arXiv:2303.03022v1 [math.FA] 6 Mar 2023

关于 Ritt 算子、其 H^∞ 函数演算及相关平方函数估计的评论

BERNHARD H. HAAK

Abstract. 本文讨论 Ritt 算子的 H^∞ 函数演算的有界性及相关平方函数估计。本文旨在以更简洁、精炼且略为一般化的方法，探讨 Le Merdy 关于这一主题的结果 [19] 。

1. Introduction and main result

近年来，Ritt 算子（或称 Ritt-Tadmor 算子）及其函数演算受到了一定关注，参见例如 [1, 2, 4, 5, 8, 14, 17, 19, 21, 24, 26]。众所周知，扇形型算子或条带型算子的 H^∞ 函数演算的有界性与某些平方函数估计相关，参见例如[15, 18, 20], ，以及 [10, 12] （其中包含详尽的参考文献）。接下来将陈述此类结果针对 Ritt 算子的一个“离散”类比。

定理 1.1（Le Merdy）。设 $1 < p < \infty$ 和 $T:\ L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 是一个 Ritt 算子。则以下断言等价。

(a) 对于某个 $\gamma \in (0, \pi/2)$，算子 T 具有有界的 $H^\infty(B_\gamma)$-函数演算，其中 B_γ 是复单位圆内的某个 Stolz 型区域（见下方图 1）。（b）算子 T 及其伴随算子 $T^*:$ $L^q(\Omega) \to L^q(\Omega)$ 均满足一致估计

$$\left\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k \big| (\mathrm{Id} - T) T^{k-1} f \big|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$$

$$\textit{and} \quad \left\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k \big| (\mathrm{Id} - T^*) (T^*)^{k-1} g \big|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{L^q} \lesssim \|g\|_{L^q}$$

我们将针对具有某些几何条件的巴拿赫空间表述 Le Merdy 的结果（精确定义见第 2 节）。基本思想是将平方和

$$\left\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{L^p} \tag{1.1}$$

替换为如下类型的随机和

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k \right\|_X \qquad \text{or} \qquad \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_X$$

其中，变量 r_k （分别为 γ_k）指一列相互独立、同分布的拉德马赫（分别为标准高斯）随机变量。对于 $X = L^p(\Omega)$的情形，以及更一般的有限余型巴拿赫空间情形，

Date: 2023 年 3 月 7 日。

这两个随机和在双边不等式的意义下是可比的。此外，当 $X = L^p(\Omega)$且 $1 < p < \infty$时，这两个表达式都等价于 (1.1)。

本文提出的推广可以在对算子和巴拿赫空间几何作出不同假设的情况下，拆分为若干具体命题，这些内容将在第 4–6 节讨论。一个涵盖所有这些结果、并使我们能够将研究结果与 Le Merdy 的定理 1.1 进行比较的框架，是考虑满足 Pisier 性质（α）的巴拿赫空间，定义如下。我们的主要结果可以表述如下：

定理 1.2. 设 X 是具有 Pisier 性质（α）的巴拿赫空间，且 $T \in \mathcal{B}(X)$ 是 X上的有界算子，使得（$I - T$）是单射且具有稠密值域。则以下断言等价。

(a) 算子 T 在某个$\omega \in (0, \pi/2)$ 上具有有界的 $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{Stolz}_\omega)$ 函数演算，其中 Stolz_ω 是 Stolz 型区域，见下图 1。(b) 对某些（因而也对所有） $m_1, m_2 \geq 1$，算子 T 及其伴随算子 T' 均满足一致估计

$$\mathbb{E}\Big\|\sum \gamma_k k^{m_1 - 1/2} (\mathrm{Id} - T)^{m_1} T^{k-1} x\Big\|_X^2 \leq C_{m_1} \|x\|$$

$$and \quad \mathbb{E}\Big\|\sum \gamma_k k^{m_2 - 1/2} (\mathrm{Id} - T')^{m_2} (T')^{k-1} x'\Big\|_{X'}^2 \leq C_{m_2} \|x'\|_{X'}.$$

此外，在此情形下，T 是一个 $\mathcal{R}$-Ritt 算子，因此也是 γ-Ritt 算子。

注意，若 T 是弱紧的，则平均遍历定理 [28] 表明X 可分解为

$$X = \ker(\mathrm{Id} - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)} =: X_0 \oplus X_1.$$

于是可以定义 $f(T) := f(1)\mathrm{Id} \oplus f(T|_{X_1})$，并注意到$(\mathrm{Id} - T|_{X_1})$是单射且具有稠密值域。这使得我们可以在要求$X$ 是自反巴拿赫空间的前提下，去掉定理 1.2 中算子 $\mathrm{Id} - T$ 具有单射性和稠密值域的假设。

定理 1.1 可以在具有性质(α)的巴拿赫空间这一背景下表述，这一点已出现在 [19, 第 7]节末尾的一条未编号注释中。因此，我们的方法着重于采用不同的证明，从而得到稍具一般性的结果。例如，与定理 1.1 不同，在我们的定理 1.2 中，$\mathcal{R}$-Ritt 性质不再是一个假设，而是一个结论。请注意，$\mathcal{R}$-有界性或 γ-有界性（因而 R/γ–Ritt 性质）通常很难在具体例子中验证：基于这一原因，我们认为我们的版本有重要改进。

我们的方法在平方函数的选择上也允许稍大的自由度，并且对 H^∞-函数的定义域要求更精确（关于文献中不同区域类型的讨论，见下文）。此外，我们的证明依赖于与我们在 [9] 中用于阐明 H^∞-函数演算与扇形型或条带型算子的（对偶）平方函数估计之间联系的相同结构性论证。最后，我们的方法避免了绕道采用扇形型算子 $A = \mathrm{Id} - T$的函数演算；Le Merdy [19] 在其证明的某些步骤中使用了这种方法。相反，我们始终置身于“Ritt 框架”之中。

致谢：作者谨感谢 Markus Haase 在函数演算和平方函数估计方面进行的诸多有益讨论。

2. Basic definitions from the geometry of Banach spaces

我们回顾一下巴拿赫空间几何中的一些标准术语，参见 [7,第 11] 章或 [12, 第 7] 章。

如果存在常数 $t_p(X)$，使得对于所有 $N \geq 1$ 和所有 x_1，……，$x_N \in X$，则称巴拿赫空间 X 具有Rademacher型 $p \in [1,2]$。

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\Big\| \leq t_p(X)\Big(\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^p\Big)^{1/p}$$

所有巴拿赫空间都具有 $p=1$ 型。若 $p>1$，则称其具有非平凡型。类似地，若存在常数 $c_q(X)$，使得对所有 $N \geq 1$ 和所有 x_1，……，$x_N \in X$，则称 X 具有 $q \geq 2$ 余型。

$$\Big(\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^q\Big)^{1/q} \leq c_q(X)\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\Big\|$$

若 $q=+\infty$，则需作显而易见的修改。所有巴拿赫空间都具有 $q=+\infty$ 余型。下面有两个理由说明为何要考虑这类空间。

首先，由于 c_0、ℓ_∞ 这类空间具有平凡余型，因此任何具有有限余型的巴拿赫空间都不可能包含这类空间的同构副本。因此，Kwapi´en–Hoffman–Jørgensen 定理 [11, 16] 保证，在具有非平凡余型的巴拿赫空间上，一致有界性（例如在 $L^2\Omega; X$ 范数下）以及随机和序列的收敛性

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} r_n x_n$$

等价。其次，在具有有限余型的巴拿赫空间上，高斯随机和与 Rademacher随机和

$$\mathbb{E}\Big\|r_n x_n\Big\|_X \qquad \text{and} \qquad \mathbb{E}\Big\|\gamma_n x_n\Big\|_X$$

相差一个仅取决于余型常数的等价常数，参见例如 [12, Theorem8.1.3]。

我们提醒读者注意 Kahane收缩原理：对于任意巴拿赫空间、任意 $N \geq 1$ 和 x_1、$\ldots x_N \in X$ 以及任意序列 $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ 属于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n r_n x_n\Big\| \leq \max\{|\alpha_n| : 1 \leq n \leq N\}\ \mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\Big\|. \tag{2.1}$$

如果一组算子 $\mathcal{T}$也满足类似的“压缩”性质（而非标量），即若 $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X;\, Y)$ 满足：对任意 $N \geq 1$和 x_1、$\ldots x_N \in X$ 以及任意 T_1，……，$T_N \in \mathcal{T}$

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} r_n T_n x_n\Big\|_Y \leq C\ \mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\Big\|_X.$$

我们称 $\mathcal{T}$为 $\mathcal{R}$-有界。令 N=1 可知，$\mathcal{R}$-有界集在 $\mathcal{B}(X)$ 中有界，但反过来一般并不成立。用高斯变量替代 Rademacher变量，可得到相应的 γ-有界性概念。Rademacher有界性或 $\mathcal{R}$-有界性蕴含 γ-有界性，但在有限余型空间中，这两个概念是一致的。有些地方我们需要

$$\mathcal{T}\ \ \mathcal{R}\text{–bounded} \quad \Rightarrow \quad \overline{\operatorname{absco}(\mathcal{T})}\ \ \mathcal{R}\text{–bounded}, \tag{2.2}$$

一个通常被称为“凸包引理”的命题，例如参见[6, 12]。

最后，我们回顾 Pisier 性质（α）的定义。若双指标随机和满足“压缩原理”，则称巴拿赫空间具有这一性质：

$$\widetilde{\mathbb{E}}\,\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{n\leq N,k\leq K}\alpha_{n,k}\widetilde{r_n} r_k x_{n,k}\Big\|$$

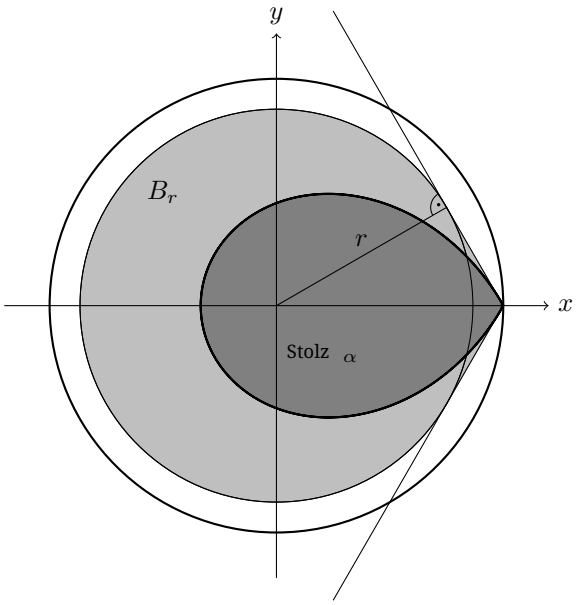

FIGURE 1. 文献中有两种 Stolz 域的定义：例如，对于 $\alpha = 2$，浅灰色区域 B_r，以及与之对应的较小 Stolz 区域 Stolz$_\alpha$ （深灰色）。这两个区域的精确定义将在下文第 3 节给出。

$$\leq \max\big\{|\alpha_{n,k}| : 1 \leq n \leq N, \quad 1 \leq k \leq L\big\}\, \widetilde{\mathbb{E}}\,\mathbb{E}\, \Big\| \sum_{n\leq N, k\leq K} \widetilde{r_n} r_k x_{n,k} \Big\|.$$

例如，所有可分的 L^p 空间、Besov 空间或 Sobolev 空间都具有这一性质。性质（α）意味着巴拿赫空间具有有限余型，但不一定具有非平凡型 X （例如 ℓ_1）。参见 [12, 第 7 节5]。

3. Basic definitions of Ritt operators and their functional calculus

Ritt 算子是在巴拿赫空间 X 上的有界算子，其谱包含于闭单位圆盘内，并满足 Ritt 条件 [23]

$$\exists K{>}0 \quad \forall |\lambda| > 1 : \qquad \|(\lambda - 1)R(\lambda, T)\| \leq K \tag{3.1}$$

若集合满足以下条件，我们称 T 为 $\mathcal{R}$-Ritt（分别为 γ-Ritt）：

$$\{(\lambda - 1)R(\lambda, T) : \quad |\lambda| > 1\} \tag{3.2}$$

是 $\mathcal{R}$-有界的（分别地， γ-有界）。

谈到算子的 H$^\infty$-函数演算时，我们需要指定全纯函数的定义域。定义在较小定义域上的函数演算“更好”，因为此时可容许的函数集合更大。根据经典的 Dunford-Riesz 泛函演算，任意有界算子都在一个足够大的定义域上容许有界函数演算，即存在一个有界代数同态

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{H}^\infty(\mathcal{O}) & \to & \mathcal{B}(X) \\ f & \mapsto & f(T) := \frac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma f(z)\, R(z,T)\, dz \end{array} \right.$$

对所有包含 T 的谱的复域 $\mathcal{O}$ 。Ritt 算子的意义在于，预解式条件 (3.1) 蕴含了更进一步的谱性质

这些性质使我们能够将域 $\mathcal{O}$ （最初是一个邻域 $\overline{\mathbb{D}}$）缩小为包含在 $\mathbb{D}\cup\{1\}$ 中的更小域，其中 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|<1\}$。

事实上，在直线 $\{\mathrm{Re}(\lambda)=1\}$ 上考察条件 (3.1)，很容易看出， T 的谱包含在以实轴为中心、角度为 $<\pi/2$、以 $z=1$ 为中心且向左开放的对称扇形内。此外，预解式在 $\overline{\mathbb{D}}^{\mathbb{C}}\cap\{Re(z)<1-\varepsilon\}$ 上的一致有界性表明，谱 $\sigma(T)$ 还满足

$$\sigma(T)\cap\{\mathrm{Re}(z)<1-\varepsilon\}\quad\subseteq\quad B(0,R)\cap\{\mathrm{Re}(z)<1-\varepsilon\}$$

对于某个半径为 $R\in$ 的圆盘（0, 1）。将两条谱信息相交，可得对于某个合适的 $r\in$（0, 1），必有 $\sigma(T)\subseteq B_r$，其中 B_r 是单点集 $z{=}1$ 与球 $B(0,r)$ 的凸包，见图 1。对命题 4.2] 的进一步分析 [8, 表明，Ritt 算子的谱位于一个小得多的子集中，我们将其称为 Stolz 域：形如以下形式的集合

$$\mathrm{Stolz}_\omega=\left\{z\in\mathbb{D}:\quad\frac{|1-z|}{1-|z|}<\omega\right\}\tag{3.3}$$

对于某个 $\omega>1$。我们称 ω 为该域的 Stolz 型。其开角为 2 arccos($\frac{1}{\omega}$)。

我们指出，巴拿赫空间上的有界算子 T 是 Ritt 算子，当且仅当以下两个条件同时成立：

$$\exists C_1>0:\forall n\geq 0:\qquad\|T^n\|\leq C_1\tag{PB}$$

and

$$\exists C_2>0:\forall n\geq 0:\qquad\|kT^{k-1}(\mathrm{Id}-T)\|\leq C_2\tag{DD}$$

第一个条件是幂有界性，第二个条件是离散导数条件。前者对应于 C_0-半群的有界性，而后者对应于其在某个扇形中的解析性。这两个条件缺一不可，否则无法刻画 Ritt 算子。事实上，一个简单的二维旋转满足 (PB)，但不满足 (DD)；而与相反蕴含相关的反例见 [13]Lemma 5. $\mathcal{R}$。类似地， $\mathcal{R}$-Ritt 意味着集合

$$\{T^n:\quad n\geq 1\}\cup\{kT^{k-1}(\mathrm{Id}-T):\quad k\geq 1\}$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 中是 $\mathcal{R}$-有界的，见 [19, Lemma 5.2]。

给定一个 Ritt 算子 T，其谱包含于 Stolz 型为 ω 的 Stolz 域中，并给定 $\nu>\omega$，我们令

$$\mathcal{E}_{\omega,\nu}:=\left\{\varphi\in\mathrm{H}^\infty(\mathrm{Stolz}_\nu):\ \exists\vartheta:\quad\omega<\vartheta<\nu\ \text{ such that }\ \tfrac{\varphi(z)}{1-z}\in L^1(\partial\mathrm{Stolz}_\vartheta)\right\}$$

对于 $f\in\mathcal{E}_{\omega,\ \nu}$ 我们有如下绝对收敛积分

$$\Phi(f):=f(T):=\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathrm{Stolz}_\vartheta}f(z)\,R(z,T)\,dz.\tag{3.4}$$

它定义了一个有界算子，另见图2。我们称映射 $\Phi:\mathcal{E}_{\omega,\ \nu}\to\mathcal{B}(X)$ 为 T 的初等函数演算。我们通过 [9] 中概述的一种抽象方法对此加以推广：假设每个 $f\in$H$^\infty$(Stolz$_\nu$) 都存在一个初等函数$e\in\mathcal{E}_{\omega,\ \nu}$，使得 $e(T)$ 是单射，且 $ef\in\mathcal{E}_{\omega,\ \nu}$。我们称 e 将 f 正则化。于是我们可以定义

$$\Phi(f):=f(T):=e(T)^{-1}(ef)(T)\tag{3.5}$$

并将函数演算从 $\mathcal{E}_{\omega,\ \nu}$扩展到 H$^\infty$(Stolz$_\nu$)：算子 $f(T):=\Phi(f)$ 至少是一个定义域稠密的闭算子，其有界性则不一定成立：如果它是有界的，我们就称 T 具有有界的 H$^\infty$(Stolz$_\nu$)-函数演算。

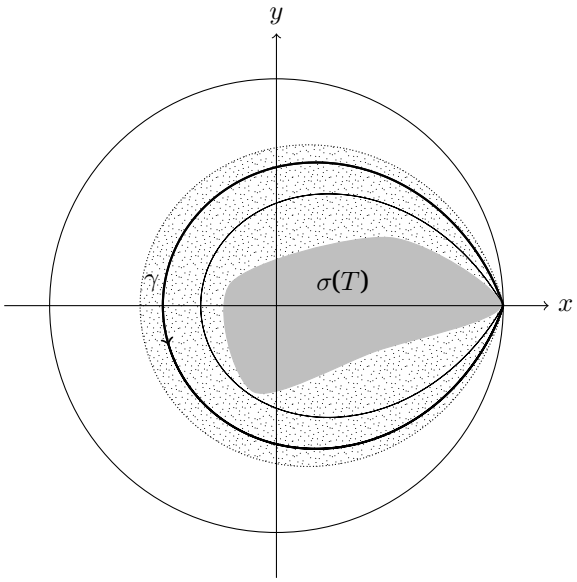

FIGURE 2. Ritt 算子的初等函数演算的谱与积分路径

由于我们将讨论上平方函数估计以及“下”平方函数估计，即形如以下形式的估计

$$\mathbb{E}\Big\|\sum \gamma_k k^{m_1-1/2}(\mathrm{Id}-T)^{m_1}T^{k-1}x\Big\|_X^2 \quad \geq \quad c\|x\|$$

对于 T 及其伴随算子，我们看到，(Id$-T$) 必然是单射且具有稠密值域。这表明，在给定的背景下，这类假设是自然的，尤其是在定理 1.2 中。这里还有一个有用的推论：Caley变换函数

$$e(z) := \frac{1-z}{1+z}$$

提供了一个很好的初等函数，可同时正则化所有 $f \in \mathrm{H}^\infty$ 。因此，只要 (Id$-T$) 是单射，上文 (3.5) 中给出的构造就适用。

最后，通常的函数演算构造要求对逼近序列的行为进行“弱”控制：假设一致有界序列 (f_n) 在 H^∞ 中逐点收敛到 f 。那么我们需要

$$\Phi(f_n)x \to \Phi(f)x \tag{3.6}$$

弱收敛，对稠密点集 $x \in X$ 中的点而言。我们仅考虑形式为 $x = e(T)y$ for $y \in X$ 的点，并假设 (Id$-T$) 的单射性和稠密值域能提供这样的稠密点集；在该点集上，甚至可以利用控制收敛定理轻易推出强收敛。

注意，等价的 Ritt 条件 (PB) 和 (DD) 可以用有界算子 acting form X to $\ell_\infty(X)$ 来重新表述:

$$x \mapsto (T^n x)_{n\geq 0} \qquad \text{and} \qquad x \mapsto (n(\mathrm{Id}-T)T^{n-1}x)_{n\geq 1}$$

分别。当我们讨论 H^∞ 演算有界性的平方函数刻画时，做法类似，但使用不同的序列

范数。给定一个可分希尔伯特空间 H 和一个巴拿赫空间 X，若（有界）算子 $\Phi : H \to X$ 是 γ-辐射算子，则高斯随机级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \, \Phi(h_n)$$

在 $L^2(\Omega; X)$ 中收敛，其中 (h_n) 是某个标准正交基。有关 γ-Radon 化算子理想的更多细节，请参阅 [12, 25]。在本文所考虑的情形中，我们始终令 $H := \ell_2$。于是，X-值序列可以通过如下方式与算子对应起来：在 ℓ_2 的某个标准正交基 (e_n) 上定义 $\Phi(e_n) := x_n$。序列 (x_n) 的 γ-范数定义为相应算子 Φ 的 γ-范数：

$$\big\|(x_n)_{n\geq 1}\big\|_{\gamma(\ell_2;X)} := \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_n \gamma_n \, x_n\Big\|_X^2\right)^{1/2}.$$

当 X 是希尔伯特空间时，这正是 $\ell_2(X)$-范数。

如果我们的 Ritt 算子 T 满足平方函数估计 Φ_m，则称其具有该估计，其中算子

$$\Phi_m : \left\{ \begin{array}{lcl} X & \to & \gamma(\ell_2; X) \\ x & \mapsto & \big(k^{m-1/2} T^{k-1} (\mathrm{Id} - T)^m x\big)_k \end{array} \right. \tag{3.7}$$

是有界的。除了平方函数之外，我们还考虑“对偶”平方函数估计。这些估计形式上是作用于

$$\Phi_m^* : \left\{ \begin{array}{lcl} X' & \to & \gamma(\ell_2; X)' \\ x' & \mapsto & \big(k^{m-1/2} (T')^{k-1} (\mathrm{Id} - T')^m x'\big)_k \end{array} \right. \tag{3.8}$$

其中 $\gamma(\ell_2; X)'$ 是 $\gamma(\ell_2; X)$ 的对偶空间，该空间由迹对偶定义，例如参见 [12, 15, 25]：

$$\big\|(x_n')_{n\geq 1}\big\|_{\gamma(\ell_2;X)'} := \sup\left\{ \sum_n \langle x_n', x_n \rangle : \quad \big\|(x_n)\big\|_{\gamma(\ell_2;X)} \leq 1 \right\} \tag{3.9}$$

若 X 具有非平凡型，则 $\gamma(\ell_2; X)' = \gamma(\ell_2; X')$。反身的 L^p-空间、反身的 Besov 空间或 Sobolev 空间等均属于这种情形。

在证明中，我们会多次用到一个方便的观察；该观察也出现在 [2, 定理 3.3] 的证明中。

引理 3.1. 设 $|u| < 1$ 且 $n \geq 0$。则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{n} (1-u)^{n+1} u^{k-1} = 1$$

引理 3.1 的证明。由于 $|u| < 1$，几何级数 $\sum_j u^j$ 可以逐项求导。因此，我们得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{n} u^{k-1} \;=\; \tfrac{1}{n!} \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} u^j\right) \;=\; \frac{1}{(1-u)^{n+1}}. \qquad \square$$

现在我们可以证明若干结果；这些结果结合起来，尤其可以证明定理 1.2。它们分为三个部分。在第 4 节中，我们给出一种新的简便方法，可从函数演算的有界性推导出平方函数估计。该方法还略微改进了 [19, Thm. 7.3]，其中只考虑了 $m_1 = m_2 = 1$ 的情形。在接下来的第 5 节中，我们将说明如何利用平方函数估计将 Ritt 性质“提升”为 γ-Ritt

或是在具有性质 (α) 的巴拿赫空间上的 $\mathcal{R}$-Ritt。最后，在第 6 节中，我们通过平方函数回到函数演算。这与 Le Merdy 在 [19]中提出的思路在本质上并无不同：这是一种经典的“借助平方函数推进”技巧，其依据是任何算子相对于平方函数范数都具有有界函数演算。

4. Obtaining square functions estimates from the boundedness of the H^∞-calculus on Stolz domains

我们将采用 [9] 的一个思想，并将其简化到最基本的形式。为使论述自成一体，我们重新给出部分论证，从而免去使用 [9] 中较抽象的符号。我们来考察 (3.7) 中的平方函数估计 Φ_m。关键是将其视为如下的函数演算表达式

$$\Phi_m : \left\{ \begin{array}{lcl} X & \to & \gamma(\ell_2; X) \\ x & \mapsto & (h \mapsto [F_m(z)|h]\,(T)x)) \end{array} \right.$$

其中 F_m 是一个向量值函数

$$F_m : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Stolz}_\omega & \to & \ell_2, \\ z & \mapsto & \Big(k^{m-1/2}(1-z)^m z^{k-1}\Big)_{k\geq 1}. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

由于我们讨论的是有限余型的巴拿赫空间 X，高斯随机和与 Rademacher 随机和等价。设 (r_n) 是一列独立的 Rademacher 变量，(h_n) 是 ℓ_2 中的某个序列。此外，假设 T 在 X 上具有有界的 $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{Stolz}_\nu)$ 函数演算，其中 $\nu > \omega$。那么

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big\| \sum_{n=1}^N r_n\,[F_m|h_n]\,(T)x\Big\| &= \mathbb{E}\Big\| \Big(\sum_{n=1}^N r_n\,[F_m|h_n]\Big)(T)x\Big\| \\ &\leq C_{\mathrm{H}^\infty}(T)\|x\|\,\mathbb{E}\sup_{z\in\mathrm{Stolz}_\nu}\Big|\sum_{n=1}^N r_n\,[F_m(z)|h_n]\Big| \\ &\leq C_{\mathrm{H}^\infty}(T)\|x\|\sup_{z\in\mathrm{Stolz}_\nu}\Big\|([F_m(z)|h_n])_k\Big\|_{\ell_1}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

若令 (h_n) 为一组标准正交基，便恰好得到 γ-范数的定义（事实上，在不包含 c_0 的巴拿赫空间中，这些部分和的一致有界性与整个随机级数的收敛等价；有限余型空间当然也如此）。由 γ-可和化算子的“理想性质”（例如参见 [25, 定理 6.2]），我们还有更大的选择自由，例如可取 (h_n) 为一组 Riesz 基（即某组标准正交基的同构像）。

考虑向量值函数 (4.1)，由 (4.2) 中给出的估计可知，只要我们能够选取一个 Riesz基 (h_n)，使得标量积 $([F_m(z)|h_n])_{n\geq 1}$ 构成绝对可和序列，且其 ℓ_1-范数在 Stolz 域上有一致有界性，那么函数演算的有界性就能给出所需的平方函数估计 Φ_m。这些标量积组成的序列是否平方可和，并不取决于 Riesz 基 (h_n) 的选取，但绝对和则会受到影响。我们以 $m = 1$ 为例说明这一点。于是我们写作$F = F_1$。

将 $F(z)$ 与 ℓ_2 的典范正交基 (e_n) 作标量积，我们得到

$$[F(z)|e_n] = \sqrt{n}(1-z)z^{n-1}$$

且该序列的 ℓ_1-范数等于

$$\sum_n |\,[F(z)|e_n]\,| = |1-z|\,\mathrm{Li}_{-\frac{1}{2}}(|z|)$$

其中 $\mathrm{Li}_s(z)$ 是多对数函数。根据 Wirtinger定理 [27] （另请参见例如 [22]），当 $|z|<1, z\to 1$ 时，它具有如下渐近行为：

$$\mathrm{Li}_{-1/2}(z) \quad\sim\quad \Gamma(3/2)(1-z)^{-3/2} \tag{4.3}$$

因此， ℓ_1-和在 Stolz 域上并非一致有界。这仅仅意味着， $h_n = e_n$ 是一个糟糕的基选择。

现在让我们构造 ℓ_2 的另一个性质更好的基。记$a := e^{2\pi i/3}$为一个非平凡的三次单位根，并令 $b := i$ 为一个四次根。利用这些，我们构造两个 5×5 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & a^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & b^2 & b^4 \\ 0 & 1 & b^2 & b^4 & b^6 \\ 0 & 1 & b^3 & b^6 & b^9 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad D_k = \mathrm{diag}(\sqrt{\tfrac{5k+1}{5k+j}})_{j=1..5}$$

由于 A 可逆，且 D_k 显然具有一致有界的条件数，因此 $A_k = AD_k$ 也显然具有一致有界的条件数。通过将ℓ_2 与 $\bigoplus_2 \mathbb{C}^5$ 等同，我们定义 ℓ_2 上的算子 $A = \bigoplus A_k$，并发现它是 ℓ_2的一个同构。因此，无限分块对角矩阵的各行

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & A_1 & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & A_2 & 0\dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

构成 ℓ_2的一个 Riesz基 $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ 。这个基具有 ℓ_2 的典范基所不具备的一些优良性质。事实上，我们观察到

$$\begin{array}{lll}
[F(z)|b_1] & = \sqrt{1}(1+az+a^2z^2)(1-z) & = \sqrt{1}(1-z)\ \ \frac{1-z^3}{1-az} \\
[F(z)|b_2] & = \sqrt{2}(1+a^2z+a^4z^2)(1-z)z & = \sqrt{2}(1-z)z\ \ \frac{1-z^3}{1-a^2z} \\
[F(z)|b_3] & = \sqrt{3}(1+bz+b^2z^2+b^3z^3)(1-z)z^2 & = \sqrt{3}(1-z)z^2\ \frac{1-z^4}{1-bz} \\
[F(z)|b_4] & = \sqrt{4}(1+b^2z+b^4z^2+b^6z^3)(1-z)z^3 & = \sqrt{4}(1-z)z^3\ \frac{1-z^4}{1-b^2z} \\
[F(z)|b_5] & = \sqrt{5}(1+b^3z+b^6z^2+b^9z^3)(1-z)z^4 & = \sqrt{5}(1-z)z^4\ \frac{1-z^4}{1-b^3z} \\
[F(z)|b_6] & = \sqrt{6}(1+az+a^2z^2)(1-z)^5 & = \sqrt{6}(1-z)z^5\ \frac{1-z^3}{1-az} \\
[F(z)|b_7] & = \sqrt{7}(1+a^2z+a^4z^2)(1-z)z^6 & = \sqrt{7}(1-z)z^6\ \frac{1-z^3}{1-a^2z}
\end{array}$$

以此类推：与 $F(z)$ 和典范基向量 e_n 的标量积相比，每个分式的分子中都多了一个正则化因子 $(1-z)$，而我们“付出”的代价是分母在某个非平凡单位根处出现一个极点——不过这些极点都位于 Stolz 域之外：它们不会影响 $z\in$Stolz$_\omega$ 上 ℓ_1-范数的一致有界性。

由于满足 Stolz 域条件 (3.3)，我们在 (4.3) 中看到的 $(1-|z|)^{-3/2}$ 的增长阶现在将由因子 $|1-z|^2$（充分）补偿：因此，采用 Riesz 基 (b_n) 而非典范正交基 (e_n) 时，我们在 (4.2) 中概述的方法确实可行。由此得到以下结果。

命题 4.1. 设 X 是一个具有有限余型的巴拿赫空间， T 是作用于 X 上、类型为 ω 的 Ritt 算子。若 T 具有某个 $\nu>\omega$ 的有界 H^∞(Stolz$_\nu$)- 演算，则对任意 $m\geq 1$

$$\Phi_m : \left\{ \begin{array}{lll} X & \to & \gamma(\ell_2; X) \\ x & \mapsto & \left(k^{m-1/2}T^{k-1}(\mathrm{Id}-T)^m x\right)_k \end{array} \right.$$

$$and \qquad \Phi_m^* : \left\{ \begin{array}{lcl} X' & \to & \gamma(\ell_2; X)' \\ x' & \mapsto & \left(k^{m-\frac{1}{2}} (T')^{k-1} (\mathrm{Id} - T')^m x'\right)_k \end{array} \right.$$

定义有界（对偶）平方函数。

证明。关于 $m > 1$ 的平方函数估计，其证明只是对上文所述 $m = 1$ 情形的直接修改，故略去。根据前面的讨论， Φ_m 的平方函数估计显然成立，因此我们只需说明对偶平方函数。回顾式 (3.9) 中的迹对偶。它继承了 γ-范数的理想性质，也就是说，我们可以从标准正交基转到 Riesz基。对于序列 $(x_k) \in \gamma(\ell_2; X)$，我们考虑

$$\begin{aligned} &\sum_k \langle [F_m(z)|b_k]\,(T)' x', x_k \rangle \\ &\lesssim \mathbb{E} \left\langle x', \sum_k r_k \,[F_m(z)|b_k]\,(T) \left(\sum_j r_j x_j \right) \right\rangle \\ &\leq C_{\mathrm{H}^\infty}(T) \|x'\| \sup_{z \in \mathrm{Stolz}_\nu} \Big\| ([F_m(z)|b_k])_k \Big\|_{\ell_1} \mathbb{E} \Big\| \sum_j r_j x_j \Big\| \\ &\leq \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, C_{\mathrm{H}^\infty}(T)\, \|x'\| \sup_{z \in \mathrm{Stolz}_\nu} \Big\| ([F_m(z)|b_k])_k \Big\|_{\ell_1} \mathbb{E} \Big\| \sum_j \gamma_j x_j \Big\|. \end{aligned}$$

最后一个不等式不需要有限余型，只需利用 Rademacher和被高斯和简单控制这一事实，参见 [7, 命题 12.11]。现在对所有满足 $\|(x_n)\|_\gamma \leq 1$ 的序列 (x_n) 取上确界，即得证明。□

5. 'Ritt property' via square function estimates

本节将 [19, 定理 5.3] 推广到具有性质（α）的巴拿赫空间。通常，性质（α）用于改进某些性质，例如将 Ritt 性质“升级”为 $\mathcal{R}$-Ritt 性质。请注意，我们在此更进一步：我们证明，在较弱的几何性质（α）下，仅有界算子的（对偶）平方函数估计就足以推出 $\mathcal{R}$-Ritt 性质。回顾一下，在具有性质（α）的巴拿赫空间上， $\mathcal{R}$-有界性与 γ-有界性是等价的概念。

定理 5.1. 设 T 是具有性质（α）的巴拿赫空间上的有界算子，且 $\mathrm{Id} + T$可逆。假设 T具有平方函数 Φ_{m_1} （对应于$m_1 \geq 1$ ）以及对偶平方函数 $\Phi^*_{m_2}$，其中 $m_2 \geq 1$。

那么 T 是 $\mathcal{R}$-Ritt（且是 γ-Ritt）。

回顾一下，性质（α）蕴含有限余型，因此 Rademacher 平均与高斯平均等价：本节中的 γ-Ritt 可以替换为 $\mathcal{R}$-Ritt。

证明。步骤 1： T 是一个 γ-幂有界算子。
主要思路是注意到， T^n 在形如 Φ_{m_1}、 Φ_{m_2}的平方函数上起移位作用。由此可以想到，将算子 T^n“推过”平方函数，从而得到 $\mathcal{R}$-有界性。为此，我们需要平方函数下估计。稍作修改后，这些估计可由引理 3.1 得到，我们将其视为一个近似恒等式：显然，对于任意 $m \geq 1$,

$$k^{m-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{k}(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)$$

按照对所有 $k > 0$均成立且常数一致的双边不等式的意义。由压缩原理 (2.1)，以及 (Id+T) 和 (Id+T')

分别是作用于 X 和 X' 上的同构这一事实可知，假设的 Φ_{m_1}、$\Phi^*_{m_2}$ 的（对偶）平方函数蕴含

$$\widetilde{\Phi}_{m_1}:\left\{\begin{array}{lcl} X & \to & \gamma(\ell_2;X)\\ x & \mapsto & \big(\sqrt{k}(k+1)\cdots(k+m_1-1)T^{k-1}(\mathrm{Id}-T)^{m_1}(\mathrm{Id}+T)^{-m_1}x\big)_k\end{array}\right.$$

$$\text{and}\quad \widetilde{\Phi}_{m_2}:\left\{\begin{array}{lcl} X & \to & \gamma(\ell_2;X)\\ x & \mapsto & \big(\sqrt{k}(k+1)\cdots(k+m_2-1)T^{k-1}(\mathrm{Id}-T)^{m_2}(\mathrm{Id}+T)^{-m_2}x\big)_k\end{array}\right.$$

相应的函数演算表达式为

$$\widetilde{\varphi}_{m_1}(z)=\sqrt{k}(k+1)\cdots(k+m_1-1)z^{k-1}(1-z)^{m_1}(1+z)^{-m_1}$$
$$\text{and}\quad \widetilde{\varphi}_{m_2}(z)=\sqrt{k}(k+1)\cdots(k+m_2-1)z^{k-1}(1-z)^{m_2}(1+z)^{-m_2}$$

现在再次利用引理 3.1，可得

$$[\widetilde{\varphi}_{m_1}(z)|\widetilde{\varphi}_{m_2}(z)]_{\ell_2}=\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)\cdots(k+m-1)(1-z)^m z^{2k-2}(1+z)^{-m}=m!$$

~根据定理 A.2，这意味着 Φ_{m_1} 的下方平方函数估计，因此对 Φ_{m_1}也成立。接下来证明 γ-有界性。设 $N\geq 1$和 $x_1,\dots,x_N\in X$给定。于是，性质 (α)允许我们在以下估计中使用双指标随机和的压缩原理：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n T^n x_n\Big\|\\
\text{(lower sqf)}\quad &\lesssim \mathbb{E}\,\widetilde{\mathbb{E}}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_n\widetilde{\gamma}_k k^{m_1-1/2}(I-T)^{m_1}T^{n+k-1}x_n\Big\|\\
\text{(property }(\alpha))\quad &\lesssim \mathbb{E}\,\widetilde{\mathbb{E}}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_n\widetilde{\gamma}_k (k+n)^{m_1-1/2}(I-T)^{m_1}T^{n+k-1}x_n\Big\|\\
(j=k+n)\quad &= \mathbb{E}\,\widetilde{\mathbb{E}}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\geq n}\gamma_n\widetilde{\gamma}_j j^{m_1-1/2}(I-T)^{m_1}T^{j-1}x_n\Big\|\\
\text{(property }(\alpha))\quad &\leq \mathbb{E}\,\widetilde{\mathbb{E}}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\geq 1}\gamma_n\widetilde{\gamma}_j j^{m_1-1/2}(I-T)^{m_1}T^{j-1}x_n\Big\|\\
\text{(upper sqf)}\quad &\leq \mathbb{E}\Big\|\sum_{n}\gamma_n x_n\Big\|.
\end{aligned}$$

我们得到 $\{T^n:\ n\geq 0\}$ 是 γ-有界的。离散导数可通过另外两个步骤得到。

步骤 2：得到一个特殊的 γ-有界集合 我们从下面这个依赖于 z^2 的几何级数公式开始：

$$\begin{aligned}
&(2k-2)^{m-1}(1-z)^{m-1}z^{2k-2}\\
&=2(1+z)\sum_{j=k}^{\infty}(k-1)^{m-1}\times(1-z)^m z^{2j-2}\\
&=2(1+z)\sum_{j=k}^{\infty}\Big(\tfrac{k-1}{j}\Big)^{m-1}\times(j^{m_1-1/2}(1-z)^{m_1}z^{k-1})\times(j^{m_2-1/2}(1-z)^{m_2}z^{k-1})
\end{aligned}$$

前面的因子 2(Id + T) 是一个同构，因此对我们而言并不重要。我们的思路是将这个和视为一种带有以下乘子的“积分表示”

$$m_k : j \mapsto \mathbb{1}_{j \geq k} \left(\tfrac{k-1}{j}\right)^{m-1},$$

并应用定理 A.1。显然，$|m_k(j)| \leq 1$。根据假设的（对偶）平方函数估计以及 X 具有性质（α）这一事实，积分表示定理 A.1 得出

$$\left[\!\!\left[k^{m-1}(\mathrm{Id}-T)^{m-1}T^{2k-2} : k \geq 1 \right]\!\!\right]^{\gamma} \lesssim \|\Phi_{m_1}\|\|\Phi^*_{m_2}\|$$

对于 T 的奇次幂，也可以进行类似的计算：在表示公式中提出因子 z，并将其化为偶次幂。综上，

$$\left[\!\!\left[k^{m-1}(\mathrm{Id}-T)^{m-1}T^{k-1} : k \geq 1 \right]\!\!\right]^{\gamma} \lesssim \|\Phi_{m_1}\|\|\Phi^*_{m_2}\|.$$

步骤 3：离散导数构成一个 γ-有界集。根据引理 3.1 在取 $n = m-2$ 时的结论，我们有

$$n(1-T)T^n = \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n}{k^2} \times k^2(1-T)^2T^k & \text{if } m=3 \\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n(k-n+1)}{k^3} \times k^3(1-T)^3T^k & \text{if } m=4 \\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n\, c_{m-3}(k-n+1)}{(m-4)!\; k^{m-1}} \times k^{m-1}(\mathrm{Id}-T)^{m-1}T^k & \text{if } m \geq 5. \end{cases}$$

标量乘 子在每种情况下都满足，并且对所有 $n \geq 1$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \tfrac{n}{k^2} \lesssim 1, \qquad \sum_{k=n}^{\infty} \tfrac{n(k-n+1)}{k^3} \lesssim 1 \quad \text{and} \quad \sum_{k=n}^{\infty} n\tfrac{c_{m-3}(k-n+1)}{(m-4)!\; k^{m-1}} \lesssim 1$$

由凸包性质（2.2）以及上一步可得,

$$\left[\!\!\left[n(1-T)T^n : n \geq 1 \right]\!\!\right]^{\gamma} \quad \lesssim \quad \|\Phi_{\gamma}(\Phi_{m_1})\|\|\Phi_{\gamma'}(\Phi^*_{m_2})\|$$

因此成立。(T^n) 的离散导数构成一个 γ-有界集。结合我们在步骤 1 中的发现，我们证明了

$$\{T^n, n(\mathrm{Id}-T)T^{n-1} : \qquad n \geq 1\}$$

是 $\mathcal{R}$-有界的，而根据 [19, 引理 5.2] ，这等价于 T 是 $\mathcal{R}$-Ritt 或 γ-Ritt。□

我们强调（对偶）平方函数估计对这些论证的重要性：当然，有界算子不一定是 Ritt 算子。但即使我们假设了 Ritt 性质，而不是（对偶）平方函数估计，也无法得出结论：事实上，正如 [3, 推论 1.3.2] 及其后续评述所述，任何拥有无条件基但不同构于希尔伯特空间的巴拿赫空间 X ，都可以构造出不是 $\mathcal{R}$-Ritt 的 Ritt 算子。这表明，我们的平方函数估计假设并不容易弱化。

6. Obtaining a bounded H^∞-calculus on Stolz domains via square functions estimates

本节给出一个与 Le Merdy 的结果 [19, 定理 7.3]类似的证明。这使我们能够加强定理 5.1 证明中的步骤 1，并使 $f(T)$ 通过平方函数。为完整起见，我们重新表述该证明，尽管与原证明非常接近；此外，底层函数演算的定义域不同（即 Stolz_ω 而非 B_r）。

定理 6.1. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\mathcal{R}$是 ω 上的一个 X-Ritt 算子，满足（对偶）平方函数估计 $\Phi_{m_1}, \Phi^*_{m_2}$。那么，对所有 $\theta > \omega$， T都有一个有界的 $H^\infty(\mathrm{Stolz}_\theta)$-函数演算。

注意，若 X 具有 Pisier 的性质（α），根据定理 5.1，就不需要 $\mathcal{R}$-Ritt 条件。

证明。令 $f \in H^\infty(\mathrm{Stolz}_\nu)$，其中 $\nu > \omega$，并固定某个 $\omega < \vartheta < \nu$。我们先对 $n = m+1$和 $u = z^3$应用引理 3.1，其中 $|z| < 1$：乘以 $f(z)$后，得到如下表示公式

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k(z) \times \varphi_{m_1}(k,z) \times \varphi_{m_2}(k,z). \tag{6.1}$$

其中

$$m_k(z) = \tfrac{1}{(m+1)!} f(z)(1+z+z^2)^{m+1} \left(\prod_{j=1}^{m} \tfrac{k+j}{k} \right) \times k(1-z)z^{k-1}$$

是初等函数。若我们假设 X 具有性质 (α)，那么

$$[\![m_k(T) : k \geq 1]\!]^\gamma \lesssim C_\vartheta \|f\|_\infty. \tag{6.2}$$

便可直接由定理 A.1 的第二部分得出。但这一结果对任意巴拿赫空间都成立，下面我们将予以证明。首先来说明它的用途：

$$\begin{aligned}
& |\langle f(T)x, x' \rangle| \\
= \;& \left| \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_{m_2}(z) m_k(z) \varphi_{m_1}(z) | e_k \right](T)x, x' \right\rangle \right| \\
= \;& \left| \left\langle \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[\varphi_{m_2}(z) | e_n \right](T) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \, m_k(T) \left[\varphi_{m_1}(z) | e_k \right](T)x \right), x' \right\rangle \right| \\
\leq \;& \left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \, m_k(T) \left[\varphi_{m_1}(z) | e_k \right](T)x \Big\|_X^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[\varphi_{m_2}(z) | e_n \right](T)' x' \Big\|_{X'}^2 \right)^{1/2} \\
\overset{(6.2)}{\leq} \;& C_\vartheta \|f\|_\infty \, \|\Phi_{m_1} x\|_\gamma \|\Phi^*_{m_2} x'\|_{\gamma'} \\
\leq \;& C_\vartheta \|f\|_\infty \, \|\Phi_{m_1}\| \|\Phi^*_{m_2}\| \, \|x\|_X \|x'\|_{X'}.
\end{aligned}$$

再对所有 $\|x'\| \leq 1$ 和 $\|x\| \leq 1$ 取上确界，即可得到结论。

剩下的就是证明这一断言。首先，标量因子

$$\tfrac{1}{(m+1)!} \left(\prod_{j=1}^{m} \tfrac{k+j}{k} \right)$$

在 m_k 中可通过压缩原理 (2.1) 去除。此外，根据谱映射定理，$\mathrm{Id} + T + T^2$ 是一个同构。这意味着我们可以将重点放在算子 $\{f(T)\ k(\mathrm{Id} - T)T^{k-1} : k \geq 1\}$ 上。要处理其 $\mathcal{R}$-有界性，

该集合的 $\Gamma := \partial\mathrm{Stolz}_\vartheta$ 边界由函数演算论证处理：其参数化为

$$\gamma(t) := 1 - r(t)e^{it} \qquad r(t) = \tfrac{2\vartheta}{\vartheta^2-1}(\vartheta\cos(t) - 1), \tag{6.3}$$

其中 $t \in [-C_\vartheta, C_\vartheta]$ 与 $C_\vartheta := \arccos(\frac{1}{\vartheta})$。由于

$$f(T)\, k(\mathrm{Id} - T)T^{k-1}x = \tfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma k z^{k-1} f(z)(\mathrm{Id} - T)R(\lambda, T)x \mathrm{d}z$$

要得出结论，根据凸包引理，只需验证 $z \mapsto kz^{k-1}f(z)$ 在 Γ 上绝对可积，并满足 $\|kz^{k-1}f(z)\|_{L^1(\Gamma)} \leq \|f\|_\infty$。

$$\big[\!\big[f(T)\, k(\mathrm{Id} - T)T^{k-1} : k \geq 1 \big]\!\big]^{\mathcal{R}} \quad \lesssim \quad \|f\|_{\mathrm{H}^\infty(\mathrm{Stolz}_\nu)}.$$

Le Merdy 的论文中也有类似论证 [19]，其中主要引用了 Vitse[26]。她针对 Stolz 型区域 B_ϑ 而非 Stolz_ϑ 给出了估计，因此尽管有一些相似之处，我们仍在此为当前情形提供完整细节。首先注意到

$$\begin{aligned} |\gamma(t)| &= \frac{1 + \vartheta^2 - 2\vartheta\cos(t)}{\vartheta^2 - 1} = 1 - \tfrac{r(t)}{\vartheta} \qquad \text{and} \\ |\gamma'(t)| &= \frac{2\vartheta}{\vartheta^2 - 1}\sqrt{1 + \vartheta^2 - 2\vartheta\cos(t)} = \tfrac{2\theta}{\sqrt{\vartheta^2-1}}\,|\gamma(t)|^{1/2} \end{aligned}$$

因此，利用 $c \leq |\gamma(t)| \leq 1$，我们得到

$$\begin{aligned} \int_\Gamma k|z|^{k-1}|f(z)|\,|\mathrm{d}z| &\lesssim_\vartheta \|f\|_{\mathrm{H}^\infty(\mathrm{Stolz}_\nu)} \int_{-C_\vartheta}^{C_\vartheta} k|\gamma(t)|^{k-1/2}\, dt \\ &\eqsim_\vartheta \|f\|_{\mathrm{H}^\infty(\mathrm{Stolz}_\nu)} \int_{-C_\vartheta}^{C_\vartheta} k|\gamma(t)|^{k-1}\, dt. \end{aligned}$$

我们将该积分分为两部分：第一部分对应于远离z=1的 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$。第二部分 $|t| \geq \varepsilon$ 包含点 z=1。我们取某个 $\varepsilon > 0$，使其充分小以满足 $\vartheta\cos(\varepsilon) > 1$。在第一个区域中，我们有 $|\gamma(t)| \leq q < 1$，因此 $\sup_k kq^k \leq \sup_{t>0} tq^{-t} = |\ln(q)|e^{-1}$ 表明

$$\int_{|t|<\varepsilon} |f(\gamma(t))|\, k|\gamma(t)|^{k-1}\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty\, |\Gamma|\, |\ln(q)|e^{-1}.$$

当 $|t| \geq \varepsilon$ 时，我们进行变量替换：由于 $r'(t) = \frac{2\vartheta^2}{\vartheta^2-1}\sin(t)$,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon<|t|<C_\vartheta} |f(\gamma(t))|\, k|\gamma(t)|^{k-1}\,\mathrm{d}t &\lesssim_\vartheta \|f\|_\infty \int_{\varepsilon<|t|<C_\vartheta} k\left(1 - \tfrac{r(t)}{\vartheta}\right)^{k-1}\,\mathrm{d}t \\ &\lesssim_\vartheta \|f\|_\infty \tfrac{1}{\sin(\varepsilon)} \int_{\varepsilon<|t|<C_\vartheta} k\sin(t)\left(1 - \tfrac{r(t)}{\vartheta}\right)^{k-1}\, dt \\ &= \|f\|_\infty \tfrac{1}{\sin(\varepsilon)} \int_0^{\frac{2}{\vartheta^2-1}(\alpha\cos(\varepsilon)-1)} k\,(1-s)^{k-1}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \|f\|_\infty \tfrac{1}{\sin(\varepsilon)} \left[-(1-s)^k\right]_{s=0}^{s=\frac{2}{\vartheta^2-1}(\alpha\cos(\varepsilon)-1)} \\ &\leq \tfrac{1}{\sin(\varepsilon)}\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

证明至此完成：我们不对两个不等式中所有可能的 $\varepsilon > 0$ 进行优化。□

开放问题：对于给定的 Ritt 算子，其 H^∞ 函数演算与相应平方函数估计之间的联系，类似于扇形型（或条带型）算子的对应联系 A。事实上，我们给出的证明是基于相同的抽象原理构建的。

对于有限余型巴拿赫空间上的 Ritt 算子和扇形算子，如果函数演算有界，则都可以将其扩展为所谓的“有界平方函数”（或“二次”）H^∞-函数演算，从而验证

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_n \gamma_n f_n(T)x\Big\| \quad \lesssim \quad \sup_z \left(\sum_n |f_n(z)|^2\right)^{1/2} \|x\|. \tag{6.4}$$

对于扇形算子（或带型算子），平方函数演算可通过积分表示直接由定理 A.1 推得，这些积分表示直接利用了“标准”平方函数。然而，对于 Ritt 算子，这种方法似乎行不通。与扇形情形对应的积分表示应为

$$f(z) = \sum_k a_k\, \varphi_{m_1}(k,z)\varphi_{m_2}(k,z) \tag{6.5}$$

其中系数 a_k 不依赖于变量 z（不同于上面的公式 (6.1)）。尽管存在这一缺陷，Le Merdy 在其论文 [19] 中证明了 (6.4) 仍然成立。他没有使用函数 $\varphi_m(z)$ 的假设（对偶）平方函数，而是通过 Francks-McIntosh 分解，利用（标量）H^∞-函数演算逐步构造平方函数演算；这种方法为一组未知函数构造出某种“蛮力平方函数”。随后，我们的积分表示定理 A.1 可应用于 Francks-McIntosh 分解。

由此观察引出两个问题：首先，我们希望确定这些（非可分）子空间

$$\mathscr{S}_{m_1,m_2} := \left\{ \sum_k a_k\, \varphi_{m_1}(k,z)\varphi_{m_2}(k,z) : \qquad (a_k) \in \ell_\infty \right\}$$

及其在 $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{Stolz}_\omega)$ 中的和。其次，我们预计还能找到适用于 Ritt 算子的其他显式平方函数，这些函数除其他用途外，还能给出一般的表示公式。这个问题或许与 Stolz 区域到单位圆盘的共形映射有关，而该映射似乎也尚未得到明确描述。

Appendix A. Tools from abstract functional calculus theory

本节引用 Haak-Haase [9] 的抽象结果。我们的结果以这些结果为基础，旨在强调 Ritt 算子的 H^∞-演算理论，以及扇形型或条带型算子的相关理论，都可以通过一种统一的抽象方法来阐释全纯函数演算。对于这两个定理，我们要求 $(\mathrm{H}^\infty(\mathcal{O}), \Phi)$ 是巴拿赫空间 X 上的函数演算，并满足 (3.5) 和 (3.6) 中概述的抽象构造原则：特别是，它们确实适用于 Ritt 算子 T，因为 $(\mathrm{Id}-T)$ 是单射且其值域稠密。

定理 A.1. 设 K 为希尔伯特空间，且 $H := L^2(\Omega)$ 对某个测度空间 (Ω, μ) 成立。进一步假设 $f, g \in \mathrm{H}^\infty(\mathcal{O}; H)$，使得与 g相关的平方函数，

$$\Phi_\gamma(g) : X \to \gamma(H; X),$$

以及与 f 相关的对偶平方函数，

$$\Phi_{\gamma'}(f) : X' \to \gamma'(H; X'),$$

是有界的。对于 $m \in L^\infty(\Omega;\ K')$，考虑由下式定义的函数 $u \in \mathrm{H}^\infty(\mathcal{O}; K')$

$$u(z) := \int_\Omega m(t) \cdot f(t,z)\, g(t,z)\, \mu(\mathrm{d}t) \ \in\ K' \qquad (z \in \mathcal{O}). \tag{A.1}$$

如果 K 是有限维的，或者 X 具有有限余型且 $x \in \mathcal{D}(\Phi_\gamma(g))$，那么 $x \in \mathcal{D}(\Phi_\gamma(u))$ 并且

$$\|\Phi_\gamma(u)x\|_\gamma \le C\, \|m\|_{L^\infty(\Omega;K')}\, \|\Phi_{\gamma'}(f)\| \|\Phi_\gamma(g)x\|_\gamma, \tag{A.2}$$

其中，C 仅取决于 $\dim(K)$ 或 X 的余型（常数），分别对应这两种情况。

以下加强结论成立：若 X 还具有性质 (α)，则集合

$$\{\Phi(u_m):\ m \in L^\infty(\Omega,\mu),\ \|m\|_\infty \le 1\}$$

是 γ-有界的，其界为

$$[\![\, \Phi(u_m):\ \|m\|_\infty \le 1 \,]\!]^\gamma \le C^+C^- \|\Phi_\gamma(g)\|_\gamma \|\Phi_{\gamma'}(f)\|_{\gamma'},$$

其中 C^+C^- 是该同构的条件数

$$\gamma(\ell_2 \oplus \ell_2; X) \ \simeq\ \gamma(\ell_2; \gamma(\ell_2; X)).$$

以下来自 [9] 的结果提供了一个抽象工具：在逐点标量积 $[f(z)|g(z)]_H$满足“恒等条件”的情况下，可以根据函数 f 的上平方函数估计推导出函数 g 的下平方函数估计。

定理 A.2. 设 $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathcal{O}; H)$ 和 $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathcal{O}; H')$ 满足：$\Phi_\gamma(g)$ 和 $\Phi_{\gamma'}(f)$ 是有界算子。如果对于所有 $z \in \mathcal{O}$，均有 $[f(z)|g(z)]_H = 1$，则有范数等价关系

$$\|x\|_X \simeq \|\Phi_\gamma(g)x\|_\gamma \quad \textit{for all } x \in X.$$

References

[1] C´edric Arhancet, *Square functions for Ritt operators on noncommutative L^p-spaces*, 《斯堪的纳维亚数学杂志》113（2013），第 2 期，292–319。[2] C´edric Arhancet 和 Christian Le Merdy, *Dilation of Ritt operators on L^p-spaces*, 《以色列数学杂志》201（2014），第 1 期，373–414。[3] Loris Arnold, *γ-bounded C_0-semigroups and power γ-bounded operators: characterizations and functional calculi*, 2022, ，博士论文，法国贝桑松大学，https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03545380/document。[4] Olivier Arrigoni 和 Christian Le Merdy, *H^∞-functional calculus for commuting families of Ritt operators and sectorial operators*, **13** 2019 4, 1055 1090 ，《算子与矩阵》（），第 – 期（英文）。[5] I. Assani、R. S. Hallyburton、S. McMahon、S. Schmidt 和 C. Schoone, *New estimates on the Brunel operator*, **169** 2022 1, 117 139 ，《数学讨论》（），第 – 期（英文）。[6] P. Cl´ement、B. de Pagter、F. A. Sukochev 和 H. Witvliet, *Schauder decomposition and multiplier theorems*, **138** 2000 2, 135 163 ，《数学研究》（），第 – 期。[7] Joe Diestel、Hans Jarchow 和 Andrew Tonge, *Absolutely summing operators*, 《剑桥高等数学研究丛书》第 43 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。[8] Alexander Gomilko 和 Yuri Tomilov, *On discrete subordination of power bounded and Ritt operators*, **67** 2018 2, 781 829 ，《印第安纳大学数学杂志》（），第 – 期（英文）。[9] Bernhard H. Haak 和 Markus Haase, *Square function estimates and functional calculus*, 编写中。[10] Markus Haase, *The functional calculus for sectorial operators*, 《算子理论：进展与应用》第 169 卷，Birkh¨auser Verlag, 2006 年。[11] Jørgen Hoffmann-Jørgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables*, 《数学研究》52（1974），159–186。[12] Tuomas Hyt¨onen、Jan van Neerven、Mark Veraar 和 Lutz Weis, *Analysis in Banach spaces. Vol. II*, 3 ，数学及其边界领域成果。系列。现代数学综述系列 [数学成果及相关领域。第三辑。现代数学综述系列], 第 67 卷，施普林格，查姆，2017 年，《概率方法与算子理论》。

[13] N. Kalton、S. Montgomery-Smith、K. Oleszkiewicz 和 Y. Tomilov, *Power-bounded operators and related norm estimates* **70** 2004 2, 463 478 , 《伦敦数学会会刊》第二辑（ ），第 – 期（英文）。[14] N. J. Kalton 和 P. Portal, *Remarks on ℓ_1 and ℓ_∞ maximal regularity for power-bounded operators* **84** 2008 3, 345 365 , 《澳大利亚数学会会刊》（ ），第 – 期。[15] Nigel J. Kalton 和 Lutz Weis, *The H^∞-functional calculus and square function estimates.*, 《Selecta》第 1 卷。Fritz Gesztesy、Gilles Godefroy、Loukas Grafakos 和 Igor Verbitsky 编，巴塞尔：Birkh¨auser/Springer，2016 年，第 716–764 页（英文）。[16] S. Kwapie´n, *On Banach spaces containing c_0*, 《数学研究》 52 （ 1974 ），187–188；J. Hoffmann-Jørgensen 论文《独立的巴拿赫空间值随机变量之和》的补充文章（《数学研究》52（1974），159–186）。[17] Florence Lancien 和 Christian Le Merdy, *On functional calculus properties of Ritt operators*, 《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》145（2015），第 6 期，1239–1250。[18] Christian Le Merdy, *On square functions associated to sectorial operators*, 《法国数学会通报》132（2004），第 1 期，137–156。[19] Christian Le Merdy, *H^∞ functional calculus and square function estimates for Ritt operators*, 《伊比利亚美洲数学杂志》30（2014），第 4 期，1149–1190（英文）。[20] Alan McIntosh, *Operators which have an H_∞ functional calculus*, 《算子理论与偏微分方程小型会议》（北莱德，1986），《澳大利亚国立大学数学分析中心会刊》第 14 卷，澳大利亚国立大学，堪培拉，1986 年，第 210–231 页。[21] Parasar Mohanty 和 Samya Kumar Ray, *On joint functional calculus for Ritt operators*, 《积分方程与算子理论》91（2019），第 2 期，18（英文），编号 14。[22] Luis M. Navas、Francisco J. Ruiz 和 Juan L. Varona, *Some functional relations derived from the Lindelöf-Wirtinger expansion of the Lerch transcendent function* , 《数学计算》84（2015），第 292 期，803–813（英文）。[23] R. K. Ritt, *A condition that* $\lim_{n\to\infty} n^{-1}T^n = 0$, 《美国数学会会刊》4（1953），898–899（英文）。[24] Felix L. Schwenninger, *Functional calculus estimates for Tadmor-Ritt operators*, 《数学分析与应用杂志》439（2016），第 1 期，103–124（英文）。[25] Jan van Neerven, *γ-radonifying operators—a survey*, 《谱理论与调和分析》AMSI-ANU 研讨会，《澳大利亚国立大学数学应用中心会刊》第 44 卷，澳大利亚国立大学，堪培拉，2010 年，第 1–61 页。[26] Pascale Vitse, *A band limited and Besov class functional calculus for Tadmor–R itt operators*, 《数学档案》85（2005），第 4 期，374–385（英文）。[27] W. Wirtinger, *Über eine besondere Dirichletsche Reihe.*, 《纯粹与应用数学杂志》129（1905），214–219（德文）。[28] Kosaku Yosida, *Mean ergodic theorem in Banach spaces*, 《日本帝国学士院纪要》14（1938），292–294（英文）。

Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux, 351, cours de la Libération, 33405 Talence CEDEX, FRANCE*Email address*: bernhard.haak@math.u-bordeaux.fr