修正的格林双曲算子

Christopher J. FEWSTER

约克大学数学系，英国约克赫斯灵顿 *YO10 5DD*电子邮箱：*chris.fewster@york.ac.uk*网址：https://www.york.ac.uk/maths/people/chris-fewster/

收稿日期：2023年4月20日，终稿日期：2023年7月29日；在线发表日期：2023年8月8日https://doi.org/10.3842/SIGMA.2023.057

arXiv:2303.02993v2 [math-ph] 8 Aug 2023

摘要。Green-双曲算子——定义在全局双曲时空上的偏微分算子，若其与形式伴随算子均存在超前和推迟格林算子——在数理物理的许多领域中发挥着重要作用。本文研究通过添加一个作用于时空紧子集 K 内、可能为非局部的算子，对 Green-双曲算子进行修正，并寻求相应的“K-非局部”广义格林算子。假设修正项全纯地依赖于某个参数，本文给出了保证对除可能的离散集以外的所有参数值均存在 K-非局部格林算子的条件。例外点恰好出现在修正后的算子存在非平凡光滑齐次解且其支集为过去紧或未来紧之处。本文利用Fredholm理论，将这些解空间的维数与形式伴随算子对应解空间的维数联系起来，同时交换未来与过去的角色。文中证明，K-非局部格林算子关于该参数全纯，并且在适当索伯列夫空间之间的映射上，或在适当的光滑函数空间之间的映射上，以有界收敛拓扑连续依赖于该参数。最后，本文介绍了其在方程组 LU 分解中的应用。

关键词：Green-双曲算子；非局部方程；Fredholm理论

*2020*年数学主题分类：35R01；35R09；47B93

谨以此文献给 *Christian B ¨ar*，值他六十岁生日之际

1 引言

线性偏微分算子是数理物理中的主力工具，为经典场论与量子场论提供了最简单的模型，并可据此构建更复杂的相互作用模型。在广义相对论或其他非线性理论中，每当理论被线性化时，线性算子便会出现，例如用于研究解的稳定性或引力波的传播。

B 在整体双曲洛伦兹流形上的向量丛光滑截面空间之间作用的一类特别有用的通用算子，称为“Green-双曲算子”。Green-双曲性是对双曲性的推广，而非特化：Green-双曲算子未必是双曲的，也存在椭圆型或不定型的例子。格林双曲算子的定义性质是，它应当与其形式对偶都具有超前和延迟Green算子。正如 B 所优雅阐述的那样，由这一简单的代数条件可以引出许多其他性质。尤其是，格林算子是唯一且连续的，并且可扩展为在各种光滑截面或分布截面空间上，格林双曲算子的相应扩展算子的连续逆。¨ar [2] ar¨。尤其是，格林算子是唯一且连续的，并且可扩展为在各种光滑截面或分布截面空间上，格林双曲算子的相应扩展算子的连续逆。

本文是为纪念 Christian B¨ar 60岁生日而举办的流形上的整体分析特刊所作的贡献。完整文集见 https://www.emis.de/journals/SIGMA/Baer.html

Green-双曲算子的例子包括：(a) 正规双曲算子，例如波算子 $\Box$ 及其允许势和外部矢量势的变体；(b) 全局双曲时空上的一阶对称双曲系统 [2]；(c) 平方后为 Green-双曲算子的任意算子，因此也包括狄拉克型算子；(d) 解理论可与上述某类算子相关联的算子，例如（非双曲的）Proca算子 $-\delta\mathrm{d}+m^2$，其格林算子由以下算子的格林算子得到：$-(\delta\mathrm{d}\ +\mathrm{d}\delta)\ +m^2$ 作用于光滑 1-形式场。关于这些及其他例子，参见 [2] 。

本文旨在研究格林双曲算子的改造，这些改造可能使其超出偏微分算子的范畴。为简便起见，我们主要研究标量算子的情形，但将我们的结果推广到一般的丛情形并无障碍（记号方面的障碍除外！）。我们考虑的算子具有 $P+A$ 的形式，其中 P 是 Green-双曲算子，而 A 是 $C^\infty(M)$ 上的连续线性自映射（不一定是微分算子），其值域包含于 $C^\infty_K(M)$，即支集包含在紧子集 $K\subset M$ 中的光滑函数。无损一般性地，我们总可以假设 K 是 拓扑正则 的，也就是说，它等于其内部的闭包。这类算子可能具有非局域性，不过这种非局域性可以说局限于 K 之内。根据核定理，任何此类算子都可以表示为

$$A\phi=\int_M T(x,y)\phi(y)\mu_y,$$

其中 μ 是光滑密度，而 $T\in\mathcal{D}'(M\times M)$ 的支集包含于 $K\times M$ 中，并且在其第一个槽位 $\big($上是半正则的；也就是说，T 属于核张量积 $C^\infty(M)\,\widehat{\otimes}\mathcal{D}'(M)\big)$。这类算子包括但不限于支集位于 K 中的微分算子和伪微分算子（对于这些算子，T 的奇异支集局限于对角线）。

这类算子有若干应用。在微扰代数量子场论（pAQFT）中，它们源自正则相互作用这一类；本文证明的结果确立了所需格林算子的存在性，例如在 [17], 中便需要这类算子。另一项应用是非交换势散射 [23], ，其中诸如

$$P\phi+w\star\phi=0$$

这类方程可作为非交换时空上经典场与量子场动力学的玩具模型。在这里，P 是一个 Green-双曲算子，w 是一个固定的光滑函数，而 $\star$ 是乘法的非交换变形，它仅在一个紧集 K [24]内不同于逐点乘法。本文所得结果在此类模型中的应用将在别处讨论 [13]。另请参见 [7], 其中近期出现了非局部方程，但背景略有不同。

事实上，可以建立一整套非局域格林双曲算子理论，配套论文 [14]对此进行了阐述。本文旨在探讨在对 P 和 $A(\lambda)$ 施加适当条件的情况下，$\lambda\in\mathbb{C}$ 的格林算子 $E^\pm_{P+A(\lambda)}$（即某种适当推广概念）的存在性及其性质。本文特别关注所得格林算子对 λ 的解析依赖，以及它们在适当局部凸空间和 $\mathbb{C}$ 中适当定义域上的性质。即使在算子 $P+A(\lambda)$ 是局域格林双曲算子的情形下，这些结果也同样有用。例如，它们已在 [12] 中应用于量子场论（QFT）可观测量的测量方案。我们研究的格林算子具有类似格林双曲算子的性质，并满足以下推广的支集性质：

$$\operatorname{supp}E^\pm_{P+A(\lambda)}f\subset\begin{cases}J^\pm(\operatorname{supp}f), & J^\pm(\operatorname{supp}f)\cap K=\varnothing,\\ J^\pm(\operatorname{supp}f\cup K), & \text{otherwise},\end{cases}$$

对于紧支撑的 f，其中 $J^{+/-}(S)$ 是集合 S 的因果未来/过去。此支集性质刻画了我们所称的 K-非局域格林算子，其精确定义见下文定义2.4 。

本文的主要结果是定理 3.1，其中给出了关于 P 和 $A(\lambda)$ 的条件，在这些条件下，存在适用于 $P + A(\lambda)$ 的格林算子。关于 P 的主要假设是：它是一个 Green-双曲算子，其格林算子可延拓为连续映射，在索伯列夫空间 $H^s_0(M)$ 与 $H^{s+\beta}\mathrm{loc}\,(M)$ 之间映射，其中 s 充分大，且 β固定。对于具有 $\beta = 1$的二阶正规双曲算子，该假设成立（见 [10, 定理 6.5.3]）。关于 $A(\lambda)$ 的主要假设是：每个 $A(\lambda)$ 都是 $C^\infty(M)$ 上的连续线性自映射，并且可连续延拓为在索伯列夫空间 $H^s_{\mathrm{loc}}(M)$ 到 $H^{s+\gamma}_K(M)$ 之间映射，其中 s 充分大，且 $\gamma > -\beta$固定。这意味着复合映射 $A(\lambda)E^{\pm}$是 $H^s_0(M)$ 与 $H^s_K(M)$ 之间的紧映射，并要求它们关于 λ 全纯，所采用的拓扑是这些空间之间线性映射上的有界收敛拓扑。附录 A 简要总结了本文中用到的各种拓扑空间和拓扑。

根据上述假设，可以利用解析弗雷德霍姆定理找到逆算子 $\left(I + A(\lambda)E^{\pm}\right)^{-1}$，对所有充分大的 $s \in \mathbb{R}$ 以及零点某个开邻域内的所有复数 λ，这些逆算子定义在 $H^s_K(M)$ 上；其补集（可能为空）是 S 的离散子集，且属于 $\mathbb{C}$。异常值 $\lambda \in S$ 恰好出现在存在非平凡光滑解满足 $(P + A(\lambda))\phi = 0$ 时；这些解的支集或者过去紧，或者未来紧，也就是说，它们是在早期或晚期时刻恒等于零的非平凡解，代表自发出现或消失的扰动。显然，只要存在任何形式的能量估计，就可以排除这类解。对于 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$，可以利用这些逆算子构造 K-非局部格林算子，用于 $P + A(\lambda)$。此外还证明了所得的 K-非局部格林算子在 $\mathbb{C} \setminus S$ 上全纯；这里采用的是从 $C^\infty_0(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的线性映射上的有界收敛拓扑。格林算子在 $\lambda = 0$ 处的幂级数展开对应于格林算子的玻恩展开。我们还展示了如何构造经典Møller算子 [11, 17] ，以联系自由动力学与相互作用动力学。

在我们的主要假设对 P 和 A（λ）的形式对偶也成立的情况下，我们应用 Fredholm 指数理论证明： $P + A$（λ）中自发出现（分别为消失）的解空间维数，等于其形式对偶中自发消失（分别为出现）的解空间维数，

$$\dim\ker(P + A(\lambda))|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}} = \dim\ker\left({}^tP + {}^tA(\lambda)\right)|_{C^\infty_{\mathrm{fc/pc}}}, \tag{1.1}$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 均如此。这里，下标 pc 和 fc 分别表示过去紧支撑和未来紧支撑。因此，形式自对偶算子的出现解空间和消失解空间维数相等。

我们提到，Dappiaggi 和 Finster [7]最近研究了源自“因果变分原理”的非局部方程。这些方程与我们考虑的方程不同，因为非局域性未必局限于紧的时空区域。他们证明存在性的方法也有所不同：他们指出了在何种条件下可以构造经典能量估计的一种变体，随后基本沿用经典论证，证明正规双曲型偏微分方程柯西问题解的存在性。

本文结构如下：在第2节中，我们回顾格林双曲算子的定义及其主要性质，并发展适当的 K-非局部格林算子概念。第3节陈述我们的主要结果——定理3.1 ，并通过示例说明其用途以及其中某些假设的必要性。第4节将我们的结果应用于某些非局部方程组的 LU 分解与求解。主要结果在第5节中证明：先在索伯列夫空间中得到一系列结果，然后推广到光滑函数；而（1.1）则在第6 节中利用 Fredholm

理论以及第5节的结果加以证明。附录A 汇集了正文中所涉及的拓扑空间和拓扑的必要背景知识。

2 Green-双曲算子

预备知识。 我们首先回顾 Green-双曲算子的一般设定 [2]。设 M 为光滑有限维流形，并允许 M 具有有限个维数可能不同的连通分支；再设 g 为 M 上的光滑洛伦兹度规，其号差为 $+---\cdots$。由这些结构， M 自动成为豪斯多夫且仿紧的 [15]。我们假设 (M,g) 时间可定向，并已选定一种时间定向。为简化记号，我们用单个符号 M表示由流形、度规和时间定向构成的洛伦兹时空。度规诱导的体积测度记为 μ。关于其他记号，符号 $\subset$ 总是允许取等号，而 $\mathbb{N}_0$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示含零和不含零的自然数。

通常，点 $x \in M$ 的因果未来/过去记为 $J^{\pm}(x)$，它由所有可沿光滑未来/过去指向曲线从 x 到达的点（包括 x）组成。（全文中，我们默认将标记为 $\pm$ 或 $\mp$ 的选项按上方符号所标记的选项在前的顺序排列。）若 $S \subset M$，则记作 $J^{\pm}(S) = \cup_{x\in S} J^{\pm}(x)$，且$J(S) = J^{+}(S) \cup J^{-}(S)$。若时空中不存在因果曲线，且对所有紧集 $K \subset M$ [6]，$J^{+}(K) \cap J^{-}(K)$ 都是紧的，则该时空称为全局双曲。整体双曲时空可以分叶为光滑的类空柯西曲面 [5]；此外，当 K 为紧集时，$J^{\pm}(K)$ 也是闭集。我们采用以下术语：若 S是闭集，且对某个紧集 K有 $S \subset J(K)$，则称 $S \subset M$ 为类空紧；若对所有 $x \in M$， $S \cap J^{\pm}(x)$ 都是紧的，则称 S为未来/过去紧；若对某个紧集 K有 $S \subset J^{\mp}(K)$，则称 S为严格未来/过去紧。

若 B 是一个纤维有限维的向量丛，则 $\Gamma^{\infty}(B)$表示相应的光滑截面空间，而 $\Gamma^{\infty}_{0/\mathrm{pc/fc/spc/sfc/sc}}(B)$表示支集为紧支集/过去紧/未来紧/严格过去紧/严格未来紧/类空紧的光滑截面空间。支集包含于某个闭子集 $A \subset M$ 中的光滑截面空间记为 $\Gamma^{\infty}_{A}(M)$。这些空间的拓扑详见附录 A。我们只考虑纤维有限维、且（并无实质损失地）为 $\mathbb{C}$上的向量空间的丛。对偶丛 B^*的截面与 B的截面之间的双线性（而非厄米！）配对记作尖括号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：$\Gamma^{\infty}(B^*) \times \Gamma^{\infty}(B) \to C^{\infty}(M)$。

Green-双曲性。设 B_1 和 B_2 是 M 上的丛，且 P：$\Gamma^{\infty}(B_1) \to \Gamma^{\infty}(B_2)$ 是一个线性偏微分算子。那么存在一个形式对偶 ${}^tP$：$\Gamma^{\infty}(B_2^*) \to \Gamma^{\infty}(B_1^*)$，其定义为

$$\int_M \mu \left\langle {}^tP f, \phi \right\rangle = \int_M \mu \left\langle f, P\phi \right\rangle$$

对所有支集交集紧的 $\phi \in \Gamma^{\infty}(B_1)$ 和 $f \in \Gamma^{\infty}(B_2^*)$ 均成立； ${}^tP$ 也是一个线性偏微分算子。若线性映射 $E^{\pm}$：$\Gamma^{\infty}_0(B_2) \to \Gamma^{\infty}(B_1)$ 存在，则满足

(G1) 对所有 $f \in \Gamma^{\infty}_0(B_1)$， $E^{\pm}Pf = f$；(G2) 对所有 $f \in \Gamma^{\infty}_0(B_2)$， $PE^{\pm}f = f$；(G3) 对所有 $f \in \Gamma^{\infty}_0(B_2)$，$\mathrm{supp}\ E^{\pm}f \subset J^{\pm}(\mathrm{supp}\ f)$

称为 P的超前（$-$）和延迟（$+$）格林算子。[1]

[1] B¨ar 将“超前”和“推迟”的用法颠倒了；我们采用更为标准的约定 .

定义 2.1。 P称为*Green*-双曲 的，如果 P和 ${}^tP$都存在超前和延迟Green算子。

一个值得注意的事实是，这个纯代数定义——仅要求 $E^{\pm}$的线性性，且不预设唯一性或连续性——会导出如下结论。这是 [2, 第 3 节和 4]的结果概要，值得称为格林双曲性的第一个主定理。

定理 2.2。 设 $P\colon\ \Gamma^\infty(B_1)\to\Gamma^\infty(B_2)$ 是一个格林双曲算子，并考虑：

(i) 限制 $P\colon\ \Gamma^\infty_{\mathrm{spc/sfc}}(B_1)\to\Gamma^\infty_{\mathrm{spc/sfc}}(B_2)$,$(ii)$ 限制 $P\colon\ \Gamma^\infty_{\mathrm{pc/fc}}(B_1)\to\Gamma^\infty_{\mathrm{pc/fc}}(B_2)$，或 (iii) 延拓 $P\colon\ \mathcal{D}'_{\mathrm{pc}/fc}(B_1)\to\mathcal{D}'_{\mathrm{pc}/fc}(B_2)$ (见下文)。

那么，在每种情况下， P 都有连续逆算子，分别记为 $\tilde{E}^{\mp}$、 $E^{\pm}$ 和 $\widehat{E}^{\pm}$，对应情形(i)、(ii)、(iii)，且它们是 $E^{\pm}$的逐次延拓。每个逆算子都具有支集性质$(G3)$，其中以相应的定义域替换 $\Gamma^\infty_0(B_2)$ 。特别地， $E^{\pm}$ 由 P 唯一确定，且是连续的。

在（iii）中，丛 B 在 M 上的分布截面空间 $\mathcal{D}'(B)$定义为 $\Gamma^\infty_0(B^*\otimes\Omega)$ 的拓扑对偶，其中 Ω 是 M上权重为 1 的密度丛。由于 B 的截面与 $B^*\otimes\Omega$ 的截面可以配对得到一个密度，因此显然可以将 $\Gamma^\infty(B)$嵌入到 $\mathcal{D}'(B)$中，其中 $\phi\in\Gamma^\infty(B)$对应于作用在 $f\in\Gamma^\infty_0(B^*\otimes\Omega)$ 上的分布 $f\mapsto\int_M\langle\phi,\ f\rangle$。$(iii)$ 中的映射 P是对偶映射 $\left(\mu({}^tP)\mu^{-1}\right)'$在具有过去紧或未来紧支集的 $\mathcal{D}'(B_1)$ 元素上的限制。（请记住，形式对偶是相对于特定密度 μ定义的。）在 [2], B¨ar 中，分布截面被定义为 B 的拓扑对偶 $\Gamma^\infty_0(B^*)$，按我们的术语，这将是分布密度空间。度量密度在他所考虑的空间和算子与我们所考虑的空间和算子之间给出了一个同构。由于我们考虑的潜在应用可能涉及不止一个度量，因此我们选择不将分布与分布密度固定地对应起来。

格林双曲性的第二主定理给出了两个在应用中极为有用的正合列，它们结合并略微拓展了[2] 定理 3.22 和 4.3 [2]。

定理 2.3。设 $P\colon\ \Gamma^\infty(B_1)\to\Gamma^\infty(B_2)$ 是 *Green*-双曲的，并定义超前减迟延算子 $E=E^--E^+\colon\ \Gamma^\infty_0(B_2)\to\Gamma^\infty_{\mathrm{sc}}(B_1)$ 和 $\widehat{E}=\widehat{E}^--\widehat{E}^+$，采用定理2的2中的记号。则有两个正合列

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma^\infty_0(B_1) & \xrightarrow{P} & \Gamma^\infty_0(B_2) & \xrightarrow{E} & \Gamma^\infty_{\mathrm{sc}}(B_1) & \xrightarrow{P} & \Gamma^\infty_{\mathrm{sc}}(B_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{D}'_0(B_1) & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}'_0(B_2) & \xrightarrow{\widehat{E}} & \mathcal{D}'_{\mathrm{sc}}(B_1) & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}'_{\mathrm{sc}}(B_2) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

其中向下的箭头是从光滑截面到分布截面的自然嵌入。

一个直接推论是，解空间 $\mathrm{Sol}(P)=\{\phi\in\Gamma^\infty_{sc}(B)\colon\ P\phi=0\}$ 由 $\mathrm{Sol}(P)=E\Gamma^\infty_0(B)$ 给出。Green-双曲算子的特殊性质并不局限于

[2]扩张对应最右侧的箭头，表明 P到类空紧（分布）截面的映射是满射。但任何这样的光滑截面都可以分解为 $f=f^++f^-$，其中 $f^\pm$ 具有过去/未来紧支撑，因此 $f=P(E^+f^++E^-f^-)$；对分布的论证完全相同，只需将 $E^\pm$ 替换为 $\widehat{E}^\pm$。

定理 2.2 和 2.3中的陈述。如 [2], 所示，Green-双曲算子的乘积和直和仍是 Green-双曲的，而且任何平方为 Green-双曲算子的算子本身也都是 Green-双曲的。转向物理应用，假设丛 B具有非退化双线性型，或者等价地，具有保基点的向量丛同构 $\mathcal{I}\colon B \to B^*$，以及保基点的反线性对合 $\mathcal{C}\colon B \to B$。那么$P\colon \Gamma(B) \to \Gamma(B)$ 称为形式自伴，若 $P = \mathcal{I}^{-1t}P\mathcal{I}$；若 $P = \mathcal{C}P\mathcal{C}$，则称其为实的。若形式自伴算子 P 具有超前和延迟Green算子，则 P 是 Green-双曲的，而且 Sol(P具有辛形式

$$\sigma(Ef_1, Ef_2) = \langle \mathcal{I}f_1, Ef_2\rangle, \qquad f_i \in \Gamma_0^\infty(B).$$

如果 P 也为实数，则存在相应的玻色子量子场论，它由一个含幺的 $*$ 可观测量代数描述，该代数由符号 $\Phi(f)$、 $f \in \Gamma_0^\infty(B)$ 生成，并满足以下关系：

- $f \mapsto \Phi(f)$ 是复线性的（线性性），
- $\Phi(f)^* = \Phi(\mathcal{C}f)$（厄米性），
- $\Phi(Pf) = 0$（场方程），
- $[\Phi(f)\ \Phi(h)] = \mathrm{i}\sigma(Ef,\ Eh)\mathbf{1}$（正则对易关系）

对所有 $f,\ h \in \Gamma_0^\infty(B)$。这种本质上的函子量子化是格林双曲算子理论的主要应用之一。在更严格的条件下，一阶格林双曲算子也可以进行费米子量子化 [3]。

修正的格林双曲算子。 回到本文的主题，假设$P\colon \Gamma^\infty(B_1) \to \Gamma^\infty(B_2)$ 是 Green-双曲的，且其格林算子为 $E^\pm$。设 $A\colon \Gamma^\infty(B_1) \to\Gamma^\infty(B_2)$ 是线性的，其值域包含于某个紧的、拓扑正则的$K \subset M$的 $\Gamma_K^\infty(B_2)$ 中。

尽管 $P+A$ 不一定是微分算子，我们仍希望陈述类似于 (G1)–(G3) 的条件，以刻画合适的格林算子。为了获得一些启发，我们暂且假设，对于每个 $h \in \Gamma_0^\infty(B_2)$，方程 $(P+A)\phi = h$ 存在过去/未来紧支撑的唯一解，记为 $\phi = E^\pm_{P+A}h$，其中 $E^\pm_{P+A}\colon \Gamma_0^\infty(B_2) \to \Gamma^\infty(B_1)$ 是线性映射，其值域必然包含于 $\Gamma^\infty_{pc/fc}(B_1)$。那么我们可以写成

$$PE^\pm_{P+A}f = f - AE^\pm_{P+A}f = PE^\pm_P\big(f - AE^\pm_{P+A}f\big), \qquad f \in \Gamma_0^\infty(B_2),$$

利用我们对 P 和 A的假设。由于 P 根据定理 $\Gamma^\infty_{\mathrm{pc/fc}}(B_1$2.2$(ii)$在上可逆，因此我们有

$$E^\pm_{P+A}f = E^\pm_P\big(f - AE^\pm_{P+A}f\big)$$

根据条件（G3）， P的支集由.....确定,

$$\operatorname{supp} E^\pm_{P+A}f \subset J^\pm\big(\operatorname{supp}\big(f - AE^\pm_{P+A}f\big)\big) \subset J^\pm(\operatorname{supp} f \cup K).$$

通过对 A 施加进一步条件，我们可以细化已有的信息。具体而言，假设 $\phi|_K \equiv 0$ 蕴含 $A\phi \equiv 0$。注意到

$$(P+A)E^\pm_P f = f + AE^\pm_P f \in \Gamma_0^\infty(B_1)$$

根据 $E^\pm_P$ 的（G2）和 A的定义；由对 $E^\pm_{P+A}$ 的假设，现在我们有

$$E^\pm_P f = E^\pm_{P+A}\big(f + AE^\pm_P f\big)$$

并推导出，对于所有满足 $J^\pm$(支集 f) $\cap\, K$为空的 $f \in \Gamma_0^\infty(B_2)$，$E^\pm_{P+A}f = E^\pm_P f$因为 $AE^\pm_P f$为零)。结合我们之前的观察， $E^\pm_{P+A}$满足修改后的支集性质

对于所有 $f \in \Gamma_0^\infty(B_2)$，(G3′)，

$$\operatorname{supp} E^{\pm}_{P+A} f \subset \begin{cases} J^{\pm}(\operatorname{supp} f), & J^{\pm}(\operatorname{supp} f) \cap K = \varnothing, \\ J^{\pm}(\operatorname{supp} f \cup K), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在确立了这一直观认识后，我们可以不再假设 $(P + A)\phi = h$ 具有过去/未来紧支撑的唯一解。现在的基本假设为

(A1) $P\colon \Gamma^\infty(B_1) \to \Gamma^\infty(B_2)$ is Green-hyperbolic,

(A2) A: $\Gamma^\infty(B_1) \to \Gamma^\infty(B_2)$ 是线性的，且其值域包含于 $\Gamma^\infty_K(B_2)$,

（A3）对于 $\phi \in \Gamma^\infty(B_1)$, $\phi|_K \equiv 0$ 蕴含 $A\phi \equiv 0$。

现在我们作如下定义。

定义 2.4。 在假设（A1）–（A3）下，若线性映射 $E^{\pm}_{P+A}$: $\Gamma_0^\infty(B_2) \to \Gamma^\infty(B_1)$ 满足（G1）和（G2）(，其中以 $P + A$ 替换 P，并以 $E^{\pm}_{P+A}$ 替换 $E^{\pm}$)，以及（G3′），则称其为 $P + A$ 的延迟/超前 K-非局部格林算子。如果 $P + A$ 和 ${}^tP + {}^tA$ 都具有延迟和超前的 K-非局部格林算子，则称 $P + A$ 为 K-非局部 ***Green*-双曲的**。

与格林双曲算子一样，上述定义蕴含着更多结论；事实上，将定理2.2 中的 (G3) 替换为 (G3′)，其类似结论仍然成立。这些结果将在 [14]中证明。本文的主要目标是给出K-非局部格林算子存在的充分条件。为使表述简洁，我们将讨论范围限制在作用于光滑函数空间而非向量丛截面空间上的算子。我们还将建立关于 K-非局部格林算子的若干连续性结果，涉及从 $C_0^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的映射以及不同索伯列夫空间之间的映射，并讨论 K-非局部格林算子关于参数的全纯性。

在形式层面上，很容易看出 $P + A$ 的格林算子若存在，应当是什么：如果 $\phi \in C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}(M)$ 是 $(P + A)\phi = f \in C_0^\infty(M)$ 的解，那么

$$\phi = E^{\pm}_P(f - A\phi) = E^{\pm}_P g,$$

其中 $g = f - A\phi = f - AE^{\pm}_P g$，因此 $g = \left(I + AE^{\pm}_P\right)^{-1} f$。所以，形式上， $P + A$ 的格林算子为

$$E^{\pm}_{P+A} = E^{\pm}_P \left(I + AE^{\pm}_P\right)^{-1}, \tag{2.1}$$

而技术任务是在可能的情况下使该公式严谨，并证明所得算子 $E^{\pm}_{P+A}$确实是 $P + A$的 K-非局部格林算子。请注意，必须在 $C_0^\infty(M)$中对 $I + AE^{\pm}$求逆。我们将先在索伯列夫空间中求逆，在那里可以使用希尔伯特空间技术，然后再将结果提升到 $C_0^\infty(M)$。

由（2.1）可见，算子 $\left(I + AE^{\pm}_P\right)^{-1}$ 在由 P 表示的自由动力学与 $P + A$的相互作用动力学之间起桥梁作用。这种联系可以用经典Møller算子精确表述——参见推论3.2。

3 主要结果与评注

设 M 是一个至多具有有限个连通分支的全局双曲时空，且 K 是 M 的一个固定的、拓扑正则的紧子集。为简洁起见，我们用 C^∞ 表示 $C^\infty(M)$，依此类推；对于闭集 A，C^∞_A 表示支集包含于 A 的光滑函数空间，其他分布空间和索伯列夫空间也采用相同约定。若 X 和 Y 是局部凸拓扑空间，则 $\mathcal{L}_b(X,Y)$ 表示它们之间的线性映射空间，并赋予有界收敛拓扑（见附录 A）；对于赋范空间之间的线性映射，这与通常的算子范数拓扑一致。照例，我们用 $\mathcal{L}_b(X)$ 表示 $\mathcal{L}_b(X,X)$。

本文的主要结果如下。

定理 3.1。设 P 为一个格林双曲算子，并设 $A(\lambda)$，$\lambda\in\mathbb{C}$是一族线性映射 $A(\lambda)\colon\ C^\infty\to C^\infty$，其值域包含于 C^∞_K，且满足 $A(0)=0$。假设对于某些 β、$\gamma\in\mathbb{R}$（其中 $\delta=\beta+\gamma>0$）以及某个 $s_*\in\mathbb{R}$，

(a) P 的格林算子 $E^\pm$ 可延拓为线性映射 $\mathcal{E}'\to\mathcal{D}'$，其连续限制将 $H^s_0\to H^{s+\beta}_{\rm loc}$ 映射到相应空间，对所有 $s\geq s_*$均成立；*(b)* 每个映射 $A(\lambda)$均可延拓为线性映射 $\mathcal{D}'\to\mathcal{D}'_K$，其连续限制映射 $H^s_{\rm loc}\to H^{s+\gamma}_K$，对所有 $s\geq s_*+\beta$ 均成立（因此，由于 *Sobolev*嵌入定理和$\delta>0$，连续映射 $A(\lambda)E^\pm\colon\ H^s_0\to H^{s+\delta}_K$ 诱导紧映射 $A(\lambda)E^\pm\colon\ H^s_0\to H^s_K$）；*(c)* 对所有 $s\geq s_*$，由复合映射 $A(\lambda)E^\pm$ 诱导的紧映射 $H^s_0\to H^s_K$ 关于 $\mathcal{L}_b(H^s_0,H^s_K)$的拓扑在 $\lambda\in\mathbb{C}$中是全纯的；*(d)* 若 $f\in C^\infty$ 在 K 上恒等于零，则 $Af=0$。

Then

(A) 核$(P+A(\lambda))|_{C^\infty_{\rm pc/fc}}$ 对每个 $\lambda\in\mathbb{C}$ 都是有限维的；

(B) 这些集合

$$S^\pm=\big\{\lambda\in\mathbb{C}\colon\ \ker(P+A(\lambda))|_{C^\infty_{\rm pc/fc}}\neq 0\big\}\qquad and\qquad S=S^+\cup S^-$$

是 $\mathbb{C}$ 的离散子集，其补集是零邻域的开邻域；

(C) $P+A(\lambda)$ 对所有 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$，都具有超前和推迟的 K-非局域格林算子；这些算子在此定义域上的 λ 中是全纯的，其拓扑为 $\mathcal{L}_b(C^\infty_0,C^\infty)$；这些格林算子的显式表达式为

$$\tilde{E}^\pm_\lambda=E^\pm\big(I+A(\lambda)E^\pm\big)^{-1},$$

其中右侧的逆算子存在，且在 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$ 中是全纯的，其拓扑为 $\mathcal{L}_b(C^\infty_0)$；

(D) 格林算子具有连续延拓，可将 $H^s_0\to H^{s+\beta}{}_{\rm loc}$ 映射到所有 $s\geq s_*$，并且在 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$ 中是全纯的，其拓扑为 $\mathcal{L}_b\big(H^s_0,H^{s+\beta}{}_{\rm loc}\big)$；

（E）若（d）被替换为

(d') $\operatorname{supp}A(\lambda)f\subset\operatorname{supp}f$ *for all* $f\in C^\infty$, *and* $\lambda\in\mathbb{C}$

那么 $P+A(\lambda)$ 按照通常意义，具有针对 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$ 的超前和延迟*Green*算子。

当然，在假设也适用于 P 和 $A(\lambda)$ 的形式对偶的情况下，结论是 $P+A(\lambda)$ 和 ${}^tP+{}^tA(\lambda)$ 对所有处于开零邻域中的 $\lambda\in\mathbb{C}$，都具有超前和延迟的 K-非局部格林算子；该邻域的离散补集由 S 与 ${}^tP$ 对应集合的并集给出。对于非例外值，$P+A(\lambda)$ 是 K-非局部 Green-双曲的。此类算子及其性质的一般理论已在 [14] 中详尽阐述。我们特别指出，当 $A(\lambda)$ 和 ${}^tA(\lambda)$ 的值域都包含于 C^∞_K 时，假设 (d) 对这两个算子自动成立。

在许多情况下，全纯性假设（c）很容易验证，例如当 $A(\lambda)$ 是 λ上的多项式时。通过与连续嵌入 $H^s_K\to H^s_0$复合，可知 $A(\lambda)E^\pm$ 在 H^s_K上的限制，对于 $s\geq s_*$，相对于 $\mathcal{L}(H^s_K)$ 的范数拓扑是全纯的。另一方面，通过与嵌入 $H^s_K\to H^s_0$复合，我们还可知 $A(\lambda)E^\pm$ 相对于 $\mathcal{L}_b(H^s_0)$ 是全纯的（例如，参见引理 A.2）。

定理 3.1的一个直接应用是：

推论 3.2. 设 P 是作用于 M 上的二阶正规双曲算子，且 $K\subset M$ 是紧的。设 $\rho\colon\mathbb{C}\to C^\infty(K\times K)$ 是一个多项式，并定义 $A(\lambda)\colon C^\infty(M)\to C^\infty_K(M)$ 如下

$$(A(\lambda)\phi)(x)=\int_M\rho(\lambda)(x,y)\phi(y)\mu_y,\qquad \phi\in C^\infty(M).$$

那么 P 和 $A(\lambda)$ 满足定理 3.1的假设。特别地，$P+\lambda A_\rho$ 对于所有 K，都具有超前和推迟的非局部格林算子 λ，且定义于一个开0-邻域中，其在 $\mathbb{C}$中的离散补集。

证明。 P是 Green-双曲的，其格林算子可延拓为映射 $E^\pm\colon H^s_0\to {H^{s+1}}_{\mathrm{loc}}$，也就是说，根据 [10, 定理6.53](参见 [21] 关于丛版本的讨论）。容易验证，积分算子的核属于 $A(\lambda)$ 时，$C^\infty_{K\times K}(M\times M)$ 上的技术条件必然满足。■

另一个推论是存在经典Møller算子 [11, 17]，它们关联 P 和 $P+A(\lambda)$ 的解空间。

推论3.3。 在定理 3.1的假设下，令 $\mathcal{S}(\lambda)=\{\phi\in C^\infty\colon (P+A(\lambda))\phi=0\}$。那么映射 $\mathsf{r}_\lambda\colon C^\infty\to C^\infty$ 定义为

$$\mathsf{r}_\lambda\phi=\phi-E^+\big(I+A(\lambda)E^+\big)^{-1}A(\lambda)\phi,\qquad \phi\in C^\infty,\tag{3.1}$$

在 λ 上关于 $\mathcal{L}_b(C^\infty)$ 拓扑全纯。对于每个 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$，$\mathsf{r}_\lambda$ 是 C^∞ 的同胚，并且将 $\mathcal{S}(0)$ 双射到 $\mathcal{S}(\lambda)$。

由于 $\mathsf{r}_\lambda\phi$ 与 ϕ 仅在 $J^+(K)$（即相互作用区域的因果未来）中不同，因此称 r_λ 为将 P的动力学与 $P+A(\lambda)$ 的动力学交织起来的延迟经典莫勒算子。通过在（3.1）中用 E^- 替换 E^+，可以构造超前莫勒算子。

证明。 由定理 3.1的第（C）部分可知，$\mathsf{r}_\lambda\in\mathcal{L}(C^\infty)$ 在 λ 上关于 $\mathbb{C}\setminus S$拓扑 $\mathcal{L}_b(C^\infty)$ 全纯。直接计算并利用 $I+A(\lambda)E^+$ 在 C^∞_0 上的可逆性可得，r_λ 在 C^∞ 上可逆，其连续逆为

$$\mathsf{r}_\lambda^{-1}\phi=\phi+E^+A(\lambda)\phi,\qquad \phi\in C^\infty.$$

最后，如果 $\phi\in\mathcal{S}(0)$，那么

$$(P+A(\lambda))\mathsf{r}_\lambda\phi=A(\lambda)\phi-\big(I+A(\lambda)E^+\big)\big(I+A(\lambda)E^+\big)^{-1}A(\lambda)\phi=0$$

并且，如果 $\phi \in \mathcal{S}(\lambda)$，那么

$$P\mathsf{r}_\lambda^{-1}\phi = -A(\lambda)\phi + A(\lambda)\phi = 0$$

因此 $\mathsf{r}_\lambda \mathcal{S}(0) \subset \mathcal{S}(\lambda)$ 且 $\mathsf{r}_\lambda^{-1}\mathcal{S}(\lambda) \subset \mathcal{S}(0)$，由此我们推得 r_λ 将 $\mathcal{S}(0)$ 双射到 $\mathcal{S}(\lambda)$。■

定理 3.1将在下一节证明，其间还会给出若干进一步的评论和例子。首先，我们指出，定理3.1远非所能陈述的最一般形式。例如，只需增加一些记号而无需引入新思路，它便可立即推广到作用于 M 上有限维向量丛的截面上的算子。这也可以通过以当前形式应用定理 3.1 来证明，方法是使用第 4 节所述的 LU 分解方法。

此外，还可以推广到多变量扰动 $P + \sum_{j=1}^{r} A_j(\lambda_j)$。在这种情况下，离散例外集将被 $\mathbb{C}^r$ 中的集合所取代；这些集合在局部上是 r 个变量的全纯函数的零点集。适当的多变量 Fredholm 定理见 [16]，相关阐述见 [22]。

第三，函数在有界收敛拓扑下的全纯性之所以重要，是因为这类函数的复合在有界收敛拓扑下也全纯，且其导数由通常的莱布尼茨法则给出。这一点在附录 A.3中有更详细的说明。

第四，定理 3.1 表明，K-非局域格林函数存在的障碍 $P + \lambda A$ 由具有过去紧或未来紧支集的非平凡光滑解（若存在，则张成有限维空间）构成，这些解满足方程 $(P + \lambda A)\,\phi = 0$。任何形式的能量估计都足以排除这类非平凡解；它们意味着封闭系统中存在不符合物理规律的行为。不过，数学上的例子很容易构造。

例 3.4。设 P 在 M 上是 Green-双曲的，且具有格林算子 $E^{\pm}$。取任意非平凡的f，$h \in C_K^\infty$ 并定义 $A\colon C^\infty \to C_0^\infty$为

$$A\phi = -\left(\int h\phi\,\mu\right) f,$$

注意到 A的值域包含于 C_K^∞。若 $\phi \in C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}$满足 $(P + \lambda A)\phi = 0$，则 $P\phi = -(\lambda \int h\phi\,\mu) f$，由此可推得 ϕ是 $E^{\pm}f$的常数倍；因此也必有 $(P + \lambda A)E^{\pm}f = 0$，或者等价地，$f = \lambda\nu^{\pm} f$，其中 $\nu^{\pm} = \int hE^{\pm}f\mu$。所以，$\phi \in \ker(P + \lambda A)|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}}$ 存在非平凡元素的必要条件是 $\lambda\nu^{\pm} = 1$，并且很容易看出该条件也是充分的。综上，

$$\ker(P + \lambda A)|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}} = \begin{cases} 0, & \lambda\nu^{\pm} \neq 1, \\ \mathbb{C}E^{\pm}f, & \lambda\nu^{\pm} = 1. \end{cases}$$

接下来注意到，${}^tA$ 与 A 形式相同，只是 f 和 h 互换了。因此，$\ker {}^t(P + \lambda A)|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}}$ 非平凡，当且仅当 $\lambda {}^t\nu^{\pm} = 1$，其中 ${}^t\nu^{\pm} = \int fE_t^{\pm}h\mu$和 $E_t^{\pm}$是 ${}^tP$的格林算子。但 $E_t^{\pm}$是 $E^{\mp}$的形式对偶，因此实际上 ${}^t\nu^{\pm} = \nu^{\mp}$，并且

$$\ker {}^t(P + \lambda A)|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}} = \begin{cases} 0, & \nu^{\mp}\lambda \neq 1, \\ \mathbb{C}E^{\pm}h, & \nu^{\mp}\lambda = 1 \end{cases}$$

因此

$$\dim\ker(P + \lambda A)|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}} = \dim\ker\left({}^tP + \lambda {}^tA\right)\big|_{C^\infty_{\mathrm{fc/pc}}}.$$

因此，至多有两个 λ 值，使得 $P + \lambda A$ 可能不具备 K-非局域 Green-双曲性。若 P 满足定理a（3.1 ）的假设（例如，若 P 是克莱因–戈尔登算子），则 $P+\lambda A$对所有 K都具有 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{(\nu^{\pm})^{-1}\}$-非局域 Green-双曲性。

上述例子说明了一个基于 Fredholm 指数理论的一般性结果。该结果源于 B¨ar 向作者提出的一个深刻问题，并在第6节中得到证明。

定理 3.5. 假设定理3.1 的条件对以下两者均成立： P 和 $A(\lambda)$，以及 ${}^tP$和 ${}^tA(\lambda)$，其中 $\beta \geq 0$ 和 $s_* \leq -\beta < \gamma$。那么，对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，

$$N^{\pm}(\lambda) := \dim\ker(P + A(\lambda))|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}} = \dim\ker\left({}^tP + {}^tA(\lambda)\right)\big|_{C^\infty_{\mathrm{fc/pc}}}.$$

特别地，在 P 和 $A(\lambda)$ 形式自对偶的情况下， $N^+(\lambda) = N^-(\lambda)$ 。

乍看之下，在自对偶情形中，自发出现和消失的解空间具有相同维数，这相当令人惊讶。其核心在于洛伦兹因果性的一个基本事实： $x \in J^{\pm}(y)$ 当且仅当 $y \in J^{\mp}(x)$；由此可知，格林双曲算子的超前和延迟Green算子 P 是其形式对偶 ${}^tP$ 的延迟和超前格林算子的形式对偶。仅凭这一点还不足以得到上述结果；该结果还关键地利用了 $A(\lambda)E^{\pm}$ 是紧的这一事实，因为它能改善正则性。

最后一条评论促使人们考虑这样的情形： $A(\lambda)E^{\pm}$ 并不能改善正则性。

例 3.6。 考虑关于 $\mathbb{R}^2$ 上的 $(u,\ v)$ 坐标的 Green-双曲算子 $P = \partial_u\partial_v$ ，将这些坐标中分量非负的向量视为未来指向且为因果的向量。我们可以用显然的张量积记号写出 $P = \partial \otimes \partial$。设 f、g 和 h 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑实值函数，使得 f、g' 和 h 的支集包含于 $[-2,2]$、$\operatorname{supp} g \subset [-2,\infty)$，$f \equiv 1$ 在 $[-1,1]$ 的某个邻域上，并且 $\langle h \,|\, g\rangle = 1$ 关于通常的 $L^2(\mathbb{R})$ 内积。定义 $T = -|g'\rangle\langle h|$ ，并注意到

$$g' + Tg = 0.$$

设定 $K = [-2,2] \times [-2,2]$，算子

$$A = (f\partial) \otimes T$$

将 $C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ 连续映射到 $C^\infty_0\left(K\right)$，在 $\phi \in C^\infty(M)$ 上消失，其中 $\phi|_K \equiv 0$，并且对任意 $s \in \mathbb{R}$ 都延拓为连续映射 $H^s_{\mathrm{loc}} \to H^{s-1}_K$。因此 $AE^{\pm}$： $H^s_K \to H^s_K$。现在很容易看出，方程

$$P\varphi + A\varphi = 0$$

其解为任意分布 $\varphi = v \otimes g$，其中 $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 的支集包含于 $[-1,1]$。此类 φ 具有过去紧支集，包含于 $[-1,1] \times [-2,\infty)$。

此例表明， $AE^{\pm}$ 的正则性提升性质，既使得方程 $(P + A)\phi = 0$ 的过去紧／未来紧解具有光滑性，也使得相应解空间具有有限维性。

鉴于这个例子，显然还需要进一步的条件来处理对一阶微分算子的修改。例如，如果 D 是狄拉克算子，那么$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$存在一个伴随算子 D ，使得 $P = DD$ 和 $P = DD$ 是二阶 Green-双曲算子，分别具有格林算子 $E^{\pm}$ 和 $\tilde{E}^{\pm}$ ，并且可将正则性提高一个阶。于是， $G^{\pm} = \tilde{D}E^{\pm}$ 和 $\tilde{G}^{\pm} = D\tilde{E}^{\pm}$ 分别是 D 和 $\tilde{D}$ 的格林算子。类似地，$G^{\pm}_t = {}^t\tilde{D}E^{\pm}_t$和 $\tilde{G}^{\pm}_t = {}^tD\tilde{E}^{\pm}_t$分别是 ${}^tD$ 和 ${}^t\tilde{D}$的格林算子，其中 $E^{\pm}_t$和 $\tilde{E}^{\pm}_t$表示 ${}^tP$ 和 ${}^t\tilde{P}$的格林算子。因此， D 和 $\tilde{D}$ 是 Green-双曲的，但我们无法假定它们的格林算子能够提高正则性。

现在考虑一个 K-非局部修改 $D+A$，以下省略 D-依赖性。若 A 和 ${}^tA$ 的值域包含于C^∞_K，且能够提高正则性，则定理3.1 适用，并表明 $D+A$ 是 K-非局部 Green-双曲的，前提是方程 $(D+A)\,\phi = 0$ 或 $({}^tD + {}^tA)\phi = 0$不存在非平凡的过去紧或未来紧解。更一般地，寻找修改后算子的格林算子的一种自然˜策略是寻找一个 K-非局部算子 A，使得

$$P_A = (D+A)\big(\tilde{D}-\tilde{A}\big) = D\tilde{D} + A\tilde{D} - D\tilde{A} - A\tilde{A}$$

and

$$\tilde{P}_A = \big(\tilde{D}-\tilde{A}\big)(D+A) = \tilde{D}D + \tilde{D}A - \tilde{A}D - \tilde{A}A$$

是 K-非局部 Green-双曲的。如果 A 具有正则性保持性，并且可以找到一个保持正则性的˜˜˜˜˜保持 A 使得 $AD-DA$ 且 $DA-AD$ 损失 严格少于 一个阶的正则性（对于˜所有 $\lambda \in \mathbb{C}$），则可以将定理 3.1 应用于 P_A 和 P_A 及其格林算子（当˜˜它们存在时），从而像之前一样构造 $D+A$ 和 $D+A$ 的格林算子。若找不到这样的选择，就可能遭遇例 3.6中所述的情况，除非定理 3.1能够推广到 $AE^{\pm}$ 不改善正则性的情形。鉴于这些问题最好结合具体模型来探讨，我们在此不再展开讨论，转而证明定理 3.1。

4 应用：系统的 LU 分解法

LU 分解是线性代数中求解线性方程组$Mx = y$的一种标准技术，适用于 $x, y \in \mathbb{C}^N$。在可逆矩阵 $M = LU$可分解为 L下三角矩阵和 U上三角矩阵的情况下，解可通过求解三角系统 $Lz = y$,$Ux = z$得到。该方法可以通过多种方式推广，参见例如 [20]。这里，我们讨论如何用它求解 Green-双曲方程组，或其 K-非局部推广形式。为了说明为何不能直接这样做，考虑系统 $\mathcal{P}\Phi = F$，其中 $\mathcal{P}\colon\ C^\infty\big(M;\ \mathbb{C}^N\big) \to C^\infty\big(M;\ \mathbb{C}^N\big)$是由 $C^\infty(M)$ 上的线性自映射构成的 $N\times N$ 矩阵，其中 M 如通常所说是一个全局双曲时空，且 $N \geq 2$。我们采用分块形式

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & R \\ S & Q \end{pmatrix},$$

其中 Q 是一个 $(N-1)\times(N-1)$ 块，并相应地确定其他块的维数，因此 $P = \mathcal{P}_{11}$ 是 $C^\infty(M)$ 上的自映射。若 P是一个微分算子，具有迟滞格林算子 $E_P^{\pm}$和超前格林算子 $RC^\infty\big(M;\ \mathbb{C}^{N-1}\big) \subset C_0^\infty\big(M;\ \mathbb{C}\big)$，则可将 $\mathcal{P}$在 $C_0^\infty\big(M;\ \mathbb{C}^N\big)$上分解为

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ SE_P^{\pm} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q - SE_P^{\pm}R \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

这是迈向 LU 分解的第一步：第一个因子确实是下三角的，但第二个因子通常并非上三角。问题在于，即使 $\mathcal{P}$ 的所有单个矩阵元都是微分算子，其因式分解形式也包含通常为非局部算子的 $SE_P^{\pm}$ 和 $SE_P^{\pm}R$。因此，若要继续采用这一策略，最好从一开始就用适当的非局部算子来表述这个问题。（模去平滑算子后，若首个对角算子是椭圆型，可以采用伪微分算子；但在此处我们需要更强的条件。）

我们说明如何利用定理 3.1实现精确的 LU 分解。设 K 是 M的一个固定紧致拓扑正则子集，并设 $s_* \in \mathbb{R}$。固定 β，$\gamma \in \mathbb{R}$ 满足 $\beta+\gamma > 0$。设 $\mathcal{A}$为映射空间 $A\colon\ \mathbb{C} \to \mathcal{L}(C^\infty(M))$，使得对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$,

- $A(\lambda)C^\infty(M)\subset C_K^\infty(M)$,
- $A(\lambda)f\equiv 0$ 若 $f\in C^\infty(M)$ 在 K 上恒等于零,
- $A(\lambda)$ 可扩展为线性映射 $\mathcal{D}'(M)\to\mathcal{D}'_K(M)$，其连续限制将 $H^s{}_{\text{局部}}\to H_K^{s+\gamma}$映射到任意 $s\geq s_*+\beta$,

并且 $\lambda\to A(\lambda)$ 关于 $\mathcal{L}_b\big(H^s_{\mathrm{loc}},\ H_K^{s+\gamma}\big)$的拓扑是全纯的。考虑一个依赖参数 λ 的系统 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{P}$ 的每个非对角分支 $\mathcal{P}_{ij},\ i\neq j$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的映射，而对角分支具有如下形式

$$\mathcal{P}_{ii}=P_i+A_i,$$

其中每个 P_i 都是与 λ 无关的 Green-双曲算子，而每个 A_i 都是 $\mathcal{A}$ 中的映射。最后假设 P_i 的格林算子可扩展为映射 $H_0^s\to H^{s+\beta}$ 局部，对所有 $s\geq s_*$ 均成立。

根据定理 3.1，$P(\lambda)=P_1+A_1(\lambda)$ 对所有 K-非局部格林算子 λ，在具有离散补集的开零邻域内 $\mathbb{C}$。因此，我们可以按照（$\mathcal{P}$式 4.1）对其进行分解。一个关键点是，$(N-1)\times(N-1)$-维系统

$$\mathcal{P}^\pm(\lambda)=Q(\lambda)-S(\lambda)E^\pm_{P(\lambda)}R(\lambda)$$

满足与原系统相同的假设。注意，$SE_P^\pm R$的矩阵分支确定了连续映射 $H_0^s\to H_K^{s+\beta+\delta}\hookrightarrow H_K^{s+\beta}$。定理 3.1 意味着，$\mathcal{P}^+(\lambda)$ 的首个对角线分支（相应地，$\mathcal{P}^-(\lambda)$ 的）对所有 K具有推迟（相应地，先进）λ -非局部格林算子，但可能需要扩大例外集，因此我们可以对每个 $\mathcal{P}^\pm(\lambda)$ 进行分解。重复这一过程，可得到 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的两种 LU 分解，其差别仅在于构造过程中使用先进格林算子还是推迟格林算子。在每个阶段，我们可能会得到更多例外点，但总体例外集仍然是离散的，并且不包含零。从现在起，我们在记号中省略参数 λ。

对于非例外的 λ，现在我们可以使用 LU 分解，为 $\mathcal{P}$构造推迟格林算子和超前格林算子。我们对 N进行归纳。当 $N=1$ 时，恰好满足定理 3.1的情形。现在假设，对于所考虑类型的（$N-1$维系统，当 $N\geq 2$时，均可构造格林算子。为证明归纳步骤，我们回到分解式（4.1），此时可以假设 $Q-SE_P^\pm R$ 具有推迟/超前格林算子，而 P 具有推迟格林算子和超前格林算子。我们断言：

$$E^\pm_{\mathcal{P}}=\begin{pmatrix}E_P^\pm & -E_P^\pm R E^\pm_{Q-SE_P^\pm R}\\ 0 & E^\pm_{Q-SE_P^\pm R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -SE_P^\pm & 1\end{pmatrix}\tag{4.2}$$

是 $\mathcal{P}$的推迟/超前格林算子。为验证这一点，我们首先注意到，式（4.1）中的下三角因子（记作 L）在 $C_0^\infty\big(M$上可逆；$\mathbb{C}^N\big)$ 其逆为

$$L^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -SE_P^\pm & 1\end{pmatrix}.$$

接着，我们分别计算得到：

$$\mathcal{P}E^\pm_{\mathcal{P}}F=\begin{pmatrix}P & R\\ S & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_P^\pm & -E_P^\pm R E^\pm_{Q-SE_P^\pm R}\\ 0 & E^\pm_{Q-SE_P^\pm R}\end{pmatrix}L^{-1}F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ SE_P^\pm & 1\end{pmatrix}L^{-1}F=F$$

另一方面，

$$E^\pm_{\mathcal{P}}\mathcal{P}F=\begin{pmatrix}E_P^\pm & -E_P^\pm R E^\pm_{Q-SE_P^\pm R}\\ 0 & E^\pm_{Q-SE_P^\pm R}\end{pmatrix}L^{-1}L\begin{pmatrix}P & R\\ 0 & Q-SE_P^\pm R\end{pmatrix}F=F$$

对任意 $F \in C_0^\infty(M;\mathbb{C}^N)$ 在每种情形下。最后，只要对 $+$ 或 $-$ 在（4.2）中作出一致的选择，支集性质（G3′）便显而易见。因此， $\mathcal{P}$ 具有推迟和超前的 K-非局域格林算子，这就是归纳步骤，并表明所考虑类型的所有有限维系统都具有超前和推迟的 K-非局域格林算子；此外，这些算子将随着 λ在 $\mathcal{L}_b(C_0^\infty(M$的拓扑中全纯变化； $\mathbb{C}^N)$， $C^\infty(M;\ \mathbb{C}^N))$ 在例外集之外。特别是，这为近期一篇关于量子场论（QFT）测量的论文中对这类系统的处理提供了依据；该文分析了一个“系统”量子场论与一个或多个“探针”量子场论之间的相互作用。 [12],

5 定理3.1的证明

定理3.1 的证明首先确立一个求逆结果，之后将其应用于$I+A(\lambda)E^{\pm}$，其中 $E^{\pm}$是 P的格林算子。首先在索伯列夫空间 H_K^s中利用解析弗雷德霍姆定理证明这一结果，然后将其推广到 C_K^∞。证明的主要部分随后利用这些信息，为 $P+A(\lambda)$ 定义格林算子。

定理 *5.1.* 设 $K \subset M$ 是一个固定的拓扑正则紧集。假设 $Y(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 是一族线性映射 $Y(\lambda):\ \mathcal{D}'_K \to \mathcal{D}'_K$，且每个映射限制为连续映射 $Y_s(\lambda):\ H_K^s \to H_K^{s+\delta}$，对所有 $s \geq s_* \in \mathbb{R}$ 以及某个固定的 $\delta > 0$ 均成立。还假设 $Y(0) = 0$。令 $\hat{}\, Y_s(\lambda) \in \mathcal{L}(H_K^s)$ 表示将 $Y_s(\lambda)$ 与嵌入 $H_K^{s+\delta} \hookrightarrow H_K^s$ 复合得到的紧映射。假设 $\hat{}\, \lambda \to Y_s(\lambda)$ 在 $\mathcal{L}_b(H_K^s)$ 中的 $\mathbb{C}$ 上全纯，对所有 $s \geq s_*$均成立。那么

(a) 集合

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \ker(I+Y(\lambda))|_{C_K^\infty} \neq 0\} \tag{5.1}$$

是 $\mathbb{C}$ 的离散子集，且 $\mathbb{C}\setminus S$ 是一个开 0-邻域。此外，$\ker(I+\hat{}\,Y(\lambda))|_{C_K^\infty}$ 是有限维的，并且对每个 $s \geq s_*$，都等于 $\ker(I+Y_s(\lambda))$ 。

$\hat{}\,(b)$ 对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus S$ 和所有 $s \geq s_*$，映射 $I+Y_s(\lambda)$ 对所有 $s \geq s_*$ 都是连续可逆的，并且 $\lambda \mapsto \left(I+\hat{}\,Y_s(\lambda)\right)^{-1}$ 关于 $\mathbb{C}\setminus S$ 是全纯的。此外，对每个 $s \geq s_*$、 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus S$， $\left(I+\hat{}\,Y_s(\lambda)\right)^{-1}$ 是 $\left(I+\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)^{-1}$ 在 H_K^s 上的限制。

(c) (i) 假设 $f:\ \mathbb{C}\setminus S \to H_K^{s_*}$是全纯的，并且存在一个紧子集 $K_f \subset K$，使得对于所有 $r \in \mathbb{N}_0$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus S$，都有 支集 $\left(\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)^r f(\lambda) \subset K_f$。那么对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus S$，都有支集 $\left(I+\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)^{-1} f(\lambda) \subset K_f$。

(ii) 如果对于某个紧的 $K' \subset K$，有 $Y(\lambda)C_K^\infty \subset C_{K'}^\infty$，那么对于所有$\lambda \in \mathbb{C}\setminus S$ 以及所有 $f \in C_K^\infty$，都有支集 $\left(I+\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)^{-1} f \subset K'$；并且对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，核 $\left(I+\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)$ 都是 $C_{K'}^\infty$ 的有限维子空间。

注意：在 (c) 中，“支集”应理解为分布支集。

$\hat{}$ 证明。（a）根据 Sobolev嵌入定理， $Y_s(\lambda)$ 具有紧致性。函数 $\hat{}\lambda \mapsto I+Y_{s_*}(\lambda)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、取值于作用在 $H_K^{s_*}$ 上的 Fredholm 算子的解析函数，$\hat{}$ 并且由于 $Y_{s_*}(0) = 0$，它在 $\lambda = 0$ 时可逆。根据解析弗雷德霍姆定理 [26,$\hat{}$ 定理 VI.14]， $I+Y_{s_*}(\lambda)$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 均可逆，但以下集合（可能为空）中的 S_{s_*} 除外：对于这些 $\lambda \in \mathbb{C}$， $\ker\left(I+\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)$ 是非平凡的（并且根据 [26, 定理 VI.15] 必然是有限维的）。此外， S_{s_*} 是 $\mathbb{C}$ 的离散子集，其补集是一个开零邻域，并且逆算子 $\left(I+\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)^{-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯的，在 $\mathbb{C}\setminus S_{s_*}$ 上是全纯的。

若 $f \in$ 核$\left(I+\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)\right)$ 那么 $f = -\hat{}\,Y_{s_*}(\lambda)f \in H_K^{s_*+\delta}$ 满足 $f \in$ 核$\left(I+\hat{}\,Y_{s_*+\delta}(\lambda)\right)$；迭代后，$f \in \bigcap_{s\geq s_*} H_K^s = C_K^\infty$以及 $f \in$ 核$(I+Y(\lambda))|_{C_K^\infty}$。由于反向包含关系显然成立，我们推得

核 $\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)=$核$(I+Y(\lambda))|_{C_K^\infty}$对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$，从而 $S_{s_*}=S$ 在 (5.1) 中定义的。特别地，对于每个固定的 $\lambda\in\mathbb{C}$，所有核 $\big(I+\hat{}Y_s(\lambda)\big)$ 在 $s\geq s_*$时均相等。

(*b*) 第一条结论由 Fredholm 定理和部分（a）立即得出；第二条结论则源于 $I+Y_s(\lambda)$ 与 $I+Y_{s_*}(\lambda)$ 在 H_K^s 上一致，且两个算子对于 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$ 都是可逆的。

(*c*) (*i*) 设 $\chi\in C_0^\infty$ 在 K_f 上为零。将每个 $\big(\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)^n f(\lambda)$ 视为支集包含于 K_f 的分布，我们看到（例如，由 [18, 定理 2.3.3]） $\big(\hat{}Y_{s_*}(\lambda)^n f(\lambda)\big)(\chi)=0$ 对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 都成立，因此，在 $\mathbb{C}\setminus S$ 上由 $\lambda\mapsto\big(\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)^{-1}f(\lambda)\big)(\chi)$ 定义的全纯函数，在原点的某个邻域内恒为零；在该邻域中，预解式可展开为关于 $Y_{s_*}(\lambda)$ 的幂的收敛几何^ ^级数，并注意到当 $\lambda\to 0$ 时 $Y_{s_*}(\lambda)\to 0$。由全纯性可知，对于所有 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$，$\big(\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)^{-1}f(\lambda)\big)(\chi)=0$。令 χ 变化，我们得出 supp $\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)^{-1}f(\lambda)\subset K_f$。

(*c*) (*ii*) 该假设意味着，对于所有 $f\in C_K^\infty$ (，将其视为从 $\mathbb{C}\setminus S$ 到 $H_K^{s_*}$)、满足 $K_f=K'$ 的常值函数时，(*c*) (*i*)，因此对所有 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$ 和所有 $f\in C_K^\infty$，都有 supp $\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)^{-1}f\subset K'$。最后，如果 $g\in\ker\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)=\ker(I+Y(\lambda))|_{C_K^\infty}$（已知其为有限维），那么 $g\in C_K^\infty$，且 $g=-Y(\lambda)g\in C_{K'}^\infty$。■

定理5.1 的假设蕴含，每个 $Y(\lambda)$ 都限制为 C_K^∞上的连续自同态。为说明这一点，注意对于任意 $k\in\mathbb{N}_0$ 和任意整数 $s>k+n/2$，其中 n 是 M的任一分支的最大维数，存在连续映射

$$C_K^s\longrightarrow H_K^s\xrightarrow{Y(\lambda)}H_K^s\longrightarrow C_K^k,$$

其中未标记的箭头表示索博列夫嵌入。因此，对所有 $k\in\mathbb{N}_0$，存在 $s\in\mathbb{N}_0$ 和一个常数 C，使得 $\|Y(\lambda)f\|_{K,\,k}\leq C\|f\|_{K,\,s}$对所有 $f\in C_K^\infty$均成立。由此可得以下结论。

推论 *5.2*。在定理 *5.1* 的记号下，对于 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$，$I+Y(\lambda)$ 限制为 C_K^∞ 上的一个同胚，其逆映射记为 $R(\lambda)$。映射 $\lambda\mapsto R(\lambda)$ 关于 $\mathcal{L}_b\big(C_K^\infty\big)$ 的拓扑在 $\mathbb{C}\setminus S$ 上是全纯的。此外，若对某个全纯函数 $f\colon\mathbb{C}\setminus S\to C_K^\infty$，存在一个紧子集 $K_f\subset K$，使得对所有 $r\in\mathbb{N}_0$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$，*supp* $Y(\lambda)^r f(\lambda)\subset K_f$。那么对所有 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$，*supp* $R(\lambda)f(\lambda)\subset K_f$。若对某个紧的 $K'\subset K$，有 $Y(\lambda)C_K^\infty\subset C_{K'}^\infty$，则对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$，*ker*$(I+Y(\lambda))|_{C_K^\infty}$ 是 $C_{K'}^\infty$ 的有限维子空间。

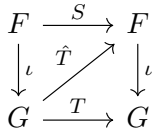
证明。设 $f\in C_K^\infty$和 $\lambda\notin S$。那么，对所有 $s\geq s_*$，都有 $f\in H_K^s$和 $\big(I+\hat{}Y_s(\lambda)\big)^{-1}f=\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)^{-1}f$，因此

$$\big(I+\hat{Y}_{s_*}(\lambda)\big)^{-1}f\in\bigcap_{s\geq s_*}H_K^s=C_K^\infty.$$

于是，$\big(I+\hat{}Y_{s_*}(\lambda)\big)^{-1}$ 限制为 C_K^∞上的线性自映射，该映射满足 (，因为 $Y(\lambda)$ 和 ^ $Y_{s_*}(\lambda)$ 在 C_K^∞) 上一致，而后者是 $I+Y(\lambda)$ 限制映射的线性逆。因此，$I+Y(\lambda)$ 限制为 C_K^∞ 上的连续双射；由于后者是 Fr´echet 空间，逆映射定理表明，其逆映射 $R(\lambda)$ 连续。由于每个 C_K^∞ 半范数都被某个 Sobolev 范数控制，反之亦然，对于 $s\geq s_*$，每个 H_K^s的算子范数收敛都蕴含 $\mathcal{L}_b\big(C_K^\infty\big)$中的收敛，这由推论 A.5 得出。因此，$\lambda\mapsto R(\lambda)$关于 $\mathcal{L}_b\big(C_K^\infty\big)$的拓扑在 $\mathbb{C}\setminus S$ 上全纯。其余结论可直接由定理 5.1 的 (*a*) 和 (*c*) 两部分，以及光滑函数的分布支集恰好等于其通常支集这一事实得出。■

我们需要以下初等观察，后续将用于 $F=C_K^\infty$、$G=C_0^\infty$。

引理 5.3. 设 F 和 G 是拓扑向量空间，并假设图表



连续线性映射的复合可交换。若$\mathrm{id}_F + S$ 连续可逆，则$\mathrm{id}_G + T$ 也连续可逆，其逆为

$$(\mathrm{id}_G + T)^{-1} = \mathrm{id}_G - T + \iota S(\mathrm{id}_F + S)^{-1}\hat{T}.$$

证明。 假设 $\mathrm{id}_F + S$ 连续可逆，我们计算得

$$(\mathrm{id}_G + T)\big(\mathrm{id}_G - T + \iota S(\mathrm{id}_F + S)^{-1}\hat{T}\big) = \mathrm{id}_G - T^2 + \iota(\mathrm{id}_F + S)S(\mathrm{id}_F + S)^{-1}\hat{T} = \mathrm{id}_G$$

and

$$\big(\mathrm{id}_G - T + \iota S(\mathrm{id}_F + S)^{-1}\hat{T}\big)(\mathrm{id}_G + T) = \mathrm{id}_G - T^2 + \iota S(\mathrm{id}_F + S)^{-1}(\mathrm{id}_F + S)\hat{T} = \mathrm{id}_G.$$

两种情况下均利用恒等式 $\iota S = T\iota$，从而得到 $\iota S\hat{}T = T\iota\hat{}T = T^2$，并且还利用了 $\hat{}TT = \hat{}T\iota\hat{}T = S\hat{}T$。因此，$\mathrm{id}_G + T$ 具有一个线性逆，其表达式显然连续。■

现在来证明主要结果。

定理证明3.1。 证明分为若干步骤，并用到附录中的一些技术性引理。

1. 预备观察。定义 $Y^{\pm}(\lambda) \in \mathcal{L}(C_0^\infty, C^\infty)$ 如下：

$$Y^{\pm}(\lambda) = A(\lambda)E^{\pm}.$$

由于假设 (a) 和 (b)，我们可以将 $Y^{\pm}(\lambda)$ 延拓为线性映射 $\mathcal{E}' \to \mathcal{D}'_K$，其连续限制映射 $H_0^s \to H_K^{s+\delta}$，对所有 $s \geq s_*$均成立；因此还有连续限制 $Y_s^{\pm}(\lambda)\colon H_K^s \to H_K^{s+\delta}$，对 $s \geq s_*$ 成立。根据 Sobolev 嵌入定理，紧映射 $\hat{}Y_s^{\pm}(\lambda)\colon H_K^s \to H_K^s$，对 $s \geq s_*$ 成立；如定理 3.1 的陈述之后所述，这些映射关于算子范数拓扑是全纯的。

事实上，若 K' 是任意紧致拓扑正则集，同样的论证表明，$Y^{\pm}(\lambda)$ 定义了紧映射，并且关于 λ 全纯地依赖于 $\mathcal{L}_b\big(H^s_{K\cup K'}\big)$ 的拓扑，对所有 $s \geq s_*$ 均成立。由推论 A.5 可知，$Y^{\pm}(\lambda)$ 关于 λ 是全纯的，且相对于 $\mathcal{L}_b\big(C^\infty_{K\cup K'}\big)$ 拓扑。由于 C^∞_K 和 $C^\infty_{K'}$ 是 $C^\infty_{K\cup K'}$ 的连续嵌入拓扑子空间，且 $\operatorname{Ran} Y^{\pm}(\lambda) \subset C^\infty_K$，我们可以使用引理 A.2（$a$）、（$c$），推得 $Y^{\pm}(\lambda)$ 关于 λ 是全纯的，且相对于 $\mathcal{L}_b\big(C^\infty_K, C^\infty_K\big)$ 的拓扑。由引理 A.6 可知，$A(\lambda)E^{\pm}$ 关于 $\mathcal{L}_b\big(C_0^\infty, C_K^\infty\big)$ 以及 $\mathcal{L}_b(C_0^\infty)$ 也是全纯的；利用引理 A.2（a），我们还可得出它关于 $\mathcal{L}_b\big(C_K^\infty, C_0^\infty\big)$ 的全纯性。

2。 *ker(())* 的有限维性$|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}}$。接下来，注意到 P 在 $\ker(P + A(\lambda))|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}}$ 与 $\ker\big(I + Y^{\pm}(\lambda)\big)\big|_{C^\infty_K}$ 之间诱导了双射，其逆映射由 $E^{\pm}$ 的限制给出。事实上，若 $(P + A(\lambda))\phi = 0$ 且满足 $\phi \in C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}$，则 $P\phi = -A(\lambda)\phi \in C^\infty_K$且 $\phi = E^{\pm}P\phi$，因此

$P\phi \in \quad \big(I + A\ \lambda\ E^{\pm}\big)\big|_{C^\infty_K} \qquad \big(I + A\ \lambda\ E^{\pm}\big)h = 0 \qquad h \in C^\infty_K \qquad PE^{\pm}h = h = \ker(\,)\,;$

$-A\ \lambda\ E^{\pm}h \qquad E^{\pm}h \in \qquad P + A\ \lambda$

反之，若 $(\,)$ 满足，则 $(\,)$，所以 $\ker(\,(\,))|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}}$。因此

$$S^{\pm} := \big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \ker(P + A(\lambda))|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}} \neq 0\big\} = \big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \ker\big(I + Y^{\pm}(\lambda)\big)\big|_{C^\infty_K} \neq 0\big\}.$$

结合定理 5.1(a)，我们还得到

$$\dim\ker(P+A(\lambda))|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}}=\dim\ker\big(I+Y^\pm_s(\lambda)\big)\big|_{C^\infty_K}=\dim\ker\big(I+\hat Y^\pm_s(\lambda)\big)<\infty \tag{5.2}$$

(对所有 $s\ge s_*$，后者的核取在 H^s_K) 中。因此，定理的部分（A）得证。

3. 全纯候选 K-非局部格林算子的构造。 应用定理5.1和推论 5.2 于 $Y^\pm(\lambda)$，可得 $S^\pm$ 是 $\mathbb{C}$的离散子集，其在 $\mathbb{C}$ 中的补集是开零邻域，并且算子 $I+Y^\pm(\lambda$在 C^∞_K上连续可逆，适用于 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S^\pm$，其逆在 $\mathbb{C}\setminus S^\pm$ 的拓扑下是全纯的。所有这些性质对于 $\mathcal{L}_b\big(C^\infty_K\big)$也成立，因此部分（B）得证。 $S=S^+\cup S^-$

固定任意一个 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus S$，连续映射图

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_K & \xrightarrow{T_K} & C^\infty_K \\ \downarrow & \nearrow_{\hat T_0} & \downarrow \\ C^\infty_0 & \xrightarrow{T_0} & C^\infty_0 \end{array}$$

可交换，其中未标记的箭头是典范嵌入， T_0 和 T_K 分别是 $Y^\pm(\lambda)$ 在 C^∞_0上的限制，而 C^∞_K和 $\hat{}\ T_0$ 存在，这是因为 $A(\lambda)C^\infty\subset C^\infty_K$。由引理 5.3 可知 $I+Y^\pm(\lambda)$ 在 C^∞_0 上连续可逆。为简便起见，将其逆记为 $\big(I+A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}$；引理 5.3 现在给出恒等式

$$\big(I+A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}=I-A(\lambda)E^\pm+A(\lambda)E^\pm\big(I+A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}A(\lambda)E^\pm, \tag{5.3}$$

在 $C^\infty_0(K)$ 上，其中我们省略了包含映射和限制映射的记号。注意，右侧的逆是在 $\mathcal{L}\big(C^\infty_K\big)$中取的，而左侧的逆是在 $\mathcal{L}(C^\infty_0$中取的。由于前一个逆关于 $\mathcal{L}_b\big(C^\infty_K\big)$是全纯的，莱布尼茨法则（见推论 A.3）蕴含左侧关于 $\mathcal{L}_b(C^\infty_0$是全纯的；这里我们还用到了 $A(\lambda)E^\pm$关于 $\mathcal{L}_b\big(C^\infty_0$、$C^\infty_K\big)$、$\mathcal{L}_b(C^\infty_0)$ 和 $\mathcal{L}_b\big(C^\infty_K,\ C^\infty_0\big)$ 在证明的步骤 1 中确立的全纯性。由此可知，算子

$$\tilde E^\pm_\lambda=E^\pm\big(I+A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}\in\mathcal{L}(C^\infty_0,C^\infty),$$

这些算子是 $P+A(\lambda)$ 的候选格林算子，并且关于 $\mathcal{L}_b(C^\infty_0,C^\infty)$ 的拓扑，在 $\mathbb{C}\setminus S$ 上对 λ 全纯。为了证明部分（C），现在只需验证 $\tilde E^\pm_\lambda$ 确实是 K-非局部格林算子。

4. 验证 $\tilde E^\pm_\lambda$ 是 K-非局部格林算子。任取 $f\in C^\infty_0$，

$$g=\big(I+A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}f$$

是满足以下条件的 C^∞_0唯一元素

$$g+A(\lambda)E^\pm g=f, \tag{5.4}$$

由此可推得 $\operatorname{supp}\ g\subset\operatorname{supp}f\cup K$，且

$$\varphi=E^\pm g=E^\pm\big(I+A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}f=\tilde E^\pm_\lambda f$$

满足

$$P\varphi+A(\lambda)\varphi=g+A(\lambda)E^\pm g=f,\qquad \operatorname{supp}\varphi\subset J^\pm(\operatorname{supp}g)\subset J^\pm(K\cup\operatorname{supp}f). \tag{5.5}$$

在特殊情形 $f=(P+A(\lambda))h$ 下，对于 $h\in C^\infty_0$，我们有

$$f=(P+A(\lambda))E^\pm Ph=Ph+A(\lambda)E^\pm Ph$$

且（5.4）的唯一解显然是 $g = Ph$。因此

$$Ph = g = \big(I + A(\lambda)E^\pm\big)^{-1} f = \big(I + A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}(P + A(\lambda))h;$$

因此 $E^\pm\big(I + A(\lambda)E^\pm\big)^{-1}(P + A(\lambda))h = h$。结合 (5.5)，我们已证明

$$(P + A(\lambda))\tilde{E}^\pm_\lambda f = f = \tilde{E}^\pm_\lambda (P + A(\lambda))f, \qquad \text{and} \qquad \operatorname{supp} \tilde{E}^\pm_\lambda f \subset J^\pm(K \cup \operatorname{supp} f)$$

对所有 $f \in C^\infty_0$。现在更具体地假设 $J^\pm(\operatorname{supp} f) \cap K = \varnothing$ 对 $f \in C^\infty_0$ 成立。则 $A(\lambda)E^\pm f = 0$，根据假设 (*d*)，且 (5.4) 的解为 $g = f$，因此 $\tilde{E}^\pm_\lambda f = E^\pm f$ 的支集包含于 $J^\pm(\operatorname{supp} f)$。因此，

$$\operatorname{supp} \tilde{E}^\pm_\lambda f \subset \begin{cases} J^\pm(\operatorname{supp} f), & J^\pm(\operatorname{supp} f) \cap K = \varnothing, \\ J^\pm(K \cup \operatorname{supp} f), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

因此 $\tilde{E}^\pm_\lambda$ 是 $P + A(\lambda)$ 的 K-非局域格林算子。(*C*) 部分证毕。

5. **连续延拓。** 由 (5.3)，可得公式

$$\tilde{E}^\pm_\lambda = E^\pm - E^\pm A(\lambda)E^\pm + E^\pm A(\lambda)E^\pm\big(I + A(\lambda)E^\pm\big)^{-1} A(\lambda)E^\pm,$$

其中右侧的三个项分别可连续延拓为从 H^s_0 到 $H^{s+\beta}{}_{\text{loc}}$、$H^{s+\beta+\delta}{}_{\text{loc}}$ 和 $H^{s+\beta+2\delta}{}_{\text{loc}}$ 的映射。由于 $\delta > 0$，我们推知 $\tilde{E}^\pm_\lambda$ 可连续延拓为映射 $H^s_0 \to H^{s+\beta}{}_{\text{loc}}$，如所需。根据莱布尼茨法则（推论 A.3），相对于 $\mathcal{L}_b\big(H^s_0, H^{s+\beta}{}_{\text{loc}}\big)$ 的拓扑，此延拓关于 λ 全纯。这证明了 (D) 部分。

6. **支集非增修正。** 最后，假设条件（d'）成立，因此有 $\operatorname{supp} A(\lambda)f \subset \operatorname{supp} f$，且 $\operatorname{supp} A(\lambda)f \subset K$ 对所有 $f \in C^\infty$ 均成立。于是（d）也成立，这既可由 Peetre 定理 [25] 推出，也可通过以下直接论证得到：若 $f \in C^\infty$ 在 K 上恒等于零，则 $A(\lambda)f \in C^\infty_K$ 的载体满足以下两个条件

$$\operatorname{carr} A(\lambda)f \subset \operatorname{int}(K)$$

and

$$\operatorname{carr} A(\lambda)f \subset \operatorname{supp} A(\lambda)f \subset \operatorname{supp} f = \overline{\operatorname{carr} f} \subset \overline{M \setminus K} = M \setminus \operatorname{int}(K)$$

由此可得 $\operatorname{carr} A(\lambda)f$ 为空，即 $A(\lambda)f$ 恒等于零。因此，前面得出的所有结论仍然成立。

进一步可得

$$\operatorname{supp} Y^\pm(\lambda)f = \operatorname{supp} A(\lambda)E^\pm f \subset K \cap \operatorname{supp} E^\pm f \subset K \cap J^\pm(\operatorname{supp} f) \qquad \text{for all } f \in C^\infty_0;$$

迭代可得，特别是

$$\operatorname{supp}\big(Y^\pm(\lambda)\big)^r f \subset K^\pm_f := K \cap J^\pm(\operatorname{supp} f) \qquad \text{for all } r \in \mathbb{N},\ f \in C^\infty_0 \text{ and } \lambda \in \mathbb{C} \setminus S.$$

因此 $\big(Y^\pm(\lambda)\big)^r Y^\pm(\lambda)f \in C^\infty_{K^\pm_f} \subset C^\infty_K$ 对所有 $r \in \mathbb{N}_0$，$f \in C^\infty_0$，$\lambda \in \mathbb{C}\setminus S$ 均成立。利用推论 5.2，将其应用于函数 $\lambda \mapsto Y^\pm(\lambda)f \in C^\infty_K$，可得 $\operatorname{supp}\big(I + Y^\pm(\lambda)\big)^{-1} Y^\pm(\lambda)f$ 和

$$\operatorname{supp} Y^\pm(\lambda)\big(I + Y^\pm(\lambda)\big)^{-1} Y^\pm(\lambda)f = \operatorname{supp}\big(I - (I + Y^\pm(\lambda))^{-1}\big)Y^\pm(\lambda)f$$

包含于 $K^\pm_f$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$。利用恒等式（5.3），现在可得

$$\operatorname{supp}\big(I + A(\lambda)E^\pm\big)^{-1} f \subset \operatorname{supp} f \cup \big(K \cap J^\pm(\operatorname{supp} f)\big) \subset J^\pm(\operatorname{supp} f)$$

因此 $\operatorname{supp} \tilde{E}^\pm_\lambda f \subset J^\pm\big(J^\pm(\operatorname{supp} f)\big) = J^\pm(\operatorname{supp} f)$，这就是标准格林算子的支集性质 (G3)，从而完成了第 (*E*) 部分的证明，也就完成了整个定理的证明。■

6 定理证明 3.5

本节旨在证明定理 $P+A(\lambda)$ 和 ${}^tP+{}^tA(\lambda)$ 中所述的算子自发出现解与消失解之间的关系。3.5。

首先介绍一些预备知识，设 $E^{\pm}$ 和 $E_t^{\pm}$ 是分别对应于 P 和 ${}^tP$ 的格林算子。由于 $s_*\le-\beta\le 0$、$E^{\pm}$ 和 $E_t^{\pm}$ 可从 C_K^∞ 延拓为分别在 $\mathcal{L}\big(H_0^0$、$H^\beta\mathrm{loc}\big)$ 以及 $\mathcal{L}\big(H_0^\gamma$、$H_{\mathrm{loc}}^\delta\big)$ 中的连续映射，而 $A(\lambda)$ 和 ${}^tA(\lambda)$ 可从 C^∞ 延拓为分别在 $\mathcal{L}\big(L^2_{\mathrm{loc}}$、$H_K^\gamma\big)$ (中的连续映射，从而也是 $\mathcal{L}\big(L_K^2$、$H_K^\gamma\big)\big)$ 和 $\mathcal{L}\big(H^\beta\mathrm{loc}\ H_K^\delta\big)$ 中的连续映射。我们还将 $Y^{\pm}(\lambda)=A(\lambda)E^{\pm}$ 和 $Y_t^{\pm}={}^tA(\lambda)E_t^{\pm}$ 记作任意 H_K^s (上的紧算子； s 的取值将由上下文明确，我们省略各种 H_K^s 空间之间的嵌入映射)。

我们通常会滥用记号：无论 $A(\lambda)$ 作用于 H_K^s还是 H_{loc}^s，也无论 s如何，都使用相同的记号；但我们的论证会恰当地考虑相关定义域。在 $s=0$ 情形下，我们会用到两个技术性事实。

引理 6.1。在关于 $A(\lambda)$ 和 $Y^{\pm}(\lambda)$的既定假设下：

(a) 恒等式

$$A(\lambda)f=A(\lambda)(f|_K)$$

对所有 $f\in L^2_{\mathrm{loc}}$ 均成立，其中我们将左侧的映射 $A(\lambda)\in\mathcal{L}\big(L^2_{\mathrm{loc}},H_K^\gamma\big)$ 和右侧的映射 $A(\lambda)\in\mathcal{L}\big(L_K^2,H_K^\gamma\big)$ 分别理解为；

(b) 对于算子 $Y_t^{\pm}(\lambda)\in\mathcal{L}\big(L_K^2,L_K^2\big)$，有

$$\big(Y_t^{\pm}(\lambda)\big)^*f=(\Gamma E^{\mp}A(\lambda)\Gamma f)|_K,\qquad f\in L_K^2,$$

其中 Γ 表示复共轭。

证明。在此证明中，我们省略对 λ 的依赖。对于部分（a），首先选取 $f_n\in C^\infty$，使得 $f_n\to f$ 位于 L^2_{loc} 中。于是，对于任意 $g\in C_0^\infty$，Af 作用于 μg 的分布作用（回忆 μ 是体积密度）为

$$(Af)(\mu g)=\lim_{n\to\infty}\int_M\mu g(Af_n)=\lim_{n\to\infty}\int_M\mu({}^tAg)f_n=\big\langle\overline{{}^tAg}\,\big|\,f|_K\big\rangle,$$

其中，内积 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ 是 L_K^2 上的内积，并且我们利用了这一事实：${}^tAg\in C_K^\infty$。现在选取一个新的序列 $f_n\in C_K^\infty$，使得 $f_n\to f|_K$ 位于 L_K^2 中。于是

$$(Af)(\mu g)=\big\langle\overline{{}^tAg}\,\big|\,f|_K\big\rangle=\lim_{n\to\infty}\int_M\mu\big({}^tAg\big)f_n=\lim_{n\to\infty}\int_M\mu g(Af_n)=(Af|_K)(\mu g).$$

由于 g 是任意的，Af 和 $Af|_K$ 定义了相同的分布，因而也是 H_K^γ 中的同一个元素。

对于部分（b），我们对 f，$h\in C_K^\infty$ 计算可得

$$\big\langle\big(Y_t^{\pm}\big)^*f\,\big|\,h\big\rangle=\big\langle f\,\big|\,Y_t^{\pm}h\big\rangle=\int_M\mu\overline{f}({}^tA)E_t^{\pm}h=\int_M\mu\big(E^{\mp}A\overline{f}\big)h=\big\langle(\Gamma E^{\mp}A\Gamma f)|_K\,\big|\,h\big\rangle.$$

因此，对于所有 $f\in C_K^\infty$，我们都有 $\big(Y_t^{\pm}(\lambda)\big)^*f=(\Gamma E^{\mp}A\Gamma f)|_K$，从而由连续性可知，对于所有 $f\in L_K^2$ 也成立。■

定理 3.5 的证明。令 ${}^tN^{\pm}(\lambda)=$维数 核$(P+A(\lambda))|_{C^\infty_{\mathrm{pc/fc}}}$。根据定理 5.2的证明中的注释（3.1），将其应用于 $Y_t^{\pm}$在 $s=0$的情形，我们有 ${}^tN^{\pm}(\lambda)=$维数 核 $\big(I+Y_t^{\pm}(\lambda)\big)$

在 L^2_K 中。由于 $Y_t^\pm$ 关于被省略的参数 λ 是紧的且全纯的，Fredholm理论表明指标

$$\operatorname{Index}\left(Y_t^\pm(\lambda)\right) = \dim\ker\left(I + Y_t^\pm(\lambda)\right) - \dim\ker\left(I + \left(Y_t^\pm(\lambda)\right)^*\right)$$

与……无关 λ 因此在考察……时消失 $\lambda = 0$ ——例如，参见 [8, 定理 4.3。12] ——所以

$${}^tN^\pm(\lambda) = \dim\ker\left(I + \left(Y_t^\pm(\lambda)\right)^*\right).$$

下面我们将证明， $A\Gamma$ 在L^2_K中诱导出 $I+\left(Y_t^\pm(\lambda)\right)^*$与 $I+Y^\mp(\lambda)$的核之间的反线性单射；交换 P, $A(\lambda)$与 ${}^tP$, ${}^tA(\lambda)$的角色后，可知这些空间的维数相等（且有限）。因此，

$${}^tN^\pm(\lambda) = \dim\ker(I + Y^\mp(\lambda)) = N^\mp(\lambda),$$

再次在定理3.1的证明中使用注释（5.2，即可得到所需结果。

剩下要证明的是， $A\Gamma$ 给出了所需的反线性单射。假设存在$f \in L^2_K \setminus \{0\}$ 使得 $\Gamma f = -\left(Y_t^\pm(\lambda)\right)^*\Gamma f$ 对于某个固定的 λ。那么由引理6.1(b)

$$f = -(E^\mp A(\lambda) f)|_K$$

并且由于 $f \neq 0$，也可推出 $A(\lambda)f \neq 0$ （否则 $f = -E^\mp A(\lambda)f|_K = 0$）。此外，

$$A(\lambda)f = -A(\lambda)(E^\mp A(\lambda)f)|_K = -A(\lambda)E^\mp A(\lambda)f = -Y^\mp(\lambda)A(\lambda)f$$

在 H^γ_K 中成立，因此在 H^γ_K 中有 $A(\lambda)f \in \ker(I + Y^\mp(\lambda))$，从而在 L^2_K 中也成立（因为根据定理 5.1（a）， $\gamma > 0 \geq s_*$各核相等）。因此， $A(\lambda)\Gamma$ 是从 $I + \left({}^tY^\pm(\lambda)\right)^*$ 的核到 $I + Y^\mp(\lambda)$ 的核的反线性单射。■

A 某些拓扑向量空间

我们简要回顾文中涉及的各种 C^k 和索伯列夫空间的定义及主要性质，大体上遵循 [2, 4], 然后转而讨论有界收敛拓扑的一些性质，这些性质也是本文所需要的。本文所述内容并无原创之处。

A.1 光滑函数与 C^k 函数空间

设 M 是一个光滑流形，并令 $C^k(M)$、 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 为 M 上取复值的 k 次连续可微函数构成的向量空间。对每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 和紧的 $K \subset M$，有一个半范数

$$\|f\|_{K,k} = \max_{0\leq r\leq k} \max_{x\in K} |(\nabla^r f)(x)|_r$$

在 $C^k(M)$ 上，其中 ∇ 是 M 上任意选取的联络， $|\cdot|_r$ 是使 $T^*M^{\otimes r}$ 成为（有限维）巴拿赫丛的任意选取的范数；不同的选取会得到等价的半范数。当 K 遍历 M 的紧子集且 $k \in \mathbb{N}_0$ 时，半范数族$\|\cdot\|_{K,\,k}$ 在 $C^\infty(M)$ 上给出一个 Fr´echet 拓扑；类似地，利用半范数$\|\cdot\|_{K,\,k}$, 我们在 $C^k(M)$、$k \in \mathbb{N}_0$ 上得到一个 Fr´echet 拓扑。

若 A是闭集，我们定义 $C^\infty_A(M) = \{f \in C^\infty(M) \colon \operatorname{supp} f \subset A\}$，并赋予相对拓扑。因此，该拓扑由半范数$\|\cdot\|_{K,\,k}$定义，其中 K遍历 $K \subset A$和 $k \in \mathbb{N}_0$的紧子集；若 A 是紧的，则只需使用半范数 $\|\cdot\|_{A,\,k}$, $k \in \mathbb{N}_0$。由于 $C^\infty_A(M)$ 是

Fr´échet 空间的闭子空间，它也是 Fr´échet 空间。将 $C^k_A(M)$ 定义为 $C^k(M)$ 的类似子空间，其拓扑由半范数 $\|\cdot\|_{K,\,k}$生成，其中 $K \subset A$为紧集；若 A 是紧的，则只需使用单个半范数$\|\cdot\|_{A,\,k}$（它是 $C^k_A(M)$ 上的一个范数）。

一个支集系统 [2] 是 $\mathcal{A}$ 上所有闭子集的集合的子集 M，它对有限并封闭，并且具有以下性质：对于每个 $A \in \mathcal{A}$，都有（i） $A \subset \mathrm{int}(A')$，其中存在某个$A' \in \mathcal{A}$，并且（$ii$）若 A' 是 M 的闭子集，且 $A' \subset A$，则 $A' \in \mathcal{A}$。任意支集系统关于包含关系构成一个有向系统，我们记作

$$C^\infty_{\mathcal{A}}(M) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} C^\infty_A(M)$$

赋予局部凸归纳极限拓扑，使得凸集 $U \subset C^\infty_{\mathcal{A}}(M)$ 是 0 的一个邻域，当且仅当对于每个 $A \in \mathcal{A}$，$U \cap C^\infty_A(M)$ 都是 $C^\infty_A(M)$ 中的一个邻域；由于 $\mathcal{A}$ 是有向的，还可知，凸集 O 是开集，当且仅当它在每个 $C^\infty_A(M)$ 中都是开集。

支集系统的例子包括由紧集构成的集合，由此得到紧支撑函数空间 $C^\infty_0(M)$；以及由（严格）未来／过去／空间紧集构成的集合，由此得到 $C^\infty_{\mathrm{sfc/spc/fc/pc/sc}}(M)$。

从 $C^\infty_{\mathcal{A}}(M)$ 到局部凸拓扑向量空间 Y 的线性映射 T 连续，当且仅当它的所有限制 $T_A\colon C^\infty_A(M) \to Y$ 都连续（$A \in \mathcal{A}$）。特别地，要使线性映射 $T\colon C^\infty_{\mathcal{A}}(M) \to C^\infty_{\mathcal{B}}(M)$ 连续，只需每个限制 T_A 的值域包含于某个 $C^\infty_B(M)$，其中 $B \in \mathcal{B}$ 取决于 A，并确定一个连续映射 $C^\infty_A(M) \to C^\infty_B(M)$；由此可知 $T_A\colon C^\infty_A(M) \to C^\infty_{\mathcal{B}}(M)$ 连续。我们记录以下应用：

引理 A.1. 若 T是 $C^\infty(M)$的连续线性自映射，并且对所有 $f \in C^\infty(M)$，都有 支集 $Tf \subset K$∪支集 f，其中 K是一个固定的紧集，则 T限制在任意一个 $C^\infty_{0/\mathrm{sfc/spc/fc/pc/sc}}(M)$上都是连续映射。

证明. 若 $\mathcal{A}$ 是相关支集系统之一，则对每个 $A \in \mathcal{A}$都有 $A \cup K \in \mathcal{A}$。由于 T在 $C^\infty_{\mathcal{A}}(M)$ 上的限制 T_A 的值域包含于 $C^\infty_{A\cup K}(M)$，且这两个函数空间都是赋予相对拓扑的 $C^\infty(M)$ 的子空间，因此 $T_A\colon C^\infty_A(M) \to C^\infty_{A\cup K}(M)$ 的连续性可由 T 的连续性推出。令 A 在 $\mathcal{A}$中变化，即得所证。■

令 Ω^α 为权重为 α 的密度丛，我们可以类似地定义 Ω^α 的光滑截面空间 $\Gamma^\infty(\Omega^\alpha)$、 $\Gamma^\infty_A(\Omega^\alpha)$ 和 $\Gamma^\infty_0(\Omega^\alpha)$；在 M 上任意处处非零的光滑密度 μ，只需乘以其适当次幂，便可在这些空间与其零权重对应空间之间给出拓扑同构。 M上的分布空间 $\mathcal{D}'(M)$ 是 $\Gamma^\infty_0(\Omega^1)$ 的拓扑对偶，并赋予弱-$*$ 拓扑。特别地， $C^\infty(M)$ 可典范地嵌入为 $\mathcal{D}'(M)$ 的子空间。更一般地， $\mathcal{D}'(M,\,\Omega^\alpha)$ 定义为 $\Gamma^\infty_0(\Omega^{1-\alpha})$ 的对偶。我们还用 $\mathcal{E}'(M)$ 表示 $\Gamma^\infty(\Omega^1)$ 的拓扑对偶，即紧支集分布。

A.2 索伯列夫空间

A.2.1 紧流形

空间 $\mathbf{H^s(M)}$。 在紧 流形 M 上，选取一个辅助黎曼度量，并按通常方式定义 $L^2(M)$，使用由该度量诱导的体积元，并将内积记为 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$（对第二个变量线性）。设 $T = (-\triangle + I)^{1/2}$，其中 $\triangle$为拉普拉斯–贝尔特拉米算子，最初定义在 $C^\infty(M)$ 上，随后唯一地扩张为 $L^2(M)$ 上的自伴负算子。其复幂 T^s（按函数演算定义）是阶为 s、 $T^s \in \Psi^s(M)$ 的经典伪微分算子 [27]（公理化证明见 [1]

所得证明），并且当 Re $s < 0$ 时，T^s 是紧的（利用 $-\triangle$ 在紧流形上的谱性质即可轻易看出）。对于所有 s，T^s 的定义域都包含 $C^\infty(M)$。

对于 $s \in \mathbb{R}$，索伯列夫空间 $H^s(M)$ 定义为 $C^\infty(M)$ 关于范数的完备化

$$\|f\|_{H^s(M)} = \|T^s f\|_{L^2(M)}$$

并且作为拓扑向量空间，它与构造过程中所用辅助黎曼度量的选择无关（当然，具体范数 $\|\cdot\|_{H^s(M)}$ 及其相容的希尔伯特空间内积依赖于度量）。事实上，任何在 $C^\infty(M)$ 上本质自伴的正二阶椭圆算子都可代替 $-\triangle$。显然，T^s 可扩张为从 $H^s(M)$ 到 $L^2(M)$ 的等距映射，可据此将 $H^s(M)$ 嵌入 $\mathcal{D}'(M)$，使得 $u \in H^s(M)$ 对应于分布 $f \mapsto \langle T^{-s} f/\nu \,|\, T^s u\rangle$，$f \in \Gamma_0^\infty(\Omega_1)$，其中 ν 是对应于用于定义 $L^2(M)$ 的辅助度量之体积元的稠密度。将此嵌入限制在 $u \in C^\infty(M)$ 上后，它与前面提到的将 $C^\infty(M)$ 嵌入 $\mathcal{D}'(M)$ 的嵌入相一致。由于对于 $q < 0$，T^q 在 $L^2(M)$ 上是紧的，因此对所有 $s > t$，$H^s(M) \subset H^t(M)$，且嵌入映射是紧的。更一般地，$P: H^{s+m}(M) \to H^s(M)$ 对任意具有光滑系数且阶数为 m 的偏微分算子（或者事实上，任意伪微分算子 $P \in \Psi^m(M)$）都是连续的，因为 $T^{-m} P \in \Psi^0(M)$ 可扩张为 $L^2(M)$ 上的有界算子。

对偶性。对于任意 $s \in \mathbb{R}$，假设 $\ell \in H^s(M)'$，因此存在常数 c，使得对于所有 $u \in H^s(M)$，都有 $|\ell(u)| \le c\|u\|_{H^s(M)}$。于是，对于 $f \in L^2(M)$，有 $|\ell(T^{-s} f)| \le c\|f\|_{L^2(M)}$，因而存在 $w \in L^2(M)$，使得对于所有 $u \in H^s(M)$，都有 $\ell(u) = \langle w \,|\, T^s u\rangle_{L^2(M)}$。选取 $w_n \to w$ in $L^2(M)$ 中的一个序列，使得 $w_n \in C^\infty(M)$，并注意到 $T^s w_n \in C^\infty(M)$ 关于 $H^{-s}(M)$ 范数是柯西序列，收敛于某个 $v \in H^{-s}(M)$，且满足 $T^{-s} v = \lim_n w_n = w$。因此，对于所有 $u \in H^s(M)$，都有 $\ell(u) = \langle T^{-s} v \,|\, T^s u\rangle$，并且 $|\ell(u)| \le \|v\|_{H^{-s}(M)} \|u\|_{H^s(M)}$。注意到

$$\frac{\ell(T^{-s} w_n)}{\|T^{-s} w_n\|_{H^s(M)}} = \frac{\langle w \mid w_n\rangle_{L^2(M)}}{\|w_n\|_{L^2(M)}} \to \|w\|_{L^2(M)} = \|v\|_{H^{-s}(M)},$$

我们看到 $\|\ell\| = \|v\|_{H^{-s}(M)}$，并已证明空间 $H^{-s}(M)$ 与 $H^s(M)'$ 在算子范数拓扑下反同构（即强对偶），所依据的是半双线性配对 $\langle v, u\rangle = \langle T^{-s} v \,|\, T^s u\rangle$，$v \in H^{-s}(M)$，$u \in H^s(M)$。具体而言：在 M 上任取黎曼度量，都会诱导出这种类型的反同构，而配对则取决于所选的度量。

嵌入定理。 C^k 与索伯列夫空间之间的关系如下。在一个方向上，公式 $-\triangle = \delta d$（作用于 0-形式）给出了以下估计

$$0 \le \big\langle f \,\big|\, (-\triangle)^{2r} f\big\rangle = \|(-\triangle)^r f\|^2_{L^2(M)} \le C\|f\|^2_{M,2r}$$

and

$$0 \le \big\langle f \,\big|\, (-\triangle)^{2r+1} f\big\rangle = \|d(-\triangle)^r f\|^2_{\Lambda^1(M)} \le C\|f\|^2_{M,2r+1},$$

其中 $\Lambda^1(M)$ 是平方可积1-形式的希尔伯特空间（相对于辅助黎曼度量），且 $f \in C^\infty(M)$。由此可得

$$\|f\|^2_{H^k(M)} = \big\langle f \,\big|\, (-\triangle + I)^k f\big\rangle = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \big\langle f \,\big|\, (-\triangle)^j f\big\rangle \le C\|f\|^2_{M,k}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 均成立。因此，对所有 $s \ge k$，$C^k(M)$ 连续嵌入于 $H^s(M)$。

另一方面，现在令 n 为 M 的任一分支的最大维数。对于 Re $s > n/2$，算子 $(-\triangle + I)^{-s} = T^{-2s}$ 在 $L^2(M)$ 上的积分核 $Z_s(p, q)$ 是连续的，$Z_s \in C(M \times M)$，并且也可以用 $(-\triangle + I)$ 的谱分解表示为

$$Z_s(p,q) = \sum_r \frac{e_r(p)\overline{e_r(q)}}{\lambda_r^s},$$

其中 $e_r \in L^2(M)$ 是 $-\triangle + I$ 的一组光滑正交归一特征函数基，其对应特征值为 λ_r ——见 [27]。特别地，

$$v_p = \sum_r \frac{\overline{e_r(p)}e_r}{\lambda_r^{s/2}}$$

根据勾股定理，属于 $L^2(M)$，且 $\|v_p\|^2 = Z_s(p,p)$。当 Re $s > n/2$ 时，可得 $\|e_r\|_\infty \le C_s|\lambda_r^{s/2}|$，其中 $C_s = \sup_{p\in M}|Z_s(p,p)|^{1/2}$。此外，若 $f \in C^\infty(M)$，

$$|\langle e_r \mid f\rangle| = \lambda_r^{-k}\left|\langle e_r \,|\, T^k f\rangle\right| \le \lambda_r^{-k}\|f\|_{H^k(M)}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

因此，$\langle e_r \,|\, f\rangle$ 比 λ_r 的任意负幂衰减得更快，并且对于所有（而不仅仅是几乎所有）$p \in M$，$\langle v_p \,|\, T^s f\rangle = \sum_r e_r(p)\langle e_r \,|\, f\rangle = f(p)$。因此，

$$\|f\|_\infty = \sup_{p\in M}|\langle v_p \mid f\rangle| \le C_s\|f\|_{H^s(M)}, \qquad f \in C^\infty(M).$$

由 $C^\infty(M)$ 在 $H^s(M)$ 中稠密可知，若 $s > n/2$，则存在连续嵌入 $H^s(M) \to C(M)$；以类似方式考虑微分算子 P 中的 $\|Pf\|_\infty$，可见对于所有 $s > k + n/2$，$H^s(M)$ 连续嵌入于 $C^k(M)$。由此可得 $\cap_{s\in\mathbb{R}} H^s(M) = C^\infty(M)$。

若 $u \in \mathcal{D}'(M) = \Gamma_0^\infty(\Omega_1)'$ 是一个分布，那么，由于 M 的紧致性，存在一个偏微分算子 P，使得对于任意 $s > n/2$ 和所有 $f \in C^\infty(M)$，都有 $|u(\nu f)| \le \|Pf\|_\infty \le C_s\|Pf\|_{H^s(M)}$。因此，令 $t = s + \mathrm{ord}(P)$，则对某个 $w \in H^{-t}(M)$ 有 $u(\nu f) = \langle f, w\rangle = \langle T^t f \,|\, T^{-t} w\rangle_{L^2(M)}$，这显然与前文所述 $H^{-t}(M)$ 嵌入 $\mathcal{D}'(M)$ 相容。从这个意义上说，

$$\mathcal{D}'(M) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(M).$$

A.2.2 一般流形

对于一般的（不一定紧的）光滑流形 M，若其分支至多有限个，我们按如下方式处理。若 $K \subset M$ 紧致且拓扑正则，[3] 则可以通过微分同胚将其识别为 K 某个紧流形 K 的紧子集 N（例如，可以将包含 K 且其内部包含该集合、边界光滑的紧集进行“加倍” [4]；对于包含在坐标图中的 K，可以取环面作为 N）。于是，索伯列夫空间 $H_K^s(M)$ 定义为 $C_K^\infty(M)$ 关于（某个选定的）$H^s(N)$ 范数的拉回所作的完备化。空间 $H_K^s(M)$ 可以视为 $\mathcal{D}'_K(M)$ 的子空间，其中的分布的支集包含于 K。作为拓扑向量空间，它与构造中所用的选择无关。不过，作出这样的选择后，可以在 $H_K^s(M)$ 上赋予一个范数，记为 $\|\cdot\|_{H_K^s(M)}$，并且确实可以赋予一个相容的希尔伯特空间结构。关于

[3] 注意，如果 K 是任意紧子集，那么 K 的内部的闭包是紧致且拓扑正则的。

形式为$\|f\|_{H^k_K(M)} \leq C\|f\|_{K,k}$、 $f \in C^\infty_K(M)$ 的估计，以及由此得到的嵌入 $C^k_K \to H^k_K$ 的连续性，对于每个固定的 $k \in \mathbb{N}_0$，都可从紧致情形推广而来；对于 $s > t$，嵌入 $H^s_K(M) \to H^t_K(M)$ 的紧致性也同样成立；而当$s > k + n/2$时，$H^s_K(M)$ 到 $C^k_K(M)$ 的连续嵌入亦然，其中 n 仍为 M任一分支的最大维数。因此有 $\cap_{s\in\mathbb{R}} H^s_K(M) = C^\infty_K(M)$。

接下来，我们定义（将“紧致且拓扑正则”缩写为 c.t.r.）

$$H^s_0(M) = \bigcup_{\text{c.t.r. } K \subset M} H^s_K(M),$$

赋予局部凸归纳极限拓扑。由于 M 存在可数紧致穷竭（因而也存在可数紧致且拓扑正则穷竭），$H^s_0(M)$ 可实现为可数严格归纳极限——也就是说，它是一个 LF 空间。之后将用到这样一个事实：根据 [28, 命题14。6]（另见 [9]中的命题4）集合 B在 $H^s_0(M)$ 中有界，当且仅当 B是 $H^s_K(M)$ 的某个紧的 K子集中的有界子集。这一点很容易证明：

$$\mathcal{E}'(M) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s_0(M).$$

最后，局部索伯列夫空间 $H^s_{\text{loc}}(M)$ 定义为

$$H^s_{\text{loc}}(M) = \{u \in \mathcal{D}'(M) : \chi u \in H^s_0(M) \text{ for all } \chi \in C^\infty_0(M)\},$$

并赋予由半范数$\|\chi\cdot\|_{H^s_K(M)}$诱导的 Fr´echet 拓扑，其中 K遍历 M的紧致拓扑正则子集， χ 遍历 $C^\infty_K(M)$。对所有 s ，包含映射 $H^s_0(M) \hookrightarrow H^s_{\text{loc}}(M)$ 都是连续的，而且事实上有

$$H^s_0(M) = H^s_{\text{loc}}(M) \cap \mathcal{E}'(M).$$

因此，若 M是紧的，则 $H^s_{\text{loc}}(M)$ 和 $H^s_0(M)$ 作为拓扑向量空间是相同的。上述构造给出了与 [19] 中所采用的坐标图方法相同的空间。

前面提到的 Sobolev嵌入定理蕴含：对所有 $k \in \mathbb{N}_0$，存在从 $C^k(M)$ 到 $H^k_{\text{loc}}(M)$ 的连续嵌入；对所有 $s > k + n/2$，存在从 $H^s_{\text{loc}}(M)$ 到 $C^k(M)$ 的连续嵌入，其中 n是 M 的任一分支的最大维数。因此， $\cap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\text{loc}}(M) = C^\infty(M)$。

A.3 有界收敛拓扑

以下内容的一般参考文献是 Tr`eves 的 [28,第 32]章。

若 E 和 F 是豪斯多夫局部凸拓扑空间，则 $\mathcal{L}(E, F)$ 上的有界收敛拓扑——即所有连续线性映射 $E \to F$ 所构成的空间——由零的邻域基定义，该邻域基由如下集合组成

$$\mathcal{U}(B; V) = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : T(B) \subset V\}$$

当 B 遍历 E 的有界子集，且 V 遍历 F 的拓扑中的任意零点邻域基时。记号 $\mathcal{L}_b(E, F)$ 表示赋予有界收敛拓扑的 $\mathcal{L}(E, F)$。因此，网 T_α 在 $\mathcal{L}_b(E, F)$ 中收敛到 0，当且仅当对于每个有界 $B \subset E$ 和每个邻域基集合 V， T_α 最终都将 B 映入 V。该拓扑使 $\mathcal{L}(E, F)$ 成为豪斯多夫且局部凸的空间（继承自 F [28, 第 336] 页）。我们记录一些基本事实。

引理 *A.2*。设 E、 F、 G 为豪斯多夫局部凸拓扑空间。*(a)* 若 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ 且网 $S_\alpha \to S$ 属于 $\mathcal{L}_b(F, G)$，则 $S_\alpha T \to ST$ 属于 $\mathcal{L}_b(E, G)$；*(b)* 若网 $T_\alpha \to T$ 属于 $\mathcal{L}_b(E, F)$ˆ 且 $S \in \mathcal{L}(F, G)$，则 $ST_\alpha \to ST$ 属于 $\mathcal{L}_b(E, G)$；*(c)* 若 $T_\alpha \to T$ 属于 $\mathcal{L}_b(E, F)$ 且 *Ran* $T_\alpha \subset F$，ˆˆ，其中 F 是 F 的一个拓扑子空间，则 $T_\alpha \to T$ 属于 $\mathcal{L}_b(E, F)$；*(d)* 若 F 是桶化的，且$T_n \to T$ 和 $S_n \to S$ 分别是 $\mathcal{L}_b(E, F)$ 和 $\mathcal{L}_b(F, G)$ 中的收敛序列，则 $S_nT_n \to ST$ 属于 $\mathcal{L}_b(E, G)$。

注意，Hilbert、Banach、Fr´echet 和 LF 空间均为桶化空间 [28, 章 33]。

证明。 (*a*) 只需在 $S = 0$ 的情形下证明这一点；任取 E 中一个有界的 B，使得 $0 \in B$，再任取 G 中的一个 0-邻域 V。注意到 $T(B)$ 在 F 中有界，由此可推得 $S_\alpha T(B)$ 最终包含于 V。因此 $S_\alpha T \to 0$ 属于 $\mathcal{L}_b(E,G)$。(*b*) 不失一般性，设 $T = 0$，并取与前面相同的 B 和 V，注意到 $S^{-1}(V)$ 是 F 中的一个 0-邻域，再次可推得 $ST_\alpha(B)$ 最终包含于 V，所以 $ST_\alpha \to 0$。

ˆ (*c*) 同样，只需讨论 $T = 0$。任取一个有界的 $B \subset E$ 和一个 0-邻域 Vˆ ˆ ˆ ˆ，它们都在 F 中。于是，对于 F 中的某个 0-邻域 V，有 $V = F \cap V$，因为 F 具有子空间拓扑。我们知道，最终有 $T_\alpha(B) \subset V$；又由于 Ran $T_\alpha \subset$ˆF，最终有 $T_\alpha(B) \subset$ˆ ˆ ˆ$V \cap F = V$。因此 $T_\alpha \to 0$ 属于 $\mathcal{L}_b(E,F)$。

(*d*) 首先假设 $T = 0$，并令 $0 \in B$ 为 E 的任意有界子集，V 为 G 中任意一个 0 邻域。那么 S_n 与 S 一起构成 $\mathcal{L}_b(F, G)$ 中的有界子集（回忆一下，它是豪斯多夫的）。由于 F 是桶化的，根据巴拿赫–施泰因豪斯定理 [28, 定理 33.1]，它们构成一个映射的等度连续集。因此，存在 F 中的一个 0 邻域 W，使得对所有 n，$S_n(W) \subset V$。由于对充分大的 n，$T_n(B) \subset W$，因此对这样的 n，有 $S_nT_n(B) \subset W$。故在此情形下有 $S_nT_n \to 0$。若 $T \neq 0$，我们现在知道 $S_n(T_n - T) \to 0$，且由于 $S_nT \to ST$，可得所需的 $S_nT_n \to ST$。■

引理的典型应用 A.2 (*a*)、*b*)例如包括证明：从 $\mathbb{C}$中的一个定义域到 $\mathcal{L}_b\big(H_0^s(M)\ H_K^s(M)\big)$ 的全纯函数，作为取值于 $\mathcal{L}_b\big(H_K^s\big)$ 和$\mathcal{L}_b(H_0^s(M))$ 的函数也同样是全纯的，这是由于 $H_K^s(M)$ 连续嵌入 $H_0^s(M)$ 中。部分 *d*) 有如下用途。

推论 *A.3.* 设 E、F、G 是豪斯多夫局部凸拓扑空间，其中 F 是桶状的。若 $\lambda \mapsto T(\lambda)$ 和 $\lambda \mapsto S(\lambda)$ 分别是从 $\mathbb{C}$ 中的一个定义域到 $\mathcal{L}(E,F)$ 和 $\mathcal{L}(F,G)$ 的函数，则 *(a)* 如果 T 和 S 在有界收敛拓扑下（于 μ 处）都连续，则 $(ST)(\lambda) = S(\lambda)T(\lambda)$ 在 μ 处也连续；*(b)* 如果 T 和 S 在有界收敛拓扑下于 μ 处可微，则 ST 也可微，其导数由莱布尼茨法则 $(ST)'(\mu) = S'(\mu)T(\mu) + S(\mu)T'(\mu)$ 给出。

证明。 由于 $\mathbb{C}$ 是第一可数的，连续性和可微性问题可归结为序列方面的考察，结合引理 A.2(*d*) 及莱布尼茨公式的标准证明即可得出结论。■

对于 $\mathcal{L}_b(E,F)$ 拓扑下的收敛，若 E 和 F 是 Fr´echet 空间或其可数严格归纳极限（LF 空间），掌握一些充分条件也很有用。若 F 是 Fr´echet 空间，则有界子集恰好是满足以下条件的子集 B：对于定义 F拓扑的每个半范数 ρ_j，都有 $\sup_{f\in B} \rho_j(f) < \infty$；而集合 $V_{j,\epsilon} = \{f \in F : \rho_j(f) < \epsilon\}$（其中 $\epsilon > 0$任意，ρ_j为定义半范数）则构成零邻域基。另一方面，若 E 是由 Fr´echet 空间构成、具有定义序列 E_n 的 LF 空间，则 E中的有界子集 B 恰好是某个 E_n [28, Proposition 14.6],的有界子集；而邻域基由凸集 $V \subset E$ 构成，其中每个 $V \cap E_n$ 都是 E_n中的零开邻域。我们回顾一下，拓扑向量空间之间的连续线性映射保持有界性 [28, Proposition 14.2]。下列结果将在正文中使用。

引理 A.4. 设 $T_\alpha \in \mathcal{L}_b(F)$ 是 *Fr´echet* 空间 F 上的一个算子网，其定义半范数为 ρ_j。如果对每个 j，都存在 $k(j)$，使得对所有 $\epsilon > 0$，最终都有$\rho_j(T_\alpha f) < \epsilon\rho_{k(j)}(f)$ 对所有 $f \in F$成立，那么 $T_\alpha \to 0$属于 $\mathcal{L}_b(F)$。

证明。 给定任意有界集 B和邻域 $V_{j,\epsilon}$，令 $C = \sup_{f\in B} \rho_{k(j)}(f)$，并将给定性质应用于 ϵ/C，可得最终有，

$$\rho_j(T_\alpha f) < \epsilon C^{-1}\rho_{k(j)}(f) \le \epsilon, \qquad \forall f \in B.$$

我们已经证明，最终有 $T_\alpha \in \mathcal{U}(B; V_{j,\ \epsilon})$；由于 j和 ϵ是任意的，$T_\alpha \to 0$属于 $\mathcal{L}_b(F)$。■

推论 A.5。考虑一个网 $T_\alpha \in \mathcal{L}(C_K^\infty)$，使得每个 T_α 都可延拓为 $\mathcal{L}(H_K^s)$（我们也将其记为 T_α）中的一个算子，对所有 $s \geq s_*$均如此。再假设对于每个 $\mathcal{L}(H_K^s)$，都有 $T_\alpha \to 0$， $s \geq s_*$。那么 $T_\alpha \to 0$ 属于 $\mathcal{L}_b(C_K^\infty)$。

证明。任意C_K^∞半范数都被某个H_K^s范数所控制，反之亦然，因此，对于任意C_K^∞-半范数$\|\cdot\|_{K,j}$我们可以估计

$$\|T_\alpha f\|_{K,j} \leq c\|T_\alpha f\|_{H_K^{s(j)}} \leq c\|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(H_K^{s(j)})}\|f\|_{H_K^{s(j)}} \leq c'\|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(H_K^{s(j)})}\|f\|_{K,k(s(j))}$$

对于适当选取的 $s(j)$和 $k(s(j))$，该估计对$f \in C_K^\infty$和 α一致成立。由于 $T_\alpha \to 0$ 在 $\mathcal{L}(H_K^{s(j)})$中，对于任意 $\epsilon > 0$，最终都有$\|T_\alpha f\|_{K,\,j} \leq \epsilon\|f\|_{K,\,k(s(j))}$对所有$f \in C_K^\infty$均成立。因此，根据 $T_\alpha \to 0$ 在 $\mathcal{L}_b(C_K^\infty)$ 中的引理A.4。■

引理 A.6。设 T_α 是 *LF*空间 $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$上的一个算子网。若对某个固定的 n，有$\mathrm{Ran}(T_\alpha) \subset E_n$，且 $T_\alpha|_{E_m} \to 0$ 属于 $\mathcal{L}_b(E_m, E_n)$，对所有 m均成立，则 $T_\alpha \to 0$ 同时属于$\mathcal{L}_b(E, E_n)$ 和 $\mathcal{L}_b(E)$。

证明。考虑标准邻域基中零点的任意邻域 V和任意有界集 $B \subset E$，后者必然满足某个 m下的 $B \subset E_m$。于是 T_α最终将 B映入 V；由于 B和 V任意， $T_\alpha \to 0$属于 $\mathcal{L}_b(E, E_n)$。再与 E_n到 E的连续嵌入复合，也有 $T_\alpha \to 0$ 属于 $\mathcal{L}_b(E)$。■

致谢

我很高兴感谢 Rainer Verch 在本研究的各个阶段进行的有益讨论，也感谢 Maximilian Ruep 仔细阅读手稿草稿并提出意见。我尤其感谢 Christian B¨ar 提出促成本定理的问题 3.5，也感谢 Lashi Bandara 以及参加为纪念 B¨ar 举办的“流形上的整体分析”会议（弗赖堡，2022年9月）的其他与会者所提出的宝贵意见并进行的交流。我还感谢审稿人提出的宝贵建议。

参考文献

[1] Ammann B., Lauter R., Nistor V., Vasy A., 复幂与非紧流形, *Comm. Partial Differential Equations* **29** 2004 671 705, 0211305 ( ), – arXiv:math.OA/ .[2] B¨ar C., 全局双曲时空上的 Green-双曲算子, *Comm. Math. Phys.* **333** (2015), 1585–1615, arXiv:1310.0738.[3] B¨ar C., Ginoux N., 洛伦兹流形上的经典场与量子场, 收录于《整体微分几何》, *Springer Proc. Math.*, 第17卷, 施普林格, 海德堡, 2012, 359–400, arXiv:1104.1158.[4] B¨ar C., Wafo R.T., 流形上波动方程的初值问题, *Math. Phys. Anal. Geom.* **18** (2015), 7, 29 pages, arXiv:1408.4995.[5] Bernal A.N., S´anchez M., 时间函数的光滑性与全局双曲时空的度量分裂, *Comm. Math. Phys.* **257** (2005), 43–50, arXiv:gr-qc/0401112.[6] Bernal A.N., S´anchez M., 全局双曲时空可以定义为“因果的”，而非“强因果的”, *Classical Quantum Gravity* **24** (2007), 745–749, arXiv:gr-qc/0611138.[7] Dappiaggi C., Finster F., 因果变分原理的线性化场：存在性理论与因果结构, *Methods Appl. Anal.* **27** (2020), 1–56, arXiv:1811.10587.[8] Davies E.B., 线性算子及其谱, *Cambridge Stud. Adv. Math.*, 第106卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2007.[9] Dieudonn´e J., Schwartz L., 空间中的对偶性 $\mathcal{F}$ et ($\mathcal{LF}$), *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **1** (1949), 61–101.[10] Duistermaat J.J., H¨ormander L., 傅里叶积分算子。II, *Acta Math.* **128** (1972), 183–269。

[11] D¨utsch M., Fredenhagen K., 经典场论中的主 Ward 恒等式与广义薛温格–戴森方程, *Comm. Math. Phys.* **243** (2003), 275–314, arXiv:hep-th/0211242.[12] Fewster C.J., Jubb I., Ruep M.H., 量子场论中每个可观测量的渐近测量方案, *Ann. Henri Poincaré* **24** (2023), 1137–1184, arXiv:2203.09529.[13] Fewster C.J., Verch R., 局部非交换时空中的量子场测量，正在准备中。[14] Fewster C.J., Verch R., Green 双曲性的非局部推广，正在准备中。[15] Geroch R., 广义相对论中时空的旋量结构。I, *J. Math. Phys.* **9** (1968), 1739–1744.[16] Gramsch B., 弗雷德霍姆算子理论中的亚纯性及其在椭圆微分算子中的应用, *Math. Ann.* **188** (1970), 97–112.[17] Hawkins E., Rejzner K., 相互作用量子场论中的星乘积, *Lett. Math. Phys.* **110** (2020), 1257–1313, arXiv:1612.09157.[18] H¨ormander L., 线性偏微分算子分析。I. 分布理论与傅里叶分析, *Classics Math.*，施普林格，柏林，2003.[19] H¨ormander L., 线性偏微分算子分析。III. 伪微分算子，*Grundlehren Math. Wiss.*，第274卷，施普林格，柏林，2007.[20] Horn R.A., Johnson C.R., 矩阵分析，剑桥大学出版社，剑桥，1990.[21] Islam O., Strohmaier A., 关于微局部化及正规双曲算子费曼传播子的构造，arXiv:2012.09767.[22] Kaballo W., 算子函数的亚纯广义逆, *Indag. Math. (N.S.)* **23** (2012), 970–994.[23] Lechner G., Verch R., 具有非交换时间的线性双曲偏微分方程, *J. Noncommut. Geom.* **9** (2015), 999–1040, arXiv:1307.1780.[24] Lechner G., Waldmann S., 局部凸代数与模的严格变形量子化,

J. Geom. ( ), –

Phys. **99** 2016 111 144, 1109 5950
arXiv: . .[25] Peetre J., 对文章“微分算子的抽象刻画”的勘误，( ), – .[26] Reed M., Simon B., 现代数理物理方法。I. 泛函分析，第2版，Academic Press，纽约，1980.[27] Seeley R.T., 椭圆算子的复幂，收录于《奇异积分》（《纯数学专题讨论会论文集》，芝加哥，伊利诺伊州，1966），美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1967, 288–307.[28] Tr`eves F., 拓扑向量空间、分布与核，Dover Publications, Inc.，Mineola，纽约州，2006。