磁流体力学方程解的磁力线拓扑

Gennaro Ciampa

Abstract. 我们构造了二维磁流体力学方程的一些光滑周期解，这些解具有正电阻率，且其磁力线的拓扑会随流发生变化。根据 Alfv´én 定理，在理想情形（电阻率 $= 0$）下，这种变化是不可能发生的。在电阻情形下，磁力线重联已被证实会发生，并具有深远的物理意义，因为它是天体物理学中许多动力学现象的成因。本文的构造是对 [3] 的简化证明，此外我们还考虑受迫系统的情形。

arXiv:2303.02999v1 [math.AP] 6 Mar 2023

1. Introduction

在本文中，我们研究光滑解的磁重联 现象。这里的光滑解是指磁流体力学方程（MHD）的解。这些方程描述导电不可压缩流体（如等离子体、盐水、液态金属等）的行为。它们通过欧姆定律，将不可压缩纳维–斯托克斯方程与法拉第–麦克斯韦系统结合而得。磁流体力学方程的柯西问题是

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = \nu \Delta u + (b \cdot \nabla)b, \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u + \eta \Delta b, \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0, \quad b(0, \cdot) = b_0, \end{cases} \tag{MHD}$$

其中未知量为磁场 b、流体速度 u以及作用于流体的总压强 P。该问题的数据是两个无散向量场 u_0 和 b_0，以及参数 $\nu \geq 0$ （黏度）和 $\eta \geq 0$ （电阻率）。关于综述，请参阅[5, 7, 20, 21]。（磁流体力学）方程受到了数学家的广泛关注，适定性理论方面的首批成果可追溯至 [7, 21]。在二维和三维情形下，磁流体力学方程的有限能量整体弱解和局部强解的存在性已在 [7] 中得到证明。此外，对于光滑初始数据，他们还证明了二维情形下整体弱解的光滑性和唯一性。另一方面，在 [21] 中，作者证明了三维情形下局部强解的唯一性。近年来，即使在无电阻情形（$\eta = 0$）下也取得了不同的成果，并且目前已经获得了处于（本质上）尖锐水平的索оболев正则性下的局部适定性结果 [14, 15]。然而，我们的目标并非提供完整的成果列表；关于这些成果，我们请读者参阅上述引用的参考文献及其中所包含的参考文献。

我们的目标是给出磁重联的解析例子：它指的是磁力线拓扑的变化，也就是磁场的积分线 b。我们将重点关注二维周期情形，即定义在二维环面 $\mathbb{T}^2$上的解。若存在 t_1, t_2 ，使得不存在将 $b(t_1, \cdot)$ 的积分线集合映射到 $b(t_2, \cdot)$的积分线上的 $\mathbb{T}^2$ 同胚，我们就称（MHD）的一个解 (u, b) 发生了磁重联。相干磁结构拓扑的破坏可以释放大量能量（这些能量在磁连接协调演化之前以机械能或磁能的形式储存），并将其转化为动能或热能等其他形式的能量。这一现象对天体物理学家具有根本重要性，因为它是许多动态现象的成因

Key words and phrases. 磁流体力学方程、磁重联、阿尔芬定理、泰勒场。1

例如耀斑、日冕物质抛射和太阳风。

在无电阻情形下，已知足够光滑的磁场的积分线随流体一起运动（阿尔芬定理）。特别是，磁场积分线的拓扑在演化过程中保持不变。我们简要说明原因：记 Φ_t 为流体流，即

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(x) = u(t, \Phi_t(x)), \\ \Phi_0(x) = x, \end{cases}$$

并设 b_0 是一个（光滑）磁场， γ_0 是 b_0的一条积分线，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_0(s) = b_0(\gamma_0(s)).$$

若 $b(t,x)$是偏微分方程的唯一解

$$\partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u, \tag{1.1}$$

其初始数据为 b_0，已知它满足公式

$$b(t, \Phi_t(x)) = \nabla\Phi_t(x) b_0(x), \tag{1.2}$$

其中 Φ_t 是 u的流。公式 (1.2) 定义了 b_0 在 Φ_t下的所谓拉回 。于是，若 γ_0是 b_0的一条积分曲线，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_t(\gamma_0(s)) = \nabla\Phi_t(\gamma_0(s))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_0(s) = \nabla\Phi_t(\gamma_0(s))b_0(\gamma_0(s)) = b(t, \Phi_t(\gamma_0(s))),$$

这意味着 $\gamma_t = \Phi_t \circ \gamma_0$ 是 $b(t, \cdot)$的一条积分线： b_0 的积分线随流体流一同输运。由于假设 u 是光滑的， $\Phi_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 是一个微分同胚，这意味着在任意时刻 $t > 0$， b_0 的积分线与 $b(t, \cdot)$的积分线微分同胚。因此，不会发生重联。

最后需要指出，在无电阻情形下，磁结构的拓扑稳定性也与磁螺度守恒有关。磁螺度衡量磁力线的链接和扭转程度。在低正则性下，这一性质会变得十分微妙，与反常耗散现象密切相关。关于这方面的一些正面和负面结果，请参见 [2, 12, 13] 。

在电阻情形（$\eta > 0$）下，即使解是正则的，磁力线的拓扑也预计会在流体演化过程中发生变化。这一现象背后的直观解释是，磁扩散能够打破拓扑刚性。值得注意的是，我们可以证明在任意小的电阻率下都会发生磁重联，也就是说，对所有 $\eta > 0$ 都成立，因此即使在极度湍流的状态下也是如此。尽管已有数值和实验方面的证据（见 [19, 20] 及其中的参考文献），但目前尚无磁重联的解析例子。主要结果如下。

定理 1.1. 对于任意黏度和电阻率 $\nu, \eta > 0$ 以及任意常数 $T > 0$，存在一个零平均无散光滑向量场 b_0 和唯一的整体光滑解 (u, b) ，使其在 $\mathbb{T}^2$ 上满足(磁流体力学) ，初始数据为$(0, b_0)$，且在时刻 $t = 0$ 和 $t = T$ 的磁力线在拓扑上不等价。

众所周知，在二维情况下，重联只会发生在临界点处，见 [20]。我们的证明利用了这一特点，将磁场的临界点数量作为拓扑约束。具体而言，我们将对线性化方程的一些特殊解进行微扰分析，由此可以推断重联会发生。特别地，我们将初始磁场定义为

$$T_{nm} + \delta\tilde{T}_1, \quad 0 < \delta \ll 1,$$

˜其中 T_{nm} 和 T_1 是两个泰勒场（见下文第 2 节），具有以下性质：
（1）场 T_{nm} 有若干个停滞点（即 $\sim n^2 + m^2 \gg 1$，其中一半为双曲型，另一半为椭圆型）；

˜（2）场 T_1 恰有四个停滞点，且积分线的拓扑˜完全确定（见图 2），并且具有鲁棒性（T_1 根据定理 2.2 具有结构稳定性）。

因此，我们的想法是选择构造中的相关参数，使得该解在 $t = 0$时至少具有与 T_{nm} 相同数量的临界点，同时在拓扑上等价于 T_1 在 T时的情形。这证明磁重联发生在中间时刻。

值得注意的是，在三维情形下，我们可以轻而易举地构造出一些例子：只需考虑一个发生重联的二维解，并将第三个分量定义为 0。然而，众所周知，在三维情形下，重联不一定发生在临界点处，其他一些磁场结构也可能是重联发生的位置，参见 [20]。关于这一点， [3], 证明了一种真正的三维论证，其中可以指定丰富的拓扑结构；该论证依赖于关于贝尔特拉米场拓扑丰富性的若干深刻结果 [8, 9, 10, 11]。

最后，我们回顾一下，分析重联现象的另一个非常重要的模型是霍尔磁流体力学系统。后者在（MHD）的磁场方程左侧多出一项，即 curl(curl $b \wedge b$)，称为霍尔项。有关这些方程的介绍，请参阅 [1, 4, 6, 16]及其中的参考文献。霍尔项本身不会改变磁力线的拓扑，但它会与磁黏性相互作用，从而加速重联过程，见 [16]。值得注意的是，若b是一个贝尔特拉米场，则霍尔项恒为零。因此，鉴于霍尔磁流体力学 [4], 方程组的整体光滑解已有小初值理论，我们预计， [3] 中的三维证明所用的微扰论证也可以推广到霍尔磁流体力学系统。

最后，我们将说明，如何向方程组（MHD）中加入一个力，来构造一个呈现磁重联现象的（显式）解。定理如下。

定理 1.2。 给定任意黏度和电阻率 $\nu, \eta > 0$ 以及任意常数 $T > 0$，存在一个光滑、零平均且无散的向量场 b_0 ，以及一对（f_1, f_2）零平均光滑向量场，使得：

- 存在唯一的零平均整体光滑解（u, b），它满足带有力（f_1, f_2）和初始数据$(0, b_0)$的（磁流体力学）方程组；
- 时刻 $t = 0$ 和 $t = T$ 的磁力线在拓扑上并不等价。

与定理 1.1 的证明不同，定理 1.2 的证明并非基于微扰论证，我们将明确构造这些力和解。

2. Taylor fields

本节在回顾一些基本定义之后，将介绍我们重联结果的构成要素。若向量场 $v : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ 可表示为标量函数 ψ的正交梯度，即 $v = \nabla^\perp \psi := (\partial_{x_2}\psi, -\partial_{x_1}\psi)$。，则称其为哈密顿 向量场。根据定义，哈密顿向量场是无散的；根据亥姆霍兹分解， $\mathbb{T}^2$ 上的不可压缩向量场要么是哈密顿向量场，要么是常向量场。由于我们关注的是零平均向量场，因此对我们而言，不可压缩与哈密顿并无区别。回顾一下，若向量场 $v \in C^1(\mathbb{T}^2)$ 的奇点 x_0 满足 $\nabla v(x_0)$ 是可逆矩阵，则称该奇点为非退化奇点。无散向量场的非退化奇点必定是鞍点或中心点。现在给出结构稳定性的定义。

定义 2.1。 如果存在一个邻域 $\mathcal{U}$ ，其属于 $C^1(\mathbb{T}^d)$ 中的 v，使得每当 $v' \in \mathcal{U}$ 时，都存在一个从 $\mathbb{T}^d$ 到其自身的同胚，将 v 的轨道映射为 v'的轨道，那么 v 上的向量场 $\mathbb{T}^d$ 称为结构稳定的。

根据经典的佩绍托定理，无散向量场在任意扰动下并不具有拓扑稳定性。然而，对于二维环面上的哈密顿向量场，结构稳定性有如下刻画。

定理 2.2 (Ma, Wang [18])。 无散哈密顿向量场 $v \in C^r(\mathbb{T}^2)$ 具有 $r \geq 1$，当且仅当它在哈密顿向量场扰动下结构稳定。

- 所有 v 的奇点均非退化；
- v 的所有鞍连接都是自鞍连接。

$\mathbb{T}^2$ 上的泰勒场是拉普拉斯算子的无散特征函数，即满足以下方程的解：

$$\begin{cases} -\Delta T_M = M\, T_M, \\ T_M = \nabla^{\perp} h_M, \end{cases}$$

其中 $M \neq 0$。它们是哈密顿的，其流函数为 h_M，其中 $\{h_k\}_k$ 构成了 $L^2(\mathbb{T}^2)$ 的一组正交归一基。我们将重点讨论一些特殊选择：

$$T_{nm} = (m \sin nx \sin my, n \cos nx \cos my), \tag{2.1}$$

其特征值为 $n^2 + m^2$，且

$$\tilde{T}_1 = \left(\sin y, \frac{1}{2} \sin x \right), \tag{2.2}$$

˜特征值为 1。值得注意的是，对于压力的某种恰当选择，向量场 T_{nm}、T_1 也是二维欧拉方程的定常解。此外，按照定义 2.1 的意义，向量场 T_{nm} 并非结构稳定。其不稳定性源于 T_{nm}相图中存在鞍连接，见图 1。

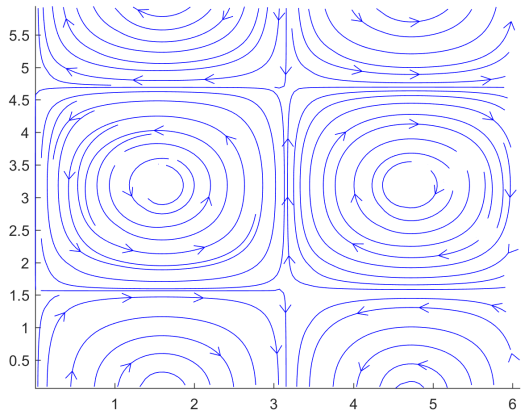

FIGURE 1. T_{11}的积分线。

˜相反，向量场 T_1 具有结构稳定性，因为其相图˜中没有鞍连接，只有自连接。该场 T_1 确实有两个鞍点，它们之间没有任何积分曲线相连，见图2。

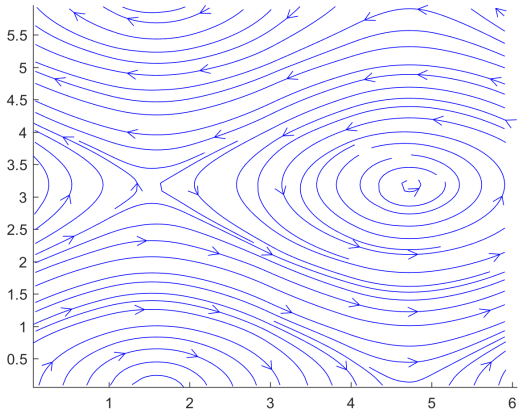

FIGURE 2. T_1的积分线。

我们以如下引理结束本小节。该引理研究泰勒场临界点的稳定性，尤其表明，只要扰动足够小（并满足一个定量界），临界点的数量就不会减少，见 [3]。

引理 2.3。设 T_{nm} 为上文定义的、特征值为 $N^2 = n^2 + m^2$ 的泰勒场，并设$W \in C^1$。对于所有足够大的 N（仅依赖于 $\|W\|_{C^1}$），存在 $\delta_0 = \delta_0(N)$ 使得向量场 $V(x) := T_{nm}(x) + \delta W(x)$对每个$|\delta| < \delta_0(N)$至少有 $8nm$ 个正则临界点。我们可以选取 $\delta_0(N) = N^{-L}$，其中 L是一个固定的大整数。

2.1. 磁流体力学方程的稳定性估计。这里我们陈述一个关于（磁流体力学）的稳定性结果。我们考虑（磁流体力学）的两个解 (u, b) 和 (w, m)，其初始数据分别为 (u_0, b_0) 和 (w_0, m_0)。通过定义差 $v = u - w$, $h = b - m$，我们得到这一对 (v, h) 满足方程组

$$\begin{cases} \partial_t v + \operatorname{div}(v \otimes v + 2v \otimes w) + \nabla P_{v,h} = \nu \Delta v + \operatorname{div}(h \otimes h + 2h \otimes m), \\ \partial_t h + (v \cdot \nabla)h + (w \cdot \nabla)h + (v \cdot \nabla)m = \eta \Delta h + (h \cdot \nabla)v + (h \cdot \nabla)w + (m \cdot \nabla)v, \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} h = 0, \\ v_0 = u_0 - w_0, \quad h_0 = b_0 - m_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

定义 $\tilde{\Gamma} := 1 + \|w_0\|_{L^2}^2 + \|m_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + \|h_0\|_{L^2}^2$，并取 $\sigma < \min(\nu, \eta)$。下述定理成立，见 [3]。

定理 2.4. 设 $v_0, h_0 \in H^r(\mathbb{T}^2)$ 是两个零均值无散向量场。设$(v, h, P_{v,h})$ 是方程 (2.3) 在初始数据(v_0, h_0)下的唯一解，其中 (w, m) 是(磁流体力学)的一个解。假设

$$\|w_0\|_{H^m} + \|m_0\|_{H^m} \le C N^m, \qquad \|v_0\|_{H^m} + \|h_0\|_{H^m} \le C\delta, \qquad m = 0, \dots, r,$$

对某个 $N > 1$ 成立。则

$$\|h(t,\cdot)\|_{H^r}^2 + \|v(t,\cdot)\|_{H^r}^2 \le \delta^2 N^{2r} e^{-2\sigma t} e^{\frac{C\tilde{\Gamma}}{\sigma^2}}, \tag{2.4}$$

其中隐式常数 C 依赖于 r, σ。

3. Proof of the reconnection

本节证明我们的第一个主定理。

定理 *1.1.* 我们取以下初始数据

$$(u_0, b_0) := \left(0, N^{-1} T_{nm} + \delta \tilde{T}_1\right)$$

其中 $n^2 + m^2 \gg 1$ 和 $\delta \ll 1$ 将在稍后选定。考虑缩放后的初始数据 $N b_0 = T_{nm} + N\delta \tilde{T}_1$，并取 $\delta < \frac{c}{N^{L+1}}$，其中 c 是一个合适的小常数。由引理 2.3 可知，$\delta \ll \delta_0(N)$,

因此，向量场 Nb_0，从而 b_0，至少有 $8nm$ 个正则临界点。作此选择后，在~时刻 $t=0$，该解从一个与 T_1不拓扑等价的构型出发。

现在我们将证明，在时刻 $t=T$，解 $b(T,\cdot)$（经适当缩放后）与向量场 $\tilde{T}_1$ 在 C^1-范数下彼此接近：后者的结构稳定性将意味着，$b(T,\cdot)$ 在拓扑上等价于 T_1，并且磁重联发生在 $t=0$ 与 $t=T>0$之间。为此，我们将针对一个作为参照的（给定）解进行微扰论证，下面构造该解。

考虑（MHD）的初始数据 $(w_0,m_0)=\left(0,N^{-1}T_{nm}\right)$。回顾一下，泰勒场 T_{nm} 是定常欧拉方程的一个解，配以适当选取的压力，我们将其记为$P_{T_{nm}}$。此外，根据定义，$N^2=n^2+m^2$ 且 $\Delta T_{nm}=-N^2T_{nm}$.。于是，容易验证，（MHD）在初始数据 (w_0,m_0) 下的唯一解为

$$(w,m,p_w)=\left(0,N^{-1}e^{-\eta N^2t}T_{nm},N^{-2}e^{-2\eta N^2t}P_{T_{nm}}\right). \tag{3.1}$$

我们考察流体在时刻 $t=T$ 的行为。为了处理方程中的非线性项，我们定义 $u=v+w$, $b=h+m$，其中 (v,h) 满足差分方程 (2.3)。由杜哈梅尔公式可知，解 b 满足恒等式

$$b(t,\cdot)=e^{t\Delta}b_0+D(t,\cdot), \tag{3.2}$$

其中 $D(t,\cdot):=L_h(t,\cdot)+L_b(t,\cdot)$, 并且

$$L_h(t,\cdot):=\int_0^t e^{\eta(t-s)\Delta}\operatorname{div}\left(h(s)\otimes v(s)-v(s)\otimes h(s)\right)\mathrm{d}s, \tag{3.3}$$

$$L_m(t,\cdot):=\int_0^t e^{\eta(t-s)\Delta}\operatorname{div}\left(m(s)\otimes v(s)-v(s)\otimes m(s)\right)\mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

下面给出如下引理，见 [3]。

~**引理 3.1.** 设 (v,h) 是 (2.3) 在初始数据 $(0,\delta T_1)$下的唯一解，其中 (w,m)定义于 (3.1)。那么，函数 L_h, L_m （定义于 (3.3) 和 (3.4) ）满足以下估计

$$\|L_h(t,\cdot)\|_{H^r}\le C\delta^2N^{r+3}e^{-\sigma s},\ \|L_m(t,\cdot)\|_{H^r}\le C\delta N^{-2}+C\delta N^{r+1}e^{-\eta N^2\frac{t}{2}}.$$

前述引理的证明可由应用定理 2.4 得出：这就是我们在 b_0 的定义中考虑因子 N^{-1} 的原因。不过，显然只需稍微调整参数 N 的指数即可改写证明。将磁场 $b(T,\cdot)$ 按因子 $\delta^{-1}e^{\eta T\tilde{}}$ 重新缩放，并记为 $b(T,\cdot)$。更明确地说

$$\tilde{b}(T,\cdot)=\tilde{T}_1+(\delta N)^{-1}e^{-\eta(N^2-1)T}T_{nm}+\delta^{-1}e^{\eta T}D(T,\cdot).$$

我们的目标是选取足够大的 N，使得 $\left\|\tilde{b}(T,\cdot)-\tilde{T}_1\right\|_{H^r}\ll 1$, 并利用 T_1 在哈密顿微扰和索伯列夫嵌入 $(r=3)$ 下的结构稳定性，推断 $b(T,\cdot)$ 的积分线集合，从而 $b(T,\cdot)$ 的积分线集合，也与 T_1 的积分线集合微分同胚。对于足够大的 L，我们取

$$\delta=e^{-\eta T}N^{-(L+1)},\quad L\ge r+3.$$

这与引理 2.3 相容，再将其与引理 3.1 结合，可得

$$\|\delta^{-1}e^{\eta T}D(t,\cdot)\|_{H^r}\le CN^{-1}+CN^{-2}e^{\eta T}+CN^{r+1}e^{-\eta N^2\frac{T}{2}},$$

当 N 足够大时，该量很小，具体取决于 T 和 η。取这样的 δ 后，只要再将 N 取得更大，我们还可以使得

$$\|\delta^{-1}e^{-\eta(N^2-1)T}T_{nm}\|_{H^r}\le CN^{L+1+r}e^{-\eta N^2T}\ll 1.$$

~这表明，在时间 T，该解与 T_1 拓扑等价，随后磁力线发生了重联。

□

4. The forced system

本节将证明我们的第二个主要结果，即定理 1.2。

定理 *1.2.* 正如引言中所提到的，我们将明确构造 f_1, f_2,u, b。我们定义 $b_0 = T_{nm}$ 和 $f_2 = T_{N_2}$，其中 T_{N_2} 是与（2.1）形式相同的泰勒场，但其特征值满足 $N_2 << N$。特别地，T_{nm} 的临界点数量远多于 T_{N_2}。此外，注意到 f_2 具有零均值。现在的思路是选择 f_1，使得解的形式为 $(0, b(t,x))$。根据杜哈梅尔公式，受迫热方程的解

$$\begin{cases} \partial_t b = \eta \Delta b + f_2 \\ b(0,\cdot) = T_{nm}, \end{cases}$$

由下式给出

$$b(t,x) = e^{-\eta N^2 t} T_{nm}(x) + \left(\frac{1 - e^{-N_2^2 \eta t}}{\eta N_2^2} \right) T_{N_2}(x),$$

这里我们利用了泰勒场是拉普拉斯算子的特征函数这一事实。我们计算 $(b \cdot \nabla)b$：由于T_{nm} 和 T_{N_2} 是二维欧拉方程的定常解，我们得到

$$(b \cdot \nabla)b = \underbrace{e^{-2\eta N^2 t} \nabla P_{nm} + \left(\frac{1 - e^{-\eta N_2^2 t}}{\eta N_2^2} \right)^2 \nabla P_2}_{(*)} + \underbrace{e^{-\eta N^2 t} \left(\frac{1 - e^{-\eta t}}{\eta} \right) \left((T_{nm} \cdot \nabla) T_{N_2} + (T_{N_2} \cdot \nabla) T_{nm} \right)}_{(**)}.$$

那么，如果我们定义 $\nabla P = (*)$ 和 $f_1 = -(**)$，则三元组 $(0,\ b,\ P)$ 解出了带力的（磁流体力学）方程，其中 f_1 具有零均值。现在我们可以证明重联：通过定义缩放后的磁场 $\tilde{b} = \eta N_2^2 b$，我们得到

$$\|\tilde{b}(T,\cdot) - T_{N_2}\|_{H^r} \leq C\eta N^r N_2^2 e^{-\eta N^2 T} + C N_2^r e^{-\eta N_2^2 T}, \tag{4.1}$$

以及 th en 结论由引理 2.3 得出，先选择 N_2，然后选择 $N >> N_2$。 □

注 4.1。 由前面的证明可清楚看出，对 T_{N_2} 的选择并不限于形如 (2.1) 的泰勒场。事实上，只要满足关于特征值 $N_2 << N$ 的条件，也可以考虑其他泰勒场。

注 4.2。 请注意，只要我们可以自由选择任意大的时间 T，也可以给出另一种证明。定义 $f_1 = T_1$，其中 T_1 在 (2.2) 中定义。通过与上面相同的计算˜，我们得到，如果 $b = \eta b$,

$$\|\tilde{b}(T,\cdot) - \tilde{T}_1\|_{H^r} \leq \eta (N^r e^{-\eta N^2 T} + e^{-\eta T}),$$

当 T 足够大时，该值可以任意小。于是，结论可由˜ T_1的结构稳定性得到。

Acknowledgements

作者获得 ERC 2021 启动基金“哈密顿动力学、正规形与水波”（HamDyWWa）的资助，项目编号：101039762。本文表达的观点和意见仅代表作者，不一定反映欧盟或欧洲研究理事会的观点。欧盟和资助机构均不对此承担责任。本研究部分由 AEI 通过项目 PID2021-123034NB-I00 资助。

References

[1] M. Acheritogaray, P. Degond, A. Frouvelle, J.-G. Liu: *Kinetic formulation and global existence for the Hall–Magneto–Hydrodynamics system* **4** 4 901 918 2011 .《动理学与相关模型》 () , – () , [2] R. Beekie, T. Buckmaster, V. Vicol: *Weak solutions of ideal MHD which do not conserve magnetic helicity*.《偏微分方程年刊》6，第1期（2020）。[3] P. Caro, G. Ciampa, R. Lucà: *Magnetic reconnection in Magnetohydrodynamics*. https://arxiv.org/abs/2209.09600[4] D. Chae, P. Degond, J.-G. Liu: *Well-posedness for Hall-magnetohydrodynamics*. Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 31，第3期，555–565（2014）。[5] P. A. Davidson: *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. 剑桥应用数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2001。[6] E. Dumas, F. Sueur *On the Weak Solutions to the Maxwell–Landau–Lifshitz Equations and to the Hall–Magneto–Hydrodynamic Equations* **330**, 1179 1225 2014 : .《数学物理通讯》- () 。[7] G. Duraut, J.-L. Lions: *Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique*.《理性力学与分析档案》46，241-279（1972）。[8] A. Enciso, R. Lucà, D. Peralta-Salas: *Vortex reconnection in the three dimensional Navier–Stokes equations*.《数学进展》309，452-486（2017）。[9] A. Enciso, D. Peralta-Salas: *Knots and links in steady solutions of the Euler equation* **175**, .《数学年刊》– () 。[10] A. Enciso, D. Peralta-Salas: *Existence of knotted vortex tubes in steady Euler flows*.《数学学报》214，61–134，（2015）。[11] A. Enciso, D. Peralta-Salas, F. Torres de Lizaur: *Knotted structures in high-energy Beltrami fields onthe torus and the sphere*. Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup. 50，第4期，995–1016页，（2017）。[12] D. Faraco, S. Lindberg: *Proof of taylor's conjecture on magnetic helicity conservation*.《数学物理通讯》373，第2期，707-738（2019）。[13] D. Faraco, S. Lindberg, L. Székelyhidi: *Bounded solutions of ideal MHD with compact support in space-time*. Arch. Ration. Mech. Anal. 239，51-93（2020）。[14] C. Fefferman, D. McCormick, J. Robinson, J. Rodrigo: *Higher order commutator estimates and local existence for the non-resistive MHD equations and related models* **267** 4 1035 1056 2014 .《泛函分析杂志》 () , - () 。[15] C. Fefferman, D. McCormick, J. Robinson, J. Rodrigo: *Local Existence for the Non-Resistive MHD Equations in Nearly Optimal Sobolev Spaces* **223**, 677 691 2017 .《理性力学与分析档案》– () 。[16] H. Homann, R. Grauer: *Bifurcation analysis of magnetic reconnection in Hall-MHD systems* **208**, .《物理学D辑》– () 。[17] R. Lucà: *A note on vortex reconnection for the 3D Navier–Stokes equation*. 即将发表于《意大利数学联盟讲义》。[18] T. Ma, S. Wang: *Structural classification and stability of divergence-free vector fields*.《物理学D辑》171，107-126（2002）。[19] L. Ni, H. Ji, N. Murphy, J. Jara-Almonte: *Magnetic reconnection in partially ionized plasmas*.《英国皇家学会会刊A辑》第476卷第2236期（2020）。[20] E. Priest and T. Forbes: *Magnetic Reconnection, MHD Theory and Applications*. 剑桥大学出版社，剑桥（2000）。[21] M. Sermange, R. Temam: *Some mathematical questions related to the MHD equations*.《纯粹与应用数学通讯》36(5)，635-664（1983）。

（G. Ciampa） Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques"、 Università degli Studi di Milano、Via Cesare Saldini 50 20133 Milano 、 Italy.
Email address: gennaro.ciampa@unimi.it