arXiv:2303.03002v1 [math-ph] 6 Mar 2023

非完整括号：重新审视 Eden*

Manuel de León[1, 2][0000−0002−8028−2348]，Manuel Lainz[1][0000−0002−8028−2348]、Asier López-Gordón[1][0000−0002−9620−9647]和 Juan CarlosMarrero[3][0000−0002−9620−9647]

[1] 数学科学研究所（CSIC-UAM-UC3M-UCM）[2] 西班牙皇家精确、物理与自然科学学院[3] ULL-CSIC 微分几何与几何力学、数学、统计与运筹学系以及数学与应用研究所（IMAULL），拉拉古纳大学，圣克里斯托瓦尔-德拉拉古纳，西班牙

摘要。非完整动力学可以通过约束子流形上的所谓非完整括号来描述。该括号是对环境空间中泊松括号的一种非可积修正；在此情形下，它是构形流形余切丛上的正则括号的一种修正。该括号在 [2,10], 中得到定义，尽管此前已有一些特殊且不那么直接的定义。另一方面，还有一种同样称为非完整括号的括号，是借助几乎李代数丛对问题的描述而定义的。最近，我们重新审视了 R. J. Eden 的两篇早期论文，并定义了一种新的括号，称为 Eden括号。本文证明这三种括号彼此相同。此外，按照 Eden 的方式描述非完整括号，使我们在研究哈密顿-雅可比理论以及非完整系统的量子化方面取得了重要进展。

关键词： 非完整系统 · 非完整括号 · Eden括号 · 几乎李锚丛。

1 引言

力学中最重要的对象之一是泊松括号，它使我们能够通过将可观测量与哈密顿能量取括号来求得该可观测量的演化；也可以利用泊松括号所满足的雅可比恒等式，由两个给定的守恒量求得新的守恒量。此外，泊松括号对于推进系统的量子化至关重要，Dirac 将其称为

*M. de León、M. Lainz 和 A. López-Gordón 感谢 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 PID2019-106715GB-C21 和 CEX2019-000904-S 提供的经费支持。Asier López-Gordón 还感谢 MCIN 提供博士前合同 PRE2020-093814。J. C. Marrero 感谢西班牙科学与创新部和欧盟（Feder）项目 PGC2018-098265-B-C32 提供的经费支持。

类比原理，也称对应原理。根据这一原理，泊松括号变为与量子化可观测量相对应的算符的对易子。

长期以来，非完整机械系统领域一直没有类似的概念，直到 van der Schaft 和 Maschke [11] 引入了一种类似于典范泊松括号、但不具备可积性这一优势的括号。在 [2,3]（另见 [10]）中，我们提出了一种几何上十分简洁的方法，用于定义时变和非时变情形下的非完整括号。事实上，可以沿约束子流形以两种不同的方式分解切丛和余切丛。这两种分解都使非完整动力学能够通过投影自由动力学得到；此外，若用典范辛形式计算两个定义在构型流形上的函数的哈密顿向量场的投影（在先将它们任意延拓到整个余切丛之后），便可得到两个不可积括号。第一种分解归功于 de León 和 Martín de Diego [4]，第二种则归功于 Bates 和 Sniatycki [1]。第二种分解的优点在于它是辛的，也是本文将采用的方法。无论如何，我们证明了这两种括号在约束子流形 [2]上相一致。

另一方面，通过研究哈密顿–雅可比方程，我们在几乎李代数丛的框架下对非完整力学进行了描述。请注意，“几乎”一词源于确定约束的分布缺乏可积性，这也表明该描述是自洽的。因此，在 [5]中，我们定义了一种新的几乎泊松括号，也称为非完整括号。迄今为止，尽管这两种非完整括号在不同语境中都被使用，并被视为相同，但从未有过相关证明发表。本文首次为此提供了证据。

然而，问题并未就此结束。1951年，R. J. Eden 在 P. A. M. Dirac 指导下撰写了关于非完整力学的博士论文（参见他的论文 [7,8]）。在第一篇论文中，Eden 引入了一个颇具启发性的 γ 算子，可将自由态映射为受约束态。借助该算子（一种具有投影算子性质的（1,1）型张量），Eden 推导出了运动方程，能够计算所有可观测量的括号，得到了一个简洁的哈密顿–雅可比方程，甚至还用它构造了非完整系统的量子化。Eden 的这两篇论文尽管意义重大，影响却不大。首先，它们采用的坐标表述难以理解；其次，直到20世纪80年代，对非完整系统的研究才成为几何力学主流的一部分。

最近，我们仔细研究了 Eden 的这两篇论文，并意识到算子 γ 不过是一个投影，它由动能所确定的黎曼度量给出的余切丛正交分解所定义。因此，我们定义了一种新的括号，称为 Eden括号，并证明它与先前的非完整括号一致。

2 拉格朗日与哈密顿力学：简要概述

2.1 拉格朗日力学

设 $L: TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个拉格朗日函数，其中 Q 是一个构型 n 维流形。于是， $L = L(q^i, \dot{q}^i)$，其中 (q^i) 是 Q 中的坐标，而 $(q^i, \dot{q}^i)$ 是 TQ中的诱导丛坐标。我们将典范投影记为 τ_Q: $TQ \longrightarrow Q$，使得 $\tau_Q(q^i, \dot{q}^i) = (q^i)$。

我们假设 L 是正则的，也就是说，黑塞矩阵 $(\partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j)$ 是正则的。利用 TQ 上的典范自同态 $S = dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial\dot{q}^i}$，可以构造一个 1-形式 $\lambda_L = S^*(dL)$，以及 2-形式 $\omega_L = -d\lambda_L$。那么，当且仅当 L 是正则的 [6]时， ω_L 是辛的。

现在考虑由 $\flat_L(v) = i_v\,\omega_L$ 给出的向量丛同构 $\flat_L$: $T(TQ) \to T^*(TQ)$。我们将哈密顿向量场 $\xi_L = X_{E_L}$ 定义为 $\flat_L(\xi_L) = dE_L$，其中 $E_L = \Delta(L) - L$ 是能量。现在，若 $(q^i(t)\ \dot{q}^i(t))$ 是 ξ_L 的积分曲线，则它满足通常的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{1}$$

2.2 勒让德变换

回顾一下，勒让德变换 FL: $TQ \longrightarrow T^*Q$ 是一个纤维映射（即 $\pi_Q \circ FL = \tau_Q$，其中 π_Q: $T^*Q \longrightarrow Q$ 表示 Q的余切丛的典范投影）。事实上， FL 是L的纤维导数。用局部坐标表示，有

$$FL(q^i, \dot{q}^i) = (q^i, p_i),\ p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i},$$

因此， L 是正则的，当且仅当 FL 是局部微分同胚。

本文中我们将假设 FL 实际上是一个全局微分同胚（换言之， L 是超正则的）；当 L 是机械型拉格朗日量时，情况便是如此，例如 $L = T - V$，其中 T 是由 Q上的黎曼度量定义的动能，而 V: $Q \longrightarrow \mathbb{R}$ 是势能。

2.3 哈密顿描述

哈密顿对应的理论是在 Q的余切丛 T^*Q 上建立的。记 $\omega_Q = dq^i \wedge dp_i$ 为典范辛形式，其中（q^i， p_i）是 T^*Q上的典范坐标。

哈密顿能量就是 $H = E_L \circ (FL)^{-1}$，而哈密顿向量场是辛方程的解

$$i_{X_H}\,\omega_Q = dH.$$

众所周知， X_H 的积分曲线（$q^i(t)$ $p_i(t)$）满足哈密顿方程

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{2}$$

由于 $FL^*\omega_Q = \omega_L$，我们推 deduce 出 ξ_L 和 X_H 是 FL-相关的，因此 FL 将欧拉-拉格朗日方程 (1) 的解变换为哈密顿方程 (2) 的解。

另一方面，我们可以定义函数的一个括号

$$\{\,,\,\}_{can} : C^\infty(T^*Q) \times C^\infty(T^*Q) \longrightarrow C^\infty(T^*Q)$$

如下

$$\{F, G\}_{can} = \omega_Q(X_F, X_G) = X_G(F) = -X_F(G)$$

这个括号是泊松括号，也就是说， $\{\,,\,\}_{can}$ 是 $\mathbb{R}$-双线性的，并且：

– 它是反对称的： $\{G, F\}_{can} = -\{F, G\}_{can}$；– 它满足莱布尼茨法则： $\{FF, G\}_{can} = F\{F, G\}_{can} + F\{F, G\}_{can}$；并且– 它满足雅可比恒等式：

$$\{F, \{G, H\}_{can}\}_{can} + \{G, \{H, F\}_{can}\}_{can} + \{H, \{F, G\}_{can}\}_{can} = 0.$$

3 非完整机械系统

3.1 拉格朗日描述

一个**非完整机械系统**是一个四元组 (Q, g, V, D)，其中 Q 是维数为 n的构型流形； g 是定义在 Q上的黎曼度量； V 是势函数， $V \in C^\infty(Q)$； D 是定义在 Q 上的秩为$k < n$ 的不可积分布。

与第 2.2 节一样，度量 g 和势能 V定义了一个机械型拉格朗日函数 $L(v_q) = \frac{1}{2}\, g_q(v_q, v_q) - V(q)$。

非完整动力学由拉格朗日函数 L 以及由 D给出的非完整约束决定；这意味着允许的速度应属于 D。

非完整问题是求解运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda_\alpha \mu_i^\alpha(q), \quad \mu_i^\alpha(q)\dot{q}^i = 0, \tag{3}$$

其中， $\{\mu^\alpha\}$ 是 D° （ D的湮灭子）的局部基，满足 $\mu^\alpha = \mu_i^\alpha\, dq^i$。这里， λ_α 是待确定的拉格朗日乘子。

利用辛形式 ω_L和 1-形式向量丛 F，可以得到上述方程的几何描述，其中 $F = \tau_Q^*(D^\circ)$。因此，上述方程等价于以下方程：

$$i_X\, \omega_L - dE_L \in \tau_Q^*(D^\circ), \quad X \in TD. \tag{4}$$

这些方程有唯一解 ξ_{nh}，称为非完整向量场。

黎曼度量 g 在 TQ 与 T^*Q 之间诱导出一个向量丛同构，由 $\flat_g(q)(v_q) = i_{v_q}g$ 给出（它也再次诱导出向量场与 1-形式之间的同构）。$\flat_g$ 的逆记为 $\sharp_g$。

我们可以相对于 g 定义 D 的正交补 $D^{\perp_g}$，如下所示：

$$D_q^{\perp_g} = \{v_q \in T_qQ \mid g(v_q, w_q) = 0, \forall w_q \in D\}.$$

$D^{\perp_g}$ 仍是 Q 上的一个分布，或者说，是 TQ 的一个向量子丛，使得我们有惠特尼和

$$TQ = D \oplus D^{\perp_g}. \tag{5}$$

3.2 哈密顿描述

我们可以利用勒让德变换 FL 得到非完整系统（Q，g，V，D）的哈密顿描述；在本例中，该变换与由度量 g 关联的同构 $\flat_g$ 一致。

因此，我们可以定义相应的哈密顿函数 $H: T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$，$H = E_L \circ (FL)^{-1}$，以及约束子流形 $M = FL(D) = \flat_g(D) = (D^{\perp_g})^\circ$。由此，我们得到一个新的正交分解（或惠特尼和）

$$T^*Q = M \oplus D^\circ, \tag{6}$$

因为 $FL(D^{\perp_g}) = \flat_g(D^{\perp_g}) = D^\circ$。这个分解关于切余向量上的诱导度量是正交的，也是将式 (5) 转换到哈密顿形式。再次说明，M 和 D° 是 $\pi_Q: T^*Q \longrightarrow Q$ 在 Q 上的向量子丛。我们分别有如下典范嵌入 $i_M: M \longrightarrow T^*Q$ 和正交投影 $\gamma: T^*Q \longrightarrow M$。

现在，T^*Q 上的非完整系统的运动方程可写为：

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \bar{\lambda}_\alpha \mu_j^\alpha g^{ij}, \tag{7}$$

以及约束方程 $\mu_i^\alpha g^{ij} p_j = 0$ 注意，这里的 $\bar{\lambda}_\alpha$ 是待确定的拉格朗日乘子。

现在，由 1-形式 $\tau_Q^*(\mu^\alpha)$ 生成的约束力向量丛可以转换到余切侧，从而得到由 1-形式 $\pi_Q^*(\mu^\alpha)$ 生成的向量丛，记为 $\pi_Q^*(D^\circ)$。因此，非完整系统的非完整哈密顿方程可改写为内蕴形式：

$$(i_X\omega_Q - dH)_{|M} \in \pi_Q^*(D^\circ), \quad X_{|M} \in TM. \tag{8}$$

这些方程有唯一解 X_{nh}，称为非完整向量场。当然，X_{nh} 和 ξ_{nh} 通过限制在 D 上的勒让德变换相关联，即 $T(FL)|_D(\xi_{nh}) = X_{nh} \circ (FL)_D$。

3.3 几乎李代数丛方法

在 [5]（另见 [9]）中，我们提出了一种基于几乎李代数丛框架的非完整力学方法。

我们将 $i_D:\ D \longrightarrow TQ$ 称为典范嵌入。由 D 上的分解 $TQ = D \oplus D^{\perp}$ 给出的典范投影记为 $P:\ TQ \longrightarrow D$。

那么，向量丛 $(\pi_Q)_{|D}:\ D \longrightarrow Q$ 是一个几乎李代数丛。锚映射就是典范嵌入 $i_D \longrightarrow TQ$，而截面空间 $\Gamma(D)$ 上的几乎李括号 $\|\ ,\ \|$ 定义为

$$\|X, Y\| = P([X, Y]), \quad \text{for } X, Y \in \Gamma(D).$$

这里，$[\ ,\ ]$ 是向量场的标准李括号。

我们还可以得到由伴随算子给出的向量丛态射:

$$i_D^* : T^*Q \longrightarrow D^*, P^* : D^* \longrightarrow T^*Q \tag{9}$$

其中 D^* 是 D的对偶向量丛。

现在，我们在 M 上定义如下几乎泊松括号（见 [5]）：

$$\{\ ,\ \}_{D^*} : C^\infty(D^*) \times C^\infty(D^*) \longrightarrow C^\infty(D^*)$$
$$\{f, g\}_{D^*} = \{f \circ i_D^*, g \circ i_D^*\}_{can} \circ P^*.$$

括号 $\{\ ,\ \}_{D^*}$ 具有与泊松括号相同的性质，唯独雅可比恒等式未必成立；也就是说，$\{\ ,\ \}_{D^*}$ 是 $\mathbb{R}$-双线性的、反对称的，并满足莱布尼茨法则。

此外，若 $FL_{nh}:\ D \longrightarrow D^*$ 是由 $FL_{nh} = i_{D^*} \circ FL \circ i_D$ 给出的非完整勒让德变换，且 Y_{nh} 是 D^*中的非完整动力学，则

$$T(FL_{nh})(\xi_{nh}) = Y_{nh} \circ FL_{nh}.$$

因此，括号 $\{g, f\}_{D^*}$ 可用于描述可观测量$f \in C^\infty(D^*)$的演化。事实上，若 $h:\ D^* \longrightarrow \mathbb{R}$ 是由下式定义的约束哈密顿函数

$$h = (E_L)_{|D} \circ FL_{nh},$$

我们有

$$\dot{f} = Y_{nh}(f) = \{f, h\}_{D^*}, \forall f \in C^\infty(D^*).$$

4 非完整括号

考虑由以下条件定义的 M 上的向量子丛 T^DM

$$T^DM = \{Z \in TM \mid T\pi_Q(Z) \in D\}$$

众所周知，[1,2], T^DM 是辛向量丛（$T_M(T^*Q)$ ω_Q）的辛向量子丛，其中我们仍用 ω_Q 表示 $T_M(T^*Q)$在任意纤维上的限制。因此，我们有如下辛分解

$$T_M(T^*Q) = T^DM \oplus (T^DM)^{\perp_{\omega_Q}}, \tag{10}$$

其中（T^DM）$^{\perp_{\omega_Q}}$表示 T^DM的辛补空间。因此，我们有相应的投影

$$\mathcal{P} : T_M(T^*Q) \longrightarrow T^DM, \quad \mathcal{Q} : T_M(T^*Q) \longrightarrow (T^DM)^{\perp_{\omega_Q}}.$$

上述分解最重要的应用之一是

$$X_{nh} = \mathcal{P}(X_H), \text{ along } M.$$

此外，上述分解使我们能够如下定义所谓的非完整括号。给定 f、$g \in C^\infty(M)$，令

$$\{f, g\}_{nh} = \omega_Q(\mathcal{P}(X_{\tilde{f}}), \mathcal{P}(X_{\tilde{g}})) \circ i_M \tag{11}$$

其中，i_M：$M \longrightarrow T^*Q$是典范嵌入，而 $\tilde{f}$、$\tilde{g}$分别是 f及 g到 T^*Q的任意延拓（见 [2,10]）。由于分解（10）是辛的，因此也可以等价地写成

$$\{f, g\}_{nh} = \omega_Q(X_{\tilde{f}}, \mathcal{P}(X_{\tilde{g}})) \circ i_M \tag{12}$$

注*1*。注意到，$f \circ \gamma$和 $g \circ \gamma$是将 f和 g自然延拓到 T^*Q的结果，因此我们也可以如下定义上述非完整括号

$$\{f, g\}_{nh} = \omega_Q(X_{f\circ\gamma}, \mathcal{P}(X_{g\circ\gamma})) \circ i_M \tag{13}$$

值得注意的是，$\{\,,\,\}_{nh}$是一个几乎泊松括号。此外，它可用于给出一个可观测量的演化，即

$$\dot{f} = X_{nh}(f) = \{\, f, H \circ i_M \,\}_{nh}.$$

5 Eden括号

利用投影算子 γ：$T^*Q \longrightarrow M$，我们可以在 M 上定义一个几乎泊松括号，称为**Eden括号**，如下所示：

$$\begin{aligned} &\{\,,\,\}_E : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ &\{f, g\}_E = \{f \circ \gamma, g \circ \gamma\}_{can} \circ i_M. \end{aligned} \tag{14}$$

它可用于给出可观测量的演化，即

$$\dot{f} = \{\, f, H \circ i_M \,\}_E.$$

6 括号的比较

首先，可以证明定义在 D^* 和 M 上的几乎泊松括号是同构的。

定理 1. 向量丛同构

$$i_{M,D^*} : M \longrightarrow D^*$$

由以下复合映射给出

$$i_{M,D^*} = i_D^* \circ i_M$$

是近泊松流形 $(M, \{\ ,\ \}_E)$与$(D^*, \{\ ,\ \}_{D^*})$ 之间的近泊松同构。

此外，可以证明 Eden括号就是非完整括号。

命题 1。我们有

– $\mathcal{P}(Z) = T\gamma(Z)$ 对每个 $Z \in T^D M$ 均成立。–对于任意函数 $f \in C^\infty(M)$，有 $T\pi_Q(x)(X_{f\circ\gamma}) \in D_{\pi_Q(x)}$ 对每个$x \in M$均成立。因此， $X_{f\circ\gamma}(x) \in (T^D M)_x, \forall x \in M$。

定理 2. 恒等映射

$$\mathrm{id} : (M, \{\ ,\ \}_{nh}) \longrightarrow (M, \{\ ,\ \}_E)$$

是一个近泊松同构。

参考文献

1 115 2 32 1992 99 . L. Bates，J. Sniatycki：非完整约化。Rep. Math. Phys.（），-。F. Cantrijn，M. de León，D. Martín de Diego：非完整力学中的近泊松结构。Nonlinearity 12，第 3 期，（1999年），721–737。3. F. Cantrijn，M. de León，J. C. Marrero，D. Martín de Diego：非完整力学中的近泊松结构 II。时变框架。Nonlinearity 13，第 4 期，（2000年），1379–1409。4. M. de León，D. Martín de Diego：关于非完整拉格朗日系统的几何。J. Math. Phys. 37 3414 5 7，1996 3389 no.（），–。M. de León，J. C. Marrero，D. Martín de Diego：线性近泊松结构与哈密顿-雅可比方程。非完整力学中的应用。J. Geom. Mech. 2，第 2 期，（2010年），159–198。6. M. de León，P. R. Rodrigues：分析力学中的微分几何方法。North-Holland Mathematics Studies，158。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，

1989 +483 0 444 88017 8 。x 页。ISBN：---。R. J. 7

Eden：非完整系统的哈密顿动力学。Proc. Roy. Soc. London Ser. A 205（1951年），564–583。8. R. J. Eden：非完整系统的量子力学。Proc. Roy. Soc. London Ser. A 205（1951年），583–595。9. J. Grabowski，M. de León，J. C. Marrero，D. Martín de Diego：非完整约束：一种新视角。J. Math. Phys. 50，第 1 期（2009年），013520，17 页。10. A. Ibort，M. de Leon，J. C. Marrero，D. Martín de Diego：受约束动力学中的狄拉克括号。Fortschr. Phys. 47，第 5 期，（1999年），459–492。11. A. J. van der Schaft，B. M. Maschke：非完整机械系统的哈密顿表述。Rep. Math. Phys. 34（1994年），225-33