随滚动速度增加，接地斑摩擦转向力矩呈指数衰减

Jai Prakash*
jai.prakash@polimi.it 米兰理工大学机械工程系 意大利米兰

Michele Vignati
michele.vignati@polimi.it 米兰理工大学机械工程系 意大利米兰

Edoardo Sabbioni
edoardo.sabbioni@polimi.it 米兰理工大学机械工程系 意大利米兰

发表于40th 《轮胎科学与技术》年度会议，2021年8月30日至9月3日。

*报告人/通讯作者。

Jai Prakash，[1] Michele Vignati，[2] 以及 Edoardo Sabbioni [3]

接触斑摩擦转向力矩随滚动速度的指数衰减

参考文献：J. Prakash、M. Vignati 和 E. Sabbioni，《**接触斑—斑块摩擦 随滚动速度变化的转向力矩的指数衰减》，**提交至2021年轮胎学会会议进行报告，并考虑在《轮胎科学与技术》期刊上发表。

摘要：转向扭矩是影响驾驶员感受的一个非常重要的量。事实上，它能让驾驶员了解行驶过程中的道路附着状况。人们已开发出多种模型来模拟接地斑处的剪切力，其中大多数基于考虑滑移和侧偏角的半经验轮胎模型。车速足够高时，这些模型具有良好的可靠性。在极低速情况下（如停车时），这些模型的可靠性和数值计算都会遇到问题。本文提出一种模型，用于计算任意纵向速度（包括枢轴转向工况）下由接地印迹摩擦产生的转向力矩。具体而言，该模型在枢轴转向模型的基础上，引入一种新颖的力矩指数衰减模型，以模拟车轮在不同滚动速度下的情况。研究发现，衰减率取决于接触斑几何形状和滚动速度。

关键词： 枢轴转向、转向阻力矩、低速转向扭矩 .

引言

转向系统是车辆的关键组成部分，其响应对车辆的行驶安全至关重要。低速时转动车轮也称为枢轴转向。枢轴转向阻力矩（图 1）与多种因素有关，例如前轴载荷、车轮的转向轴定位参数和转向角、轮胎路面摩擦等。[1]–[4]。

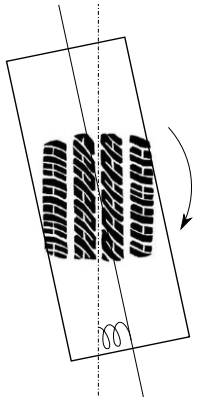

图 1：接触斑与轮毂之间的扭转

在极低速下转动车轮所需的转向扭矩，是驾驶员获得的一项重要反馈 [5]–[8]。它能让驾驶员了解路面与轮胎接触处的摩擦程度。这也是设计车辆转向系统时需要考虑的重要因素。它会影响转向器传动比的选择、是否需要助力以及助力的形式。随着电动助力的使用日益广泛，以及随着“线控转向”系统出现新的考量，[9], [10], 这一主题变得愈发重要。

[1] 通讯作者。意大利米兰理工大学机械工程系博士研究生。电子邮箱：jai.prakash@polimi.it[2] 意大利米兰理工大学机~~械工程系助理教授。~~电子邮箱：michele.vignati@polimi.it[3] 意大利米兰理工大学机械工程系副教授。电子邮箱：edoardo.sabbioni@polimi.it

在低速行驶时，轮胎侧向特性会呈现一些特殊现象，这些现象往往被忽视，但在车辆控制应用中十分重要，例如自动转向系统。现有大量文献对中高速下的轮胎-路面接触行为进行了建模 [11]–[14]。这些模型在低速下会遇到数值问题，因为车轮的纵向速度出现在纵向和侧向滑移表达式的分母中。目前通常使用经验公式计算原地转向阻力矩 [15], [16], ，但经验公式无法反映转向阻力矩与转向车轮转角之间的关系。

Wang 等人 [17] 基于车辆道路试验分析了转向车轮转角、摩擦系数、轮胎气压和垂向载荷对原地转向阻力矩的影响。在其研究中，[18], 他们还考察了轮胎与路面接触对原地转向阻力矩的影响。然而，建模时忽略了主销偏置对转向阻力矩的影响。此外，分析仅针对原地转向工况，并未考虑车轮滚动时的情况。Zhuang [19], 在其原地转向阻力矩研究中引入了 LuGre 摩擦模型，并进行了参数辨识和仿真计算。

Cao 等人 [20] 建立了轮胎与路面的有限元模型，用于仿真低速转向摩擦力，并确定转向摩擦系数与轮胎纵向速度之间的关系。然而，该关系未能描述轮胎滚动时部分转向力矩衰减的现象。

Jagt [21], 提出了一种专门用于生成零速度下转向力矩响应的模型。在正弦转向输入以及轮胎与路面接触处周期性达到完全滑动的条件下，该模型取得了定性上良好的结果。然而，该模型未能描述转向力矩随轮胎滚动速度的变化。

本文提出了一种指数衰减模型，用于模拟转向车轮滚动时转向力矩的衰减行为。枢轴转向会使轮胎绕垂直轴发生扭转。由于轮胎扭转，扭转变形以势能的形式储存起来。扭转变形不断累积，直至达到接触斑处可用的摩擦极限。达到摩擦极限后，接地印迹开始滑动。这会使扭转变形达到饱和，此时扭转变形等于轮毂转向角与接触斑转向角之差。轮胎开始滚动后，储存在轮胎扭转中的能量逐渐衰减。轮胎滚动得越快，扭转变形衰减得越快。本文探讨了滚动速度与转向力矩衰减之间的一种新关系。本文结构如下。“方法”一节首先推导轮胎与路面接触处由摩擦产生的最大可用转向力矩表达式，然后采用刷子模型方法推导转向力矩的指数衰减模型。“结果”一节展示新模型得出的结果。“讨论与结论”一节讨论所提出模型的关键发现，并对全文作出总结。

方法

I. 摩擦极限

低速时产生转向力矩的主要因素包括接触斑摩擦力、由主销内倾、主销后倾和车轮外倾角产生的回正力矩。接触斑摩擦力的贡献占主导地位，因此忽略其他较小倾角所产生的回正力矩影响。

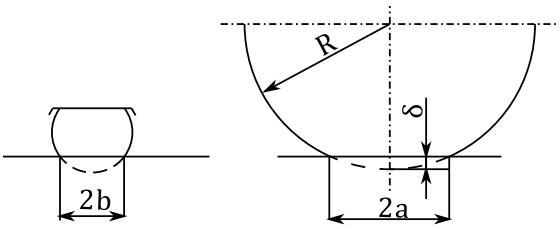

图 2：轮胎与路面接触

轮胎与路面的表面接触可近似表示为图 2 所示。

其中，δ 是轮胎在法向载荷F_z作用下的变形量。R 是轮胎的未变形半径。$2a$ 和 $2b$ 分别是轮胎-路面接触斑的长度和宽度。可使用[22], 中给出的经验关系式，计算δ（cm）、$2a$ （m）和$2b$ （m）的数值。

$$\delta = ck\frac{F_z^{0.85}}{B^{0.7}D^{0.43}P^{0.6}} \quad (1)$$

$$a = \frac{D}{100}\left(\frac{\delta}{D}\right)^{s} \quad (2)$$

$$b = \frac{B}{200}\left(1 - e^{-t\delta}\right) \quad (3)$$

c，与轮胎类型相关的参数。斜交轮胎取$c = 1.15$，子午线轮胎取$c = 1.5$。B，轮胎宽度，单位为cm。D，轮胎直径，单位为cm。$k = 0。42$。P，轮胎气压，单位为$100kPa$。F_z，垂向载荷，单位为$10N$。$s = 0。557$，经验系数。$t = 122.7$，经验系数。

通常，车轮并非绕接触斑中心转动，而是绕其转向轴转动。由于主销偏距、主销后倾、车轮外倾角和主销内倾角的影响，转向轴不同于穿过接地印迹中心的垂直轴。不过，为了进行此处的推导，转向轴被视为穿过接地印迹中心的垂直轴。当载荷较小时，

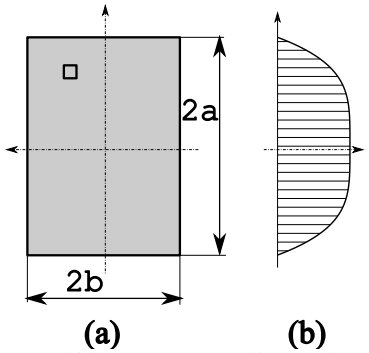

图 3：接触斑视图：(a) 接地印迹近似；(b) 沿纵向轴的法向压力分布

接地印迹近似为圆形，但随着载荷增加，接地印迹可以近似为矩形。图3展示了所考虑的接地斑几何形状，以及沿纵向轴的法向压力分布。

Cao 等人 [20], 提出，子午线轮胎沿纵向轴的压力分布呈4^{th} 阶。

$$p = \frac{5F_z}{8a}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right] \quad (4)$$

假设沿 y轴的压力分布恒定。图3a中的微元$dxdy$ 所受法向载荷为：

$$dF_z = \frac{p(x)}{2b} \cdot dx \cdot dy \quad (5)$$

车轮在静止状态下转向时，接触斑处会发生扭转滑动。若将动摩擦系数视为常数 μ，则该微元所受的摩擦力为：

$$dF_f = \mu \cdot dF_z \quad (6)$$

绕旋转轴产生的摩擦力矩为：

$$dM_f = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dF_f \quad (7)$$

若认为静摩擦系数与动摩擦系数相等，则对dM_f 在接地斑区域内积分，可得单个轮胎的转向摩擦力矩极限：

$$M_{f,lim} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} dM_f \quad (8)$$

II. 指数衰减

为推导转向力矩的衰减表达式，本文考虑一种简单的轮胎扭转情形：轮胎先在转向力矩作用下，于零滚动速度时发生扭转；随后，轮胎沿轮毂平面向前滚动。为简化起见，假设轮胎沿轮毂平面自由滚动。

采用刷子模型方法推导转向力矩衰减的表达式。在刷子模型中，一排弹性刷毛与路面接触。刷毛可以沿平行于路面的任意方向发生偏转。考虑到刷毛的尺寸相对于接触斑尺寸很小，可以合理地假设，即使在较小转向角下，大多数刷毛也会达到剪切应力饱和状态。为说明该方法，图4a显示了根据作用于刷毛上的法向压力而达到饱和的12根刷毛。当轮胎滚动s的距离时，刷毛向后方移动，如图4b所示。上半部分的刷毛保留了之前的偏转，因此也保留了之前的剪应力。当刷毛“1”向后移动s的距离时，它能够承受更多

由于法向压力增加而产生的剪应力。但由于车轮仅进行滚动而不再转向，因此会保持其原有的应力。相反，随着法向压力分布沿向后方向减小，下半部分刷毛的部分剪应力会丧失，如图4b所示。因此，在接触斑的下半部分，剪应力在$x = -s$之后开始产生。图4c显示了车轮滚动了s的距离后剩余剪应力的分布。

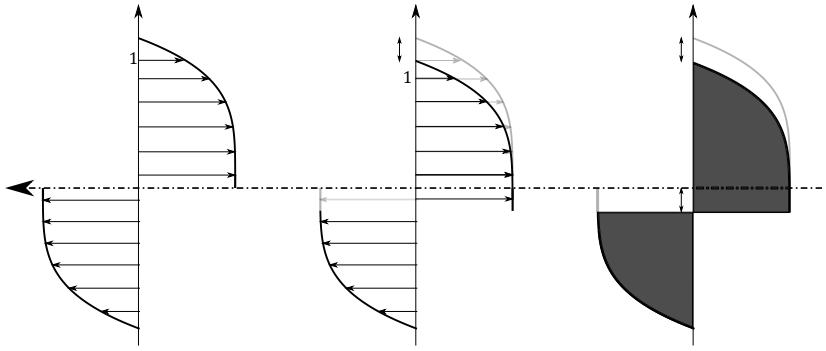

图4：接触斑处的剪应力：(a) 刷毛的饱和扭转；(b) 考虑自由滚动时轮胎纵向移动；(c) 移动后的剩余剪应力

对于图4a，当接地印迹上半部和下半部的剪应力分布相同时，单位宽度力矩为：

$$M_{contactpatch} = M_{top} + M_{bottom} = 2\int_0^a \mu p \cdot x \cdot dx \tag{9}$$

其中，p由方程（4）给出。可以观察到，在接地印迹的底部区域，剪应力分布以x-轴为对称轴呈镜像分布，见图4a。在方程（9）中，$M_{contactpatch}$ 恰好是M_{top}的两倍。代入p 后，对方程（9）积分，可将$M_{contactpatch}$ 定义如下。

$$M_{contactpatch} = \frac{5a\mu F_z}{12} \tag{10}$$

如图4c所示，上半部分的剪应力分布向后移动了距离 s。但下半部分的分布保持不变。下半部分剪应力分布只是积分限发生了变化。

$$M_{top} = \mu\int_{-s}^{a-s} \frac{5F_z}{8a}\left[1 - \left(\frac{x+s}{a}\right)^4\right] \cdot x \cdot dx \tag{11}$$

$$= \frac{5\mu F_z}{8a^5}\left[\frac{a^4(a-s)^2}{2} - \frac{(a-s)^6}{6} - \frac{4(a-s)^5 s}{5} + \frac{s^6}{30} - \frac{3(a-s)^4 s^2}{2} - \frac{4(a-s)^3 s^3}{3} - \frac{(a-s)^2 s^4}{2} - \frac{a^4 s^2}{2}\right] \tag{12}$$

$$M_{bottom} = \mu \int_{-a}^{-s} \frac{5F_z}{8a}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 1\right] \cdot x \cdot dx \tag{13}$$

$$= \frac{5\mu F_z}{8a^5}\left[\frac{a^6}{3} - \frac{a^4 s^2}{2} + \frac{s^6}{6}\right] \tag{14}$$

$$M_{contactpatch} = M_{top} + M_{bottom} = f(s) \tag{15}$$

方程（15）给出了轮胎滚动距离 s 后剩余的转向力矩。将 $s = 0$ 代入方程（15）进行快速合理性检查，可得方程（10），这确保了该方程在初始条件附近的正确性。了解 $M_{contactpatch}$ 随滚动距离 s 的变化率很有意思。由于方程（15）关于 s 是非线性的，因此只在初始条件附近计算衰减率，即当 s 是无穷小时。

$$\left.\frac{dM_{contactpatch}}{ds}\right|_{s\to 0} = -\frac{\mu F_z}{2} \tag{16}$$

将方程（16）除以方程（10），可得

$$\left.\frac{dM_{contactpatch}}{ds}\right|_{s\to 0} = -\frac{1}{5a/6} M_{contactpatch} \tag{17}$$

由于 $ds = Vdt$，其中 V 为轮胎滚动速度，可得以下关系式

$$\boxed{\left.\frac{dM_{contactpatch}}{dt}\right|_{s\to 0} = -\frac{V}{5a/6} M_{contactpatch}} \tag{18}$$

方程（18）表明，随着轮胎滚动，转向力矩呈指数衰减。衰减率与接地印迹长度成反比；接地印迹越小，衰减越快。衰减率与滚动速度成正比；滚动速度增加时，转向力矩衰减得更快。

如图5所示，如果将轮毂视为刚性体，且 $K_{torsion}$ 为轮胎扭转刚度，则扭转力矩为：

$$M_{contactpatch} = -K_{torsion}(\delta_{wheelHub} - \delta_{contactPatch}) \tag{19}$$

对方程（19）关于时间求导，得到：

$$\frac{dM_{contactpatch}}{dt} = -K_{torsion}\frac{d}{dt}(\delta_{wheelHub} - \delta_{contactpatch}) \tag{20}$$

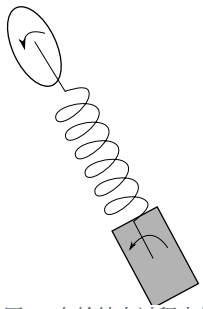

图5：车轮转向过程中的轮胎扭转

代入方程（19）和（20）到（18）中可得：

$$\frac{d}{dt}\left(\delta_{wheelHub}-\delta_{contactpatch}\right)=-\frac{V}{5a/6}\left(\delta_{wheelHub}-\delta_{contactpatch}\right) \quad (21)$$

III. 范德雅赫特模型

为检验上述推导出的模型，采用 Jagt [8] 模型作为参考模型。Jagt 模型描述零滚动速度下的转向力矩响应。Jagt方法的原理是：在给定转向输入变化率的情况下，轮胎角偏转的增长率 $\dot{\beta}$ 会随最大可达偏转量与当前偏转量之间剩余差值的某个函数成比例地减小。转向力矩逐渐趋近于其最大值，即轮胎-路面接触斑处可达到的摩擦极限。

根据 Jagt 模型，零滚动速度下的转向力矩可通过以下方程组计算：

$$\dot{\beta}=-\left[1-p\left(\frac{M_{contactPatch}}{M_{f,lim}}\right)^2\right]\dot{\delta}_{wheelHub} \quad (22)$$

$$\dot{M}_{contactPatch}=K_{torsion}\cdot\dot{\beta} \quad (23)$$

$$p=0;\quad if\ sgn(\beta)\neq -sgn\left(\dot{\delta}_{wheelHub}\right),\quad else\ p=1 \quad (24)$$

需要说明的是，方程（20）和（23）相同，因为：

$$\beta=\delta_{contactPatch}-\delta_{wheelHub} \quad (25)$$

对于一条静止的轮胎（规格 P205/65R15），在零滚动速度下，其对交替转向角变化的响应曲线与图6相似。该模型的表现相当不错，只有在初始上升段与实验数据存在轻微偏差。

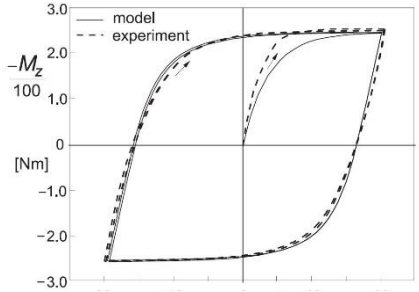

图6：载荷 Fz = *4800* N 下，非滚动轮胎压在平板上时，力矩随转向角变化的计算值和实验测量值。转载自《轮胎与车辆动力学》 *[23]*

下一节将详细介绍如何融合 Jagt模型与转向力矩指数衰减模型，以估算不同滚动速度下的转向力矩。

结果

在施加正弦转向角变化，且周期性达到近乎完全滑动状态时，Jagt模型能取得良好的结果。Pacejka [23] 借助系数 w_{Vlow} 将 Jagt模型与轮胎魔术公式结合，该系数定义如下：

$$\begin{aligned} &if \quad |V| < V_{low} \\ &\quad w_{Vlow} = 0.5\left\{1+\cos\left(\pi\frac{V}{V_{low}}\right)\right\} \\ &else \\ &\quad w_{Vlow} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

其中，V_{low} 是指超过该滚动速度后，Jagt模型产生的力矩可视为消失。组合方程是Jagt模型产生的力矩与轮胎魔术公式中的回正力矩的加权平均值。二者的权重分别为 w_{Vlow} 和 $(1-w_{Vlow})$。

本文没有采用对Jagt模型进行加权的方法，而是为其补充了新颖的转向力矩指数衰减模型。所得模型是Jagt模型方程（22）的贡献与指数衰减模型方程（21）的贡献之和。

$$\dot{\beta} = -\left[1-p\left(\frac{M_{contactPatch}}{M_{f,lim}}\right)^2\right]\dot{\delta}_{wheelHub} - \frac{V}{5a/6}\beta \tag{27}$$

$$\dot{M}_{contactPatch} = K_{torsion}\cdot\dot{\beta}$$
$$p = 0; \quad if\ sgn(\beta) \neq -sgn\left(\dot{\delta}_{wheelHub}\right), \quad else\ p = 1 \tag{28}$$

图 7 展示了通过对方程（27）和方程（28）给出的运动方程进行积分，计算得到的不同轮胎滚动速度下的反向转向力矩。动态输入为 $\delta_{wheelHub}$、$\dot{\delta}_{wheelHub}$ 和 V。$\delta_{wheelHub}$ 是正弦转向输入，在 $V = 0$、$1\ and\ 10\ km/h$ 下为 $\dot{\delta}_{wheelHub} = 5\sin(2\pi 0.5)$。在较高的滚动速度下，转向运动通常非常小。因此，在 $100\ km/h$ 的速度下，转向幅度设为 $1\ deg$。可以观察到，在零滚动速度下，只有 Jagt

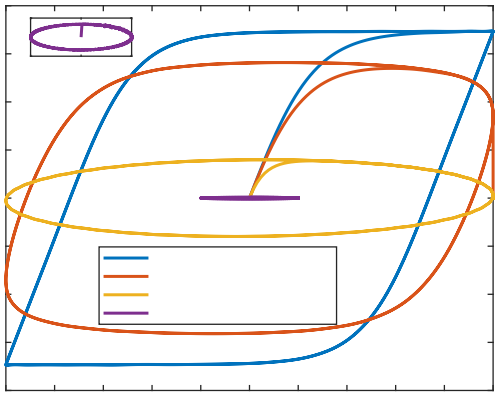

图 7：不同速度下正弦转向输入的反向转向力矩

模型贡献处于激活状态。随着滚动速度增加，指数衰减贡献占据主导地位，从而降低转向力矩。

仿真所用的参数值列于表 I。

表 I：仿真参数值

参数	数值	**Unit**
F_z	200	Kg
$K_{torsion}$	3000	$N-m$
B	14.5	cm
D	50.42	cm
P	2.5	100 kpa
μ	0.7	[1]
$a\ (calulated)$	0.0684	M
$b\ (calulated)$	0.0725	M
$M_{f,lim}\ \ (calulated)$	69.28	$N-m$

图 8错误！未找到引用源。展示了该模型在枢轴转向、加速度变化，随后以 10 km/h 恒定滚动速度运行时的输出。该模型仅用于仿真接地印迹内部的扭转剪切应力状态。该模型未考虑接地印迹处侧向剪切应力产生的力矩。因此，该模型将滚动加速度视为准静态加速度。

图 8 可分为四个部分。$0-2\ sec$ 在枢轴转向条件下施加正弦转向输入。在枢轴转向条件下，转向力矩达到饱和其上限为接地印迹处可用的最大摩擦力，见方程（8）。转向力矩在转向角改变方向之前就已改变方向，这主要是因为转向角变化率先改变了方向。第二部分 $2-3$。$5\ sec$ 此时滚动速度正在增加，并观察到转向力矩衰减。滚动速度越高，衰减越快。第三部分 3。$5-4$。$5\ sec$ 此时

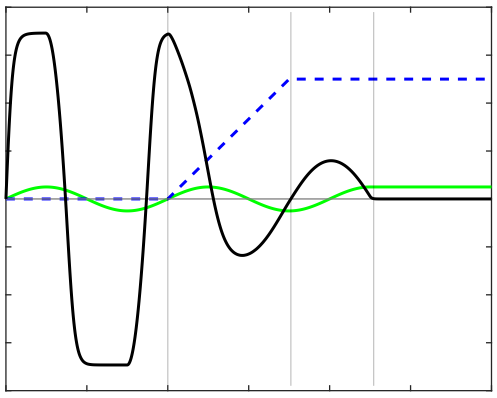

图 8：枢轴转向、加速度和恒定非零滚动速度下正弦转向输入对应的反向转向力矩

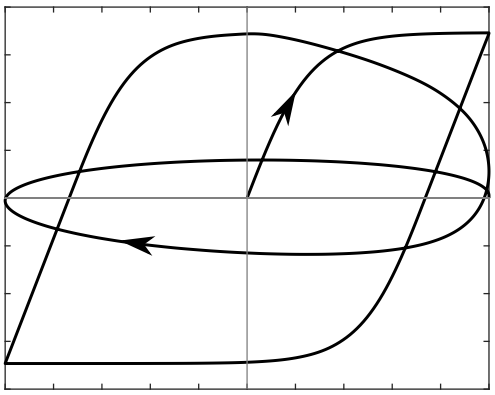

图 9：反向转向力矩与转向角的关系

滚动速度恒定，并采用正弦转向输入。在第三部分，由于滚动速度为 10 km/h，转向力矩远低于枢轴转向时的力矩。第四部分 $4.5-6\ sec$ ，滚动速度和转向输入均保持恒定。由于

根据指数衰减模型，转向力矩最终会消失。转向力矩的消失表明势能也随之消失；这些势能以扭转的形式储存在轮胎内部。

图 9 所示的回线清晰地展现了图 8 所讨论的转变，即从原地转向过渡到正弦转向输入下滚动速度较高的状态。

讨论与结论

转向力矩响应受多种因素影响。主要因素包括转向轴几何结构、主销偏距、轮胎与路面接触摩擦、法向载荷、轮胎尺寸、转向速率和轮胎滚动速度。若忽略转向轴几何结构和主销偏距，则车轮转向时产生的转向力矩仅由横向剪切力和扭转力产生。在中高速纵向速度下，可有效使用 Pacejka [24] 轮胎模型等经验模型方法来模拟剪切力。在低速下，这些经验模型给出的（横向）剪切力数值较低，与原地转向所需的高转向力矩这一实际情况不符。本文提出的 Jagt模型与转向力矩指数衰减模型相结合，可得出接地印迹处扭转应力产生的转向力矩，并可将其直接与 Pacejka 轮胎模型给出的（横向）剪切力所产生的力矩相加。

转向力矩的指数衰减率与滚动速度成正比，与接地印迹长度成反比。这一现象符合实际情况：车轮开始滚动后，枢轴转向时观测到的力矩会减小。本文提出的衰减率仅在每个时间步长内的滚动距离远小于接地印迹长度时才有效，见方程（18）。这表明，在对运动方程进行积分时，滚动速度越高，时间步长就应越小。

未来工作：考虑联合滑移工况，以估算方程（6）中的摩擦系数。由于存在纵向和侧向剪切应力，轮胎与路面接触处可用于承受扭转应力的摩擦力，比不存在这些应力时更小。联合滑移工况会限制 μ，因此方程（8）中的 M_{lim} 也会减小。M_{lim} 受限意味着，在存在纵向和侧向剪切应力时，转向力矩会更早达到饱和。未来工作还包括在轮胎试验台上对这一新模型进行实验验证。

该模型可应用于许多领域。例如，在车辆远程操控情况下向人类操作者提供转向反馈；在设计线控转向和电动助力转向系统时估算正确的扭矩需求。

参考文献

[1] T. Shiiba 和 W. Murata，“通过车辆行驶试验对转向扭矩反馈仿真器进行实验验证”，J. Mech. Sci. Technol.，第 23 卷，第 4 期，第 954–959 页，2009 年，doi: 10.1007/s12206-009-0320-9。[2] D. Karimi 和 D. Mann，“农业车辆方向盘上的扭矩反馈”，Comput. Electron. Agric.，第 65 卷，第 1 期，2009 年，doi: 10.1016/j.compag.2008.07.011。[3] W. Y. Park、S. Y. Kim、C. H. Lee、D. M. Choi、S. S. Lee 和 K. S. Lee，“地面状况、轮胎充气压力和轴荷对转向扭矩的影响”，J. Biosyst. Eng.，第 29 卷，第 5 期，2004 年，doi: 10.5307/jbe.2004.29.5.419。[4] Y. JIN、Y. LU、J. GONG、Z. LU、W. LI 和 J. WU，“基于拖拉机液压线控转向的电液加载试验台设计与实验”，Asian Agric. Res.，第 7 卷，第 12 期，第 86–89 页，2015 年，doi: 10.22004/AG.ECON.240745。[5] F. Friedrichs 和 B. Yang，“基于转向和车道数据特征的真实驾驶条件下困倦监测”，载于欧洲信号处理会议，2010 年，第 209–213 页，访问日期：2021 年 8 月 25 日。[在线]。可获取自：https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7096521。[6] D. Toffin、G. Reymond、A. Kemeny 和 J. Droulez，“方向盘反馈对驾驶员表现的作用：驾驶模拟器与建模分析”，Veh. Syst. Dyn.，第 45 卷，第 4 期，第 375–388 页，2007 年，doi: 10.1080/00423110601058874。[7] Tyler M Grant、Davood Karimi 和 Danny D Mann，“转向扭矩反馈对拖拉机模拟器中驾驶表现的影响”，2013 年 11 月，doi: 10.13031/2013.24175。[8] J. P. Switkes、J. C. Gerdes、G. F. Schmidt 和 M. Kiss，“驾驶员对转向扭矩扰动的响应：一项关于辅助车道保持的用户研究”，IFAC Proc. Vol.，第 40 卷，第 10 期，第 243–250 页，2007 年 1 月，doi: 10.3182/20070820-3-US-2918.00034。[9] Y. Yao，“车辆线控转向系统控制”，SAE Tech. Pap.，2006 年 4 月，doi: 10.4271/2006-01-1175。[10] P. Yih 和 J. C. Gerdes，“用于车辆状态估计与控制的线控转向”，载于 AVEC 会议论文集，2004 年，第 785–790 页，访问日期：2021 年 8 月 25 日。[在线]。可获取自：https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.520.6138&rep=rep1&type=pdf 。[11] F. Cianetti、L. Fabellini、V. Formica 和 F. Ambrogi，“简化汽车转向动力学模型的开发与验证”，Proc. Inst. Mech. Eng. Part D J. Automob. Eng.，第 235 卷，第 8 期，2021 年，doi: 10.1177/0954407020984668。[12] K. T. R. van Ende、F. Küçükay、R. Henze、F. K. Kallmeyer 和 J. Hoffmann，“中间位置操纵性背景下的车辆和转向系统动力学”，Int. J. Automot. Technol.，第 16 卷，第 5 期，2015 年，doi: 10.1007/s12239-015-0076-4。[13] P. E. Pfeffer、M. Harrer 和 D. N. Johnston，“关于中间位置操纵性的车辆与转向系统相互作用”，Veh. Syst. Dyn.，第 46 卷，第 5 期，2008 年，doi: 10.1080/00423110701416519。

[14] P. E. Pfeffer 和 M. Harrer，“稳态转弯时方向盘中心区域的转向扭矩特性”，2008，doi: 10.4271/2008-01-0502。[15] H. Jiang、Z. Zhou、Y. Qian 和 H. Liu，“从机动性和能效角度研究电控液压助力转向系统的可变助力特性与控制策略”，《机械工程学报》，第51卷，第22期，第88–97页，2015年11月，doi: 10.3901/JME.2015.22.088。[16] R. S. Sharp 和 R. Granger，“停车速度下的汽车转向扭矩：”，http://dx.doi.org/10.1177/095440700321700202，第217卷，第2期，第87–96页，2016年8月，doi: 10.1177/095440700321700202。[17] Y. Wang、X. Gao 和 X. Zhang，“重型多轴转向车辆轮胎的静态转向阻力矩”，《农业工程学报》，第26卷，第10期，2010，doi: 10.3969/j.issn.1002-6819.2010.10.024。[18] W. Yunchao、P. Feng、W. Pang 和 M. Zhou，“基于轮胎扭转变形的原地转向阻力矩”，《地面力学》，第52卷，第1期，2014，doi: 10.1016/j.jterra.2014.02.003。[19] Z. Ye 和 G. Konghui，“基于LuGre模型的轮胎原地转向模型”，《汽车技术》，第7期，2008。[20] D. Cao、B. Tang、H. Jiang、C. Yin、D. Zhang 和 Y. Huang，“考虑轮胎与路面间摩擦的车辆低速转向阻力矩研究”，《应用科学》，第9卷，第5期，2019，doi: 10.3390/app9051015。[21] P. Jagt van der，“通往虚拟车辆原型开发之路：用于加速车辆动力学开发的新型CAE模型”，埃因霍温理工大学，2000。[22] J. D. Zhuang，《车辆地面力学计算》，机械工业出版社：中国北京，2002，第52–60页。[23] H. B. Pacejka，“第9章——短波长中频轮胎模型”，载于《轮胎与车辆动力学》（第三版），第三版，H. B. Pacejka 编。牛津：巴特沃斯-海涅曼，2012，第441–442页。[24] H. B. Pacejka，“第4章——半经验轮胎模型”，载于《轮胎与车辆动力学》（第三版），第三版，H. B. Pacejka 编。牛津：巴特沃斯-海涅曼，2012，第149–209页。

图列表标题

图1：接触斑与轮毂之间的扭转

图2：轮胎与路面接触

图3：接触斑视图：(a) 接地印迹近似；(b) 沿纵向轴的法向压力分布 图4：接触斑处的剪应力：(a) 刷毛的饱和扭转；(b) 轮胎移动

考虑自由滚动时沿纵向移动；以及 (c) 移动后的剩余剪应力

图5：车轮转向期间的轮胎扭转

图6：对于以载荷 Fz = 4800 N 压在平板上的非滚动车轮，力矩随转向角变化的计算值与实验评估值。转载自《轮胎与车辆

动力学”

图 7：不同速度下正弦转向输入的反向转向力矩 图 8：枢轴转向、加速度和恒定非零滚动速度下正弦转向输入的反向转向力矩 图 9：反向转向力矩与转向角的关系

表格列表

表 I：仿真的参数值