arXiv:2303.03033v1 [cs.RO] 6 Mar 2023

遥控滑移履带式移动机器人的数学模型

Alessia Ferraro,Vito Antonio NardiDIIES信息与可持续能源工程系 雷焦卡拉布里亚"地中海"大学 雷焦卡拉布里亚
alessia.ferraro@unirc.it

Valerio ScordamagliaDIIES信息与可持续能源工程系 雷焦卡拉布里亚"地中海"大学 雷焦卡拉布里亚

摘要

本文提出了一种遥控滑移履带式移动机器人的不确定范数有界数学模型。该线性状态空间描述旨在描述机器人在控制通道存在时延且滑移系数未知但有界时，执行轨迹跟踪操作过程中的非线性误差动力学。

关**键词** 移动机器人平台 · 网络化控制系统 · 轨迹跟踪误差 or

1 机器人数学模型

为了定义机器人的数学模型，我们假设它是一个在水平面上运动的刚体。给定一个记作 **NWU** 的惯性参考系**E**，机器人在时刻 t 的位姿为

$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & \theta(t) \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

其中， θ 表示方向， x 和 y 表示机器人在**E**中的位置。设

$$u(t) = \begin{bmatrix} V(t) & \omega(t) \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

控制速度向量，其中前进速度和旋转速度分别为 V 和 ω 。以下为一阶运动学模型

$$\dot{q}(t) = G(t) \cdot u(t) \tag{3}$$

with

$$G(t) = \begin{bmatrix} cos(\theta(t)) & 0 \\ sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

履带与地面之间的相互作用可能过于复杂，难以用数学方法描述，从而无法定义面向控制的数学模型。因此，本文采用两个无量纲正时变系数 $\mu_r(t)$ 和 $\mu_l(t)$ 分别对右侧履带和左侧履带的这种相互作用进行宏观建模，现称其为滑动系数。机器人的前进速度和旋转速度与其 $\rho_r(t)$ 和 $\rho_l(t)$ 电机角速度之间的关系如下

$$u(t) = J \cdot H(t) \cdot \rho(t) \tag{5}$$

其中

$$\rho(t) = [\rho_r(t) \quad \rho_l(t)]^T \tag{6}$$

$$J = \begin{bmatrix} R/2 & R/2 \\ R/D & -R/D \end{bmatrix} \tag{7}$$

and

$$H(t) = \begin{bmatrix} \mu_r(t) & 0 \\ 0 & \mu_l(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中， R 是将履带连接到电机的齿轮半径， D 是两条履带之间的距离。假设机器人由两个指令控制：前进速度 V 和旋转速度ω

$$\hat{u}(t) = \begin{bmatrix} \hat{V}(t) & \hat{\omega}(t) \end{bmatrix}^T \tag{9}$$

计算产生式（9）所需的两个电动机的标称角速度时，假设两个滑动系数均为单位值

$$\hat{\rho}(t) = J^{-1} \cdot \hat{u}(t) \tag{10}$$

然而，由于滑动系数 $\mu_r(t)$ 和 $\mu_l(t)$ 取决于履带与地面之间的相互作用，且可能随时间变化，因此机器人的实际速度结果

$$u(t) = J \cdot H(t) \cdot \hat{\rho}(t) \tag{11}$$

根据式（10）—（11），式（3）可改写为以下形式

$$\dot{q}(t) = G(t) \cdot J \cdot H(t) \cdot J^{-1} \cdot \hat{u}(t) \tag{12}$$

参见图1。设**L** 为以 M 为中心、坐标为 (x_0, y_0) 的参考系，该参考系按照轨迹段 MN 与轴 x 对齐。从**E**到**L**的旋转平移为

$$q_L(t) = R_E^L(\theta_0)(q(t) - q_0) \tag{13}$$

其中， $q_0 = [x_0 \;\; y_0 \;\; \theta_0]^T$ 与 θ_0 如图1所示，且

$$R_E^L(\theta_0) = \begin{bmatrix} cos(\theta_0) & sin(\theta_0) & 0 \\ -sin(\theta_0) & cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Be

$$T_L^D(\cdot) = \begin{bmatrix} {q_L}^D(\cdot)^T & {u^D}^T \end{bmatrix}^T \tag{15}$$

在参考系**L**中表示的期望轨迹，该轨迹由与运动学关系（3）一致的允许位姿对和控制动作定义，即为 $q_L^D(0) = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$和 $u^D = \begin{bmatrix} V^D & 0 \end{bmatrix}^T$，其中 V^D 是机器人在轨迹段 MN中的期望标称前馈速度。假设标称速度为零时，机器人处于旋转状态。在时刻 t，在参考系**L** 中表示的期望位姿计算如下

$$q_L^D(t) = \begin{bmatrix} V^D \cdot t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{16}$$

Be

$$e(t) = q_L(t) - q_L^D(t) = [e_x(t) \;\; e_y(t) \;\; e_\theta(t)]^T \tag{17}$$

轨迹跟踪误差。令 $\delta u(t) = \hat{u}(t) - u^D = [\delta V(t) \;\; \omega(t)]^T$ 表示有效控制值与标称控制值之间的差值。令 $d(t) = \mu(t) - \mathbf{1} = [\delta\mu_r(t) \;\; \delta\mu_l(t)]^{\mathbf{T}}$ 表示滑动系数值相对于标称值的偏差。通过重新组合式 (12)、(13) 和 (16)，可以改写轨迹跟踪误差的动态方程

$$\dot{e}(t) = R_E^L(\theta_0) \cdot G(t) \cdot J \cdot H(t) \cdot J^{-1} \cdot \hat{u}(t) - \begin{bmatrix} V^D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

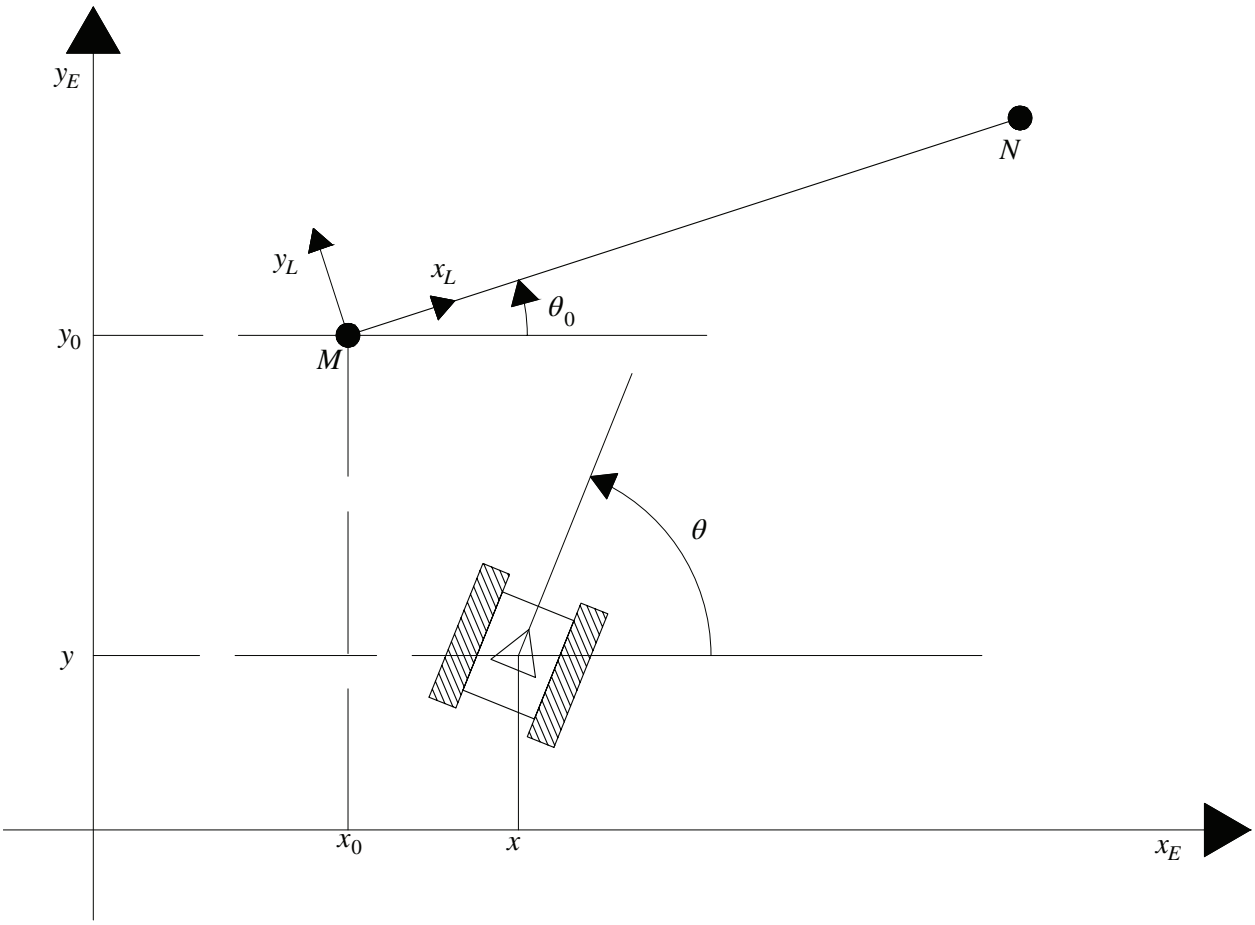

图1：参考坐标系。机器人在**E** 坐标系中的位姿表示为 $\{x,\ y,\ \theta\}$；用于轨迹跟踪的**L** 参考坐标系原点位于 M，其 x轴的方向与指定轨迹段 MN一致

最后，通过应用经典线性化过程，可以定义标称条件 $\Sigma(t) = \{q_L^D(t),\quad u^D\}$ 附近的以下线性时不变表示

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B\delta u(t) + B_D d(t) \tag{19}$$

$$A = \frac{\partial \dot{e}(t)}{\partial q_L(t)}\Big|_{\Sigma(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V^D \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$B = \frac{\partial \dot{e}(t)}{\partial \hat{u}(t)}\Big|_{\Sigma(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$B_D = \frac{\partial \dot{e}(t)}{\partial \mu(t)}\Big|_{\Sigma(t)} = \begin{bmatrix} \frac{V^D}{2} & \frac{V^D}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{V^D}{D} & -\frac{V^D}{D} \end{bmatrix} \tag{22}$$

1.1 网络控制系统建模

假设机器人通过数据通信网络进行远程控制。通用控制方案如图2所示。该方案具有诸多优点，其中最重要的是控制系统安装和维护简单，而且灵活性高。然而，尽管有这些优点，数据

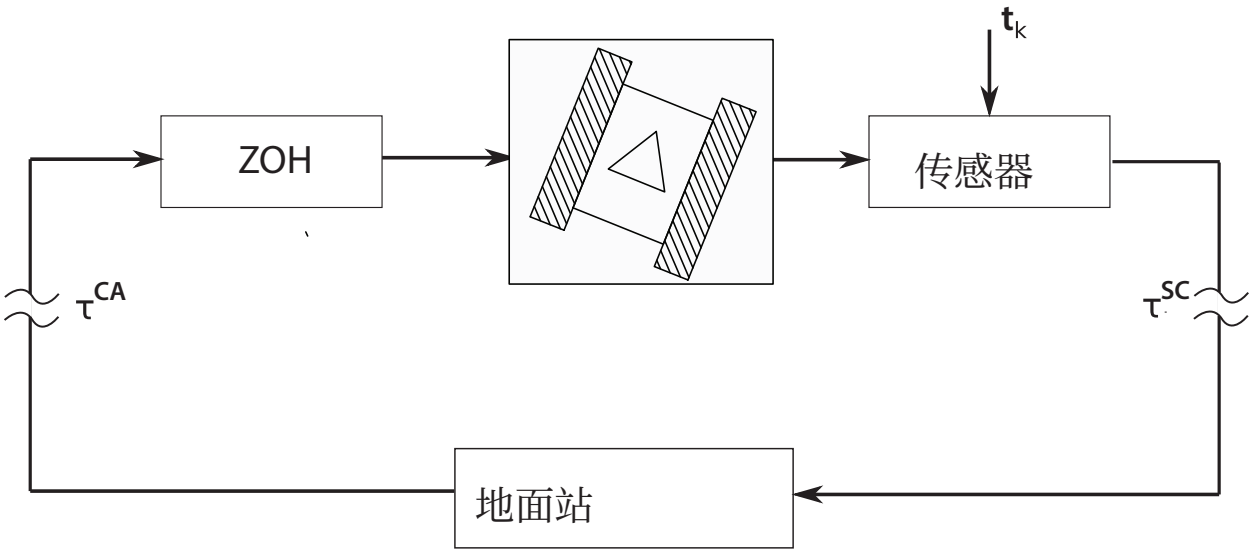

图 2：网络控制系统控制架构示意图。

通信网络通过无线或有线信道接入控制回路，可能会因丢包和时间延迟等现象导致系统性能下降，甚至造成系统不稳定。借助网络化控制系统理论 [1], ，可以对数据通信信道接入控制回路这一情况进行数学建模。

假设使用面向连接的通信协议（例如 TCP-IP），并假定通信过程中丢失的数据包数量为零。令 τ^{SC} 为传感器到控制器的时延，表示将信息从传感器传输到控制器所需的时间。令 τ^{CA} 为控制器到执行器的时延，表示控制信号从控制器传输到执行器所需的时间。最后，考虑额外的时延 τ^{C}，即控制器处理新控制策略所需的计算时间。在本研究中，控制回路中的所有其他时延均视为可忽略不计。

假设传感器同步运行：采样发生在 $t_k = k \cdot T_s$ 时刻，且 $k \in N$， T_s 为采样时间。假设控制器和执行器均为事件驱动型，即它们会立即响应新数据。在这些假设下，上述三个时延可以方便地合并为一个时延项

$$\tau = \tau^{SC} + \tau^{CA} + \tau^{C} \tag{23}$$

¯该值被假定为可能随时间变化。设 τ_{max} (τ_{min}) 为 _ τ d 可能的最大（最小）值。设满足关系式 $d \geqslant \tau_{max}/T_s$的最小正整数为 。设 d 为满足关系式 $d \leqslant \tau_{min}/T_s$ 的最大正整数¯。在一个一般的采样周期 T_s内，控制动作最多可变化 _ $d - d$ 次 [2]。为简单起见，我们假设 – $0 \leqslant \tau_{min} \leqslant \tau_{max} \leqslant T_s$，使得 $d = 1$ 且 $d = 0$。因此，考虑图 3，其中 $T_s - \tau_{max} \leqslant t_{k+1} - t^{1} \leqslant T_s - \tau_{min}$。

系统 (19) 在时刻 t_{k+1} 的状态可改写为

$$e(t_{k+1}) = \mathrm{e}^{A(t_{k+1}-t^{1})} e(t^{1}) + \int_{0}^{t_{k+1}-t^{1}} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B \delta u(t_k) + \int_{0}^{t_{k+1}-t^{1}} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B_D d(t_k) \tag{24}$$

同理

$$e(t^{1}) = \mathrm{e}^{A(t^{1}-t_k)} e(t_k) + \int_{0}^{t^{1}-t_k} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B \delta u(t_{k-1}) + \int_{0}^{t^{1}-t_k} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B_D d(t_k) \tag{25}$$

通过适当组合式（24）和式（25），可得如下形式

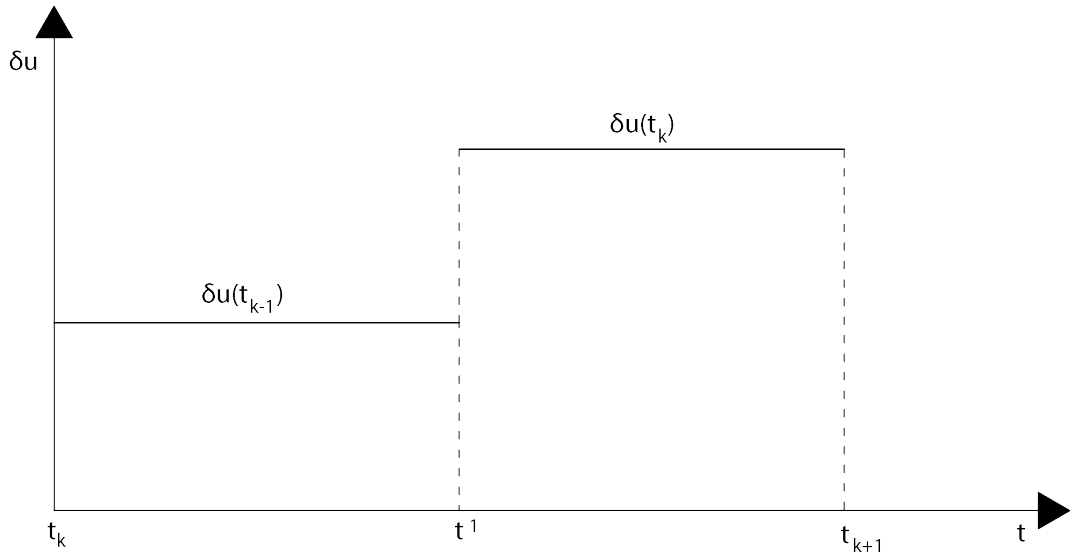

图3：驱动更新时序图

$$e(t_{k+1}) = \mathrm{e}^{AT_s} e(t_k) + \int_0^{t_{k+1}-t^1} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B \delta u(t_k) + \int_{t_{k+1}-t^1}^{Ts} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B \delta u(t_{k-1}) + \tag{26}$$
$$+ \int_0^{Ts} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B_D d(t_k)$$

为清晰起见，今后将用记号$f_k = f(t_k)$表示在时刻 t_k 采样的时变函数。

Be

$$\tilde{\xi}_k = \begin{bmatrix} e_k^T & \delta u_{k-1}^T \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}^{n_s} \tag{27}$$

¯提升状态向量，下文称为提升轨迹跟踪误差，其中 $n_s = n_e + (d-d) \cdot n_u$， n_e 和 n_u 分别为系统（19）的状态数和输入数（本例中 $n_e = 3$ 和 $n_u = 2$）。公式（26）可改写为以下形式

$$\tilde{\xi}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{AT_s} & \int_{t_{k+1}-t^1}^{Ts} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}(t_{k+1}-t^1)} \tilde{\xi}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^{t_{k+1}-t^1} \mathrm{e}^{A\sigma} d\sigma B \\ I \end{bmatrix}}_{\tilde{B}(t_{k+1}-t^1)} \delta u_(t_k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^{Ts} e^{A\sigma} d\sigma B_D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{B}d} d_k \tag{28}$$

最后，系统（28）可嵌入以下范数有界不确定表示中

$$\tilde{\xi}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{\xi}_k + \tilde{B}\delta u_k + \tilde{B}_D d_k + \tilde{B}_p p_k \tag{29}$$

$$p_k = \Delta_k q_k \tag{30}$$

$$q_k = \tilde{C}_q \tilde{\xi}_k + \tilde{D}_q \delta u_k \tag{31}$$

~ ~ ~其中 $\|\Delta_k\| < 1 \ \forall k \geqslant 0$，且 B_p、 C_q 和 D_q 为维度适当的矩阵。值得注意的是，对于时延 τ 的不同最大值和最小值，也可以采用相同的方法定义具有范数有界不确定性的表示。

参考文献

[1] Alberto Bemporad、Maurice Heemels、Mikael Johansson 等。网络化控制系统，第 406 卷。Springer，2010。[2] W PMH Heemels、Nathan Van De Wouw、Rob H Gielen、MCF Donkers、Laurentiu Hetel、Sorin Olaru、Mircea Lazar、Jamal Daafouz 和 Silviu Niculescu。《网络控制系统稳定性分析中过近似方法的比较》。载于第 *13* 届 *ACM* 国际混合系统：计算与控制会议论文集，第 181–190 页，2010 年。