arXiv:2303.03016v1 [math.PR] 6 Mar 2023

大 X 时严格稳定律的概率密度计算

V. V. Saenko[1]

本文致力于计算严格稳定律在 $x \to \infty$ 处的概率密度这一问题。为解决该问题，提出使用概率密度的幂级数展开。获得了概率密度的幂级数表示以及余项的估计值。在 $0 < \alpha < 1$ 的情况下，该幂级数收敛；在 $x \to \infty$ 的情况下，当 $1 < \alpha < 2$ 时，该幂级数是渐近的。另行考虑了 $\alpha = 1$ 的情况。研究表明，在 $\alpha = 1$ 的情况下，对于任意 $|x| > 1$，当 $N \to \infty$ 时，所得幂级数均收敛。还表明，在这种情况下，该级数收敛于 $g(x, 1, \theta)$ 的密度。获得了阈值坐标 x_ε^N 的估计值，该坐标确定了所得概率密度幂级数展开的适用范围。研究表明，在定义域 $|x| \geqslant x_\varepsilon^N$ 内，可以使用该幂级数计算概率密度。

1. 引言

概率密度和分布函数是任何概率分布的重要特征。能够计算这些量，就有机会解决广泛的概率与统计问题，从计算某个随机变量取特定值的概率，到根据实验数据估计分布参数。除了少数情况外，这些特征都没有显式表达式，因此稳定律类的使用并不方便。唯一的例外是以下五种情形，此时稳定分布的密度可用初等函数表示：莱维分布（$\alpha = 1/2, \theta = 1$）、对称莱维分布（$\alpha = 1/2, \theta = -1$）、柯西分布（$\alpha = 1, \theta = 0$）、高斯分布（$\alpha = 2, \theta = 0$）和广义柯西分布（$\alpha = 1, -1 \leqslant \theta \leqslant 1$）。V.M. Zolotarev 在专著中首次写出了最后一种分布（见 [1] §2.3 公式 (2.3.5a)），之后又在文献 [2, 3] 中对其进行了研究。这里，α 是稳定分布的特征参数（$0 < \alpha \leqslant 2$），θ 是非对称参数（$-1 \leqslant \theta \leqslant 1$）。对于参数 α 和 θ 的其他取值，则需要采用不同的稳定律概率密度表示形式。

计算概率密度最常用的方法是利用积分表示。对稳定分布的特征函数进行傅里叶逆变换，可以得到两类积分表示。第一类积分表示通过振荡函数的反常积分来表示概率密度。第二类积分表示则通过单调函数的定积分来表示概率密度。第二种傅里叶逆变换方法称为驻相法。这两类积分表示各有优缺点。

与第一类相关的积分表示已在文献 [4, 5], 中针对参数化“M”下的特征函数进行了推导和研究。下文中，稳定分布特征函数各种参数化的记号均采用 V.M. Zolotarev 的著作 [1]中引入的记号。使用这种表示的主要困难在于被积函数具有振荡性。这种函数行为会给数值积分算法带来计算困难。文献 [4]指出，使用这种表示时存在以下限制：

[1]乌里扬诺夫斯克国立大学，S.P. 卡皮察技术研究所，乌里扬诺夫斯克，列夫·托尔斯泰街42号，432017，电子邮箱：vvsaenko@inbox.ru

1）在 $\alpha < 0.75$ 的情况下，积分域会变得非常大，从而给数值积分带来困难；2）如果 $\beta \neq 0$ и $0 < |\alpha - 1| < 0.001$，则计算含有 $(\tan(\pi\alpha/2)(t - t^{\alpha})$ 的项时会遇到问题；3）当 x 非常大时，被积函数会快速振荡。为消除这些困难，文献 [5] 对标准数值积分求积法进行了改进，使其适用于振荡函数的积分计算。这样一来，参数 α 的下限便可从 0.75 降至 0.5。为了计算较大x 时的概率密度，文献 [5] 建议使用相应的概率密度幂级数表示。这种方法能够彻底解决较大 x 时的密度计算问题。当 $x \to \zeta$ 取值为 $\alpha > 0.5$ 时，被积函数表现良好，因此积分计算不存在问题。然而，文章指出，所提出的方案不适用于 $\alpha < 0.5$ 情况下的对称分布，也不适用于 $\alpha < 0.5$ 和 $0.9 < \alpha < 1.1$情况下的非非对称分布。

第二类稳定律概率密度的积分表示得到了广泛应用。这些积分表示将密度表示为单调函数的定积分。事实证明，被积函数的这种性质在实际应用中更为便利。首次提出这类积分表示的是文章 [6]。该文通过定积分给出了特征函数采用«B»参数化时稳定分布的概率密度。此后，该文的结果被收录于专著 [1]（见§2.2）和 [7]（见§4.4、§4.5）中。对于参数化“M”，类似的表示见文章 [8, 9], ；对于«C»参数化，则见 [3]。由于这些表示中的被积函数均为单调函数，因此在很宽的坐标范围内计算这些积分都不存在问题。因此，这些积分表示被广泛用于计算稳定律的概率密度和分布函数。其中，参数化“M”的积分表示尤其受欢迎。基于这一思路，已有若干软件产品问世 [10–14]。

在坐标 x 的较大取值范围内，使用这些积分表示计算密度不存在问题。然而，坐标 x 存在一些定义域，在这些定义域内，数值积分算法无法计算这些积分。文章 [5, 8, 11, 15] 指出了这一点。造成这些困难的原因在于被积函数的行为。当 x 的取值极小或极大时，被积函数会呈现非常狭窄的峰值。因此，数值积分算法无法识别该峰值，并开始产生错误结果。文章 [8, 11, 12] 提出了多种数值算法来解决这一问题。然而，所有这些算法都能提高计算精度，却无法彻底消除问题。为了解决 x 取值极小或极大时的概率密度计算问题，宜采用在这些区域内不存在奇异性的密度表示。概率密度的幂级数表示是最适合这一目的的方案。

这些表示是通过在点 $x = 0$ 和 $x = \infty$附近将概率密度展开为幂级数得到的。这类表示早已广为人知。最早获得此类展开的论文之一是文献 [16]。该文在 $x \to \infty$ 和 $0 < \alpha < 1$的情况下，得到了概率密度的收敛级数展开。在文章 [17] 中，将这一展开推广到了 $x \to \infty$，适用于 $1 < \alpha < 2$的情况。当参数 α 取这一范围内的值时，该级数是渐近的。同一篇文章还针对 $0 < \alpha < 2$的情况，得到了密度在点 $x \to 0$ 附近的级数展开。当 $0 < \alpha < 1$时，所得幂级数是渐近的；当 $1 < \alpha < 2$时，则是收敛的。文献 [18] 还通过将概率密度展开为以 Fox函数表示的幂级数，得到了 $\alpha > 1$ 在 $x \to 0$ 和 $x \to \infty$ 情况下的展开。所有这些展开均可见于书籍 [19]（见第17章第7节）、[1]（见第2.4节和第2.5节）以及 [7]（见第4.4节和第4.5节）。需要指出的是，以上所有结果均针对特征函数采用«B»参数化的稳定律。对于«M»参数化，文章 [5]给出了幂级数展开。对于«C»参数化，相关展开见文献 [20, 21]。一个特征

这些展开的共同特征是，幂级数会根据指数 α 的取值而收敛或呈渐近性质。需要指出的是，存在一种方法，可以对参数 α的所有允许值构造收敛幂级数形式的表示。该方法见文章 [22] ，并采用跨稳定律。本文运用这一方法，针对 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 < \alpha < 2$的情况，得到了对称稳定律在 $x \to 0$ 和 $x \to \infty$ 处的概率密度幂级数展开。同时需要指出，这些级数都是收敛的。

本文讨论了在具有如下特征函数的情况下，严格稳定律的概率密度计算问题

$$\hat{g}(t, \alpha, \theta, \lambda) = \exp\left\{-\lambda|t|^{\alpha} \exp\{-i\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta \operatorname{sign} t\}\right\}, \quad t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

即 $x \to \infty$。这里， $\alpha \in (0, 2]$, $|\theta| \leqslant \min(1, 2/\alpha - 1)$， $\lambda > 0$。该特征函数对应于«C»参数化。在文章 [3] 中，利用驻相法对该特征函数进行了傅里叶逆变换，并得到了概率密度和分布函数的积分表示（见附录 A）。如我们所见，公式（60）将概率密度表示为定积分。此外，被积函数是单调函数，并且在 x的大范围取值内表现良好。因此，在 x的相当宽的取值范围内，该积分的数值计算不存在困难。然而，当 x 取值非常小或非常大时，（60）中的被积函数呈现出非常窄的峰。结果，数值积分算法无法识别该峰，从而产生错误的积分结果。本文将讨论 $x \to \infty$处概率密度的计算问题。为解决这一问题，将得到 $x \to \infty$ 处概率密度的级数展开，并考察该级数的适用范围。需要指出的是，本文不讨论 $x \to 0$ 情况下概率密度的计算问题，因为该问题已在此前的文章 [21]中讨论过。

2. 概率密度的幂级数表示

我们将着手研究在 $x \to \infty$ 的情况下，将概率密度展开为幂级数。在引言中曾指出，具有 «B» 参数化 [1, 16–19] 和 «M» 参数化 [5] 特征函数的稳定分布，其类似展开早已得到，且广为人知。根据特征指数 α 的取值，这些幂级数可能收敛，也可能是渐近级数。在此处所考虑的情形（$x \to \infty$）中，当取值为 $0 < \alpha < 1$ 时，概率密度的幂级数表示在 $N \to \infty$ 处收敛；而取值为 $1 < \alpha < 2$ 时，则在 $x \to \infty$ 处渐近。鉴于此，推导这些展开时，分别考虑 $\alpha < 1$ 和 $\alpha > 1$ 的情形。此外，现有关于在 $x \to \infty$ 时将稳定分布的密度展开为幂级数的论证存在一些缺陷，若不予以纠正，就无法给出严谨的证明。因此，我们推导 $x \to \infty$ 情形下的概率密度展开，同时纠正证明中的一些缺陷。首先，我们将考虑特征指标 α 的整个取值范围。这样便可表明，所得展开对所有允许的 α 均成立。随后将证明，该展开在 $0 < \alpha < 1$ 时收敛，在 $1 < \alpha < 2$ 时渐近。

不失一般性，以下我们始终假设 $\lambda = 1$。参数为 $\lambda = 1$ 的严格稳定律通常称为标准严格稳定律。对于这些稳定律，人们通常采用简写。特征函数通常记为 $\hat{g}(t, \alpha, \theta, 1) \equiv \hat{g}(t, \alpha, \theta)$，概率密度记为 $g(x, \alpha, \theta, 1) \equiv g(x, \alpha, \theta)$，严格稳定随机变量记为 $Y(\alpha, \theta, 1) \equiv Y(\alpha, \theta)$。此外，我们将用这些记号表示标准严格稳定量。需要注意的是，要将标准严格稳定律转换为参数任意的严格稳定律，可以使用文章 [3] 的结果（另见 [1, 7]）。

为了得到展开，我们使用特征函数的反演公式，然后将被积函数展开为幂级数。这样便可以计算积分，并得到概率密度的幂级数展开。反演特征函数时，我们使用引理3（见附录A）。该引理给出了两个特征函数反演公式。原则上，使用这两个公式中的哪一个并无太大区别，结果只会因参数 θ 的符号而异。本文将使用第一个公式（59）。因此，

$$g(x,\alpha,\theta)=\frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{itx}\hat{g}(t,\alpha,-\theta).$$

我们还利用反演性质，该性质可针对具有特征函数 (1) 的稳定分布表述为

性质1。 对于任意可容许的参数 (α,θ)

$$Y(\alpha,-\theta)\stackrel{d}{=}-Y(\alpha,\theta).$$

该性质的证明见文章 [3] （另见 [1,7]）。用特征函数 $\hat{g}(t,\alpha,\theta)$ 和概率密度 $g(x,\alpha,\theta)$ 表示时，该性质的形式为

$$\hat{g}(-t,\alpha,\theta)=\hat{g}(t,\alpha,-\theta),\quad g(-x,\alpha,\theta)=g(x,\alpha,-\theta). \tag{2}$$

这一性质的便利之处在于，研究概率密度时，我们只需考虑 $x\geqslant 0$ 的情形。 $x<0$ 的情形可利用上述表达式得到。

接下来，我们需要将函数 (1) 解析延拓到复平面 $z=te^{i\varphi}$。在书籍 [1] （见§ 2.2）中已证明，这种解析延拓可以在半直线 $t>0$ （或半直线 $t<0$）上进行，并沿连接点 0 和 ∞ 的某条围道作割线。我们在半直线 $t>0$ 上进行解析延拓，并沿实半直线的负部 $\arg z=\pi$ 作割线。将这样得到的解析延拓记为

$$g^+(z,\alpha,\theta)=\exp\left\{-z^\alpha\exp\left\{-\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right\}\right\}.$$

我们将从考察积分开始研究

$$I(\Gamma)=\frac{1}{x\pi}\int_\Gamma e^{i\zeta}g^+(\zeta/x,\alpha,-\theta)d\zeta \tag{3}$$

以下引理适用于此积分

引理1。 对于参数的任意允许值 α 和 θ，以及在 $x\to\infty$情况下的任意正 $\epsilon\to 0$，若满足以下条件：

1. $0<\alpha<1$ 和 $-1\leqslant\theta\leqslant 1$ 围道 Γ_R 具有形式 $\Gamma_R=\{\zeta:\quad \tau=R,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi-\epsilon\}$，其中$R\to\infty$ 使得 $R/x\to\infty$;
2. $\alpha=1$ 和 $-1<\theta<1$，围道 Γ_R 具有形式 $\Gamma_R=\{\zeta:\quad \tau=R,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi-\epsilon\}$，其中$R\to\infty$ 使得 $R/x\to\infty$;
3. $1<\alpha\leqslant 2$，围道 Γ_R 具有形式 $\Gamma_R=\left\{\zeta:\quad \tau=R,\quad -\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi}{2}\theta+\epsilon\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi}{2}\theta\right\}$，其中 $R\to\infty$ 使得 $R/x\to\infty$;
4. $0<\alpha\leqslant 2$，围道 Γ_R 的形式为 $\Gamma_R=\{\zeta:\quad \tau=R,\quad 0+\epsilon\leqslant\varphi\leqslant\pi-\epsilon\}$，其中 $R\to\infty$ 使得 $R/x\approx 1$;

5. $0 < \alpha \leqslant 2$, 围道 Γ_R 的形式为 $\Gamma_R = \{\zeta : \quad \tau = R, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$, 其中 $R \to \infty$ 使得 $R/x \to 0$;

6. $0 < \alpha \leqslant 2$, 围道 Γ_R 具有如下形式 $\Gamma_R = \{\zeta : \quad \tau = R, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$, 其中 $R \to 0$,

then

$$I(\Gamma_R) = \frac{1}{\pi x} \int_{\Gamma_R} e^{i\zeta} g^+(\zeta/x, \alpha, -\theta) d\zeta \to 0.$$

这里 $\zeta = \tau e^{i\varphi}$,

证明 我们将考察积分（3），并在复平面中取 $\zeta = \tau e^{i\varphi}$。作为积分路径，我们将选取半径为 R 的圆弧

$$\Gamma_R = \{\zeta : \ \tau = R, \ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}.$$

对于任意围道 Γ_R，不等式均成立

$$I(\Gamma_R) \leqslant |I(\Gamma_R)| \leqslant \frac{1}{\pi x} \int_{\Gamma_R} |e^{i\zeta} g^+(\zeta/x, \alpha, -\theta) d\zeta|.$$

假设 $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, 可得

$$\begin{aligned} I(\Gamma_R) &\leqslant \frac{1}{\pi x} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left| e^{iR\exp\{i\varphi\}} g^+ \left(\frac{R}{x} e^{i\varphi}, \alpha, -\theta \right) iRe^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &= \frac{1}{\pi x} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left| R \exp\left\{ iRe^{i\varphi} - (R/x)^\alpha \exp\left\{ i\alpha(\varphi + \tfrac{\pi}{2}\theta) \right\} + i\varphi \right\} \right| d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) d\varphi, \quad (4) \end{aligned}$$

在这里引入了这一记号

$$V(\varphi, r, \xi, \alpha, \theta) = \frac{r}{\pi \xi} \exp\left\{ -r\sin\varphi - (r/\xi)^\alpha \cos\left(\alpha \left(\varphi + \tfrac{\pi}{2}\theta \right) \right) \right\}. \quad (5)$$

我们的目标是确定对围道 Γ_R 以及参数 α、θ的取值所施加的条件，使得极限 $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} I(\Gamma_R) = 0$ 和 $\lim\limits_{\substack{R\to 0 \\ x\to\infty}} I(\Gamma_R) = 0$存在。由于 R 和 x同时趋于无穷，且半径 R 的选取具有任意性，因此可以出现三种情况：1） $R \to \infty$、$x \to \infty$，使得 $R/x \to \infty$；2） $R \to \infty$、$x \to \infty$，使得 $R/x \approx 1$；3） $R \to \infty$、$x \to \infty$，使得 $R/x \to 0$。我们将分别考察这些情况。为此，我们将在（4）中令 $R \to \infty$、$x \to \infty$趋于极限。由此得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} \leqslant \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} |I_{\Gamma_R}| \leqslant \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) d\varphi, \quad (6)$$

此外，在上述三种情形中的每一种情形下，都必须分别考察$0 < \alpha \leqslant 1$ 和 $1 < \alpha \leqslant 2$的情况。我们将从第一种情况开始考察。

情况 $R \to \infty, \quad x \to \infty, \quad R/x \to \infty$。我们先考虑 $0 < \alpha \leqslant 1$ 的情况。由 (6) 可知，该极限的值由函数 $V(\varphi, R, x, \alpha, \theta)$ 在 $R \to \infty$且 $x \to \infty$的情况下的极限决定。考虑到 $\alpha \leqslant 1$，我们得到

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) &= \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{ -R\left(\sin\varphi + \frac{R^{\alpha-1}}{x^\alpha} \cos\left(\alpha \left(\varphi + \tfrac{\pi}{\theta} \right) \right) \right) \right\} \\ &= \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} e^{-R\sin\varphi} = 0, \quad \text{if} \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (7) \end{aligned}$$

这里采用了一个推测，即在 $\alpha = 1$ $R^0 = 1$的情况下。该极限还给出了 (6) 中积分限 φ_1 和 φ_2 的值。由 (7) 可知， $\varphi_1 \to 0$，a $\varphi_2 \to \pi$。这意味着积分限 φ_1 和 φ_2 无限趋近于 0 和 π，但不会取到这些值。要确定这些积分限能否取到 0 和 π，需要计算 (6) 在这些点处的极限。

我们来研究这个问题，并考察函数 $V(\varphi, R, x, \alpha, \theta)$ 在点 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$ 处的行为。在第一种情况下，我们有

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(0, R, x, \alpha, \theta) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-(R/x)^\alpha \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right)\right\}$$

考虑到所讨论的情形为 $\alpha \leqslant 1$，并结合参数变化域 θ，得到 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$。因此，在 $\alpha < 1$ 且 $\theta \in [-1, 1]$ 的情况下，$\cos(\pi\alpha\theta/2) > 0$；或者在 $\alpha = 1$ 且 $\theta \neq \pm 1$ 的情况下也是如此。现在将这一结果代入该公式，得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(0, R, x, \alpha, \theta) = 0 \quad \text{if} \quad \alpha < 1 \quad \text{and} \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \text{or} \quad \alpha = 1 \quad \text{and} \quad -1 < \theta < 1 \tag{8}$$

对于情形 $\varphi = \pi$，我们有

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(\pi, R, x, \alpha, \theta) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-(R/x)^\alpha \cos\left(\alpha(\pi + \tfrac{\pi}{2}\theta)\right)\right\}.$$

要使此极限等于零，必须有 $\cos\left(\alpha(\pi + \frac{\pi}{2}\theta)\right) > 0$。由此得到 $-1/\alpha - 2 < \theta < 1/\alpha - 2$。考虑到 $\alpha \leqslant 1$ 且 $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$，显然所得不等式对任何允许的 θ 都不成立。因此，应将情形 $\varphi = \pi$ 排除在考虑范围之外。

我们将回到 积分 I_{Γ_R}。在积分（6）中使用表达式（7）和（8），我们得到 n

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} = 0, \quad \text{if} \quad 0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi - \epsilon, \tag{9}$$

其中，ϵ 是任意正数，例如 $\epsilon \to 0$。该结果在 $0 < \alpha < 1$ 且 $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$，或 $\alpha = 1$ 且 $-1 < \theta < 1$ 的情况下成立。

现在考虑 $1 < \alpha \leqslant 2$ 的情况。当参数 α 取这些值时，非对称参数在极限 $-(\frac{2}{\alpha} - 1)$ 和 $\leqslant \theta \leqslant (\frac{2}{\alpha} - 1)$ 之间变化。我们有

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-R\sin\varphi - (R/x)^\alpha \cos\left(\alpha\left(\varphi + \tfrac{\pi}{2}\theta\right)\right)\right\}$$

由于 $\alpha > 1$，我们得到 $(R/x)^\alpha$ 在 $R \to \infty$ 时比 R 增长得更快。因此，可以忽略加项 $R\sin\varphi$。结果为

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-(R/x)^\alpha \cos\left(\alpha\left(\varphi + \tfrac{\pi}{2}\theta\right)\right)\right\}.$$

当 $\cos\left(\alpha\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\theta\right)\right) > 0$ 或 $-\frac{\pi}{2} < \alpha\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\theta\right) < \frac{\pi}{2}$ 时，该极限将等于零。由此我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) = 0, \quad \text{if} \quad -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta < \varphi < \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta. \tag{10}$$

我们考察该区间的极端点，即 $\varphi = -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta$ 和 $\varphi = \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta$。容易看出，在这些点上 $\cos\left(\alpha\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\theta\right)\right) = 0$。在 $\varphi = \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta$ 的情况下，我们有

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta, R, x, \alpha, \theta\right) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-R\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta\right)\right\} \tag{11}$$

现在我们将考察正弦自变量的允许值定义域。将 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$ 交替代入表达式 $\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta$，可得

$$\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\theta, \quad \text{if } \alpha = 1, \qquad \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\theta, \quad \text{if } \alpha = 2.$$

考虑到 $-(\frac{2}{\alpha} - 1) \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{\alpha} - 1$，我们得到：在 $\alpha = 1$ 的情况下，参数 θ 取值于范围 $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$；而在 $\alpha = 2$ 的情况下，非对称参数只有一个可能值 $\theta = 0$。因此，

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\theta = \begin{cases} \pi, & \text{if } \alpha = 1,\ \theta = -1, \\ 0, & \text{if } \alpha = 1,\ \theta = 1, \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\theta = \frac{\pi}{4},\ \text{if } \alpha = 2.$$

因此，对于参数 $\alpha\ \theta$ $1 < \alpha \leqslant 2$ $-\frac{2}{\alpha} - 1 \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{\alpha} - 1$ 11 $0 < \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta < \pi$ 的所有其他取值（位于范围 和（）内），表达式（）中的正弦自变量取值于范围 。由此可得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta\right) > 0, \quad \text{if} \quad 1 < \alpha \leqslant 2 \quad \text{and} \quad -\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{\alpha} - 1.$$

现在将这一结果代入（11），得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta, R, x, \alpha, \theta\right) = 0, \quad 1 < \alpha \leqslant 2 \quad \text{and} \quad -\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{\alpha} - 1. \tag{12}$$

应当指出，$\alpha = 1$ 的情况不包含在该结果中，因为它已在前一种情况下进行了考察。

现在考虑 $\varphi = -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta$ 的情况。我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta, R, x, \alpha, \theta\right) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{R \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2}\theta\right)\right\} \tag{13}$$

考虑到 $1 < \alpha \leqslant 2$ 以及 $-(2/\alpha - 1) \leqslant \theta \leqslant 2/\alpha - 1$，我们得到该表达式中的正弦自变量取值范围为 $0 < \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2}\theta < \pi$。因此，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2}\theta\right) > 0 \quad \text{if} \quad 1 < \alpha \leqslant 2 \quad \text{and} \quad -\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{\alpha} - 1.$$

现在将这一结果代入（13），我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta, R, x, \alpha, \theta\right) = \infty, \quad \text{if} \quad 1 < \alpha \leqslant 2 \quad \text{and} \quad -\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{\alpha} - 1. \tag{14}$$

因此，有必要排除这种情况。

现在结合（10）和（12），并考虑到（14），我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) = 0, \quad \text{if} \quad -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta.$$

No我们回到积分 I_{Γ_R}。将前面的表达式代入式 (6)，得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} = 0, \quad \text{if} \quad -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta + \epsilon \leqslant \varphi_0 \leqslant \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta, \quad R/x \to \infty, \quad 1 < \alpha \leqslant 2, \tag{15}$$

其中， ϵ 是任意正实数，且满足 $\epsilon \to 0$。

现在结合表达式 (9) 和 (15)，可得在 $R \to \infty$ 和 $x \to \infty$ 且极限关系为 $R/x \to \infty$ 的情况下，得到以下结果

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} = 0, \quad \text{if} \quad \begin{cases} 0 < \alpha < 1, -1 \leqslant \theta \leqslant 1, & 0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi - \epsilon \\ \alpha = 1, -1 < \theta < 1, & 0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi - \epsilon, \\ 1 < \alpha \leqslant 2, |\theta| \leqslant 2/\alpha - 1, & -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta + \epsilon \leqslant \varphi_0 \leqslant \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta. \end{cases}$$

至此，引理的第一、第二和第三项均已证明。

情形 $R \to \infty, \quad x \to \infty, \quad R/x \approx 1$。我们考察在 R和 x 趋于无穷而它们的关系满足 $R/x \approx 1$时，(6) 的极限过程。我们仍然关心使 (6) 中的积分等于零的条件。该积分的行为由被积函数 $V(\varphi, R, x, \alpha, \theta)$ 的行为决定。由于在所考虑的情形下关系 $R/x \approx 1$ 成立，因此由 (5) 可知，在指数中，与乘数 R/x 相乘的加项相较于含有乘数 R 的加项可以忽略。于是得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-R\sin\varphi - (R/x)^\alpha \cos\left(\alpha\left(\varphi + \tfrac{\pi}{2}\theta\right)\right)\right\}$$
$$= \lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-R\sin\varphi\right\} = 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \alpha \leqslant 2. \quad (16)$$

容易看出，在 $\varphi = 0$和 $\varphi = \pi$的情况下，极限 $\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) \neq 0$。因此，应将这两项排除在考虑范围之外。现在将（16）代入（6），显然，在所考虑的情况下，当 $R \to \infty$ 和 $x \to \infty$ 但 $R/x \approx 1$

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} = 0, \quad 0 + \epsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \epsilon, \quad 0 < \alpha \leqslant 2,$$

其中 ϵ 是任意正实数，且满足 $\epsilon \to 0$。这个表达式证明了引理的第4项。

情形 $R \to \infty, x \to \infty, R/x \to 0$。现在考虑积分（6）中 R 和 x 趋于无穷大，但它们的关系 R/x 趋于零的情形。与前几种情形一样，积分（6）的行为将由被积函数 $V(\varphi, R, x, \alpha, \theta)$ 的行为决定。考虑到 $R/x \to 0$，则在（5）的指数中，可以忽略含乘数 (R/x) 的加项，相较于含乘数 R 的加项。因此，我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-R\sin\varphi\right\} = 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \alpha \leqslant 2. \quad (17)$$

我们将考察变量 φ 所得取值范围的极端点，即 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$。考虑到 $R/x \to 0$，在 $\varphi = 0$ 的情况下，我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} V(0, R, x, \alpha, \theta) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} \frac{R}{\pi x} \exp\left\{-(R/x)^\alpha \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right)\right\} = 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 2. \quad (18)$$

同理，在 $\varphi = \pi$ 的情况下，我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} V(\pi, R, x, \alpha, \theta) = 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 2. \quad (19)$$

现在将表达式 (17)、(18)、(19) 代入 (6)，得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 < \alpha \leqslant 2, \quad R/x \to 0.$$

由此，引理的第五项得证。

情形 $R \to 0,\quad x \to \infty$。剩下需要考虑的是 $R \to 0$ 和 $x \to \infty$ 的情形。对 (4) 求极限，得到

$$\lim_{\substack{R\to 0\\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} \leqslant \lim_{\substack{R\to 0\\ x\to\infty}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta)d\varphi. \tag{20}$$

与其他情形一样，这个极限由极限 $\lim\limits_{\substack{R\to 0\\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta)$ 确定。现在在此处利用表达式 (5)，容易看出

$$\lim_{\substack{R\to 0\\ x\to\infty}} V(\varphi, R, x, \alpha, \theta) = 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 2, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

现在回到 (20)，得到 $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = \pi$ 和

$$\lim_{\substack{R\to 0\\ x\to\infty}} I_{\Gamma_R} = 0, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 < \alpha \leqslant 2.$$

所得表达式完全证明了该引理。

□

引理2. 我们考虑复平面 $\zeta = \tau e^{i\varphi}$ 中的围道 Γ_2，它是从点 $\zeta = 0$ 出发并延伸至无穷远的射线。于是，若沿围道 Γ_2 从点 $\zeta = 0$ 出发，以满足 $x \to \infty$ 时满足一个条件的方式趋向无穷远

1. $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \epsilon, \quad \frac{\tau}{x} \to \infty, \quad 0 < \alpha < 1, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1;$
2. $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \epsilon, \quad \frac{\tau}{x} \to \infty, \quad \alpha = 1, \quad -1 < \theta < 1;$
3. $-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta + \epsilon \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\theta, \quad \frac{\tau}{x} \to \infty, \quad 1 < \alpha \leqslant 2;$
4. $0 + \epsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \epsilon, \quad \frac{\tau}{x} \approx 1, \quad 0 < \alpha \leqslant 2;$
5. $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad \frac{\tau}{x} \to 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 2,$

于是等式得以成立

$$\frac{1}{\pi x}\int_0^\infty \exp\left\{i\tau - \left(\frac{\tau}{x}\right)^\alpha \exp\left\{i\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right\}\right\} d\tau$$
$$= \frac{1}{\pi x}\int_0^\infty \exp\left\{i\tau e^{i\varphi} - \left(\frac{\tau}{x}\right)^\alpha \exp\left\{i\alpha(\varphi + \tfrac{\pi}{2}\theta)\right\} + i\varphi\right\} d\tau. \tag{21}$$

这里，ϵ 是任意的正数，使得 $\epsilon \to 0$。

证明 我们来考察积分 (3)，并在复平面 $\zeta = \tau e^{i\varphi}$ 中选取辅助围道 Γ，其定义如下（见图1）

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma_1 = \{\zeta : \varepsilon \leqslant \tau \leqslant R, \varphi = 0\}, \\ \Gamma_R = \{\zeta : \tau = R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0\}, \\ \Gamma_2 = \{\zeta : R \geqslant \tau \geqslant \varepsilon, \varphi = \varphi_0\}, \\ \Gamma_\varepsilon = \{\zeta : \tau = \varepsilon, \varphi_0 \geqslant \varphi \geqslant 0\}, \end{cases}$$

其中，$\varepsilon > 0$ 和 $R > 0$ 为任意实数，且满足 $\varepsilon < R$。围道沿正向遍历。因此，积分 $I(\Gamma)$可写为如下形式

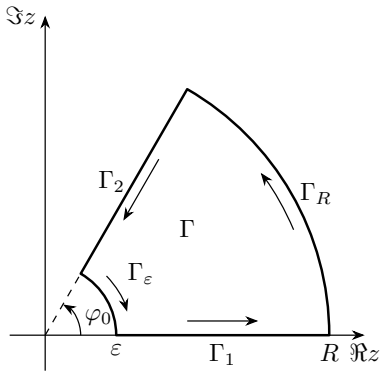


图1. 积分路径 Γ

$$I(\Gamma)=\frac{1}{x\pi}\int_{\Gamma_1}e^{i\zeta}g^+(\zeta/x,\alpha,-\theta)d\zeta+\frac{1}{x\pi}\int_{\Gamma_R}e^{i\zeta}g^+(\zeta/x,\alpha,-\theta)d\zeta$$
$$+\frac{1}{x\pi}\int_{\Gamma_2}e^{i\zeta}g^+(\zeta/x,\alpha,-\theta)d\zeta+\frac{1}{x\pi}\int_{\Gamma_\varepsilon}e^{i\zeta}g^+(\zeta/x,\alpha,-\theta)d\zeta=I(\Gamma_1)+I(\Gamma_R)+I(\Gamma_2)+I(\Gamma_\varepsilon).$$

Now 在该表达式中，我们令 R 趋于无穷大，并令 ε趋于零。因此，得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma)=\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma_1)+\lim_{\substack{R\to\infty\\x\to\infty}}I(\Gamma_R)+\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma_2)+\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma_\varepsilon).\tag{22}$$

我们假设，对于这个积分，引理1的条件6以及同一引理的条件1-5之一均得到满足。那么，在所作假设的框架下，引理1给出

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma_\varepsilon)=0,\tag{23}$$

因为引理1的条件6得到满足，且

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\x\to\infty}}I(\Gamma_R)=0,\tag{24}$$

因为引理1的条件1-5之一得到满足。利用（3），并考虑到 $\zeta=\tau e^{i\varphi}$，对于积分$I(\Gamma_1)$，我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma_1)=\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}\frac{1}{\pi x}\int_\varepsilon^R\exp\left\{i\tau-(\tau/x)^\alpha\exp\left\{i\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right\}\right\}d\tau$$
$$=\frac{1}{\pi x}\int_0^\infty\exp\left\{i\tau-(\tau/x)^\alpha\exp\left\{i\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right\}\right\}d\tau.\tag{25}$$

对于积分 $I(\Gamma_2)$，我们得到

$$\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma_2)=\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}\frac{1}{\pi x}\int_R^\varepsilon\exp\left\{i\tau e^{i\varphi}-(\tau/x)^\alpha\exp\left\{i\alpha(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\theta)\right\}+i\varphi\right\}d\tau$$
$$=-\frac{1}{\pi x}\int_0^\infty\exp\left\{i\tau e^{i\varphi}-(\tau/x)^\alpha\exp\left\{i\alpha(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\theta)\right\}+i\varphi\right\}d\tau.\tag{26}$$

接下来，我们将考虑这样一个事实：积分（3）的被积函数在复平面 ζ 中是解析函数，而围道 Γ 是一条闭合曲线。因此，

$$\lim_{\substack{R\to\infty,\varepsilon\to0\\x\to\infty}}I(\Gamma)=0.$$

现在利用 该表达式以及（22）中的表达式（23）、（24）、（25）和（26），我们得 et

$$\frac{1}{\pi x}\int_0^\infty \exp\left\{i\tau - \left(\frac{\tau}{x}\right)^\alpha \exp\left\{i\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right\}\right\} d\tau = \frac{1}{\pi x}\int_0^\infty \exp\left\{i\tau e^{i\varphi} - \left(\frac{\tau}{x}\right)^\alpha \exp\left\{i\alpha(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\theta)\right\} + i\varphi\right\} d\tau.$$

同时，用于证明（24）的引理1的条件1—5转化为本引理的条件1—5。因此，引理得证。

□

如我们所见，已证明的引理使我们能够在积分 $\frac{1}{\pi x}\int_0^\infty e^{i\tau} g(\tau/x,\alpha,-\theta)d\tau$ 中替换积分路径，并将沿实轴正半轴的积分转变为沿从原点以角度 φ 离开的半直线进行的积分。事实证明，该引理在下一个定理中非常有用，下面我们将继续证明该定理。

定理1。在 $x \to \pm\infty$ 的情况下，对于任意可容许参数集（α， θ），除去 $\theta = \pm 1$ 这些值，对于概率密度 g（x， α， θ），以下幂级数形式的表示成立

$$g(x,\alpha,\theta) = g_N^\infty(|x|,\alpha,\theta^*) + R_N^\infty(|x|,\alpha,\theta^*), \tag{27}$$

其中 $\theta^* = \theta\text{sign}(x)$ 并且

$$g_N^\infty(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta)\right)x^{-\alpha n-1}, \quad x>0, \tag{28}$$

$$|R_N^\infty(x,\alpha,\theta)| \leqslant \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!}\left(\Gamma(\alpha N+1) + x^{-\alpha}\Gamma(\alpha(N+1)+1)\right), \quad x>0. \tag{29}$$

证明 不失一般性，假设 $x>0$。借助性质1和公式（2），可得到情形 $x<0$。我们将对特征函数（1）作傅里叶逆变换。为此，我们使用反演公式（59）中的第一个关系式。得到

$$\begin{aligned} g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{itx}\hat{g}(t,\alpha,-\theta)dt &= \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty \exp\left\{itx - t^\alpha\exp\left\{i\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right\}\right\}dt \\ &= \frac{1}{\pi x}\Re\int_0^\infty \exp\left\{i\tau - (\tau/x)^\alpha\exp\left\{i\tfrac{\pi}{2}\alpha\theta\right\}\right\}d\tau, \end{aligned} \tag{30}$$

其中，在最后一个等式中，替换了积分变量 $\tau = tx$。此外，我们假设$x \to \infty$。另外，我们假设 x 将以这样的方式趋于无穷大：在最后一个积分中，当$\tau \to \infty$ 时，关系式 $\tau/x \to 0$成立。若满足这些条件，则引理2第5项的条件也得以满足。因此，前一个表达式中的最后一个积分可利用公式（21）进行变换。结果得到

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi x}\Re\int_0^\infty \exp\left\{i\tau e^{i\varphi} - \left(\tfrac{\tau}{x}\right)^\alpha\exp\left\{i\alpha\left(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\theta\right)\right\} + i\varphi\right\}d\tau. \tag{31}$$

由引理2的第5项可知，在满足条件 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$、 $\tau/x \to 0$、$0<\alpha\leqslant 2$ 时，此公式成立。接下来，我们考虑到该表达式中的自变量 φ 可以取区间 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$中的任意值。我们将其选为

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\theta. \tag{32}$$

显然，对于任意 $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$，不等式 $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\theta \leqslant \pi$ 均成立。现在将表达式（32）代入公式（31），得到

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi x}\Re \int_0^\infty \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} - \left(\frac{\tau}{x}\right)^\alpha e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\theta\right)\right\} d\tau$$
$$= \frac{1}{\pi x}\Re i e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \int_0^\infty \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} - \left(\frac{i\tau}{x}\right)^\alpha\right\} d\tau.$$

考虑到 $x \to \infty$ 和 $\tau/x \to 0$，我们可以在点 $\tau/x = 0$ 附近将 $\exp\left\{-\left(\frac{i\tau}{x}\right)^\alpha\right\}$ 展开为泰勒级数。由此得到

$$g(x,\alpha,\theta) = g_N^\infty(x,\alpha,\theta) + R_N^\infty(x,\alpha,\theta), \quad x > 0, \tag{33}$$

其中，N 阶部分和 $g_N^\infty(x,\alpha,\theta)$ 以及级数余项 $R_N^\infty(x,\alpha,\theta)$ 的形式为

$$g_N^\infty(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi x}\Re i e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \int_0^\infty \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right\} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{i\tau}{x}\right)^{\alpha n} d\tau, \quad x > 0,$$
$$R_N^\infty(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi x}\Re i e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \int_0^\infty \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right\} R_N\left(-\left(\frac{i\tau}{x}\right)^\alpha\right) d\tau, \quad x > 0. \tag{34}$$

这里，$R_N(y) = \frac{y^N}{N!}\, e^{y\zeta}$，$(0 < \zeta < 1)$ 是拉格朗日形式的余项。

我们考虑 N 阶部分和 $g_N^\infty(x,\alpha,\theta)$。为了计算积分，我们将改变求和与积分的次序

$$g_N^\infty(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi x}\Re i e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha n} \int_0^\infty \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right\} \tau^{\alpha n} d\tau, \quad x > 0. \tag{35}$$

我们将考察自变量取值的范围 $-\frac{\pi}{2}\theta$。参数θ 的允许值范围由不等式 $|\theta| \leqslant \min(1, 2/\alpha - 1)$ 确定。这表明，如果 $\alpha \leqslant 1$，则 $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$；如果$1 < \alpha \leqslant 2$，则 $-(2/\alpha - 1) \leqslant \theta \leqslant 2/\alpha - 1$。因此，对于任意 $0 < \alpha \leqslant 2$，我们得到 $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{2}\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$。需要注意的是，该区间 $\pm\frac{\pi}{2}$ 的端点分别在 $\alpha \leqslant 1$ 和 $\theta = \mp 1$ 处取得。

为了计算式 (35) 中的积分，我们将使用 [23] 中给出的一个著名公式（见 §1.5，公式 (31)）

$$\int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct\cos\beta - ict\sin\beta} dt = \Gamma(\gamma) c^{-\gamma} e^{-i\gamma\beta}, \; -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}, \; \Re\gamma > 0 \text{ or } \beta = \pm\frac{\pi}{2}, \; 0 < \Re\gamma < 1.$$

如果使用欧拉公式 $\cos\beta + i\sin\beta = e^{i\beta}$，那么这个积分可以表示为

$$\int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct\exp\{i\beta\}} dt = \Gamma(\gamma) c^{-\gamma} e^{-i\gamma\beta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}, \; \Re\gamma > 0 \text{ or } \beta = \pm\frac{\pi}{2}, \; 0 < \Re\gamma < 1. \tag{36}$$

现在比较（36）中的积分与（35）中的积分，可以看出这两个积分除了情形 $-\frac{\pi}{2}\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 外完全相同。这两点不属于公式（36）中自变量 β 的允许值范围。因此，若排除这两个极端值，则计算（35）中的积分时可以利用（36）。排除点 $-\frac{\pi}{2}\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 后，我们得到

$$g_N^\infty(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi x}\Re i e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha n} \Gamma(\alpha n + 1) e^{i(\alpha n+1)\frac{\pi}{2}\theta}$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \Gamma(\alpha n + 1) \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta)\right) x^{-\alpha n - 1}, \quad x > 0, \tag{37}$$

这里已考虑到 $\Re i e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} e^{i(\alpha n+1)\frac{\pi}{2}\theta} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta)\right)$。现在考察余项 $R_N^\infty(x,\alpha,\theta)$。

由表达式（34）可得

$$R_N^\infty(x,\alpha,\theta) = \frac{(-1)^N}{\pi N!} x^{-\alpha N-1} \Re i^{\alpha N+1} e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \int_0^\infty \tau^{\alpha N} \exp\left\{-\tau\exp\left\{-i\tfrac{\pi}{2}\theta\right\} - \left(\tfrac{i\tau}{x}\right)^\alpha \zeta\right\} d\tau, \quad x > 0.$$

遗憾的是，无法计算该表达式中的积分，因为 ζ 的精确值未知。我们只知道 $0 < \zeta < 1$。不过，可以对该积分进行上估计。

考虑到我们研究的是 $x > 0$ 的情形，可得

$$R_N^\infty(x,\alpha,\theta) \leqslant |R_N^\infty(x,\alpha,\theta)| \leqslant \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left| \Re i^{\alpha N+1} e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \int_0^\infty \tau^{\alpha N} e^{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}} \exp\left\{-\left(\tfrac{i\tau}{x}\right)^\alpha \zeta\right\} d\tau \right| \tag{38}$$

我们考虑 $\tau/x \to 0$ 的情形。因此，可以将乘数 $\exp\left\{-\left(\frac{i\tau}{x}\right)^\alpha \zeta\right\}$ 展开为泰勒级数，并在所得展开中只保留一阶小量的加数。于是有

$$\exp\left\{-\left(\tfrac{i\tau}{x}\right)^\alpha \zeta\right\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \left(\left(\frac{i\tau}{x}\right)^\alpha \zeta\right)^k \approx 1 - \zeta\left(\frac{i\tau}{x}\right)^\alpha$$

我们还考虑到 $\left|i^{\alpha N+1} e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right| \leqslant 1$。因此，表达式（38）可写成

$$\begin{aligned}
|R_N^\infty(x,\alpha,\theta)| &\leqslant \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left| \Re \int_0^\infty \tau^{\alpha N} \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right\} \left(1 - \zeta\left(\frac{i\tau}{x}\right)^\alpha\right) d\tau \right| \\
&= \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left| \Re \left(\int_0^\infty \tau^{\alpha N} \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right\} d\tau - \zeta\left(\frac{i}{x}\right)^\alpha \int_0^\infty \tau^{\alpha(N+1)} \exp\left\{-\tau e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right\} d\tau \right) \right| \\
&= \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left| \Re \left(\Gamma(\alpha N+1) e^{i\frac{\pi}{2}\theta(\alpha N+1)} - \zeta x^{-\alpha} \Gamma(\alpha(N+1)+1) e^{i\frac{\pi}{2}\alpha + i\frac{\pi}{2}\theta(\alpha(N+1)+1)} \right) \right| \\
&\leqslant \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left(\Gamma(\alpha N+1) + \zeta x^{-\alpha} \Gamma(\alpha(N+1)+1) \right) \\
&\leqslant \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left(\Gamma(\alpha N+1) + x^{-\alpha} \Gamma(\alpha(N+1)+1) \right), \quad x > 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

这里在计算第二类积分时使用了公式（36）。在倒数第二个不等式的推导中，考虑到了 $i^\alpha = e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$，$\left|e^{i\frac{\pi}{2}\theta\ (\alpha N+1)}\right| \leqslant 1$ 以及 $\left|e^{i\frac{\pi}{2}\alpha + i\frac{\pi}{2}\theta\ (\alpha\ (N+1)\ +1)}\right| \leqslant 1$。在最后一个不等式中，假设 $\zeta = 1$。

因此，在 $x > 0$ 的情况下，表示式（33）适用于概率密度，其中 $g_N^\infty(x,\alpha,\theta)$ 由幂级数（37）确定，而估计值（39）适用于余项 $R_N^\infty(x,\alpha,\theta)$。为了得到 x 为负时的表达式，我们将利用概率密度的反演性质（2）。从该公式可见，借助非对称参数 θ 中的反演符号，$x < 0$ 的情况可归结为 $x > 0$ 的情况。由此可见，如果引入参数 $\theta^* = \theta \operatorname{sign} x$，并取坐标 x 的绝对值，就可以将 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况合并。由此，公式（33）化为（27），它对 x 为正和为负时均成立。所得表达式完全证明了该定理。

□

已证明的定理在 $x \to \pm\infty$ 情形下，给出了严格稳定律的概率密度的幂级数表示。不过，这取决于特征

指数 α，这个幂级数可能收敛，也可能是渐近级数。引言中已指出，概率密度的幂级数展开具有这一性质。我们将更详细地考察所得幂级数的收敛性问题，并将结果表述为刚刚证明的定理的一个推论。

推论 1. 在 $\alpha < 1$ 的情况下，级数 *(28)* 对所有 x均收敛。在这种情况下，对于所有满足条件 $-1 < \theta < 1$的 θ，概率密度 $g(x,\ \alpha,\ \theta)$ 可以表示为无穷级数展开

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta^*)\right)|x|^{-\alpha n-1}.$$

在 $\alpha = 1$ 的情况下，级数 *(28)* 对所有满足条件 $|x| > 1$的 x均收敛。在这种情况下，对于所有 $\theta \neq \pm 1$，概率密度 $g(x,\ 1,\ \theta)$ 可以表示为无穷级数

$$g(x,1,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}n(1+\theta^*)\right)|x|^{-n-1},\quad |x|>1 \tag{40}$$

在 $\alpha > 1$ 的情况下，级数 *(28)* 在 $N \to \infty$处收敛。在这种情况下，对于任意允许的 θ，概率密度$g(x,\ \alpha,\ \theta)$ 可以表示为渐近级数

$$g(x,\alpha,\theta) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta^*)\right)|x|^{-\alpha n-1},\quad x\to\pm\infty.$$

证明 与前一个定理一样，我们考虑 $x > 0$ 的情况，并考察级数 (28) 的收敛性。显然，该级数正负交替。因此，以下估计成立

$$\begin{aligned} g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta) \leqslant |g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Gamma(\alpha n+1)}{\Gamma(n+1)}\left|(-1)^{n+1}\sin(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta))\right|x^{-\alpha n-1} \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Gamma(\alpha n+1)}{\Gamma(n+1)}x^{-\alpha n-1},\quad x>0. \end{aligned}$$

我们将 使用极限形式的柯西判别法和斯特林公式

$$\Gamma(z) \sim e^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi},\quad z\to\infty,\quad |\arg z|<\pi. \tag{41}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\alpha n+1)}{\pi\Gamma(n+1)}x^{-\alpha n-1}\right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{x^{-\alpha-\frac{1}{n}}}{\pi^{1/n}}\left(\frac{\exp\{-\alpha n-1\}(\alpha n+1)^{\alpha n+1-1/2}\sqrt{2\pi}}{\exp\{-n-1\}(n+1)^{n+1-1/2}\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x^{-\alpha-\frac{1}{n}}}{\pi^{\frac{1}{n}}}\frac{e^{-\alpha-\frac{1}{n}}(\alpha n+1)^{\alpha+\frac{1}{2n}}}{e^{-1-\frac{1}{n}}(n+1)^{1+\frac{1}{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{-\alpha-\frac{1}{n}}}{\pi^{1/n}}e^{-\alpha+1}(\alpha n)^{\alpha+\frac{1}{2n}}n^{-1-\frac{1}{2n}} \\ &= x^{-\alpha}e^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}\lim_{n\to\infty}(x\pi)^{-\frac{1}{n}}\alpha^{\frac{1}{2n}}n^{\alpha-1} = x^{-\alpha}e^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1} = \begin{cases}0, & \text{if } \alpha<1,\\ x^{-1}, & \text{if } \alpha=1,\\ \infty, & \text{if } \alpha>1.\end{cases} \end{aligned} \tag{42}$$

这里，在推导第三个等式时，使用了 $\alpha n + 1 \approx \alpha n$ 和 $n + 1 \approx n$ 在$n \to \infty$这一假设。从所得表达式可以看出，在 $\alpha < 1$ 的情况下，级数 (28) 对所有 $x > 0$都收敛。在 $\alpha > 1$ 的情况下，该级数对所有 $x > 0$都发散。在 $\alpha = 1$ 的情况下，级数 (28)

对所有 $x > 1$都收敛。在 $0 < x \leqslant 1$，且 $\alpha = 1$ 时，该级数将发散。我们将分别考察这三种情况。

我们将考察余项 (29)。考虑到我们讨论的是 $x > 0$ 的情形，由表达式 (27) 可得

$$|g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(|x|,\alpha,\theta^*)| = \\ = |g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta)| \leqslant \frac{x^{-\alpha N-1}}{\pi N!}\left(\Gamma(\alpha N+1) + x^{-\alpha}\Gamma(\alpha(N+1)+1)\right). \quad (43)$$

我们任取一个 x 并将其固定。我们将计算该表达式右侧在 $N \to \infty$ 处的极限

$$\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\frac{x^{-\alpha N-1}}{\Gamma(N+1)}\left(\Gamma(\alpha N+1) + x^{-\alpha}\Gamma(\alpha(N+1)+1)\right) \\ = \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty} x^{-\alpha N-1}\left(\frac{e^{-\alpha N-1}(\alpha N+1)^{\alpha N+1/2}\sqrt{2\pi} + x^{-\alpha}e^{-\alpha(N+1)-1}(\alpha(N+1)+1)^{\alpha(N+1)+1/2}\sqrt{2\pi}}{e^{-N-1}(N+1)^{\alpha(N+1)+1/2}\sqrt{2\pi}}\right) \\ = \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\left(e^{N(1-\alpha)}(\alpha N+1)^{\alpha N+\frac{1}{2}}(N+1)^{-N-\frac{1}{2}} + x^{-\alpha}e^{-\alpha(N+1)+N}(\alpha(N+1)+1)^{\alpha(N+1)+\frac{1}{2}}(N+1)^{-N-\frac{1}{2}}\right) \\ = \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty} x^{-\alpha N-1}e^{N(1-\alpha)}\alpha^{\alpha N+\frac{1}{2}}N^{N(\alpha-1)}\left(1+|x|^{-\alpha}\right) \\ = \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\exp\left\{\alpha N\ln\alpha - N(1-\alpha)(\ln N-1)\right\}\left(1+x^{-\alpha}\right)x^{-\alpha N-1} = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha < 1 \\ 0, & \text{if } \alpha = 1,\ x > 1 \\ \infty, & \text{if } \alpha = 1,\ 0 < x < 1 \\ \infty, & \text{if } \alpha > 1. \end{cases} \quad (44)$$

这里使用了斯特林公式 (41)，在推导第三个等式时，还考虑到了 $N+1 \approx N$ 和 $\alpha N+1 \approx \alpha N$ 在 $N \to \infty$ 处。

由所得表达式可见，在 $x > 0$ 和 $\alpha < 1$ 的情形下，表达式 (43) 的右侧是一个无穷小数列的项。这意味着，数列 $g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta)$ 在 $x > 0$ 处收敛于概率密度 $g(x,\alpha,\theta)$ 在 $N \to \infty$ 处的值。因此，对于任意固定的 $x > 0$，概率密度都可以表示为无穷级数

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta)\right)x^{-\alpha n-1}, \quad \alpha < 1.$$

根据性质1，将非对称参数 θ 的符号取反，即可将情形 $x < 0$ 化为情形 $x > 0$。若引入参数 $\theta^* = \theta\,\mathrm{sign}(x)$，并将坐标 x 取绝对值，则可将这两种情形合并。因此，前面的表达式可写为

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta^*)\right)|x|^{-\alpha n-1}, \quad \alpha < 1.$$

该表达式对任意 x 均成立。这就证明了推论的第一部分。

现在我们考虑情形 $\alpha = 1$。由表达式 (44) 可知，当取值为 $x > 1$ 时，表达式 (43) 的右侧是一个无穷小数列中的元素。又考虑到在此情形下级数 (28) 收敛，我们得到数列 $g_N^{\infty}(x,1,\theta)$ 在 $N \to \infty$ 处收敛于密度 $g(x,1,\theta)$。因此，在情形 $\alpha = 1$ 下，对任意固定的 $x > 1$，概率密度都可以表示为无穷级数

$$g(x,1,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}n(1+\theta)\right)x^{-n-1}, \quad x > 1.$$

由于这里考虑的是情形 $x > 0$，因此该公式仅对正的 x 有效。若利用反演性质 (2)，则可以将该公式推广至负的 x 情形。与前一种情形一样，我们引入参数 $\theta^* = \theta\text{sign}(x)$ 并考察 $|x|$。这样便可以将负的和正的 x 情形合并。因此，前述公式可写为

$$g(x,1,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}n(1+\theta^*)\right)|x|^{-n-1}, \quad |x|>1,$$

该结论对正的和负的 x 均成立。因此，推论的第二项得证。

在 $\alpha > 1$ 的情况下，由表达式（42）和（44）可知，此时级数（28）在 $N \to \infty$ 处发散。然而，由表达式（29）可知，对于某个固定的 N

$$R_N^{\infty}(x,\alpha,\theta) = O\left(x^{-\alpha N-1}\right), \quad x\to\infty.$$

因此，对于每个固定的 N，在 $x > 0$ 处，由表达式（27）可得

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta)\right)x^{-\alpha n-1} + O\left(x^{-\alpha N-1}\right), \quad x\to\infty.$$

借助反演性质，可以将这一结果推广到 x 为负的情况。按照前面各情形中的相同方法，我们得到

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta^*)\right)|x|^{-\alpha n-1} + O\left(|x|^{-\alpha N-1}\right), \quad x\to\pm\infty.$$

由此，我们得到了渐近级数的定义。因此

$$g(x,\alpha,\theta) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(\alpha n+1)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\alpha n(1+\theta^*)\right)|x|^{-\alpha n-1}, \quad x\to\pm\infty, \quad \alpha>1.$$

至此，推论得证。

□

注 1. 在 $\alpha = 1$ 的情形下，对于定义域 $|x| > 1$ 中的任意 $-1 < \theta < 1$，级数 (40) 收敛到密度 (62)。

证明 为证明这一点，我们考察密度 (62)，并证明该密度在 $x \to \infty$ 处的泰勒级数展开具有形式 (40)。利用化简公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\theta\right)$、$\sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\theta\right)$，我们将密度 (62) 写成如下形式

$$g(x,1,\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)}{\pi\left(x^2+2x\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)+1\right)}. \tag{45}$$

接下来，由于我们需要求出密度在 $x \to \infty$ 处的级数展开，因此将在此表达式中代入变量 $y = 1/x$。作这样的变量代换后，密度 $g(x,1,\theta)$ 在 $x \to \infty$ 处的行为将对应于密度 $g(y,1,\theta)$ 在 $y \to 0$ 处的行为。因此，如果我们在表达式 (45) 中将变量 $x = 1/y$ 作变量代换，并将所得表达式在点 $y = 0$ 附近展开成泰勒级数，然后在所得表达式中再次换回变量 x，就能得到密度 (62) 在 $x \to \infty$ 处的展开。

我们考虑表达式 $g(x,1,\theta)dx$，它表示测度元 dP。对变量 $x = 1/y$ 作代换后，我们得到

$$g(x,1,\theta)dx = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)}{\pi\left(y^{-2}+2y^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)+1\right)}\frac{dy}{y^2} = g(y,1,\theta)dy,$$

其中

$$g(y,1,\theta) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)}{\pi\left(y^2+2y\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)+1\right)}$$

现在我们将此函数表示为以下形式

$$g(y,1,\theta) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)}{\pi}f(g(y)),$$

其中

$$f \equiv f(g) = 1/g, \quad g \equiv g(y) = y^2 + 2y\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(1+\theta)\right)+1. \tag{46}$$

现在我们将在点 $y = 0$ 附近将函数 $g(y,1,\theta)$ 展开为泰勒级数。由于该函数具有任意阶导数，我们得到

$$\begin{aligned} g(y,1,\theta) &= g(0,1,\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n g(y,1,\theta)}{dy^n}\right|_{y=0} y^n \\ &= -\frac{1}{\pi}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(1+\theta)\right) - \frac{1}{\pi}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(1+\theta)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(g(y))}{dy^n}\right|_{y=0} y^n. \end{aligned} \tag{47}$$

考虑到函数 $f(g(y))$ 是复合函数，为了计算该函数的 n 阶导数，我们将使用布鲁诺公式（见 [24]）

$$\frac{d^n f(g(y))}{dy^n} = Y_n(fg_1, fg_2, \ldots, fg_n), \tag{48}$$

其中 $Y_n(fg_1, fg_2, \ldots, fg_n)$ 是贝尔多项式

$$Y_n(fg_1, fg_2, \ldots, fg_n) = \sum \frac{n! f_m}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{g_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}. \tag{49}$$

这里 $f^m \equiv f_m$, $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$，求和遍历方程的所有解 n

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n, \quad k_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{50}$$

and

$$f_m = \left.\frac{d^m f(g)}{dg^m}\right|_{g=g(y)}, \quad g_j = \frac{d^j g(y)}{dy^j}.$$

根据（46），我们得到

$$f_m = (-1)^m \left.\frac{m!}{g^{m+1}}\right|_{g=g(y)} = \frac{(-1)^m m!}{\left(y^2+2y\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)+1\right)^{m+1}}. \tag{51}$$

对于系数 g_j，我们有

$$g_1 = 2y + 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}(1+\theta)\right), \quad g_2 = 2, \quad g_3 = g_4 = \cdots = g_n = 0. \tag{52}$$

这表明，在　　在表达式 (49) 中，求和中保留满足方程的加数

$$k_1 + 2k_2 = n. \tag{53}$$

事实上，在表达式（49）中，求和是对方程（50）的所有解进行的。若解为 $k_j \neq 0,\ j = 3, 4, \ldots, n$，则求和中的相应加项等于零，因为 $g_j = 0,\ j = 3, 4, \ldots, n$。若 $k_j = 0,\ j = 3, 4, \ldots, n$，则乘数 $(g_j/j!)^{k_j} = 1$，因为 $0^0 = 1$。因此，在表达式（49）的求和中，只包含满足方程（53）的解对应的项。这大大简化了求和。由方程（53）可得 $k_1 = n - 2k_2$。考虑到 $k_1 \geqslant 0$ 和 $k_2 \geqslant 0$，我们得到 $k_2 = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$，其中 $[A]$ 表示数 A 的整数部分。这使我们能够在求和（ 49 ）中直接引入求和指标。

鉴于上述内容，公式（49）变为

$$Y_n(fg_1, fg_2) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n! f_{n-k}}{(n-2k)!k!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{n-2k} \left(\frac{g_2}{2!}\right)^k,$$

其中用到了关系 $k_1 = n - 2k_2$，并引入了求和指标 $k \equiv k_2$。现在将此关系代入（48），并使用（51）和（52），得到

$$\frac{d^n f(g(y))}{dy^n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{n-k} n!(n-k)!}{k!(n-2k)!} \frac{\left(2y + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)\right)^{n-2k}}{\left(y^2 + 2y\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right) + 1\right)^{n-k+1}}.$$

现在我们 将在点 $y = 0$ 处计算这个导数的值。不难看出　　t

$$\left.\frac{d^n f(g(y)}{dy^n}\right|_{y=0} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n-k!)}{k!(n-2k)!} \left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)\right)^{n-2k}, \tag{54}$$

这里已考虑到 $(-1)^{-k} = (-1)^k$。

接下来，我们将使用 $\sin(n\varphi)$ 的一般公式（例如参见 [25]）

$$\sin(n\varphi) = \sin\varphi \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!} (2\cos\varphi)^{n-2k-1}.$$

将此公式代入（54），可得

$$\left.\frac{d^n f(g(y))}{dy^n}\right|_{x=0} = \frac{(-1)^n n!}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+\theta)\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)(1-\theta)\right).$$

现在将此表达式代入（47），得到

$$g(y,1,\theta) = -\frac{1}{\pi}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(1+\theta)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \sin(\tfrac{\pi}{2}(n+1)(1+\theta))y^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \sin(\tfrac{\pi}{2}(n+1)(1+\theta))y^n.$$

We 将回到变量 x。通过代入变量 $x = 1/y$，我们得到　　n

$$g(y,1,\theta)dy = \frac{dx}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \sin(\tfrac{\pi}{2}(n+1)(1+\theta))x^{-n} = g(x,1,\theta)dx,$$

其中

$$g(x,1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \sin(\tfrac{\pi}{2}(n+1)(1+\theta))x^{-n-2}.$$

现在将求和指标 $n+1=k$ 代入此表达式，并注意到 $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$，可得

$$g(x,1,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \sin(\tfrac{\pi}{2}k(1+\theta))x^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \sin(\tfrac{\pi}{2}k(1+\theta))x^{-k-1}.$$

因此，平面 (62) 在 $x \to \infty$ 处展开为无穷泰勒级数，恰好与级数 (40) 一致。推论 1 考察了该级数的收敛域，并表明该级数在 $|x| > 1$ 处收敛。至此，推论得证。

□

定理 1 使我们能够利用该定理得到的幂级数计算严格稳定律的概率密度。要在实践中实现这一方法，需要一个判据，以确定求和式 (28) 中所需的项数，从而以指定精度计算指定点 x 处的密度。利用余项 (29) 的估计值即可得到这样的判据。

事实上，由表达式（27）和（29）可知

$$|g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(|x|,\alpha,\theta^*)| \leqslant \frac{|x|^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left(\Gamma(\alpha N+1) + |x|^{-\alpha}\Gamma(\alpha(N+1)+1)\right)$$

现在，如果对于给定的 N 指定绝对误差的值

$$|g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(|x|,\alpha,\theta^*)| \leqslant \varepsilon,$$

那么我们就可以引入阈值坐标 x_ε^N。阈值坐标的值由方程的解确定

$$\varepsilon = \frac{\left|x_\varepsilon^N\right|^{-\alpha N-1}}{\pi N!} \left(\Gamma(\alpha N+1) + \left|x_\varepsilon^N\right|^{-\alpha} \Gamma(\alpha(N+1)+1)\right). \tag{55}$$

阈值坐标确定了坐标的范围，在该范围内，使用级数（28）计算所得的计算误差的绝对值不会超过所规定的精度水平 ε。在当前情况下，该定义域由不等式 $|x| \geqslant x_\varepsilon^N$ 确定。因此，

$$|g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(|x|,\alpha,\theta^*)| \leqslant \varepsilon, \quad |x| \geqslant x_\varepsilon^N.$$

遗憾的是，不可能求得关于未知量 x_ε^N 的方程（55）的显式解。因此，为求解该方程，必须使用数值方法；这些方法可以很容易地求出在给定值 ε、N、α 下的阈值坐标 x_ε^N。

考虑到上述内容，我们可以写出计算大 x 时概率密度的公式

$$g(x,\alpha,\theta) = g_N^{\infty}(|x|,\alpha,\theta^*), \quad |x| \geqslant x_\varepsilon^N. \tag{56}$$

这里的 $g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta)$ 由级数（28）确定，而阈值坐标 x_ε^N 则通过在参数 α、求和式（28）中的加数个数 N 以及精度等级 ε 给定时求解方程（ 55 ）得到。同时，可以保证绝对误差

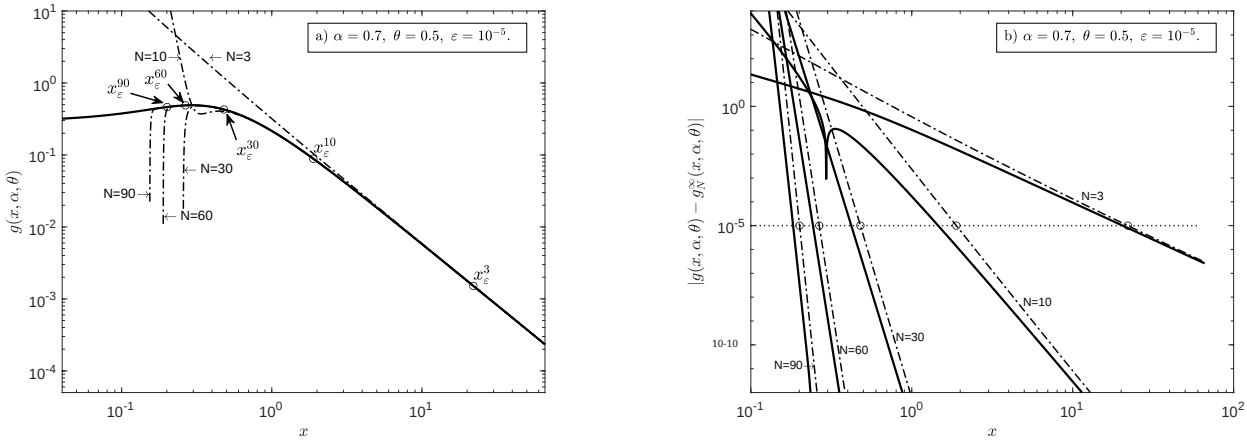


图2。 a) 图中所示参数值下的概率密度 $g(x,\alpha,\theta)$。实线为积分表示（60），点划线曲线为项数 N 取不同值时求和（28）的公式（56）。圆圈表示对应的N值和 ε指定精度水平下的阈值坐标 x_ε^N位置。(b) 使用公式（56）计算密度 $g(x,\alpha,\theta)$时的绝对误差图。实线曲线为绝对误差 $|g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta)|$的精确值，点划线曲线为余项（29）的余项估计，点线为 ε指定精度水平，圆圈表示阈值坐标 x_ε^N的位置。

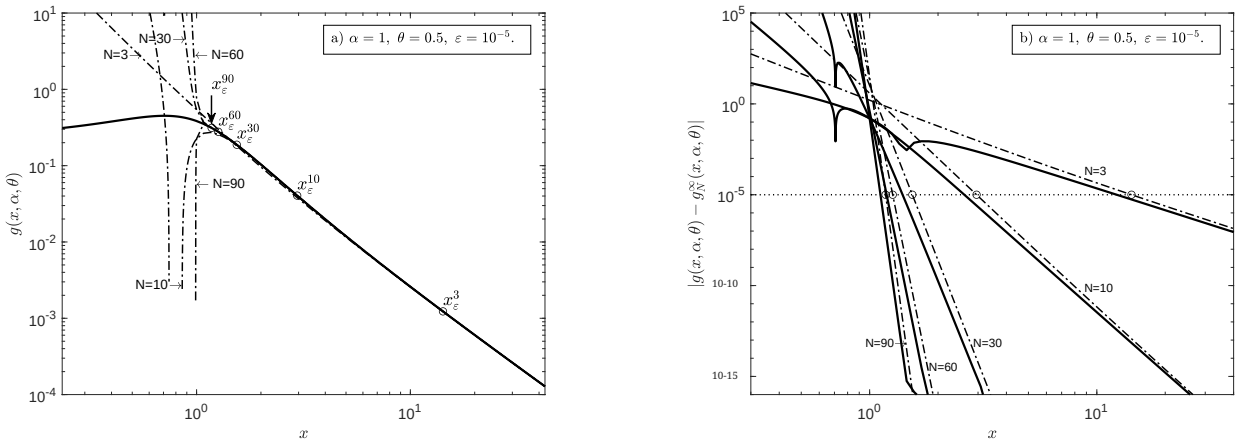


图3。 a) 图中所示参数值下的概率密度 $g(x,\alpha,\theta)$。实线为公式（62），点划线曲线为项数 N 取不同值时求和（28）的公式（56）。圆圈表示对应的 N 值和 ε指定精度水平下的阈值坐标 x_ε^N位置。(b)) 使用公式（56）计算密度 $g(x,\alpha,\theta)$时的绝对误差图。实线曲线为绝对误差 $|g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta)|$的精确值，点划线曲线为余项（29）的余项估计，点线为 ε指定精度水平，圆圈表示阈值坐标x_ε^N的位置。

使用该公式计算概率密度时，其误差不会超过 ε，但实际上会远小于该值。

对于图中给定的 α 和 θ 值，概率密度 $g(x, \alpha, \theta)$ 的计算结果如图 2a、3a 和 4a 所示。在这些图中，实线曲线对应于概率密度 $g(x, \alpha, \theta)$ 的精确值。在 $\alpha \neq 1$ 的情况下，使用积分表示 (60) 计算密度 $g(x, \alpha, \theta)$；在 $\alpha = 1$ 的情况下，使用公式 (62)。点划线曲线对应于采用公式 (56) 计算得到的概率密度，其 $N = 3$ 取值为 10、30、60、90。圆圈表示在所选精度水平 $\varepsilon = 10^{-5}$ 及所用 N 值下阈值坐标 x_ε^N 的位置。阈值坐标的数值由方程 (55) 的数值解获得。图 2b、3b 和 4b 展示了使用公式 (56) 计算概率密度时的绝对误差。在这些图中，实线曲线对应于绝对误差的精确值。为计算该值，使用了公式 $|g(x, \alpha, \theta) - g_N^\infty(x, \alpha, \theta)|$，其中 $g(x, \alpha, \theta)$ 在 $\alpha \neq 1$ 时为积分表示 (60)，在 $\alpha = 1$ 时为公式 (62)，而 $g_N^\infty(x, \alpha, \theta)$ 为公式 (56)。点划线曲线对应于余项估计 (29)，点线表示所选精度水平 ε 的位置。与前一图相同，圆圈表示在所用 N 值下阈值坐标 x_ε^N 的位置。

图 2b、3b 和 4b 清楚地表明，在 $x \geqslant x_\varepsilon^N$处，对于所有取用的 N 值，实线曲线都低于点划线曲线。这意味着绝对误差的精确值小于估计值 (29)。因此，在$|x| \geqslant x_\varepsilon^N$处，可以使用公式 (56) 计算概率密度。同时，可以保证绝对误差值不会超过所选的精度水平 ε，但实际上它会小于 ε。

我们还要指出一个从所给图中可以清楚看出的特征。图 2 展示了 $\alpha = 0.7$情况下的计算结果。图 2a 和 2b 表明，随着 N 增加，阈值坐标 x_ε^N的值会减小。从圆圈的位置可以清楚地看出这一点，每个圆圈都对应于每个取用的 N所对应的点 x_ε^N。显然，$x_\varepsilon^3 > x_\varepsilon^{10} > x_\varepsilon^{30} > x_\varepsilon^{60} > x_\varepsilon^{90}$。阈值坐标的这种变化（随着 N 增加，x_ε^N的值减小）是推论 1 的结果。事实上，该推论表明，在 $\alpha < 1$ 且 $N \to \infty$ 时，级数 (28) 收敛。因此，随着求和 (28) 中的项数 N增加，在某个固定点 x处计算密度 $g(x, \alpha, \theta)$ 的精度会提高。这意味着，在 $\alpha < 1$ 时，使不等式 $|g(x, \alpha, \theta) - g_N^\infty(x, \alpha, \theta)| \leqslant \varepsilon$ 成立的坐标 x取值范围会随着 N的增加而扩大。因此，作为方程$|g(x_\varepsilon^N, \alpha, \theta) - g_N^\infty(x_\varepsilon^N, \alpha, \theta)| = \varepsilon$的解的阈值坐标 x_ε^N，其绝对值会随着 N的增加而减小，即在$N \to \infty$时，$\left|x_\varepsilon^N\right| \to 0$。

若在方程 (55) 中取极限 $N \to \infty$，即可得到这一结果。取极限并考虑到 $N+1 \approx N$ at $N \to \infty$，方程 (55) 的左边可得

$$\frac{1}{\pi\Gamma(N+1)}\left(\frac{\Gamma(\alpha N+1)}{|x_\varepsilon^N|^{\alpha N+1}} + \frac{\Gamma(\alpha(N+1)+1)}{|x_\varepsilon^N|^{\alpha(N+1)+1}}\right) \approx \frac{2}{\pi\Gamma(N+1)}\frac{\Gamma(\alpha N+1)}{|x_\varepsilon^N|^{\alpha N+1}}.$$

现在，若用这个表达式代替方程 (55) 的左边，就会发现所得方程很容易求出关于 $|x_\varepsilon^N|$ 的解。因此，该方程的解为

$$\left|x_\varepsilon^N\right| = \left(\frac{2}{\pi\varepsilon}\frac{\Gamma(\alpha N+1)}{\Gamma(N)}\right)^{\frac{1}{\alpha N+1}}.$$

我们求得该解在 $N \to \infty$ 处的极限。考虑到 $\alpha N + 1 \approx \alpha N$ 在 $N \to \infty$ 并利用

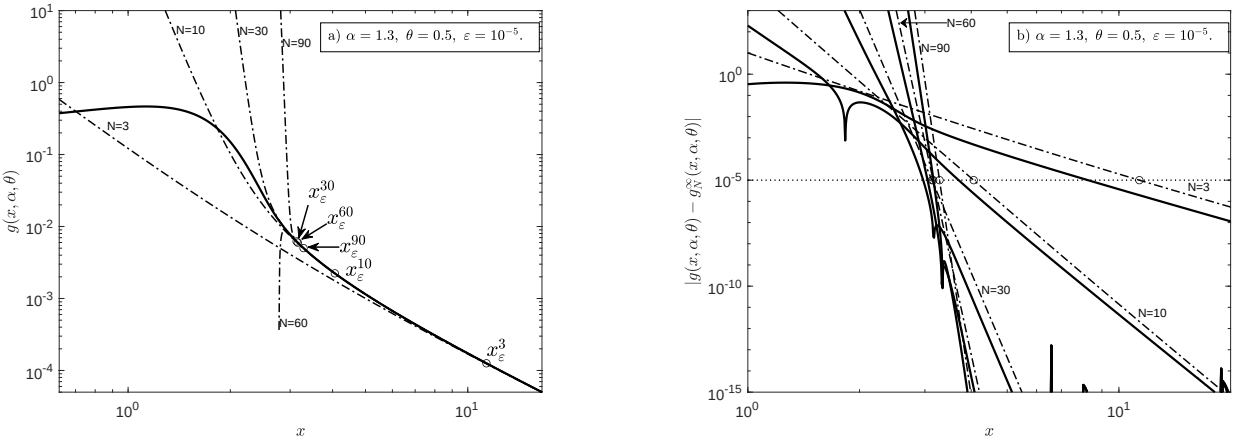


图4. a）图中所示参数值对应的概率密度 $g(x,\alpha,\theta)$。实线曲线表示积分表示式 (60)，点划线曲线表示求和 (28) 中项数 N 取不同值时的公式 (56)。圆圈标出对应于 N 和指定精度水平 ε 时阈值坐标 x_ε^N 的位置。(b) 使用公式 (56) 计算密度 $g(x,\alpha,\theta)$ 所得的绝对误差图。实线曲线表示绝对误差的精确值 $|g(x,\alpha,\theta) - g_N^{\infty}(x,\alpha,\theta)|$，点划线曲线表示余项估计 (29)，点线表示指定精度水平 ε，圆圈标出阈值坐标x_ε^N的位置。

斯特林公式 (41)，我们得到

$$\lim_{N\to\infty}\left|x_\varepsilon^N\right| = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{\pi\varepsilon}\frac{\Gamma(\alpha N+1)}{\Gamma(N)}\right)^{\frac{1}{\alpha N+1}} \approx \lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{\pi\varepsilon}\frac{\Gamma(\alpha N)}{\Gamma(N)}\right)^{\frac{1}{\alpha N}}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{\pi\varepsilon}\frac{e^{-\alpha N}(\alpha N)^{\alpha N-1/2}\sqrt{2\pi}}{e^{-N}N^{N-1/2}\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{\alpha N}} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{\pi\varepsilon}e^{N(1-\alpha)}\alpha^{\alpha N-1/2}N^{N(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha N}}$$
$$= e^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\alpha\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{\pi\varepsilon\sqrt{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha N}}N^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \begin{cases}0, & \alpha<1\\ 1, & \alpha=1\\ \infty, & \alpha>1.\end{cases} \quad (57)$$

从所得表达式可以清楚地看出，若 $\alpha<1$，则 $\lim_{N\to\infty}\left|x_\varepsilon^N\right|=0$。这意味着，当 $\alpha<1$ 时，在整个数轴 $-\infty<x<\infty$ 上均可达到预定计算精度 ε。这一结果直接源于推论 1 的第 1 项，其中证明了在 $\alpha<1$ 的情况下，级数 (28) 在整个数轴上收敛，且 $N\to\infty$。

在 $\alpha=1$ 的情况下，也观察到了阈值坐标值的类似行为（见图3）。图中清楚地表明，$x_\varepsilon^3 > x_\varepsilon^{10} > x_\varepsilon^{30} > x_\varepsilon^{60} > x_\varepsilon^{90}$，即随着 N 的值增加，阈值坐标 x_ε^N 的值减小。然而，由表达式（57）显然可知，在这种情况下 $\lim_{n\to\infty}\left|x_\varepsilon^N\right|=1$。这意味着，在 $\alpha=1$ 的情况下，当 $N\to\infty$ 时，仅在坐标范围 $|x|>1$ 内达到预先指定的精度。该结果也是推论 1 第2项的直接结论。

在 $\alpha>1$ 的情况下，随着 N 增大，坐标 x_ε^N 的行为会发生变化。图4展示了 $\alpha=1.3$ 情况下的计算结果。此外，与前述情况一样，阈值坐标的位置以圆圈标出（例如，见图4a）。从图中可以看出，随着 N 增大，阈值坐标的值先减小 $x_\varepsilon^3 > x_\varepsilon^{10} > x_\varepsilon^{30}$。然而，继续增大 N 会使阈值坐标的值增大：$x_\varepsilon^{30} < x_\varepsilon^{60} < x_\varepsilon^{90}$。在 $\alpha>1$ 情况下，阈值坐标的这种行为完全符合推论 1。

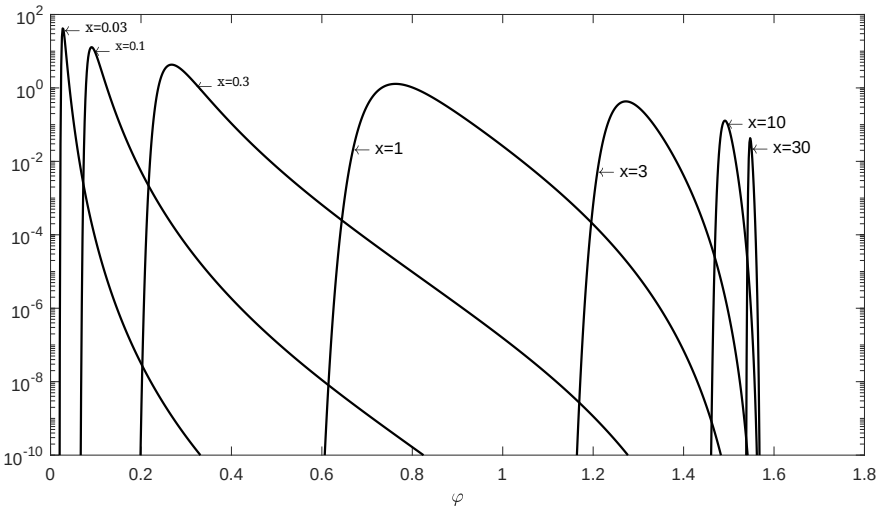


图5. 概率密度（60）的积分表示中，被积函数与积分变量 φ 之间的关系。图中展示了参数 $\alpha = 1.1$、$\theta = 0$ 取指定值时，被积函数随坐标 x 变化的曲线

事实上，该推论表明，在 $\alpha > 1$ 的情况下，当 $N \to \infty$ 时，级数（28）发散。级数发散的原因是其中存在乘数 $\Gamma(\alpha n + 1)/\Gamma(n + 1)$。我们可以看到，当 $\alpha > 1$ 时，该乘数大于 1；随着 n 增大，该乘数还会继续增大。这导致该级数在 $n \to \infty$ 处发散。此外，该求和中还有一个乘数 $x^{-\alpha n-1}$ 。这两个乘数之间的竞争导致了所观察到的阈值坐标行为。事实上，当 n 较小时，求和（28）中各项的加入首先会使满足等式 $|g(x, \alpha, \theta) - g_N^{\infty}(x, \alpha, \theta)| = \varepsilon$ 时的坐标 x_ε^N 减小。这一点可由以下事实证实：$x_\varepsilon^3 > x_\varepsilon^{10} > x_\varepsilon^{30}$。然而，进一步增大 n 会使乘数 $\Gamma(\alpha n + 1)/\Gamma(n + 1)$ 增大得更多。因此，为了抵消该乘数的增大并达到规定的精度，需要减小乘数 $x^{-\alpha n-1}$ 的值，这可以通过增大坐标 x 的值来实现。结果，坐标 x_ε^N 向更大的值偏移。这一点可由以下事实证实：$x_\varepsilon^{30} < x_\varepsilon^{60} < x_\varepsilon^{90}$。

3. 大 x 时概率密度的计算

我们将回到计算 x 取较大值时概率密度的问题。引言中指出，计算概率密度的主要方法是使用积分表示（60）。理论上，对于参数α、θ （ $\alpha = 1$ 这一取值除外）的所有取值以及所有 x，该积分表示均有效。然而，实际上，并非总能对这一积分表示中所包含的积分进行数值计算。当坐标 x 取值很小或很大时，就会出现问题。产生这些困难的原因在于公式（60）中被积函数的行为。

图 5 展示了公式 (60) 中被积函数与积分变量 φ之间的关系图，其中坐标 x取不同值。从图中可以看出，当 x 取值很小或很大时，被积函数会变成一个峰值非常狭窄的函数。随着 x减小或增大，该峰的宽度只会进一步缩小。被积函数的这种特性导致当 x 取值非常小或非常大时，数值积分算法无法计算该函数的积分。因此，在这种情况下，宜采用其他方法计算概率密度。最适当的方法是使用概率密度的渐近展开。关于 $x \to 0$ 情况下概率密度的计算问题，已在

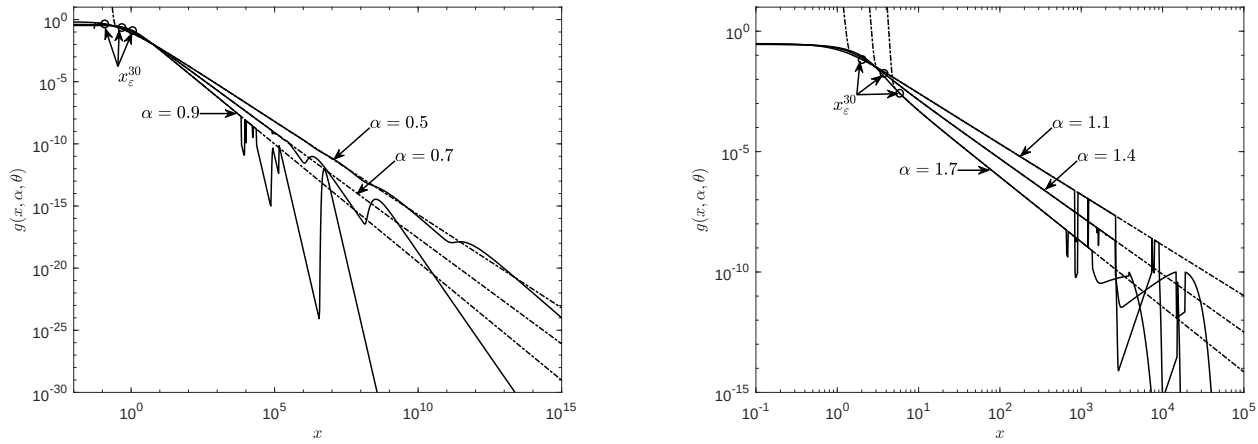


图 6. 严格稳定律的概率密度 $g(x,\alpha,\theta)$。左图对应情形 $\alpha < 1$，右图对应情形 $\alpha > 1$。指数 α 的取值标注在图中。实线曲线表示积分表示（60），点划线曲线表示幂级数表示（56），圆圈表示各个 α、$N = 30$ 和 $\varepsilon = 10^{-5}$ 取值下阈值坐标 x_ε^N的位置

文章 [21]中进行了讨论。本文探讨了在x取值较大时计算概率密度的问题。

图 6 给出了使用积分表示（60）（实线曲线）和公式（56）（点划线曲线）计算概率密度 $g(x,\alpha,\theta)$ 的结果。特征指数 α 的取值标注在图中。计算公式（60）中的积分时使用了高斯-克朗罗德算法。使用公式（56）计算概率密度时，采用的项数为 $N = 30$ 。求阈值坐标 x_ε^N 时，使用的精度水平为 $\varepsilon = 10^{-5}$ 。从所给出的计算结果可以看出，当 x 取值较大时，所使用的数值积分算法无法计算（60）中的积分，并开始给出错误的数值。还可以从图中看出，数值积分算法开始错误计算积分时对应的临界坐标 $x_{\rm cr}$取决于 α的取值。当 $\alpha = 0.5$ 取该值时为 $x_{\rm cr} \approx 10^7$；当 $\alpha = 0.7$ 取该值时为 $x_{\rm cr} \approx 10^5$；当 $\alpha = 0.9$取该值时为 $x_{\rm cr} \approx 10^4$。我们可以看到，在情形 $\alpha < 1$ 下，随着 α 的值减小，$x_{\rm cr}$的值增大。在情形 $\alpha > 1$ 下，从图中可以看出，对于所有展示的 α，其值均为 $x_{\rm cr} \approx 4{\cdot}10^2 - 10^3$。因此，当 $x > x_{\rm cr}$ 取这些值时，应使用其他方法计算概率密度。其他参数化的特征函数所对应的稳定律密度积分表示也存在同样的问题（见 $[5,8,11,12]$）。为解决这一问题，作者在这些研究中使用了各种数值方法，以提高计算精度。然而，这些方法虽然提高了计算精度，却没有彻底解决问题。

为了解决大值 x 下概率密度的完整计算问题，可以使用定理1，特别是公式 (56)，该公式是此定理的推论。如前所述，在坐标范围 $x \geqslant x_\varepsilon^N$ 内，使用该公式计算概率密度的绝对误差不会超过指定精度水平 ε。此外，随着 x 增大，绝对计算误差只会减小。这直接源于余项估计 (29)，并且从图 2b、3b 和 4b 所示的计算结果中可以清楚地看出。

图 6 中的点划线曲线展示了使用公式 (56) 计算概率密度的结果。每个 α 值对应的阈值坐标 x_ε^N 以圆圈标示。图中清楚地显示，在定义域 $x_\varepsilon^N \leqslant x \leqslant x_{\rm cr}$ 内，使用积分表示 (60) 和级数展开 (56) 计算概率密度所得结果一致。在

$x > x_{\mathrm{cr}}$ 数值积分算法已无法通过积分表示 (60) 得到正确的概率密度值，而使用公式 (56) 计算则毫无困难。因此，在定义域 $x > x_{\mathrm{cr}}$ 内，宜使用公式 (56) 计算概率密度。由此可见，运用定理1，尤其是公式 (56)，解决了大 x 值时概率密度的计算问题。

4. 讨论

证明定理1时的主要问题，是计算表达式（30）右侧的积分。事实上，如果将该表达式中的第二个指数展开为泰勒级数，我们便得到积分

$$\int_0^\infty e^{it} t^{\alpha k} dt. \tag{58}$$

然而，无法计算该积分，也无法将其化为某个已知积分（尤其是伽马函数）。问题在于积分路径。公式（36）清楚地说明了这一点。该公式表明，在伽马函数 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt$ 的定义中，可以将沿实半轴正半部的积分转化为沿从坐标原点出发、与其夹角为 β 的射线的积分。同时，角度 β 必须满足以下条件： $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$、 $\Re\gamma > 0$ 或 $\beta \pm \frac{\pi}{2}$、 $0 < \Re\gamma < 1$。如我们所见，要使积分（36）的左半部分呈现积分（58）的形式，必须令 $\beta = -\frac{\pi}{2}$ 和 $c = 1$。然而，要使此时该积分与伽马函数相对应，必须满足条件 $0 < \Re(\alpha k + 1) < 1$，但对于任何 α，这一条件都不成立。如果考虑条件 $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$、$\Re\gamma > 0$，则会发现它同样无法使我们将积分（58）变换为伽马函数。尽管在这种情况下条件 $\Re(\alpha k + 1) > 0$ 得到满足，但角度变化的范围 β 不包含点 $\beta = -\frac{\pi}{2}$。可以证明，在这种情况下（ $\Re\gamma > 0$ ），当处于点 $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时，积分（36）的左半部分将发散。对积分（58）进行任何变换（尤其是转动积分路径）都无法将其变为积分（36）。

如果考虑到表达式（30）右侧在 $\tau \to \infty$ 和 $x \to \infty$处满足关系 $\tau/x \to 0$ ，则可以解决这一问题。考虑到这一情况，可以证明：若满足引理2中提出的条件，则等式（21）成立。引理1也致力于论证该等式成立的可能性。在证明等式（21）之后，便可以实现从（30）到（31）的转换，并论证将自变量 φ 取为（32）形式的可能性。此后，以幂级数形式获得 $x \to \infty$处的概率密度展开并不特别困难。

本文的主要结果表述于定理1中。在该定理中，除给出 $x \to \infty$处概率密度的幂级数展开外，还得到了余项的估计值。该估计值在解决大 x处概率密度计算问题时极为有用。实际上，级数（28）在 $x \to \infty$处有效，然而它并未回答在何种 x取值下可利用该级数计算概率密度的问题。通过估计余项（29），可以回答这一问题。该估计值使得可以引入阈值坐标 x_ε^N：在该坐标处，利用展开式（28）计算概率密度的绝对误差将不超过指定精度水平 ε。阈值坐标由方程（55）的解确定，其中给定了 α、ε 和 N 的值。遗憾的是，无法获得方程（55）的显式解。不过，借助数值方法，可以毫无困难地求得该方程的解。

应当指出，如果对余项 (29) 作更粗略的估计，并将其表示为

$$|R_N^\infty(x, \alpha, \theta)| \leqslant \frac{x^{-\alpha N - 1}}{\pi N!} \left(\Gamma(\alpha N + 1) + \Gamma(\alpha(N+1) + 1)\right), \quad x > 1,$$

那么它 g 便可找到阈值坐标的显式表达式

$$x_{\varepsilon,1}^{N}=\left(\frac{\Gamma(\alpha N+1)+\Gamma(\alpha(N+1)+1)}{\pi\varepsilon\Gamma(N+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha N+1}}.$$

这种表达式在实际应用中的便利性显而易见：无需每次都求助于数值方法并求解方程 (55)，即可求得阈值坐标的值。不过，便利总是有代价的，此处的代价就是阈值坐标的确定精度。估计值 $x_{\varepsilon,\,1}^{N}$ 不如通过求解方程 (55) 得到的估计值 x_{ε}^{N}。此外，只有当值 $x_{\varepsilon,\,1}^{N}>1$ 时，该估计值才有效。不过，选择哪一个公式，始终由具体研究者决定。

5. 结论

稳定律作为独立同分布随机变量之和的极限分布，被用于描述各种过程。在描述股票指数的行为、反常扩散过程中粒子坐标的渐近分布、基因表达水平的分布等现象时，都会出现稳定律。因此，常常需要计算这种分布的概率密度。计算概率密度的主要方法是使用积分表示。然而，正如本文所示，这种方法并非总能给出正确的概率密度值。坐标 x 取值较小或较大时会出现困难。这些困难并非源于积分表示；积分表示本身对任意 x 都成立，而是源于数值方法。对于非常小或非常大的 x，数值积分算法无法计算该公式中的积分。因此，在这些情况下，必须采用其他方法来计算概率密度。

如引言中所述，解决这个问题有多种方法，但这些方法都旨在提高计算精度，并未彻底解决问题。本文利用概率密度在 $x\to\infty$ 处的级数展开，计算 x 较大时的概率密度。为实现这一目标，我们得到了这样的展开式，并给出了余项的估计值。相关结果表述为定理1。我们研究了该级数的收敛性，并证明：当 $\alpha<1$ 时，该级数对任意x均在 $N\to\infty$ 处收敛；当 $\alpha=1$ 时，该级数在 $N\to\infty$ 和 $|x|>1$处收敛；当 $\alpha>1$ 时，该级数在 $x\to\infty$处渐近。这些结果表述为推论 1。需要指出的是，该推论中的结果并非新结果，而是推广了此前多位作者关于概率密度在 $x\to\infty$ 处展开为幂级数的收敛性所得的已知结论（例如，参见 [1, 7, 19]）。然而，首次研究了 $\alpha=1$ 情形下概率密度的展开。研究发现，在这种情形下，该级数在 $|x|>1$处收敛。此外，我们还证明，在这种情形下，当 $N\to\infty$ 时，该级数收敛于广义柯西分布（62）的概率密度。

如前所述，我们得到了在 $x\to\infty$ 处将概率密度展开为幂级数时的余项估计值。该估计值对于解决大 x 时概率密度的计算问题非常有用。利用这一估计值，可以引入阈值坐标 x_{ε}^{N}，并得到用于求解该坐标的方程 (55)。阈值坐标使我们能够确定坐标的定义域 x：在该定义域内，对于给定的 α 值，使用幂级数 (28) 和求和中的 N 个加数计算概率密度时，绝对误差不会超过所需精度 ε。这使我们得以写出形式为 (56) 的计算公式。计算结果表明，使用该公式时，在定义域 $|x|>x_{\varepsilon}^{N}$ 内计算概率密度的绝对误差不会超过所需精度 ε，而实际上远小于这一数值。随着 $|x|$ 增大，绝对计算误差只会减小。这使得我们能够使用公式 (56) 计算概率

密度，即使在某些 x 值下，积分表示 (60) 已无法得出正确结果。

事实上，所进行的计算表明，对于积分表示 (60)，存在一个坐标 $x_{\rm cr}$ 的临界值，超过该值后，数值积分算法便无法再正确计算积分（见图 6）。与此同时，使用公式 (56) 不会带来任何计算困难。因此，在坐标区域 $|x| > x_{\rm cr}$ 内，使用该公式计算严格稳定律的概率密度，可以解决在较大 x 处计算概率密度的问题；在该区域内，积分表示 (60) 已无法给出正确结果。

如上所述，使用积分表示计算概率密度时， x 较大和 x 较小时都会出现计算困难。本文解决了在较大 x 处计算概率密度的问题，而在较小 x 处计算概率密度的问题则已在文章 [21] 中解决。为在本文中计算较小 x 处的概率密度，我们得到了 $x \to 0$ 处的密度展开，并给出了该展开余项的估计值。基于这一估计值，我们得到了阈值坐标的显式表达式。因此，若在 x 较大时使用公式 (56)，在 x 较小时使用文章 [21]，中的展开，并在中间区域使用积分表示 (60)，便可计算特征函数为 (1) 的严格稳定律在任意 x 处的概率密度。由此，整个实数轴 x 上的概率密度计算问题得以解决。

计算分布函数时也存在类似的问题。文章 [21] 指出，对于严格稳定律的分布函数的积分表示，在坐标 x 取较小值和较大值时，积分的计算同样存在问题。本文解决了 x 取较小值时分布函数的计算问题。为此，我们使用了分布函数在 $x \to 0$ 处的展开。要彻底解决分布函数的计算问题，还需要解决 x 较大时分布函数的计算问题。若能得到分布函数在 $x \to \infty$ 处的展开，便可解决这一问题。根据定理 1的结果可以得到这一展开。不过，这需要进一步研究，相关结果将在近期发表。

A. 概率密度的积分表示

为了进行傅里叶逆变换并得到概率密度的分布，下面这个定义反演公式的引理很有用。

引理3。 对于任意可容许参数集(α, θ) 以及任意 x ，均可利用逆变换公式得到概率密度 $g(x, \alpha, \theta)$

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\hat{g}(t,\alpha,\theta)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\Re\displaystyle\int_0^{\infty} e^{itx}\hat{g}(t,\alpha,-\theta)dt, \\ \dfrac{1}{\pi}\Re\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-itx}\hat{g}(t,\alpha,\theta)dt. \end{cases} \tag{59}$$

该引理的证明见文章 [3]。具有特征函数 (1) 的严格稳定律的概率密度积分表示见文章 [3]。该文章提出并证明了以下定理。

定理2。 具有特征函数 *(1)* 的严格稳定律的分布密度 $g(x, \alpha, \theta)$ 可表示为

1. 若 $\alpha \neq 1$ 且 $x \neq 0$，则对任意值 $|\theta| \leqslant \min(1, 2/\alpha - 1)$

$$g(x,\alpha,\theta) = \frac{\alpha}{\pi|\alpha-1|}\int_{-\pi\theta^*/2}^{\pi/2} \exp\left\{-|x|^{\alpha/(\alpha-1)}U(\varphi,\alpha,\theta^*)\right\} U(\varphi,\alpha,\theta^*)|x|^{1/(\alpha-1)}d\varphi, \tag{60}$$

其中 $\theta^* = \theta$ 符号 x 且

$$U(\varphi, \alpha, \theta) = \left(\frac{\sin\left(\alpha\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\theta\right)\right)}{\cos\varphi} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos\left(\varphi(1-\alpha) - \frac{\pi}{2}\alpha\theta\right)}{\cos\varphi}. \tag{61}$$

2. 若 $x = 0$，则对于任意 $0 < \alpha \leqslant 2$ 和 $|\theta| \leqslant \min(1,\ 2/\alpha - 1)$

$$g(0, \alpha, \theta) = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\theta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

3. 若 $\alpha = 1$，则对于任意 $|\theta| \leqslant 1$ 以及任意取值 x

$$g(x, 1, \theta) = \frac{\cos(\pi\theta/2)}{\pi(x^2 - 2x\sin(\pi\theta/2) + 1)}. \tag{62}$$

定理的证明见文章 [3]。由此可见，在一般情形下，概率密度可表示为一个定积分。不过，在特殊情形 $\alpha = 1$ 下，可以对特征函数 **(1)** 进行傅里叶逆变换，并将概率密度表示为初等函数。公式 **(62)** 将众所周知的柯西分布推广到非对称参数 $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ 任意的情形。由此可见，当 $\theta = 0$ 时，该分布与柯西分布一致；当 $\theta = \pm 1$ 时，该分布退化为点 $x \pm 1$ 处的退化分布。V.M. Zolotarev 的著作 [1] 中首次出现了这一分布。后来，文章 [2,3] 对这一分布进行了推导和研究。

参考文献

1. V. M. Zolotarev，一维稳定分布，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1986年。2. V. V. Saenko，分数阶稳定密度的积分表示，《数学科学杂志》248 (1) (2020年) 51–66。doi:10.1007/s10958-020-04855-5。URL http://link.springer.com/10.1007/s10958-020-04855-5 3. V. V. Saenko，严格稳定律的密度和分布函数计算，Mathematics 8 (5) (2020年) 775。doi:10.3390/math8050775。URL https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/775 4. J. P. Nolan，Zolotarev（M）参数化下稳定密度求值算法，《数学与计算机建模》29 (10-12) (1999) 229–233。doi:10.1016/S0895-7177(99)00105-3。URL https://linking.elsevier.com/retrieve/pii/S0895717799001053 5. S. Ament、M. O'Neil，通过优化求积精确高效地数值计算稳定密度

再

Statistics and Computing 28 (1) (2018) 171–185。arXiv:1607.04247, doi:10.1007/s11222-017-9725-y。网址 https://link.springer.com/article/10.1007/s11222-017-9725-y 6. V. M. Zolotarev，《稳定律的积分表示》，Selected Translations in Mathe- matical Statistics and Probability 4 (1964) 84–88。7. V. V. Uchaikin、V. M. Zolotarev，《偶然性与稳定性：稳定分布及其应用》，VSP，乌得勒支，1999。8. J. P. Nolan，《稳定密度和分布函数的数值计算》，统计学通讯：随机模型 13 (4) (1997) 759–774。doi:10.1080/15326349708807450。网址 http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15326349708807450

9. J. P. Nolan，《稳定分布的计算方面》，WIREs Computational Statistics 14 (4) (2022) e1569。doi:10.1002/wics.1569。网址 https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/wics.1569 10. Y. Liang、W. Chen，关于计算 L´evy 稳定分布的综述及新款 MATLAB 工具箱，Signal Processing 93 (1) (2013) 242–251。doi:10.1016/j.sigpro.2012.07.035。网址 https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0165168412002654 11. J. Royuela-del Val、F. Simmross-Wattenberg、C. Alberola-L´opez，Libstable：在 R、C/C++ 和

MATLAB

Journal of Statistical Software 78（2017年6月）。doi:10.18637/jss.v078.i01。网址：https://www.jstatsoft.org/article/view/v078i01 12. G. Juli´an-Moreno, J. E. L´opez de Vergara, I. Gonz´alez, L. de Pedro, J. Royuela-del Val, F. Simmross-Wattenberg，使用 O

通用图形处理

Statistics and Computing 27（5）（2017）1365–1382。doi:10.1007/s11222-016-9691-9。网址：http://link.springer.com/10.1007/s11222-016-9691-9 13. R. H. Rimmer, J. P. Nolan，《Mathematica 中的稳定分布》，Mathematica journal 9（4）（2005）776–789。14. M. Veillette，MATLAB 代码：α-稳定分布（2008）。网址：http://math.bu.edu/people/mveillet/research.html 15. T. K. Pog´any, S. Nadarajah，关于稳定 S α (β,γ,μ) 分布的评注，Methodology and Computing in Applied Probability 17（2）（2015）515–524。doi:10.1007/s11009-014-9404-9。网址：http://link.springer.com/10.1007/s11009-014-9404-9 16. H. Pollard，将 exp($-x^{\lambda}$) 表示为拉普拉斯积分，《美国数学会通报》52（10）（1946）908–910。doi:10.1090/S0002-9904-1946-08672-3。网址：https://www.ams.org/bull/1946-52-10/S0002-9904-1946-08672-3/ 17. H. Bergstr¨om，关于稳定分布函数的一些展开，Arkiv f¨or matematik 2（4）（1952）375–378。doi:10.1007/BF02591503。网址：https://projecteuclid.org/euclid.afm/1485893182 18. W. R. Schneider，稳定分布：Fox 函数表示及推广，载于：S. Albev-erio, G. Casati, D. Merlini（编），Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems，第262卷，Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，1986年，497–511页。doi:10.1007/3540171665_92。网址：http://link.springer.com/10.1007/3540171665{_}92 19. W. Feller，《概率论及其应用导论》，第2版，第II卷，John Wiley & Sons, Inc.，纽约、伦敦、悉尼、多伦多，1971年。20. V. E. Bening, V. Y. Korolev, T. A. Sukhorukova, G. G. Gusarov, V. V. Saenko, V. V. Uchaikin, V. N. Kolokoltsov，分数阶稳定分布，载于：V. Y. Korolev, N. N. Skvortsova（编），Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence，Brill Academic Publishers，乌得勒支，2006年，175–244页。doi:10.1515/9783110936032.175。网址：http://www.degruyter.com/view/books/9783110936032/9783110936032.175/9783110936032

.175.xml

律在零附近的

21. V. V. Saenko，《严格稳定

Mathematics 10 (20) (2022) 3861. arXiv:2210.06920, doi:10.3390/math10203861. URL https://www.mdpi.com/2227-7390/10/20/3861 22. K. Arias-Calluari, F. Alonso-Marroquin, M. S. Harr´e，《L´evy 稳定分布的闭式解》，

布，

Physical Review E 98 (1) (2018) 012103。arXiv:1712.04269, doi:10.1103/PhysRevE.98.012103。网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.98.012103 23. H. Bateman，《高等超越函数》，第1卷，McGraw-Hill Book Company, Inc，纽约，1953年。

24. J. Riordan, 《组合分析导论》, John Wiley & Sons, Inc., 纽约, 1958年。25. M. R. Spiegel、S. Lipshutz、J. Liu, 《沙姆数学公式与表格手册》, 第5版, 麦格劳-希尔教育, 2018年。