partial_t u\|^2,$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35B40、35B45、35L70。

* 通讯作者。电子邮箱：xiongym18@lzu.edu.cn（Y.Xiong），
sunchy@lzu.edu.cn（C.Sun）。本工作得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12271227）的资助。

这里 $\|\cdot\|$ 是通常的 $L^2(\Omega)$-范数。

自治系统的长期行为可以用全局吸引子来描述，这方面已在 [1, 8, 9, 14, 25], 中得到广泛研究；此类吸引子通常具有有限的分形维数和豪斯多夫维数。

对于非自治方程，研究则更为复杂。其中一种主要方法是所谓的一致吸引子，该方法源于 Haraux 的工作 [15, 16] ，并由 Chepyzhov 和 Vishik 进一步发展 [6, 7, 8]。通过构造斜积流，可以将问题化归为扩展相空间中的自治问题，并保持不变性，但这要求壳具有某种紧性。

一致吸引子的豪斯多夫维数和分形维数可能为无穷 [7, 8, 22]。一种衡量无限维吸引子“厚度”的可行方法，是估计其 Kolmogorov ε-熵，这一方法已在 [8], 中提出。基于一致吸引子的存在性和结构的相关结果 $\mathcal{A}_\Sigma$，并假设符号空间 Σ在赋予局部一致收敛拓扑的豪斯多夫拓扑空间 Ξ 中是紧的，过程族 $\{U_h(t,\tau)\ h\in\Sigma\}$ 关于符号满足 Lipschitz 条件且一致拟可微， [8] 中的作者证明了一致吸引子的 ε-熵上界具有以下形式

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma;\mathcal{E}) \le D\log_2\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + \mathbb{H}_{\lambda\varepsilon}(\Sigma_{0,L\log_2\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}};\Xi_{0,L\log_2\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}),\quad \forall\ \varepsilon\le\varepsilon_0$$

前提是已知 $\Pi_{0,l}\Sigma = \Sigma_{0,l}$ 在 $\Xi_{0,l}$ 中的熵行为。这里，正常数 D、 λ、 L 和 ε_0 仅依赖于方程参数以及符号空间 Σ 所处的拓扑空间 Ξ ，而与 ε 无关。

近年来波动方程研究不断取得进展，一些结果表明，对于外力更一般且非平移紧的系统，仍然可以得到强一致吸引子的存在性及其结构，参见例如 [19,21, 23, 28]。与此同时，基于近期对 [2, 4], 中有界区域上的 Strichartz 型估计的推广，吸引子理论已发展到研究具有超三次非线性项的半线性波动方程，涵盖自治和非自治情形，参见 [17, 20, 21, 23]。

基于上述已有结果，自然会研究具有超三次非线性项和更一般外力的方程 (1.1) 的一致吸引子的 Kolmogorov ε-熵。对于五次波动方程，在具有 Dirichlet 边界条件的有界区域中，能量到 Strichartz 估计的行为在 $t\to\infty$ 时仍不明确（这对吸引子理论至关重要），因此本文仅考虑次五次情形。特别地，我们考虑 g 的以下两种典型额外正则性情形:

$$g\in H_b^1(\mathbb{R};L^2(\Omega)) \tag{1.6}$$

or

$$g\in L_b^2(\mathbb{R};H^1(\Omega)), \tag{1.7}$$

它们分别属于所谓的时间正则函数或空间正则函数，见 [28]。

众所周知， ε-熵的值可能取决于所选的拓扑。与平移紧情形相比，这会给我们的情形带来一些技术上的困难。我们注意到,

在 [8] 中提出的关于符号的 Lipschitz 条件，或对解之差进行某些估计 [11, 27]，对于估计 ε-熵具有根本意义，然而在我们的情形下已不再适用，至少难以通过直接方式加以验证。此外，在弱拓扑中，每个子区间上两个符号之间的距离无法由整个区间控制，这导致我们无法使用迭代方法。

为此，我们引入一个新的量 $\mathbb{H}_\varepsilon^w(A,X;\ B,Y)$，即集合 B 在 Y 中的弱拓扑熵，它对应于集合 A 在 X 中；该量仅取决于空间 X,Y 以及 A 和 B 的大小。在我们的应用中，它仅取决于符号的界和方程 (1.1) 的参数。这一定义基于如下观察：利用解的某种渐近平滑性质，可以验证一致吸引子的光滑性；此时，解之差的第二个组成部分（初始数据相同而符号 $h_1,h_2\in\Sigma$ 不同）的集合在 X 中一致有界：对所有 $i\in\mathbb{N}^+$ 以及某个 $T>0$，均有 $=L^\infty(iT,(i+1)T;\ H_0^1(\Omega))\cap H^1(iT,(i+1)T;\ H^{-1}(\Omega))$。此外，$X$ 可紧嵌入 Y^*，而 $Y=L^2(iT,(i+1)T;\ L^2(\Omega))$ 是符号空间 $\Sigma_{[iT,(i+1)T]}$ 所在的空间。基于此，我们定义了 $\Sigma_{[T,(l+1)T]},\ l\in\mathbb{N}^+$ 的一个特殊覆盖，并得到了该覆盖数量的上界。同时，我们基于文献 [10, 12], 中提出的非自治指数吸引子构造了一个中间对象，它具有有限的分形维数，并满足一致的向前（以及拉回）指数吸引性质。最重要的是，这两种性质均与符号的具体选取无关，而这些符号是由初始符号经过时间平移得到的。

作为应用，对于方程 (1.1) 的一致吸引子 $\mathcal{A}_\Sigma$，在满足假设 (1.2)-(1.4) 且 g 满足 (1.6) 或 (1.7) 的条件下，我们得到其 ε– 熵的如下估计

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma;\mathcal{E})\le D'\log_2\frac{1}{\varepsilon}+L'\log_2\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{H}^w_{\lambda'\varepsilon^\ell}(r,X;\ \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))},Y),$$

其中，正常数 D'、L'、λ'、ℓ 和 r 仅取决于空间 X、Y 以及方程 (1.1) 的方程参数，而与 ε 无关。我们注意到，空间 $H_b^1(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 或 $L_b^2(\mathbb{R};\ H^1(\Omega))$ 远优于 $L_b^2(\mathbb{R};\ L^2(\Omega))$；然而，一个函数即使属于这样的更高正则性空间，也仍不足以推出其壳在 $L^2_{loc}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 中是平移紧的（例如，参见 [8, 28]）。在本文中，我们假设 $g\in H_b^1(\mathbb{R};\ L^2(\Omega))$ 或 $L_b^2(\mathbb{R};\ H^1(\Omega))$，主要是为了简化计算，并给出一些示例，以说明如何利用弱拓扑熵给出所考虑一致吸引子的 ε–熵的上界。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍符号空间，并简要回顾有关一致吸引子的结果。第 3 节针对子集–空间对 $(A,X;\ B,Y)$，引入关于 Y 弱拓扑的熵 $\mathbb{H}_\varepsilon^w(A,X;\ B,Y)$。第 4 节验证，当外力 $g\in L_b^2(\mathbb{R};\ L^2(\Omega))$ 更为正则时，方程 (1.1) 的一致吸引子也更为正则。第 5 节推导 (1.1) 的解之差的一些渐近平滑估计，据此构造一族离散指数吸引子，该吸引子具有一致有限分形维数，并满足一致指数吸引性质。最后，第 6 节利用新定义的弱拓扑熵，给出方程 (1.1) 的吸引子的熵上界。

2. Preliminaries

设 Ξ 是一个豪斯多夫拓扑空间，且 $\{T(t)\ t\in\mathbb{R}\}$ 是作用于 Ξ 上的连续平移算子:

$$T(t)h(s):=h(s+t),\quad s\in\mathbb{R}.$$

设所考虑方程的所有时变系数都属于集合 Σ，其拓扑由 Ξ 给出。集合 Σ 称为符号空间，$h\in\Sigma$ 称为符号。

考虑一个典型的符号空间 Σ，其中只包含时变外力。设 H 是一个自反巴拿赫空间，并考虑函数 $g:\ \mathbb{R}\to H$。假设 $g\in L_b^p(\mathbb{R};\ H)$，$1<p<\infty$。考虑以下集合

$$\Sigma_0:=\{T(t)g(s);t\in\mathbb{R}\}:=\{g(t+s);t\in\mathbb{R}\}$$

以及集合 Σ_0 在 Ξ 中的闭包。这个闭包称为函数 $g(s)$ 在 Ξ 中的壳，记为 $\mathcal{H}(g)$。

对于 $g\in L_b^p(\mathbb{R};\ H)$，$1<p<\infty$，根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，该壳

$$\mathcal{H}(g):=[\{T(t)g,t\in\mathbb{R}\}]_{L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R};H)}\tag{2.1}$$

在 ${L^p}_{,loc}^{\ w}(\mathbb{R};H)$ 中是紧的。我们用 ${L^p}_{,loc}^{\ w}(\mathbb{R};\ H)$ 表示赋予局部弱收敛拓扑的空间 $L^p_{loc}(\mathbb{R};\ H)$，这意味着序列 h_n 收敛到 h（当 $n\to\infty$ 在 ${L^p}_{,loc}^{\ w}(\mathbb{R};H)$ 中时），当且仅当

$$\int_{t_1}^{t_2}\langle v(s),h_n(s)-h(s)\rangle ds\to 0\ \text{ as } n\to\infty$$

对每个有界区间 $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}$ 及任意满足 $1/p+1/q=1$ 的 $v\in L^q(t_1,t_2;H^*)$ 都成立。我们知道，$\mathcal{H}(g)$ 在 ${L^p}_{,loc}^{\ w}(\mathbb{R};\ H)$ 中是紧的，并且平移群 $\{T(t)\ t\in\mathbb{R}\}$ 在 ${L^p}_{,loc}^{\ w}(\mathbb{R};H)$ 的拓扑下连续。不难看出，

$$\|h\|_{L_b^p(\mathbb{R};H)}\le\|g\|_{L_b^p(\mathbb{R};H)},\quad\forall h\in\mathcal{H}(g).$$

由于平移有界性不足以保证强一致吸引子的存在，最自然且研究最多的是 Vishik 和 Chepyzhov 提出的平移紧（tr.c.）外力类，参见 [8]。我们回顾一下，$g\in L_b^p(\mathbb{R};\ H)$ 是平移紧的，当且仅当集合 Σ_0 在 $L^p_{loc}(\mathbb{R};H)$ 中是预紧的。在 [28]，中，作者提出了几类更一般的外力，它们虽非平移紧，但仍可据此证明强一致吸引子的存在。本文主要关注以下两类外力。

定义 2.1（[28]）。设 H 是一个自反 Banach 空间，且 $1<p<\infty$。若对每个 $\varepsilon>0$，都存在一个有限维子空间 $H_\varepsilon\subset H$，$\dim H_\varepsilon<\infty$，以及函数 $g_\varepsilon\in L_b^p(\mathbb{R};\ H_\varepsilon)$，使得 $\|g-g_\varepsilon\|_{L_b^p(\mathbb{R};\ H)}\le\varepsilon$，则称函数 $g\in L_b^p(\mathbb{R};\ H)$ 空间正则。类似地，若对所有 $k>0$，对每个 $\varepsilon>0$ 都存在函数 $g_\varepsilon\in H_b^k(\mathbb{R};\ H)$，使得 $\|g-g_\varepsilon\|_{L_b^p(\mathbb{R};\ H)}\le\varepsilon$，则称函数 $g\in L_b^p(\mathbb{R};\ H)$ 时间正则。

现在，我们回顾一些与一致吸引子理论相关的概念和结果，参见[8, 23, 28]。

设 $\mathcal{E}$ 是一个豪斯多夫拓扑空间。设 $\{U_h(t,\tau)\ h\in\Sigma\}$ 是 $\mathcal{E}$ 上的一个动力过程族，也就是说，对于每个 $h\in\Sigma$，从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{E}$ 的双参数算子族 $U_h(t,\tau)$

到 $\mathcal{E}$ 满足

$$U_h(\tau,\tau)=\mathrm{Id},\ \ U_h(t,\tau)=U_h(t,s)\circ U_h(s,\tau),\ \ t\geq s\geq\tau\in\mathbb{R}.$$

此外，设 $\mathbb{B}$ 是集合族 $B\subset\mathcal{E}$，满足：若 $B\in\mathbb{B}$ 且 $B_1\subset B$，则 $B_1\in\mathbb{B}$。集合 $B\in\mathbb{B}$ 称为有界的。

定义 2.2（[8]）。若集合 $\mathcal{A}_\Sigma\subset\mathcal{E}$ 满足以下条件，则称其为过程族 $\{U_h(t,\tau)\ \ h\in\Sigma\}$ 的一致吸引子：

1) $\mathcal{A}_\Sigma$ 在 $\mathcal{E}$ 中是紧且有界的；

2) $\mathcal{A}_\Sigma$ 是过程 $\{U_h(t,\tau)\ \ h\in\Sigma\}$ 的一致吸引集，也就是说，对于每个 $B\in\mathbb{B}$ 和每个邻域 $\mathcal{O}(\mathcal{A}_\Sigma)$，都存在时间 $T=T(\mathcal{O},B)$，使得

$$\cup_{h\in\Sigma}U_h(t,\tau)B\subset\mathcal{O}(\mathcal{A}_\Sigma),\ \ t-\tau\geq T,\ \tau\in\mathbb{R};$$

3) $\mathcal{A}_\Sigma$ 是满足性质 1) 和 2) 的极小集。

下文中，$\mathcal{E}$ 通常是赋有强拓扑或弱拓扑的 Banach 空间，甚至是 Hilbert 空间。相应的一致吸引子分别称为强一致吸引子或弱一致吸引子。在这两种情况下，$\mathbb{B}$ 都由所考虑的 Banach 空间中的所有有界集构成。

我们回顾以下标准存在性定理，详情见 [8]。

定理 2.3. 设 $\mathcal{E}$ 和 Ξ 是 Hausdorff 拓扑空间，且 Σ 是空间 Ξ 中的一个紧集。设作用于 $\mathcal{E}$ 上的过程族 $\{U_h(t,\tau)\ h\in\Sigma\}$ 存在一致吸收集 $\mathcal{B}\in\mathbb{B}$，并且在 $\mathcal{B}$ 上一致渐近紧。那么该过程族存在一个一致吸引子 $\mathcal{A}_\Sigma\subset\mathcal{B}$。

此外，假设映射 $(\xi,h)\to(U_h(t,\tau)\xi,T(t)h)$ 对每个固定的 t 和 τ 都连续。那么 $\mathcal{A}_\Sigma$ 有如下描述：

$$\mathcal{A}_\Sigma:=\cup_{h\in\Sigma}\mathcal{K}_h,\tag{2.2}$$

其中

$$\mathcal{K}_h:=\{u:\mathbb{R}\to\mathcal{E},\ \ U_h(t,\tau)u(\tau)=u(t),\ t\geq\tau\in\mathbb{R}\}$$

是过程 $U_h(t,\tau)$ 的所有完全有界轨道构成的集合（按照 Vishik 和 Chepyzhov 的术语，这称为 $U_h(t,\tau)$ 的核，见 [8]）。

现在我们转而讨论阻尼波动方程 (1.1)。回顾有关非自治系统 (1.1) 及其相应一致吸引子的一些已知结果，例如见 [21, 23, 28]。

我们从以下线性波动方程开始

$$\partial_t^2v+\gamma\partial_tv-\Delta v=G(t),\ \ \xi_v\big|_{t=\tau}=\xi_\tau,\ \ v\big|_{\partial\Omega}=0.\tag{2.3}$$

定理 2.4 ([23]). 设初始数据 $\xi_\tau\in\mathcal{E}^\alpha$ and $G\in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E}^\alpha)$，其中某个 $\alpha\in\mathbb{R}$。则问题 (2.3) 存在唯一解 $\xi_v\in C_{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E}^\alpha)$。此外，解 v 属于空间 $L^4_{loc}(\mathbb{R};H^{\alpha,\ 12}(\Omega))$。并且，满足以下估计：

$$\|\xi_v(t)\|_{\mathcal{E}^\alpha}+\left(\int_\tau^t e^{-4\beta(t-s)}\|v(s)\|^4_{H^{\alpha,12}}\,ds\right)^{1/4}\leq$$

$$\leq C\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}^\alpha}e^{-\beta(t-\tau)}+C\int_\tau^t e^{-\beta(t-s)}\|G(s)\|_{H^\alpha}\,ds,\tag{2.4}$$

其中正常数 $C$and β与 $t \geq \tau$、 G 和 ξ_τ 无关。

问题 (1.1) 在所谓的 Shatah-Struwe（SS）解类中的适定性和耗散性已在 [21, 23] 中得到验证，参见 [2, 4, 24]。回顾一下，如果 $u(t)$ 满足 $\xi_u \in C([\tau, T], \mathcal{E})$，则称其为问题 (1.1) 的 SS 解，并且

$$u \in L^4(\tau, T; L^{12}(\Omega)) \quad \text{for all} \quad T > \tau$$

且它以分布的意义满足方程 (1.1)。

定理 2.5（[21, 23]）。在假设 (1.2)-(1.5) 下，对于任意 $\xi_\tau \in \mathcal{E}$，问题 (1.1) 存在唯一的 Shatah-Struwe 解，该解对所有 $t > \tau$ 均有定义。此外，该解满足以下耗散估计

$$\|\xi_u(t)\|_{\mathcal{E}} + \|u\|_{L^4(t,t+1;L^{12}(\Omega))} \leq Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}}) e^{-\beta(t-\tau)} + Q(\|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))}), \tag{2.5}$$

其中正常数 β 和单调递增函数 Q 与 t、τ、ξ_τ 及 g 无关。

根据 [8] 构造一致吸引子的一般方案，我们考虑一族具有符号 $h \in \Sigma = \mathcal{H}(g)$ 的方程：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u - \Delta u + f(u) = h(t), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \xi_u\big|_{t=\tau} = \xi_\tau. \end{cases} \tag{2.6}$$

问题 (2.6) 对每个 $h \in \Sigma$ 都适定，并由此在能量相空间 $\mathcal{E}$ 中生成一族动力过程 $\{U_h(t,\tau)$ $h \in \Sigma\}$，它们满足平移恒等式

$$U_h(t+s, \tau+s) = U_{T(s)h}(t, \tau), \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0. \tag{2.7}$$

此外，估计 (2.5) 表明，与 (2.6) 对应的过程族 $\{U_h(t,\tau)$ $h \in \Sigma\}$ 在 $\mathcal{E}$ 中有一个有界的一致吸收集 $\mathcal{B}_0$。由于 $\mathcal{E}$ 是自反巴拿赫空间，吸收集 $\mathcal{B}_0$ 在 $\mathcal{E}$ 的弱拓扑下是紧且可度量的。容易验证，对任意固定的 t 和 τ，映射 $(\xi, h) \to U_h(t,\tau)\xi$ 是从 $\mathcal{E} \times \Sigma$ 到 $\mathcal{E}$ 的弱连续映射。因此，过程族 $\{U_h(t,\tau)$ $h \in \Sigma\}$ 存在一个满足 (2.2) 的弱一致吸引子 $\mathcal{A}^w_\Sigma$。

定理 2.6 ([21, 23]). 设假设 (1.2)-(1.5) 成立，此外外力 g 关于空间或时间正则。则方程 (1.1) 在能量空间 $\mathcal{E}$ 的强拓扑下存在一致吸引子 $\mathcal{A}_\Sigma$，且它与上文构造的弱吸引子 $\mathcal{A}^w_\Sigma$ 重合。

回顾一下度量空间 X 中（预）紧集 K 的 Kolmogorov ε-熵的定义。给定 $\varepsilon > 0$，令 $N_\varepsilon(K; X) = N_\varepsilon(K)$ 表示覆盖 K 所需的 X 中 ε-球的最小数目。由于 K 是（预）紧的，根据 Hausdorff 判据，对所有 $\varepsilon > 0$，数目 $N_\varepsilon(K) < \infty$。

定义 2.7 （[8, 18]）。集合 K 在空间 X 中的 Kolmogorov ε-熵是如下数值

$$\mathbb{H}_\varepsilon(K; X) = \mathbb{H}_\varepsilon(K) = \log_2 N_\varepsilon(K).$$

3. The weak topology entropy $\mathbb{H}^w_\varepsilon(A,X;\ B,Y)$

设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，嵌入 X 到 Y^* 是紧的（相对于 Y^* 的强拓扑），且 Y 是自反的。

下文中，对于有界子集 $A\subset X$ 和 $B\subset Y$，我们将针对子集—空间对 $(A,X;\ B,Y)$ 定义 Y 弱拓扑下的熵 $\mathbb{H}^w_\varepsilon(A,X;\ B,Y)$。

定义 3.1。设给定 $A\subset X$和 $B\subset Y$以及 $\varepsilon>0$。 B 的一个 $(A,X;\ B,Y;\ \varepsilon)$-弱分割是满足 $B\subset\cup_{i\in\Lambda}V_i$ 的一个分割 $\cup_{i\in\Lambda}V_i$，并且对于每个 V_i $(i\in\Lambda)$，以下估计成立：

$$|\langle f,\ v-\bar v\rangle|<\varepsilon\ \forall\ f\in A,\ v,\bar v\in B\cap V_i.$$

对于任意 $\varepsilon>0$，令 $N^w_\varepsilon(A,X;\ B,Y)$ 表示满足 $\cup_{i\in\Lambda}V_i$是 B的一个 $(A,X;\ B,Y;\ \varepsilon)$-弱分割的 Λ 的基数的最小值。

若 A 在 X 中有界，且 B 在 Y中有界，则由嵌入$X\hookrightarrow Y^*$的紧性以及 Y的自反性可知，对所有$\varepsilon>0$，数值 $N^w_\varepsilon(A,X;\ B,Y)<\infty$。

事实上，我们将构造 B 的一个特殊弱分割，使得每个 $V_i,\ i\in\Lambda$ 都可以表示为弱拓扑下某个邻域的形式。因此，我们先回顾：对于任意 $v_0\in Y$，给定$\eta>0$和一个有限集 $\{f_1,f_2,\cdots,f_k\}\subset Y^*$，集合

$$V_{v_0}=V(f_1,f_2,\cdots,f_k;\eta):=\{v\in Y:\ |\langle f_i,\ v-v_0\rangle|<\eta,\ \forall\, i=1,2,\cdots,k\}\tag{3.1}$$

是 v_0 在 Y的弱拓扑下的一个开邻域；通过改变 η、 k 以及 Y^*中的 $f_i's$，我们可以得到 v_0 在 Y的弱拓扑下的一个邻域基。这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 Y^* 与 Y的对偶积。

由于对于任意的 $\bar\epsilon>0$、 A，在 Y^* 中都有有限的 $\bar\epsilon$-网 $\{f_1,\cdots,f_m\}$，也就是说，对于每个 $f\in A$，都存在 f_i、 $i\in\{1,\cdots,m\}$，使得

$$\|f-f_i\|_{Y^*}\leqslant\bar\epsilon.\tag{3.2}$$

于是，对于每个 $v_0\in B$ 和 $\eta>0$，我们定义

$$\mathcal{O}_{v_0}=\mathcal{O}_{v_0}(f_1,\cdots,f_m;\eta)=\{v\in Y;|\langle f_i,v-v_0\rangle|<\eta,\ i=1,\cdots,m\}.\tag{3.3}$$

显然， $\mathcal{O}_{v_0}$ 是 Y 的弱拓扑下的 v_0 的一个邻域。由 Y 的自反性可知， B 是弱紧的，因此存在有限的 v_1、 $\cdots$、 $v_M\in B$，使得

$$B\subset\cup_{j=1}^M\mathcal{O}_{v_j}.\tag{3.4}$$

注意，对于任意的 $f\in A$ 和任意的 v、 $\bar v\in\mathcal{O}_{v_j}\cap B$，有

$$\begin{aligned}|\langle f,\ v-\bar v\rangle|&\leqslant|\langle f-f_i,\ v-\bar v\rangle|+|\langle f_i,\ v-\bar v\rangle|\\&\leqslant|\langle f-f_i,\ v-\bar v\rangle|+|\langle f_i,\ v-v_j\rangle|+|\langle f_i,\ v_j-\bar v\rangle|\\&\leqslant 2\|B\|_Y\bar\epsilon+2\eta,\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中， $\|B\|_Y$是 Y中 B 的界。然后，先令 $\bar\epsilon$ 足够小，例如取 $\bar\epsilon<\varepsilon/4\|B\|_Y$，以求得$f_1$、 $\cdots$、 f_m；接着令 η足够小，例如取 $\eta<\varepsilon/4$，便可发现，由（3.4）定义的特殊划分是 B的一个具有有限邻域的（A、 X； B、 Y； ε）-弱分割。

定义 3.2. 给定 $A \subset X$、 $B \subset Y$和 $\varepsilon > 0$。集合 B在 Y中对应于集合 A在 X中的（A、 X； B、 Y； ε）-弱拓扑熵 $\mathbb{H}_\varepsilon^w(A$、 X； B、 $Y)$为

$$\mathbb{H}_\varepsilon^w(A, X; B, Y) = \log_2 N_\varepsilon^w(A, X; B, Y).$$

注 3.3. 只要知道 $A \subset Y^*$ 是紧的，上述定义仍然有效。这里，我们引入附加空间 X，只是为了在第4节和第5节中的应用；我们将明确估计这一界，并说明其对于系统 (1.1) 的依赖关系。例如，若 A 和 B 分别是 X 和 Y 中的某些球，例如，对于给定的 r、 $s \geqslant 0$，记作

$$A_r := \{u \in X : \|u\|_X \leqslant r\} \quad \text{and} \quad B_s := \{v \in Y : \|v\|_Y \leqslant s\},$$

那么，$(A_r$， X； B_s， Y； $\varepsilon)$-弱拓扑熵 $\mathbb{H}_\varepsilon^w(A_r$， X； B_s， $Y)$ 将只取决于空间 X 和 Y 以及大小 r、 s。对于这种情况，我们将 $\mathbb{H}_\varepsilon^w(A_r$， X； B_s， $Y)$ 记为 $\mathbb{H}_\varepsilon^w(r$， X； s， $Y)$。

4. Smoothness of uniform attractors

命题 4.1. 设定理 2.6 的假设成立，并且此外，外力 g 满足 (1.6) 或 (1.7)。那么，当 R 足够大时，空间 $\mathcal{E}^1$ 中半径为 R 的闭球 $\mathcal{B}_1 := [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$ 是与方程 (1.1) 相关的过程 $U_g(t, \tau)$ 的一致吸引集。也就是说，存在正常数 β 和一个单调递增函数 Q，使得对于任意有界集 $B \subset \mathcal{E}$,

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{E}}(U_g(t+\tau, \tau)B, \mathcal{B}_1) \leq Q(\|B\|_{\mathcal{E}})e^{-\beta t}, \quad t \geq 0$$

关于 $\tau \in \mathbb{R}$ 一致成立。

证明。我们将解拆 分为 $u(t) = v(t) + w(t)$，其中 $v(t)$ 是线性问题的解

$$\partial_t^2 v + \gamma \partial_t v - \Delta v = 0, \quad \xi_v\big|_{t=\tau} = \xi_\tau, \tag{4.1}$$

余项 w 满足

$$\partial_t^2 w + \gamma \partial_t w - \Delta w + f(u) = g, \quad \xi_w\big|_{t=\tau} = 0. \tag{4.2}$$

将 (4.1) 乘以 $\partial_t v + \beta v$，取充分小的 $\beta > 0$，我们得到解 $v(t)$ 满足以下估计

$$\|\xi_v(t)\|_{\mathcal{E}} \leq Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}})e^{-\beta(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \tag{4.3}$$

其中，正常数 β 和单调递增函数 Q 与 t、 τ 和 ξ_τ 无关。

现在，我们转向方程 (4.2)。对于 (1.7)，利用标准的 $\mathcal{E}^\alpha$-能量估计 (2.4)，可得

$$\|\xi_w(t)\|_{\mathcal{E}^\alpha} \leq C \int_\tau^t e^{-\beta(t-s)}(\|f(u)\|_{H^\alpha} + \|g(s)\|_{H^\alpha})ds \leq C(\|f(u)\|_{L_b^1(\mathbb{R}; H^\alpha)} + \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R}; H^\alpha)}).$$

利用 H¨older 不等式、 f 的增长条件和估计 (2.5)，可得

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{L^1(t,t+1;W^{1,\kappa})} &\le C\|f'(u)\nabla u\|_{L^1(t,t+1;L^\kappa)}\\ &\le C(1+\|u\|^4_{L^4(t,t+1;L^{12})})\|\nabla u\|_{L^\infty(t,t+1;L^2)}\\ &\le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}})e^{-\beta(t-\tau)}+Q(\|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2)}),\quad t\ge\tau,\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中 $\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{2}+\frac{p-1}{12}$。利用嵌入

$$W^{1,\kappa}\subset H^\alpha \ \text{ with } \ \frac{1}{2}=\frac{1}{\kappa}-\frac{1-\alpha}{3},$$

i.e.

$$\alpha=\frac{5-p}{4}>0,$$

我们得到

$$\|f(u)\|_{L^1(t,t+1;H^\alpha)}\le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}})e^{-\beta(t-\tau)}+Q(\|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2)}).$$

最后，我们得到估计

$$\|\xi_w(t)\|_{\mathcal{E}^\alpha}\le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}})e^{-\beta(t-\tau)}+Q(\|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};H^\alpha)}),\tag{4.5}$$

其中常数 β 和单调函数 Q 与 t、 τ、 g 和 ξ_τ 无关。

现在设 (1.6) 得到满足。将方程 (4.2) 的解 $w(t)$ 分解为 $w(t)=y\,t(t)$，其中 $z(t)$ 满足线性波动方程

$$\partial_t^2 z+\gamma\partial_t z-\Delta z=g,\quad \xi_z\big|_{t=\tau}=0\tag{4.6}$$

且函数 $y(t)$ 满足

$$\partial_t^2 y+\gamma\partial_t y-\Delta y+f(u)=0,\quad \xi_y\big|_{t=\tau}=0.\tag{4.7}$$

类似于估计（4.5）的证明，我们有

$$\|\xi_y(t)\|_{\mathcal{E}^\alpha}\le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}})e^{-\beta(t-\tau)}+Q(\|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2)}).\tag{4.8}$$

Th通过对（4.6）关于时间求导并写作 $\bar z:=\partial_t z$，我们得到 at

$$\partial_t^2\bar z+\gamma\partial_t\bar z-\Delta\bar z=g'(t),\quad \xi_{\bar z}\big|_{t=\tau}=(0,g(\tau)).$$

利用标准能量估计以及索伯列夫嵌入 $H^1_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))\subset L^\infty_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))$，我们有

$$\|\xi_{\bar z}(t)\|_{\mathcal{E}}\le C\|g\|_{H^1_b(\mathbb{R};L^2)},\quad t\ge\tau.\tag{4.9}$$

由方程（4.6）表示项 $\Delta z(t)$，并对所得方程两边取 L^2-范数，结合（4.9），可得对所有 $t\ge\tau$

$$\|z(t)\|_{H^2}\le C\|g\|_{H^1_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))}.\tag{4.10}$$

结合（4.9）和（4.10），我们得到

$$\|\xi_z(t)\|_{\mathcal{E}^1}\le C\|g\|_{H^1_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))}.\tag{4.11}$$

由 (4.5)、(4.8) 和 (4.11)，我们得出

$$\|\xi_w(t)\|_{\mathcal{E}^\alpha}\le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}})e^{-\beta(t-\tau)}+Q(\|g\|_W),\tag{4.12}$$

其中，符号 W表示空间 $H_b^1(\mathbb{R};\ L^2(\Omega))$（若满足 (1.6)），或空间 $L_b^2(\mathbb{R};\ H^1(\Omega))$（若满足 (1.7)）；正常数 β 和单调递增函数 Q 均与t、τ、 g和 u无关。根据估计 (4.3) 和 (4.12)，集合

$$\mathcal{B}_\alpha := \{\xi \in \mathcal{E}^\alpha; \|\xi\|_{\mathcal{E}^\alpha} \le R\}$$

若 R 足够大，则 $\tau \in \mathbb{R}$ 是过程 $U_g(t,\tau)$ 在 $\mathcal{E}$ 中关于 $\tau \in \mathbb{R}$ 的紧一致吸引集。

为了获得更高的正则性，我们将使用标准的自举论证。若从一开始就取 $\xi_\tau \in \mathcal{B}_\alpha$，则有

$$\|\xi_v(t)\|_{\mathcal{E}^\alpha} \le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}^\alpha})e^{-\beta(t-\tau)},\quad t \ge \tau,$$

结合 (4.12)，这表明动力过程 $U_g(t,\tau)$ 在更高能量空间 $\mathcal{E}^\alpha$ 中也是良定义且耗散的。由于 $H^\alpha \subset L^{\frac{6}{3-2\alpha}}$，我们可以将估计 (4.4) 改进如下：

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{L^1(t,t+1;W^{1,\kappa_1})} &\le C(1+\|u\|^4_{L^4(t,t+1;L^{12})})\|\nabla u\|_{L^\infty(t,t+1;L^{\frac{6}{3-2\alpha}})}\\ &\le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}^\alpha})e^{-\beta(t-\tau)} + Q(\|g\|_W),\quad t \ge \tau,\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{\kappa_1} = \frac{3-2\alpha}{6} + \frac{p-1}{12}$。利用嵌入 $W^{1,\ \kappa_1} \subset H^{\alpha_1}$，并结合 $\alpha_1 = \frac{5-p}{4} + \alpha$，可得

$$\|f(u)\|_{L^1(t,t+1;H^{\alpha_1})} \le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}^\alpha})e^{-\beta(t-\tau)} + Q(\|g\|_W).$$

因此，我们得到

$$\|\xi_w(t)\|_{\mathcal{E}^{\alpha_1}} \le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}^\alpha})e^{-\beta(t-\tau)} + Q(\|g\|_W). \tag{4.13}$$

根据 [13], 中建立的指数吸引的传递性， $\mathcal{B}_\alpha$ 上的动力过程 $U_g(t,\tau)$ 有一个指数吸引集 $\mathcal{B}_{\alpha_1} \subset \mathcal{E}^{\alpha_1}$。于是，有限次重复上述过程，我们便得到空间 $\mathcal{E}^1$中的指数吸引球 $\mathcal{B}_1$。□

推论 4.2. 设命题 4.1 的假设成立，且另外假设初始数据$\xi_\tau \in \mathcal{E}^1$。则问题 (1.1) 的解 u 满足 $\xi_u(t) \in \mathcal{E}^1$ 对所有 $t \ge \tau$ 均成立，并且满足以下估计：

$$\|\xi_u(t)\|_{\mathcal{E}^1} \le Q(\|\xi_\tau\|_{\mathcal{E}^1})e^{-\beta(t-\tau)} + Q(\|g\|_W), \tag{4.14}$$

其中，符号 W表示空间 $H_b^1(\mathbb{R};\ L^2(\Omega))$（若 (1.6) 成立），或 $L_b^2(\mathbb{R};\ H^1(\Omega))$（若 (1.7) 成立）；正常数 β 和单调递增函数 Q 均与t、τ、 g及 u无关。

估计 (4.14) 的证明可以类比命题 4.1 中能量空间内对 w-分量的估计证明来验证。

然后，我们将证明，对于过程族 $\{U_h(t,\tau)\ h \in \Sigma\}$， $\mathcal{B}_1$ 实际上是$\mathcal{E}$ 中一个关于 $h \in \Sigma$一致吸引的紧集。

引理 4.3. 设过程族 $\{U_h(t,\tau)\ h \in \Sigma\}$ 满足平移恒等式 (2.7)，且弱连续。那么，对于过程 $U_g(t,\tau)$ 的任意紧的、关于 $\tau \in \mathbb{R}$ 一致吸引的集合，也是过程族 $\{U_h(t,\tau)\ h \in \Sigma\}$ 的同时紧的、关于 $h \in \Sigma$ 一致吸引的集合。

证明. 由平移恒等式 (2.7) 可知，对于过程 $U_g(t,\tau)$ 的任意紧的、关于 $\tau \in \mathbb{R}$ 一致吸引的集合，也是过程族 $\{U_h(t,\tau)\ h \in \Sigma_0\}$ 的同时紧的、关于 $h \in \Sigma_0$ 一致吸引的集合。

若 P 是关于 $h \in \Sigma_0$ 对族 $\{U_h(t,\tau)\ h \in \Sigma_0\}$ 的紧一致吸引集，即对于任意 $\varepsilon > 0$ 和任意有界集 $B \subset \mathcal{E}$，存在 $T_0 = T_0(B,\varepsilon) > 0$，使得

$$\cup_{h\in\Sigma_0} U_h(t,0)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(P), \quad \forall t \geq T_0. \tag{4.15}$$

我们将证明

$$\cup_{h\in\Sigma} U_h(t,0)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon}(P), \quad \forall t \geq T_0. \tag{4.16}$$

对于任意 $y \in \cup_{t\geq T_0}\cup_{h\in\Sigma} U_h(t,0)B$，存在 $t \geq T_0$、$h \in \Sigma$ 和 $x \in B$，使得 $y = U_h(t,0)x$。对于这样的 $h \in \Sigma$，存在 $\{h_n\} \in \Sigma_0$，使得当 $n \to \infty$ 时，$h_n \to h$ 在 $L^2_{loc}(\mathbb{R};H)$ 的弱拓扑下收敛。于是，过程的弱连续性意味着

$$U_{h_n}(t,0)x \rightharpoonup U_h(t,0)x \ \text{ in } \ \mathcal{E} \ \text{ as } \ n \to \infty. \tag{4.17}$$

对于每个 $\eta > 0$，我们有 $P \subset \cup_{x\in P} B(x,\eta)$。由于 P 是 $\mathcal{E}$ 中的紧集，我们有一个有限子覆盖，使得 $P \subset \cup_{i=1}^N B(x_i,\eta)$，$x_i \in P$。于是，$\mathcal{O}_{\varepsilon/2}(P) \subset \cup_{i=1}^N B(x_i,\eta+\varepsilon/2)$。由于当 $t \geq T_0$ 时，$\{U_{h_n}(t,0)x\} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(P)$，因此 $\{U_{h_n}(t,0)x\}$ 的一个子列属于某个球 $B(x_i,\eta+\varepsilon/2)$。根据马祖尔定理，我们知道其弱极限

$$U_h(t,0)x = y \in [B(x_i,\eta+\varepsilon/2)]_{\mathcal{E}} \subset [\mathcal{O}_{\eta+\varepsilon/2}(P)]_{\mathcal{E}}.$$

令 $\eta \to 0$，我们有 $y \in [\mathcal{O}_{\varepsilon/2}(P)]_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon}(P)$。这意味着 (4.16) 成立，因此 P 是关于 $h \in \Sigma$ 的紧一致吸引集。另一方面，由于 $\Sigma_0 \subset \Sigma$，(4.16) 总是蕴含 (4.15)。□

根据一致吸引子在闭一致吸引集中的极小性，我们知道 $\mathcal{A}_\Sigma \subset \mathcal{B}_1$，且其在空间 $\mathcal{E}^1$ 中有界。此外，由推论 4.2 可得

$$\cup_{h\in\Sigma} U_h(t,0)\mathcal{A}_\Sigma \subset \cup_{h\in\Sigma} U_h(t,0)\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1, \quad t \geq T_0. \tag{4.18}$$

5. Uniform exponential attracting sets

本节将构造一个具有一致指数吸引性质且一致有限分形维数的集合族。

引理 5.1. 设 X_0 和 X_1 是两个 Banach 空间，满足 X_1 紧嵌入到 X_0 中，且 $\mathbb{B}$ 是 X_0 的一个有界子集。对于任意固定的 $h \in \Sigma$，设 $U_h(n) := U_h(n+1,n)$ $n \in \mathbb{Z}$ 是定义在 X_0 上的一族离散动力过程，并满足以下性质：

对于每个 $h \in \Sigma$，过程 $U_h(n)\colon\ \mathbb{B} \to \mathbb{B}$；过程 $U_h(n)$ 可

分解为以下形式

$$U_h(n) = \mathcal{C}_h(n) + \mathcal{L}_h(n),$$

其中 $\mathcal{C}_h(n)\colon\ \mathbb{B} \to X_0$ 满足

$$\|\mathcal{L}_h(n)\xi_1 - \mathcal{L}_h(n)\xi_2\|_{X_0} \leq \kappa\|\xi_1 - \xi_2\|_{X_0}, \quad \forall\ \xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{B} \tag{5.1}$$

对于某些 $\kappa < \frac{1}{2}$ 和 $\mathcal{C}_h(n)\colon\ \mathbb{B} \to X_1$ 满足

$$\|\mathcal{C}_h(n)\xi_1 - \mathcal{C}_h(n)\xi_2\|_{X_1} \leq L\|\xi_1 - \xi_2\|_{X_0}, \quad \forall\ \xi_1,\ \xi_2 \in \mathbb{B} \tag{5.2}$$

对于某些 $L > 0$。

于是，存在一族时变集合 $\mathcal{M}_h(n)$、 $n \in \mathbb{Z}$，满足

(1) $\mathcal{M}_h(n) \subset \mathbb{B}$ 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 均成立，且其分形维数一致有界 d

$$dim_F(\mathcal{M}_h(n); X_0) \leq C_1, \tag{5.3}$$

其中，正常数 C_1 与 $n \in \mathbb{Z}$无关；

(2) 一致指数吸引性质：

$$dist_{X_0}(U_h(n+k,n)\mathbb{B}, \mathcal{M}_h(n+k)) \leq C_2 e^{-\sigma k}, \tag{5.4}$$

其中，正常数 C_2 和 σ 与 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{N}$无关。

证明。证明与 [10, 12] 类似。为方便读者，下面给出详细过程。由于 $\mathbb{B}$ 在 X_0 中有界，因此存在一个半径为 R、以 $x_0 \in \mathbb{B}$ 为中心的球 $B(x_0, R; X_0)$，位于 X_0 中，使得 $\mathbb{B} \subset B(x_0, R; X_0)$。我们设 $V_0 := \{x_0\} \subset \mathbb{B}$。我们还固定一个满足上述假设（$a$）和（$b$）的任意动力过程 U_h。

现在，我们通过关于 k 的归纳法构造集合族 $V_k(n) \subset \mathbb{B}$，使得$V_k(n)$ 是 $U_h(n, n-k)\mathbb{B}$ 的一个 $R_k := R(\kappa + \frac{1}{2})^k$-网。假设对于某个 $k = l$，所需的集合已经构造完成，那么我们构造下一个集合 $V_{l+1}(n+1)$，并保持这些性质。

由 (5.2) 可得

$$\mathcal{C}_h(n)(U_h(n, n-l)\mathbb{B}) \subset \cup_{x \in V_l(n)} B(\mathcal{C}_h(n)x, LR_l; X_1).$$

由于嵌入 $X_1 \subset X_0$ 是紧的，我们用有限个 $\frac{1-2\kappa}{4}R_l$-球覆盖这个球，球心为 y_i 且位于 X_0 中，并且该覆盖所需的最少球数可估计如下：

$$N_{\frac{1-2\kappa}{4}R_l}(B(\mathcal{C}_h(n)x, LR_l; X_1); X_0) = N_{\frac{1-2\kappa}{4L}}(B(0, 1; X_1); X_0) := N.$$

对我们而言，关键在于数目 N 与 l、 R、 κ 和 L无关。由 (5.1) 可知，以 $\mathcal{L}_h(n)x$、 $x \in V_l(n)$ 为球心且半径为 κR_l 的球族覆盖了 $\mathcal{L}_h(n)(U_h(n, n-l)\mathbb{B})$。因此，我们得出

$$\begin{aligned} U_h(n+1, n-l)\mathbb{B} &= U_h(n)U_h(n, n-l)\mathbb{B} \\ &\subset \cup_{x \in V_l(n)} B(y_i + \mathcal{L}_h(n)x, \frac{1-2\kappa}{4}R_l + \kappa R_l; X_0) \\ &= \cup_{x \in V_l(n)} B(y_i + \mathcal{L}_h(n)x, \frac{1+2\kappa}{4}R_l; X_0), \end{aligned}$$

该系统中的球数不超过 $N \cdot \sharp V_l(n)$。

将此覆盖中的每个球的半径扩大一倍后，我们可以假设此覆盖的中心属于 $U_h(n+1, n-l)\mathbb{B}$。我们用 $V_{l+1}(n+1)$ 表示此覆盖的新中心，而针对 $U_h(n)$ 的条件（a）保证了 $V_{l+1}(n+1) \subset \mathbb{B}$，我们还注意到$R_{l+1} = \frac{1+2\kappa}{2}R_l = R(\kappa + \frac{1}{2})^{l+1}$。因此，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，都构造出了所需的集合 $V_k(n)$。

根据上述构造，我们有

$$\begin{aligned} &\sharp V_k(n) \le N^k, \quad k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}, \\ &\mathrm{dist}_{X_0}(U_h(n, n-k)\mathbb{B}, V_k(n)) \le R(\kappa + \frac{1}{2})^k. \end{aligned} \tag{5.5}$$

我们将集合 $E_k(n) = E_k^h(n)$ 定义为

$$E_1(n) := V_1(n), \quad E_{k+1}(n+1) := V_{k+1}(n+1) \cup U_h(n)E_k(n), \quad k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

由（5.5）和（5.6），我们有

$$\begin{aligned} &\sharp E_k(n) \le kN^k, \\ &\mathrm{dist}_{X_0}(U_h(n, n-k)\mathbb{B}, E_k(n)) \le R(\kappa + \frac{1}{2})^k. \end{aligned} \tag{5.7}$$

所需的集合族 $\mathcal{M}_h(n)$ 可定义为

$$\mathcal{M}_h(n) := \cup_{k=1}^{\infty} E_k(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.8}$$

我们来验证由（5.8）定义的 $\mathcal{M}_h(n)$ 满足（5.3）和（5.4）。

事实上，由于 $E_k(n) \subset \mathcal{M}_h(n)$ 且 $\kappa + \frac{1}{2} < 1$，由（5.7）可得一致指数吸引性质：

$$\mathrm{dist}_{X_0}(U_h(n, n-k)\mathbb{B}, \mathcal{M}_h(n)) \le R(\kappa + \frac{1}{2})^k = Re^{-k \ln \frac{1}{\kappa + \frac{1}{2}}}.$$

现在，还需验证 $\mathcal{M}_h(n)$ 的有限维性。我们固定 $\varepsilon > 0$ 并选取满足 $R(\kappa + \frac{1}{2})^k \le \varepsilon$ 的最小整数 $k = k(\varepsilon)$。由于根据定义（5.6），

$$E_k(n) = \cup_{l=0}^{k-1} U_h(n, n-l)V_{k-l}(n-l)$$

并且根据 $V_k(n)$ 的构造，我们有 $V_{k-l}(n-l) \subset U_h(n-l, n-k)\mathbb{B}$。然后，由 (5.5) 得到

$$\begin{aligned} \cup_{k \ge k(\varepsilon)} E_k(n) &\subset \cup_{k \ge k(\varepsilon)} \cup_{l=0}^{k-1} U_h(n, n-l)U_h(n-l, n-k)\mathbb{B} \\ &= \cup_{k \ge k(\varepsilon)} U_h(n, n-k)\mathbb{B} \\ &\subset \cup_{v \in V_k(n)} B(v, \varepsilon; X_0). \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(\mathcal{M}_h(n); X_0) &\le N_\varepsilon(\cup_{k \le k(\varepsilon)} E_k(n)) + N_\varepsilon(\cup_{k > k(\varepsilon)} E_k(n)) \\ &\le \sum_{k \le k(\varepsilon)} \sharp E_k(n) + \sharp V_{k(\varepsilon)+1}(n) \\ &\le (k(\varepsilon) + 1)^2 N^{k(\varepsilon)+1}. \end{aligned}$$

因此，

$$\dim_F(\mathcal{M}_h(n); X_0) := \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log_2 N_\varepsilon(\mathcal{M}_h(n); X_0)}{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} \le (\log_2 \frac{1}{\kappa + \frac{1}{2}})^{-1} \log_2 N.$$

□

然后，我们将引理 5.1 应用于问题 (1.1)。

引理 5.2. 假设条件 (1.2)-(1.5) 成立。则存在某个 $T > 0$，使得对于任意给定的 $h \in \Sigma$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，离散动力过程族 $U_h^\tau(m,n) := U_h(\tau + mT, \tau + nT)$，$m, n \in \mathbb{Z}, m \geq n$ 拥有一个集合族 $\mathcal{M}_h^\tau(n)$，$n \in \mathbb{Z}$，满足

$$dist_{\mathcal{E}}(U_h^\tau(m,n)\mathcal{B}_1, \mathcal{M}_h^\tau(m)) \leq \nu e^{-\sigma(m-n)T}, \tag{5.9}$$

其中正常数 ν 和 σ 与 m、$n \in \mathbb{Z}$、$m \geq n$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$ 无关。并且对于每个 $\delta > 0$，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$N_\varepsilon(\mathcal{M}_h^\tau(n); \mathcal{E}) \leq (\frac{1}{\varepsilon})^{\mathcal{N}+\delta}, \quad for\ all\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \tag{5.10}$$

其中正常数 $\mathcal{N}$ 与 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$ 无关。

证明。由平移恒等式 (2.7) 可知，对于任意固定的 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $h \in \Sigma$，我们可以找到 $h' \in \Sigma$ 使得

$$U_{h'}(t+\tau, \tau)x = U_h(t, 0)x, \quad \forall\ t \geq 0,\ x \in \mathcal{E}.$$

因此，为简便起见，我们设 $\tau = 0$。

设 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 是方程 (1.1) 的两个解，它们具有不同的初始数据 ξ_0^1、$\xi_0^2 \in \mathcal{B}_1$，分别从 $t = 0$ 开始，并具有相同的外力 $h \in \Sigma$。令 $\theta(t) = u_1(t) - u_2(t)$，则该函数满足

$$\partial_t^2\theta + \gamma\partial_t\theta - \Delta_x\theta + l(t)\theta = 0,\ \xi_\theta\big|_{t=0} = \xi_0^1 - \xi_0^2, \tag{5.11}$$

其中 $l(t) := \int_0^1 f'(su_1(t) + (1-s)u_2(t))\, ds$。我们将解 $\theta(t) = v(t) + w(t)$ 分解为两部分，其中 $v(t)$ 满足方程

$$\partial_t^2 v + \gamma\partial_t v - \Delta v = 0, \quad v\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \xi_v\big|_{t=0} = \xi_0^1 - \xi_0^2 \tag{5.12}$$

且函数 $w(t)$ 满足

$$\partial_t^2 w + \gamma\partial_t w - \Delta w + l(t)\theta = 0, \quad w\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \xi_w\big|_{t=0} = 0. \tag{5.13}$$

对于线性方程 (5.12)，我们得到

$$\|\xi_v(t)\|_{\mathcal{E}} \leq C\|\xi_0^1 - \xi_0^2\|_{\mathcal{E}} e^{-\beta t}, \tag{5.14}$$

其中正常数 C和 β与 t、g及 ξ_0^1、ξ_0^2无关。根据推论 4.2，我们知道

$$\|\xi_{u_i}(t)\|_{\mathcal{E}^1} \leq C, \quad \forall t \geq \tau,\ i = 1, 2,$$

其中常数 数 C与 t、u_i及 h无关。利用嵌入 $H^2 \subset C$，我们得到

$$\|\xi_w(t)\|_{\mathcal{E}^1} \leq C\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\|l(t)\theta\|_{H_0^1} ds \leq C\|\nabla\theta\|_{L^\infty(0,t;L^2)} \leq C\|\xi_\theta\|_{L^\infty(0,t;\mathcal{E})}. \tag{5.15}$$

接下来，我们估计项 $\|\xi_\theta\|_{L^\infty(0,\ t;\ \mathcal{E})}$。将（5.11）乘以 $\partial_t\theta$ 并在 Ω 上积分，可得

$$\frac{d}{dt}\|\xi_\theta(t)\|_{\mathcal{E}}^2 + 2\gamma\|\partial_t\theta\|^2 = 2(l(t)\theta, \partial_t\theta).$$

利用增长条件 (1.2)，我们得到

$$\begin{aligned} 2|(l(t)\theta, \partial_t\theta)| &\leq C((1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1})|\theta|, |\partial_t\theta|) \\ &\leq C\|\partial_t\theta\|_{L^2}\|\theta\|_{L^6}(1 + \|u_1\|_{L^{12}}^4 + \|u_2\|_{L^{12}}^4) \\ &\leq C\|\xi_\theta\|_{\mathcal{E}}^2(1 + \|u_1\|_{L^{12}}^4 + \|u_2\|_{L^{12}}^4), \end{aligned}$$

应用格朗沃尔不等式，我们得到

$$\|\xi_\theta(t)\|_{\mathcal{E}} \le Ce^{Kt}\|\xi_0^1 - \xi_0^2\|_{\mathcal{E}}.$$

将其代入估计式 (5.15)，得到

$$\|\xi_w(t)\|_{\mathcal{E}^1} \le Ce^{Kt}\|\xi_0^1 - \xi_0^2\|_{\mathcal{E}},$$

其中正常数 C 和 K 与 t、h、ξ_0^1 和 ξ_0^2 无关。

取 $T_1 > 0$ 使得 $T_1 = \frac{1}{\beta}\ln(4C)$，并固定

$$T := \max\{T_0, T_1\}, \tag{5.16}$$

则关系式

$$\cup_{h\in\Sigma} U_h(t,0)\mathcal{A}_\Sigma \subset \cup_{h\in\Sigma} U_h(t,0)\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1, \quad t \ge T \tag{5.17}$$

连同估计式

$$\|\xi_v(T)\|_{\mathcal{E}} \le \frac{1}{4}\|\xi_0^1 - \xi_0^2\|_{\mathcal{E}}$$

and

$$\|\xi_w(T)\|_{\mathcal{E}^1} \le Ce^{KT}\|\xi_0^1 - \xi_0^2\|_{\mathcal{E}}$$

表明 $U_h(T,0)$ 满足引理 5.1 关于 $\kappa = \frac{1}{4}$ 和 $L = Ce^{KT}$ 的假设。因此，我们可以将引理 5.1 应用于离散动力过程族 $U_h^0(m,n)$、m、$n \in \mathbb{Z}$、$m \ge n$，这意味着这些过程具有集合族 $\mathcal{M}_h^0(n)$，$n \in \mathbb{Z}$ 满足 (5.9) 和 (5.10)，其中 $\tau = 0$。□

注 5.3. 我们有如下平移不变性:

$$\mathcal{M}^0_{T(s)h}(l) = \mathcal{M}^s_h(l) \tag{5.18}$$

对所有的 $l \in \mathbb{Z}$ 和 $s \in \mathbb{R}$均成立。因此，估计 (5.9) 和 (5.10) 与 $h \in \Sigma_0$ 的具体选取无关。

6. Estimates of the ε-entropy

首先，我们将得到 $\Sigma_{iT,\ (i+1)T}$, $i \in \mathbb{N}^+$ 的一个弱分割。

设 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 是方程 (2.6) 的两个解，它们在 $t = 0$ 时具有相同的初始数据 $\xi \in \mathcal{A}_\Sigma$，但外力 $h, h' \in \Sigma$ 不同。那么函数 $\theta(t) = u_1(t) - u_2(t)$ 满足

$$\partial_t^2\theta + \gamma\partial_t\theta - \Delta\theta + l(t)\theta = h - h', \quad \xi_\theta\big|_{t=0} = 0. \tag{6.1}$$

由 (5.17) 可立即得到以下结果。

推论 6.1. 设命题 4.1 的假设成立。那么，满足以下条件的方程 (6.1) 的解的第二个组成部分 $\partial_t\theta$ ξ_θ

$$\partial_t\theta \in L_b^\infty(T,+\infty;H_0^1) \cap H_b^1(T,+\infty;H^{-1})$$

and

$$\|\partial_t\theta\|_{L_b^\infty(T,+\infty;H_0^1)\cap H_b^1(T,+\infty;H^{-1})} \le r, \tag{6.2}$$

w这里的 T 定义见 (5.16)，正常数 r 仅依赖于 $\|g\|_W$.

记该集合为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \{\xi_\theta | \xi_\theta(s),\ s > 0 \text{ satisfies (6.1) with } \xi_\theta(0) = 0,\ h, h' \in \Sigma\}.$$

根据推论 6.1，我们推得 $A \subset L_b^\infty(T, +\infty;\ \mathcal{E}^1)$。由方程 (6.1) 可知 $\{\partial_t^2\theta | \partial_t\theta \in A_2\} \subset L_b^2(T, +\infty;\ H^{-1}(\Omega))$。也就是说，

$$A_2 \subset L_b^\infty(T, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap H_b^1(T, +\infty; H^{-1}(\Omega)).$$

记为

$$X := L^\infty(iT, (i+1)T; H_0^1) \cap H^1(iT, (i+1)T; H^{-1}) \ \text{ and } \ Y := L^2(iT, (i+1)T; L^2). \tag{6.3}$$

那么对于任意 $i \in \mathbb{N}^+$，

$$A_2\big|_{[iT,(i+1)T]} \subset B_r := \{u \in X; \|u\|_X \le r\} \ \text{ and } \ \Sigma_{[iT,(i+1)T]} \subset B_s := \{v \in Y; \|v\|_Y \le s\},$$

其中正常数 r 由 (6.2) 给出，$s = \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}$。

因此，根据第 3 节，对于任意给定的 $\tilde{\varepsilon} > 0$，我们得到 $\Sigma_{[iT,(i+1)T]},\ i \in \mathbb{N}^+$ 的 $(r, X;\ \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))} Y;\ \tilde{\varepsilon})$-弱分割。这里我们将 $\Sigma_{[iT,(i+1)T]} \subset \cup_{n\in\Lambda} V_{(i)n},\ i \in \mathbb{N}^+$ 和 $N_{\tilde{\varepsilon}}^w(r, X; \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))} Y)$ 记为 Λ 的基数的最小值。接下来，对于任意给定的$l \in \mathbb{N}^+$，我们将按以下方式构造 $\Sigma_{T,(l+1)T}$ 的一个特殊覆盖，使得

$$\begin{aligned} &\Sigma_{[T,(l+1)T]} \subset \cup_{j=1}^M W_j; \\ &\Sigma_{[iT,(i+1)T]} \cap W_j\big|_{[iT,(i+1)T]} \subset \cup_{n\in\Lambda} V_n^{(i)}, \quad j = 1, \cdots, M,\ i = 1, \cdots, l. \end{aligned} \tag{6.4}$$

通过组合各子区间 $[iT, (i+1)T],\ i = 1, \cdots, l$ 上的划分，我们得到集合 $\Sigma_{[T,(l+1)T]}$ 的一个覆盖，并且这种覆盖数量的上界可估计为

$$M \le (N_{\tilde{\varepsilon}}^w(r, X;\ \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}, Y))^l. \tag{6.5}$$

引理 6.2. 对每个 $\varepsilon > 0$ 及任意给定的 $l \in \mathbb{N}^+$，对于在 (6.4) 中构造的 $\Sigma_{[T,(l+1)T]}$ 的覆盖，若 $\tilde{\varepsilon} \le \varepsilon^2/32e^{l(K+1)}$，则对任意 $h, h' \in W_j,\ j = 1, \cdots, M$，

$$dist_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}_h((l+1)T), U_{h'}((l+1)T, T)\mathcal{K}_h(T)) \le \varepsilon/4. \tag{6.6}$$

证明. 若 $y \in \mathcal{K}_h((l+1)T)$，则对某个 $\xi \in \mathcal{K}_h$，有 $y = \xi((l+1)T) = U_h((l+1)T, T)\xi(T)$。考虑

$$\|U_h((l+1)T, T)\xi(T) - U_{h'}((l+1)T, T)\xi(T)\|_{\mathcal{E}}.$$

设 $\xi_{u_1}(t) = U_h(t, T)\xi(T)$ 且 $\xi_{u_2}(t) = U_{h'}(t, T)\xi(T)$ 对于 $t \ge T$。则 $\theta = u_1 - u_2$ 满足方程 (6.1)。将 (6.1) 乘以 $\partial_t\theta$，利用 (1.2) 可得

$$\frac{d}{dt}\|\xi_\theta(t)\|_{\mathcal{E}}^2 + 2\gamma\|\partial_t\theta(t)\|^2 \le C\|\xi_\theta\|_{\mathcal{E}}^2(1 + \|u_1\|_{L^{12}}^4 + \|u_2\|_{L^{12}}^4) + 2(h - h', \partial_t\theta).$$

应用格朗沃尔不等式并令 $t=(l+1)T$，由 (6.4) 和估计 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}\|\xi_\theta((l+1)T)\|_{\mathcal{E}}^2 &\le 2\int_T^{(l+1)T} e^{C\int_s^{(l+1)T}(1+\|u_1\|_{L^{12}}^4+\|u_2\|_{L^{12}}^4)dr}(h-h',\partial_t\theta)ds\\ &\le 2e^{C\int_T^{(l+1)T}(1+\|u_1\|_{L^{12}}^4+\|u_2\|_{L^{12}}^4)dr}\sum_{i=1}^{l}\int_{iT}^{(i+1)T}(h-h',\partial_t\theta)ds\\ &\le 2e^{lKT}l\tilde{\varepsilon}\le 2e^{l(K+1)T}\tilde{\varepsilon}\le(\varepsilon/4)^2\end{aligned}$$

只要

$$\tilde{\varepsilon}\le\frac{\varepsilon^2}{32e^{l(K+1)T}},$$

其中

$$K:=C\int_t^{t+1}(1+\|u_1(s)\|_{L^{12}}^4+\|u_2(s)\|_{L^{12}}^4)ds\le Q(\|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}). \tag{6.7}$$

□

注6.3。注意，我们得到了覆盖集合 $\Sigma_{[T,(l+1)T]}$ 的分划数上界。这个上界未必是尖锐的，但它仅取决于空间 X、Y，以及式 (6.2) 中给出的大小 r 和 $s=\|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}$。

最后，我们得到以下定理，它是本文的主要结果。

定理6.4。设假设 (1.2)-(1.4) 成立，且 g 满足 (1.6) 或 (1.7)。那么，由 (1.1) 生成的过程具有一个紧一致吸引子 $\mathcal{A}_\Sigma$，并且对于任意给定的固定 $\delta>0$，存在 $T>0$ 和 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)\le(\mathcal{N}+\delta)\log_2\frac{2}{\varepsilon}+(\frac{1}{\sigma}\ln\frac{4\nu}{\varepsilon}+T)\mathbb{H}^w_{\frac{\varepsilon^{[2+(K+1)/\sigma]}}{32e^{T(K+1)}(4\nu)^{(K+1)/\sigma}+1}}(r,X;\ \|g\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))},Y)$$

对所有 $\varepsilon\le\varepsilon_0$，其中满足 (5.9) 和 (5.10) 的 $\mathcal{N}$、ν 和 $\sigma>0$，正常数 r 和 K 分别由 (6.2) 和 (6.7) 给出，并且它们都仅取决于方程 (1.1) 的参数和 $\|g\|_W$；空间 X 和 Y 在 (6.3) 中定义。

证明。根据 (6.4)，我们设

$$\Sigma_j:=\Sigma\cap W_j,\quad j=1,\cdots,M.$$

表示 (2.2) 可写为

$$\mathcal{A}_\Sigma=\cup_{j=1}^M\mathcal{K}_{\Sigma_j}(t),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{6.8}$$

其中 $\mathcal{K}_{\Sigma_j}:=\cup_{h\in\Sigma_j}\mathcal{K}_h$。

由于估计 (5.9) 和 (5.10) 对 $h\in\Sigma_0$ 一致成立，因此存在 $k=k(\varepsilon)>\frac{1}{\sigma T}\ln\frac{4\nu}{\varepsilon}$ 和 $k\in\mathbb{N}$，其中 T 由 (5.16) 给出，且我们取

$$k=[\frac{1}{\sigma T}\ln\frac{4\nu}{\varepsilon}]+1 \tag{6.9}$$

使得对任意 $h_j\in\Sigma_0\cap\Sigma_j$,

$$dist_{\mathcal{E}}(U_{h_j}((k+1)T,T)\mathcal{B}_1,\mathcal{M}_{h_j}^0(k+1))\le\nu e^{-\sigma kT}<\varepsilon/4, \tag{6.10}$$

并且对于每个 $\delta>0$，都存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$N_{\varepsilon/2}(\mathcal{M}_{h_j}^0(k+1);\mathcal{E})\le(2/\varepsilon)^{\mathcal{N}+\delta},\ \text{ for all } 0<\varepsilon\le\varepsilon_0. \tag{6.11}$$

结合关于 $l=k$ 的估计 (6.6) 和估计 (6.10)，我们得到

$$\begin{aligned} dist_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}_h((k+1)T),\mathcal{M}^0_{h_j}(k+1)) &\le dist_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}_h((k+1)T),U_{h_j}((k+1)T,T)\mathcal{K}_h(T)) \\ &\quad + dist_{\mathcal{E}}(U_{h_j}((k+1)T,T)\mathcal{K}_h(T),\mathcal{M}^0_{h_j}(k+1)) \\ &\le \varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2, \quad \forall\ h\in\Sigma_j. \end{aligned}$$

即,

$$\mathcal{K}_h((k+1)T)\subset \mathbb{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{M}^0_{h_j}(k+1);\mathcal{E}),\quad \forall\ h\in\Sigma_j. \tag{6.12}$$

因此，由（6.11）和（6.12），对所有 $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$，有

$$N_\varepsilon(\mathcal{K}_{\Sigma_j}((k+1)T);\mathcal{E})\le N_\varepsilon(\mathbb{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{M}^0_{h_j}(k+1);\mathcal{E});\mathcal{E})=N_{\varepsilon/2}(\mathcal{M}^0_{h_j}(k+1);\mathcal{E})\le(2/\varepsilon)^{\mathcal{N}+\delta}.$$

利用（6.8）对 $t=(k+1)T$，令 $\tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon^2}{32e^{kT(K+1)}+1}$，并由（6.5）、（6.9），我们得到

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma;\mathcal{E}) &\le N_\varepsilon(\mathcal{K}_{\Sigma_j}((k+1)T);\mathcal{E})M \\ &\le (2/\varepsilon)^{\mathcal{N}+\delta}\cdot(N^w_{\varepsilon^2/(32e^{kT(K+1)}+1)}(r,X;\ \|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))},Y))^k,\ \forall\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0. \end{aligned}$$

因此， $\mathcal{A}_\Sigma$ 的 Kolmogorov ε-熵 $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)=\log_2 N_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma;\mathcal{E})$ 满足以下估计

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}_\Sigma)\le(\mathcal{N}+\delta)\log_2\frac{2}{\varepsilon}+(\frac{1}{\sigma}\ln\frac{4\nu}{\varepsilon}+T)\mathbb{H}^w_{\frac{\varepsilon^{[2+(K+1)/\sigma]}}{32e^{T(K+1)}(4\nu)^{(K+1)/\sigma}+1}}(r,X;\ \|g\|_{L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))},Y).$$

□

References

[1] A.V. Babin 和 M.I. Vishik， *Attractors of Evolution Equations*，NorthHolland，阿姆斯特丹，1992 年。[2] M. Blair、H. Smith 和 C. Sogge， *Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary*，Ann. I. H. Poincar´e-AN，26 (2009) 1817-1829。[3] H. Brezis， *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*，Springer，2011。[4] N. Burq、G. Lebeau 和 F. Planchon, *Global existence for energy critical waves in 3-D domains*，J. Amer. Math. Soc.，21(3) (2008) 831-845。[5] D.N. Cheban、P.E. Kloeden 和 B. Schmalfuss， *The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems*，Nonlin. Dynam. Syst. Theory，2 (2002) 9-28。[6] V.V. Chepyzhov，关于动力过程和数学物理非自治方程的一致吸引子，Russian Math. Surveys，68 (2013), 349-382。[7] V.V. Chepyzhov 和 M.I. Vishik, *Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension*，J. Math. Pures Appl.，73 (1994), 279-333。[8] V.V.Chepyzhov 和 M.I. Vishik， *Attractors for Equations of Mathematical Physics*，Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.，第49卷。American Mathematical Society，Providence，RI，2002。[9] I. Chueshov, *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*，Springer，2015。[10] M. Efendiev、A. Miranville 和 S.V. Zelik， *Exponential attractors for a nonlinear reaction-diffusion systemin* $\mathbb{R}^3$，C. R. Acad. Sci. Paris S´er.，I 330 (2000) 713-718。[11] M. Efendiev、A. Miranville 和 S.V. Zelik, *Infinite dimensional attractors for a non-autonomous reaction-diffusion system*，Math. Nachr.，248/249 (2003) 72-96。[12] M. Efendiev、A. Miranville 和 S.V. Zelik, *Exponential attractors and finite-dimensional reduction of non-autonomous dynamical systems*，Proc. Royal Soc. Edinburgh，135A (2005) 703-730。[13] P. Fabrie、C. Galushinski、A. Miranville 和 S. Zelik, *Uniform exponential attractors for a singular perturbeddamped wave equation*，Disc. Cont. Dyn. Sys.，10 (2004)，第1-2期，211-238。[14] J.K. Hale， *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*，Math. Surveys and Mon.，25，Amer. Math. Soc.，Providence，RI，1987。

[15] A. Haraux,
Attractors of asymptotically compact process and applications to nonlinear partial differentialequations, Comm. Partial Differential Equations, 13(11) (1988) 1383-1414。[16] A. Haraux,
Systèmes Dynamiques Dissipatifs et Applications, Masson, 巴黎, 1991。[17] V. Kalantarov、A. Savostianov 和 S.V. Zelik, *Attractors for damped quintic wave equations in boundeddomains*, Ann. Henri Poincar´e, 17(9) (2016) 2555-2584。[18] A.N. Kolmogorov 和 V.M. Tikhomirov,
ε-entropy and ε-capacity of sets in functional spaces, Uspekhi Mat. Nauk., 14(2) (1959) 3-86。[19] S. Ma 和 C. Zhong, *The attractors for weakly damped non-autonomous hyperbolic equations with a new class of external forces*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 18(1) (2007), 53-70。[20] X. Mei、A. Savostianov、C. Sun 和 S.V. Zelik, *Infinite energy solutions for weakly damped quintic waveequations in $\mathbb{R}^3$*, Trans. Amer. Math. Soc., 374(5) (2021) 3093-3129。[21] X. Mei 和 C. Sun,
Uniform attractors for a weakly damped wave equation with sup-cubic nonlinearity, Appl. Math. Lett., 95 (2019) 179-185。[22] A. Miranville 和 S.V. Zelik,
Attractors for Dissipative Partial Differential Equations in Bounded and Un-bounded Domains。《微分方程手册》, 《演化方程》, 第4卷, C. Dafermos 和 M. Pokorny 编, 爱思唯尔, 阿姆斯特丹, 2008。[23] A. Savostianov 和 S.V. Zelik, *Uniform attractors for measure-driven quintic wave equation with periodic boundary conditions*, Uspekhi Mat. Nauk, 75, 第2期（第452期）(2020) 61-132。[24] J. Shatah 和 M. Struwe, *Regularity results for nonlinear wave equations*, Ann. of Math., (2) 138(3) (1993), 503-518。[25] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, 纽约, 1997。[26] M.I. Vishik 和 V.V.Chepyzhov, *Kolmogorov ε-entropy in problems of global attractors of evolution equations in mathematical physics*, （俄文）Problemy Peredachi Informatsii, 39 (2003), 第1期, 4-23; 译文发表于 Probl. Inf. Transm. 39 (2003), 第1期, 2-20。[27] S.V. Zelik,
The attractor for a nonlinear hyperbolic equation in the unbounded domain, Discrete Contin. Dyn. Syst., 7 (2001) 593-641。[28] S.V. Zelik,
Strong uniform attractors for non-autonomous dissipative PDEs with non translation-compactexternal forces, Discrete Contin. Dyn. Syst. B, 20(3) (2015) 781-810。