arXiv:2303.03045v1 [math-ph] 6 Mar 2023

凯莱树上具有竞争相互作用和外场的伊辛模型的基态与吉布斯测度

M.M.Rahmatullaev [1]V.I. Romanovskiy数学研究所，乌兹别克斯坦科学院，塔什干市大学街9号，邮编100174，乌兹别克斯坦；纳曼干国立大学，乌伊奇街316号，纳曼干，乌兹别克斯坦 M.A. Rasulova [2]V.I. Romanovskiy数学研究所，乌兹别克斯坦科学院，塔什干市大学街9号，邮编100174，乌兹别克斯坦；纳曼干国立大学，乌伊奇街316号，纳曼干，乌兹别克斯坦 J.N. Asqarov [3]纳曼干国立大学，乌伊奇街316号，纳曼干，乌兹别克斯坦

摘要

我们研究了二阶凯莱树上具有竞争相互作用和非零外场的伊辛模型。我们描述了该模型的基态，并验证了其佩尔斯条件。利用轮廓论证，我们证明了两个不同吉布斯测度的存在性。

关键词：凯莱树、具有竞争相互作用的伊辛模型、外场、基态、佩尔斯条件、轮廓论证、吉布斯测度。

1 引言

与自旋模型相关的关键问题之一是描述吉布斯测度的集合（见 [1], [3], [8], [11], [13], [18]）。这一问题与描述基态集合的问题密切相关。因为在温度足够低时，吉布斯测度的相图（详见 [8], [13] ）接近于基态的相图。

具有两种自旋取值 ± 1 的伊辛模型在 [11] 中得到了研究（例如，见 [1]-[7], [9], [10], [12], [14], [16], [17]）。

在 [15], [2], [19] 中，针对统计力学中的经典模型（伊辛模型、Potts、SOS），在凯莱树上发展了轮廓论证（也称为皮罗戈夫–辛奈理论）。

本文研究二阶凯莱树上具有竞争相互作用和外场的伊辛模型的所有基态，并验证该模型的佩尔斯条件。利用这些基态，我们还定义了轮廓的概念，从而能够在凯莱树上进行轮廓论证。

[1]mrahmatullaev@rambler.ru[2]m rasulova a@rambler.ru[3]askarovjavokhir0430@gmail.com 本研究得到乌兹别克斯坦共和国创新发展部基础项目（项目编号：F-FA-2021-425）的资助。

本文结构如下。第1节给出一些定义和已知结论。第2节研究该模型的所有基态（周期基态和非周期基态）。第3节研究具有竞争相互作用和周期性外场的伊辛模型的周期基态。第4节验证具有竞争相互作用和外场的伊辛模型的佩尔斯条件。第5节通过轮廓论证，证明二阶凯莱树上的该模型存在两个不同的吉布斯测度。

凯莱树。阶数为 $k \geq 1$ 的凯莱树 Γ^k （参见 [1], [5]）是一棵无限树，即一张没有环的图，从每个顶点恰好伸出 $k+1$ 条边。设 $\Gamma^k = (V, L, i)$，其中 V 是 Γ^k 的顶点集合， L 是 Γ^k 的边集合，i 是关联函数，将每条边 $l \in L$ 与其端点 x、$y \in V$ 关联起来。若 $i(l) = \{x, y\}$，则称 x 和 y 为最近邻顶点，并记作 $l = \langle x, y\rangle$。

凯莱树上的距离 $d(x, y)$ $x, y \in V$ 由以下公式定义

$$d(x,y) = \min\{d | \exists x = x_0, x_1, ..., x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ such that } \langle x_0, x_1\rangle, ..., \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

对于固定的 $x^0 \in V$，我们定义

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

记 $|x| = d(x, x^0)$， $x \in V$。

由这些对组成的集合 $\langle x, x_1\rangle$、.....、$\langle x_{d-1}, y\rangle$ 称为从 x 到 y 的路径，记作 $path\ \pi(x, y)$。若从 x^0 到 y 的路径经过 x，则记作 $x \prec y$。

众所周知（见 [5]），凯莱树中顶点的集合 V与由 $\{e, a_i\}, i = 1, ..., k+1$ 个二阶循环群（即 $a_i^2 = e, a_i^{-1} = a_i$）自由积而成的群 G_k 之间存在一一对应关系，其中这些群的生成元为 $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$。

用 $S(x)$ 表示 $x \in G_k$ 的直接后继集合。令 $S_1(x)$ 表示 $x \in G_k$ 的所有最近邻顶点的集合，即 $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\}$ 和 $\{x_\downarrow\} = S_1(x) \setminus S(x)$。

模型。下面给出我们将要研究的模型的主要定义和事实（详见 [1] ）。考虑自旋取值于集合 $\Phi = \{-1, 1\}$ 的模型。对于 $A \subseteq V$，定义 A 上的自旋构型 σ_A 为函数 $x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi$; 所有构型的集合与 $\Omega_A = \Phi^A$ 一致。记 $\Omega = \Omega_V$ 和 $\sigma = \sigma_V$.。另设 $-\sigma_A = \{-\sigma_A(x)\ x \in A\}$.。将周期构型定义为不变于有限指数平移子群 $G_k^* \subset G_k$ 的构型 $\sigma \in \Omega$。

定义 1. 若对于任意$x \in G_k$ 和 $y \in G_k^*$, $\sigma(yx) = \sigma(x)$，则称构型 $\sigma \in \Omega$为G_k^*-周期的。

对于给定的周期构型，其子群的指数称为该构型的周期。

定义 2. 对所有平移均保持不变的构型称为平移不变构型。

$G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ 为因子群，其中 G_k^* 是指数为$r \geq 1$的正规子群。

定义 3. 如果对于 $x_\downarrow \in H_i$、$x \in H_j$、$\forall x \in G_k$，$\sigma(x) = \sigma_{ij}$，则构型 $\sigma(x)$ $x \in V$称为 G_k^*-弱周期构型。

具有竞争相互作用和外场的伊辛模型的哈密顿量形式为

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sum_{x\in V} \sigma(x), \tag{1}$$

其中 J_1、J_2、$\alpha \in \mathbb{R}$、$\alpha \neq 0$和 $\sigma \in \in \Omega$。

对于一对几乎处处相同的构型 σ 和 φ，即除了有限个位置外处处相同的构型，我们考虑相对哈密顿量 $H(\sigma, \varphi)$，构型 σ 和 φ 的能量之差具有如下形式

$$H(\sigma,\varphi) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} (\sigma(x)\sigma(y) - \varphi(x)\varphi(y)) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} (\sigma(x)\sigma(y) - \varphi(x)\varphi(y)) + \alpha \sum_{x\in V} (\sigma(x) - \varphi(x)), \tag{2}$$

其中 $J = (J_1, J_2, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ 是任意固定参数。

2 基态

令 M 为顶点位于 V 中的单位球集合。我们将构型 σ 限制在球 $b \in M$ 上所得的构型称为有界构型 σ_b。令 c_b 表示单位球 b 的中心。

定义构型 σ_b 在 b 上的能量为

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{x\in S_1(c_b)} \sigma(x)\sigma(c_b) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in b:\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha\sigma(c_b), \tag{3}$$

其中 $J = (J_1, J_2, \alpha) \in \mathbb{R}^3$.

哈密顿量 (1) 可写为

$$H(\sigma) = \sum_{b\in M} U(\sigma_b). \tag{4}$$

对于任意集合 A，我们用 $|A|$ 表示 A 中的元素个数。

引理1. 对于任意构型 σ_b，我们有

$$U(\sigma_b) \in \{U_{-,k+1}, ..., U_{-,0}, U_{+,0}, ..., U_{+,k+1}\},$$

其中

$$U_{\pm,i} = \left(\frac{k+1}{2} - i\right) J_1 + \left(\frac{k(k+1)}{2} + 2i(i-k-1)\right) J_2 \pm \alpha, \quad i = 0, 1, ..., k+1.$$

设 $\mathcal{C}_{\pm,i}=\{\varphi_b:\ U(\varphi_b)=U_{\pm,i}, i=0,...,k+1\}$。

定义 4. 若构型 $\varphi(x)$ $x\in V$ 满足

$$U(\varphi_b)=\min\{U_{-,k+1},...,U_{-,0},U_{+,0},...,U_{+,k+1}\},$$

对于任意 $b\in M$。

量 $U_i(J_1,J_2,\alpha)$ 是参数 $(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3$. 的线性函数。对每个固定的 $m=0,\ 1,...,k+1$，记

$$A_{\pm,m}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: U_{\pm,m}(J_1,J_2,\alpha)=\min\{U_{-,k+1},...,U_{-,0},U_{+,0},...,U_{+,k+1}\}\}. \quad (6)$$

容易验证

$$A_{\pm,0}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0,\ \ J_1+2kJ_2\le 0,\ \ \pm\alpha\le 0\};$$

$$A_{\pm,\ m}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3:\ \ J_2\ge 0,\ \ 2(2m-k-2)J_2\le J_1\le 2(2m-k)J_2,\ \ \ \pm\alpha\le 0\},\ m=1,\ 2,...,k;$$

$$A_{\pm,k+1}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0,\ \ J_1-2kJ_2\ge 0,\ \ \pm\alpha\le 0\}$$

以及 $\mathbb{R}^3=\cup_{i=0}^{k+1}(A_{+,\ i}\cup A_{-,\ i})$。

情形 $k=2$。显然，对于任意构型 σ_b，有

$$U(\sigma_b)\in\{U_{+,0},U_{-,0},U_{+,1},U_{-,1},U_{+,2},U_{-,2},U_{+,3},U_{-,3}\}$$

其中

$$U_{+,0}=\frac{3J_1}{2}+3J_2+\alpha,\ \ U_{-,0}=\frac{3J_1}{2}+3J_2-\alpha,\ \ U_{+,1}=\frac{J_1}{2}-J_2+\alpha,$$

$$U_{-,1}=\frac{J_1}{2}-J_2-\alpha,\ \ U_{+,2}=\frac{-J_1}{2}-J_2+\alpha,\ \ U_{-,2}=\frac{-J_1}{2}-J_2-\alpha,$$

$$U_{+,3}=\frac{-3J_1}{2}+3J_2+\alpha,\ \ U_{-,3}=\frac{-3J_1}{2}+3J_2-\alpha.$$

利用（6），我们得到

$$A_{+,0}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0,\ \ J_1+4J_2\le 0,\ \ \alpha\le 0\},$$

$$A_{-,0}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0,\ \ J_1+4J_2\le 0,\ \ \alpha\ge 0\},$$

$$A_{+,1}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0,\ \ J_1+4J_2\ge 0,\ \ \alpha\le 0\},$$

$$A_{-,1}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0,\ \ J_1+4J_2\ge 0,\ \ \alpha\ge 0\},$$

$$A_{+,2}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0,\ \ J_1-4J_2\le 0,\ \ \alpha\le 0\},$$

$$A_{-,2}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0,\ \ J_1-4J_2\le 0,\ \ \alpha\ge 0\},$$

$$A_{+,3}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0,\ \ J_1-4J_2\ge 0,\ \ \alpha\le 0\},$$

$$A_{-,3}=\{(J_1,J_2,\alpha)\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0,\ \ J_1-4J_2\ge 0,\ \ \alpha\ge 0\}$$

以及 $\mathbb{R}^3=\cup_{i=0}^{k+1}(A_{+,\ i}\cup A_{-,\ i})$。

设 $A \subset \{1,2,...,k+1\}$, $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j\in A} w_j(x)$–为偶数，其中 $w_j(x)$ 是单词 $x.$ 中字母 a_j 的数量。注意， H_A 是指数为二的正规子群（见 [1]）。令 $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ 为商群。设 $H_0 := H_0(A) = H_A, H_1 := H_1(G_k \setminus H_A) = G_k \setminus H_A$。

H_A周期构型具有如下形式

$$\varphi(x) = \begin{cases} l_0, & \text{if } x \in H_0, \\ l_1, & \text{if } x \in H_1, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $l_i \in \Phi$、 $i \in \{0,1\}.$

定理1. 设 $k = 2$。对于具有竞争相互作用和外场 $\alpha \neq 0$ 的伊辛模型，以下断言成立：

1. (i) 如果 $(J_1, J_2, \alpha) \in A_{+,0}$，则 $\varphi(x) = 1, \quad \forall x \in V$ 构型是平移不变基态。

(ii) 如果 $(J_1, J_2, \alpha) \in A_{-,0}$，则 $\varphi(x) = -1, \quad \forall x \in V$构型是平移不变基态。

2. 所有 H_A周期基态都是平移不变的。

证明。1. (i) 如果 $\sigma(x) = 1 \quad \forall x \in V$，则有 $\sigma_b \in C_{+,0}\ \forall b \in M$。因此， $\forall x \in V$, $\sigma(x) = 1$ 构型是集合 $A_{+,0}$ 上的平移不变基态。

(ii) 如果 $\sigma(x) = -1 \quad \forall x \in V$，则有 $\sigma_b \in C_{-,0}\ \forall b \in M$。因此， $\forall x \in V$,$\sigma(x) = -1$ 构型是集合 $A_{-,0}$ 上的平移不变基态。2. 令 $|A| = 1$ 和

$$\varphi(x) = \begin{cases} +1, & \text{if } x \in H_0, \\ -1, & \text{if } x \in H_1. \end{cases}$$

令 $B_\pm = \{x \in S_1(c_b) : \ \varphi_b(x) = \pm 1\}$。

如果 $c_b \in H_0$，则有

$$\varphi(c_b) = 1, \ \ |B_+| = 2, \ \ |B_-| = 1,$$

因此 $\varphi_b \in C_{+,1}$。

如果 $c_b \in H_1$，则有

$$\varphi(c_b) = -1, \ \ |B_-| = 2, \ \ |B_+| = 1,$$

因此 $\varphi_b \in C_{-,1}$。

因此， φ 构型是该集合上的基态

$$A_{+,1} \cap A_{-,1} = \{(J_1, J_2, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : J_1 \leq 0, \ \ J_1 + 4J_2 \leq 0, \ \ \alpha = 0\}.$$

然而，根据定理的假设，外场只能为 $\alpha \neq 0$ 。其余情形（尤其是 $|A| = 2$ 情形）可用类似方法验证。定理得证。

回顾一下，当$\alpha = 0$时，模型 (1) 与具有竞争相互作用的伊辛模型一致。该模型的周期基态已在 [2], 中研究，弱周期基态已在 [16], [17] 中研究。

H_A-弱周期构型的形式为

$$\varphi(x) = \begin{cases} l_{00}, & \text{if } x_\downarrow \in H_0,\ x \in H_0, \\ l_{01}, & \text{if } x_\downarrow \in H_0,\ x \in H_1, \\ l_{10}, & \text{if } x_\downarrow \in H_1,\ x \in H_0, \\ l_{11}, & \text{if } x_\downarrow \in H_1,\ x \in H_1, \end{cases} \tag{8}$$

其中 $l_{ij} \in \Phi$、i、$j \in \{0, 1\}$.

定理2. 设 $k = 2$。对于具有竞争相互作用和外场 $\alpha \neq 0$ 的伊辛模型，所有 H_A-弱基态都是平移不变的。

证明. 设 $|A| = 1$ 且

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x_\downarrow \in H_0,\ x \in H_0, \\ +1, & \text{if } x_\downarrow \in H_0,\ x \in H_1, \\ +1, & \text{if } x_\downarrow \in H_1,\ x \in H_0, \\ -1, & \text{if } x_\downarrow \in H_1,\ x \in H_1. \end{cases}$$

假设 $c_b \in H_1$。可能的情况如下:

a) $c_{b_\downarrow} \in H_0$ 且 $\varphi_b(c_{b_\downarrow}) = -1$，则

$$\varphi_b(c_b) = 1, \ \ |B_+| = 0, \ \ |B_-| = 3 \ \text{ and } \ \varphi_b \in C_{+,3}.$$

b) $c_{b_\downarrow} \in H_1$ 且 $\varphi_b(c_{b_\downarrow}) = -1$，则

$$\varphi_b(c_b) = -1, \ \ |B_+| = 1, \ \ |B_-| = 2 \ \text{ and } \ \varphi_b \in C_{-,1}.$$

c) $c_{b_\downarrow} \in H_1$ 且 $\varphi_b(c_{b_\downarrow}) = +1$，则

$$\varphi_b(c_b) = -1, \ \ |B_+| = 2, \ \ |B_-| = 1 \ \text{ and } \ \varphi_b \in C_{-,2}.$$

因此$A_{+,\ 3} \cap A_{-,\ 1} \cap A_{-,\ 2} = \{(0, 0, 0)\}$. 然而，在所得到的集合上，$\varphi$ 不是基态，因为其外场为 $\alpha \neq 0$ ，这与定理的假设相矛盾。其余情形可类似地验证。定理得证。

定理3. 对于具有竞争相互作用和外场 $\alpha \neq 0$的伊辛模型，当且仅当构型 φ 是平移不变基态时，它才是基态。

证明。若考虑凯莱树上的非平移不变构型 σ ，对于 b_1，$b_2 \in M$，有 $U(\sigma_{b_1}) = U_{+,\ i}$或 $U(\sigma_{b_2}) = U_{-,\ j}$，$i$，$j \in \{0, 1, 2, 3\}$. 因此，该构型在集合$A_{+,\ i} \cap A_{-,\ j} \subset \{(J_1,\ J_2,\ \alpha) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha = 0\}$. 上是基态。这与条件 $\alpha \neq 0$矛盾。定理得证。

注 1. 请注意， [2] 文中描述了凯莱树上具有两步相互作用且处于零外场下的伊辛模型的周期基态。在 [16], [17] 弱周期

基态文中描述了具有竞争相互作用且处于零外场下的伊辛模型的周期基态。在 [14] 文中描述了具有非零外场的伊辛模型的所有基态。

定理3断言，如果非零外场为常数，那么具有竞争相互作用的伊辛模型的所有基态都是平移不变的。现在我们将研究具有竞争相互作用且外场为 $G_k^{(2)}$ 周期的伊辛模型的 $G_k^{(2)}$ 周期基态。

3 具有周期性外场的模型

具有竞争相互作用且外场为 $G_k^{(2)}$ 周期的伊辛模型由以下哈密顿量定义:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \sum_{x\in V} \alpha_x \sigma(x), \tag{9}$$

其中 J_1、J_2、$\alpha_x \in \mathbb{R}$ 和

$$\alpha_x = \begin{cases} \alpha_0, \text{ if } \ x \in G_k^{(2)}, \\ \alpha_1, \text{ if } \ x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases} \tag{10}$$

其中 $\alpha_0 \neq \alpha_1$ 和 $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : \ |x| \text{ 为偶数}\}$。

构型 σ_b 在 b 上的能量由以下公式定义

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{x\in S_1(c_b)} \sigma(x)\sigma(c_b) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in b:\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha_{c_b}\sigma(c_b). \tag{11}$$

不难证明以下引理。

引理2. 有

$$U(\sigma_b) \in \{U_{+0}^{(0)}, U_{-,0}^{(0)}, U_{+,0}^{(1)}, U_{-,0}^{(1)}, ..., U_{+,k+1}^{(0)}, U_{-,k+1}^{(0)}, U_{+,k+1}^{(1)}, U_{-,k+1}^{(1)}\}$$

对所有 σ_b，其中

$$U_{\pm,i}^{(j)} = (\frac{k+1}{2} - i)J_1 + (\frac{k(k+1)}{2} + 2i(i-k-1))J_2 \pm \alpha_j, \tag{12}$$

$i = 0, 1, ..., k+1, j = 0, 1.$

定义 5. 构型 φ 称为哈密顿量(9)的基态，若

$$U(\varphi_b) = \min\{U_{+,0}^{(0)}, U_{-,0}^{(0)}, U_{+,0}^{(1)}, U_{-,0}^{(1)}, ..., U_{+,k+1}^{(0)}, U_{-,k+1}^{(0)}, U_{+,k+1}^{(1)}, U_{-,k+1}^{(1)}\} \tag{13}$$

对所有 $b \in M$。

对于固定的 $m = 0, \ 1, \ 2, \ ..., \ k+1 j = 0, \ 1,$ 我们定义

$$A_{\pm,m}^{(j)} = \{(J_1, J_2, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^4 : U_{\pm,m}^{(j)} = \min\{U_{+,0}^{(0)}, U_{-,0}^{(0)}, ..., U_{+,k+1}^{(1)}, U_{-,k+1}^{(1)}\}\}. \tag{14}$$

设 $k=2$。计算过程相当繁琐，但并不困难，可以得到

$$A^{(0)}_{\pm,0}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\le 0, J_1+4J_2\le 0, \mp\alpha_0\ge 0, |\alpha_1|\le \mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm,0}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\le 0, J_1+4J_2\le 0, \mp\alpha_1\ge 0, |\alpha_0|\le \mp\alpha_1\},$$

$$A^{(0)}_{\pm,1}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\le 0, J_1+4J_2\ge 0, \mp\alpha_0\ge 0, |\alpha_1|\le \mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm,1}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\le 0, J_1+4J_2\ge 0, \mp\alpha_1\ge 0, |\alpha_0|\le \mp\alpha_1\},$$

$$A^{(0)}_{\pm,2}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\ge 0, J_1-4J_2\le 0, \mp\alpha_0\ge 0, |\alpha_1|\le \mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm,2}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\ge 0, J_1-4J_2\le 0, \mp\alpha_1\ge 0, |\alpha_0|\le \mp\alpha_1\},$$

$$A^{(0)}_{\pm,3}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\ge 0, J_1-4J_2\ge 0, \mp\alpha_0\ge 0, |\alpha_1|\le \mp\alpha_0\},$$

$$A^{(1)}_{\pm,3}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\ge 0, J_1-4J_2\ge 0, \mp\alpha_1\ge 0, |\alpha_0|\le \mp\alpha_1\}$$

and

$$\mathbb{R}^4=\bigcup_{m=0}^{3}(A^{(0)}_{\pm,m}\cup A^{(1)}_{\pm,m}).$$

定理4. a) 若 $(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in A^{(0)}_{+,3}\cap A^{(1)}_{-,3}$，则 $G_2^{(2)}$-周期构型

$$\sigma(x)=\begin{cases}1, & if\ \ x\in G_k^{(2)},\\ -1, & if\ \ x\in G_k\setminus G_k^{(2)}\end{cases}\tag{15}$$

是模型 (9) 的 $G_2^{(2)}$-周期基态;

b) 若 $(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in A^{(0)}_{-,3}\cap A^{(1)}_{+,3}$，则 $G_2^{(2)}$-周期构型

$$\sigma(x)=\begin{cases}-1, & if\ \ x\in G_k^{(2)},\\ 1, & if\ \ x\in G_k\setminus G_k^{(2)}\end{cases}\tag{16}$$

是模型 (9) 的 $G_2^{(2)}$-周期基态。

证明. a) 我们考虑 (15)。于是有 $\sigma(c_b)=1$ 或 $\sigma(c_b)=-1, \forall b\in M$。若$\sigma(c_b)=1$，则 $\forall x\in S_1(c_b)$，我们有 $\sigma(x)=-1$。在这种情况下，根据引理2，我们取

$$U^{(0)}_{+,3}=\frac{-3J_1}{2}+3J_2+\alpha_0.$$

如果 $\sigma(c_b)=-1$ 则 $\forall x\in S_1(c_b)$ 我们有 $\sigma(x)=+1$。在这种情况下，由引理2可取 e

$$U^{(1)}_{-,3}=\frac{-3J_1}{2}+3J_2-\alpha_1.$$

由这些情形可知，式（15）中定义的 $G_2^{(2)}$-周期构型 $\sigma(x)$ $x\in V$ 是集合上的一个基态

$$A^{(0)}_{+,3}\cap A^{(1)}_{-,3}=\{(J_1,J_2,\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^4:\ J_1\ge 0, J_1-4J_2\ge 0, \alpha_0\le 0, \alpha_1=-\alpha_0\}.$$

b) 考虑式（16）。若 $\sigma(c_b) = +1$，则 $\forall x \in S_1(c_b)$，我们有 $\sigma(x) = -1$。在这种情况下，根据引理2，我们取

$$U^{(0)}_{-,3} = \frac{-3J_1}{2} + 3J_2 - \alpha_0.$$

如果 $\sigma(c_b) = +1$，那么 $\forall x \in S_1(c_b)$，我们有 $\sigma(x) = -1$。在这种情况下，根据 (11)，我们取

$$U^{(1)}_{+,3} = \frac{-3J_1}{2} + 3J_2 + \alpha_1.$$

由这些情形可知，在集合上，由 (16) 定义的 $G^{(2)}_2$ -周期构型 $\sigma(x)\ x \in V$ 是一个基态

$$A^{(0)}_{-,3} \cap A^{(1)}_{+,3} = \{(J_1, J_2, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^4 : \ J_1 \geq 0, J_1 - 4J_2 \geq 0, \alpha_0 \geq 0, \alpha_1 = -\alpha_0\}.$$

定理得证。

定理 5. 对于模型 (9)，不存在平移不变基态。证明. a) 设 $\sigma(x) = 1\ \forall x \in V$。在这种情况下 $\forall b \in M$ 我们有 $c_b \in C^{(0)}_+$、0 或 $c_b \in C^{(1)}_{+\,0}$、。因此我们得到，$U(\sigma_b) = U^{(0)}_+$、0 或 $U(\sigma_b) = U^{(1)}_{+\,0}$、。构型 $\sigma(x) = 1\ \forall x \in V$是集合 $A^{(0)}_+$、$_0 \cap A^{(1)}_{+\,0}$、上的一个基态。但这与条件 $\alpha_0 \neq \alpha_1$ 矛盾。b) 设 $\sigma(x) = -1\ \forall x \in V$。在这种情况下 $\forall b \in M$ 我们有 $c_b \in C^{(0)}_-$、0 或 $c_b \in C^{(1)}_-$、0。因此我们得到，$U(\sigma_b) = U^{(0)}_-$、0 或 $U(\sigma_b) = U^{(1)}_-$、0。构型 $\sigma(x) = -1\ \forall x \in V$是集合 $A^{(0)}_-$、$_0 \cap A^{(1)}_{-\,0}$、上的一个基态。但这与条件 $\alpha_0 \neq \alpha_1$ 矛盾。定理得证。

4 佩尔斯条件

定义 6. 设 $GS(H)$ 为哈密顿量 (1) 的所有基态构成的完全集合。若对于任意 $\varphi_b \in GS(H)$，$\sigma_b \neq \varphi_b$，则称球 $b \in M$ 为构型 σ 的非正规球。构型 σ 的非正规球的并称为该构型的边界，记为 $\partial(\sigma)$。

定义 7. 对于基态集合 $GS(H)$，式 (2) 中定义的相对哈密顿量 H 满足佩尔斯条件，当且仅当对于任意 $\varphi \in GS(H)$ 以及任意几乎处处与 φ 重合的构型 σ，

$$H(\sigma, \varphi) \geq \lambda |\partial(\sigma)|,$$

其中 λ 是一个正数，不依赖于 σ，而 $|\partial(\sigma)|$ 是 $\partial(\sigma)$ 中单位球的数量。

$$\text{Let } \mathbf{P} = intA_{+,0} \cup intA_{-,0} \equiv \{(J_1, J_2, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : \ J_1 < 0, \ \ J_1 + 4J_2 < 0, \ \ \alpha < 0\} \cup$$

$$\cup \{(J_1, J_2, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : J_1 < 0, \ \ J_1 + 4J_2 < 0, \ \ \alpha > 0\}.$$

容易看出

$$\mathbf{P} = \{(J_1, J_2, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : J_1 < 0, \ \ J_1 + 4J_2 < 0, \ \ \alpha \neq 0\}.$$

定理 6. 如果 $(J_1, J_2, \alpha) \in \mathrm{P}$，则满足佩尔斯条件。证明. 记

$$\mathbf{U} = \{U_{+,0}, U_{-,0}, U_{+,1}, U_{-,1}, U_{+,2}, U_{-,2}, U_{+,3}, U_{-,3}\},$$

$U^{\min} = \mathrm{minU}$ 和

$$\lambda_0 = \min\{\mathbf{U}\backslash\{U^{\min}\}\} - U^{\min}. \tag{17}$$

注意到

$$U^{\min} = \begin{cases} U_{+,0}, \text{ if } (J_1, J_2, \alpha) \in intA_{+,0}, \\ U_{-,0}, \text{ if } (J_1, J_2, \alpha) \in intA_{-,0}. \end{cases}$$

$U_{+,\,0} = U_{-,\,0} = U_{+,\,1} = U_{-,\,1} = U_{+,\,2} = U_{-,\,2} = U_{+,\,3} = U_{-,\,3}$ 当且仅当 $(J_1, J_2, \alpha) = (0, 0, 0)$。因此，$\lambda_0 > 0$ 若 $(J_1, J_2, \alpha) \in \mathrm{P}$。

假设 σ 几乎处处与一个基态 $\varphi \in GS(H)$ 重合，则有 $U(\sigma_b) - U(\varphi_b) \geq \lambda_0$ 对于任意 $b \in \partial(\sigma)$，因为 φ 是一个基态。因此，

$$H(\sigma, \varphi) = \sum_{b \in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)) = \sum_{b \in \partial(\sigma)} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)) \geq \lambda_0 |\partial(\sigma)|.$$

因此，$\lambda = \lambda_0$ 满足佩尔斯条件。定理得证。

5 轮廓与吉布斯测度

设 $\Lambda \subset V$ 为有限集，给定构型 $\Lambda' = V\backslash\Lambda$ 和 $\omega_{\Lambda'} = \{\omega(x)\ x \in \Lambda'\}$、$\sigma_\Lambda = \{\sigma(x)\ x \in \Lambda\}$。对于边界条件 $\omega_{\Lambda'}$ 定义在其补集 Λ' 上的有限区域 Λ，条件哈密顿量为

$$H(\sigma_\Lambda | \omega_{\Lambda'}) = \sum_{\substack{b \in M: \\ b \cap \Lambda \neq \emptyset}} U(\sigma_b), \tag{18}$$

其中

$$\sigma_b(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ if } \ x \in b \cap \Lambda, \\ \omega(x), \text{ if } \ x \in b \cap \Lambda'. \end{cases}$$

设 $\omega^{\varepsilon}_{\Lambda'} \equiv \varepsilon$、$\varepsilon = +1$ 在 Λ. 之外为常值构型。对于给定的 ε，我们将 σ_Λ 在 Λ 内部的构型以常值构型延拓至凯莱树，并将此构型记为 $\sigma^{\varepsilon}_\Lambda$，将 $\Omega^{\varepsilon}_\Lambda$ 记为所有此类构型的集合。

现在我们来描述构型 $\sigma^{\varepsilon}_\Lambda$ 的边界。为简便起见，我们只考虑情形 $(J_1, J_2, \alpha) \in intA_{+,\,0}$。在这种情况下，由定理1可得 $GS(H) = \{\sigma^+ \equiv +1\}$. 固定 $+1$-边界条件。令 $\sigma_n = \sigma^+_{V_n}$ 且 $\sigma_{n,\,b} = (\sigma_n)_b$. 根据定义 6，构型 σ_n 的边界为

$$\partial \equiv \partial(\sigma_n) = \{b \in M_{n+2} : \sigma_{n,b} \neq \sigma^+_b\},$$

其中 $M_n = \{b \in M :\ b \cap V_n \neq \varnothing\}$.

边界 ∂ 由 $2k+3$ 个部分组成

$$\partial_i^+ = \{b \in M_{n+2} : \sigma_{n,b} \in \Omega_i\},\ i = 1, 2, ..., k+1;$$

$$\partial_i^- = \{b \in M_{n+2} : \sigma_{n,b} \in \Omega_i^-\},\ i = 0, 1, 2, ..., k+1,$$

其中

$$\Omega_i = \{\sigma_b : \sigma_b(c_b) = +1, |\{x \in b \setminus \{c_b\} : \sigma_b(x) = -1\}| = i\},$$

$$\Omega_i^- = \{-\sigma_b = \{-\sigma_b(x), x \in b\} : \sigma_b \in \Omega_i\}.$$

考虑 V_n 并且对于给定的构型 σ_n （具有边界条件 $+1$），记

$$V_n^- \equiv V_n^-(\sigma_n) = \{t \in V_n : \sigma_n(t) = -1\}.$$

令 $G^n = (V_n^-, L_n^-)$ 为满足以下条件的图

$$L_n^- = \{l = \langle x, y\rangle \in L : x, y \in V_n^-\}.$$

显然，对于固定的 n，图 G^n 包含有限个（$= m$）极大连通子图 G_r^n，即

$$G^n = \{G_1^n, ..., G_m^n\},\quad G_r^n = (V_{n,r}^-, L_{n,r}^-),\quad r = 1, ..., m,$$

其中 $V_{n,r}^-$ 是顶点集合，$L_{n,r}^-$ 是 G_r^n.的边集合

如果 $|i(l_1) \cap i(l_2)| = 1$，则称两条边 $l_1, l_2 \in L$ 为最近邻边，记作 $\langle l_1, l_2\rangle_1$.

对于给定的图 G，用 $V(G)-$ 表示顶点集合，用 $E(G)-$ 表示边集合。

$$D_{\text{edge}}(K) = \{l_1 \in L \setminus E(K) : \exists l_2 \in E(K) \ \text{ such that } \ \langle l_1, l_2\rangle_1\}.$$

这些（有限）集合 $D_{\text{edge}}(G_r^n)$ 称为边界 $\partial.$ 的 $subcontours$。集合 $V_{n,r}^-$，$r = 1, ..., m$ 称为 $D_{\text{edge}}(G_r^n)$ 的 $interior$，$\text{Int}D_{\text{edge}}(G_r^n)$。对于任意两个子轮廓 T_1, T_2，距离 $dist(T_1, T_2)$ 定义为

$$\text{dist}(T_1, T_2) = \min_{\substack{x \in V(T_1),\\ y \in V(T_2)}} d(x, y),$$

其中，$d(x, y)$ 是 $x, y \in V$ 之间的距离（见第1节）。

定义 8。若 $\text{dist}(T_1, T_2) \le 2.$，则称子轮廓 T_1, T_2 $adjacent$。若集合 $\mathcal{A}$ 中任意两个子轮廓 $T_1, T_2 \in \mathcal{A}$ 之间都存在一个由集合 $\mathcal{A}$ 中的子轮廓组成的~ ~ ~序列 $T_1 = T_1, T_2, ..., T_l = T_2$，使得对每个 $i =$~ ~$1, ..., l-1$，子轮廓 T_i 和 T_{i+1} 都相邻，则称子轮廓集合 $\mathcal{A}$ 连通。

定义 9. 子轮廓的任意极大连通集（分量）称为集合 $\partial.$ 的轮廓

轮廓 γ 中的边集合记为 supp γ。

对于给定的轮廓 γ，我们定义

$$imp_i^{\varepsilon}\gamma = \{b \in \partial_i^{\varepsilon} : b \cap \gamma \neq \emptyset\},\ \varepsilon = -1,\ i = 0, 1, ..., k+1;\ \varepsilon = 1,\ i = 1, ..., k+1;$$

$$imp\gamma = (\cup_{i=1}^{k+1} imp_i^{+}\gamma) \cup (\cup_{i=0}^{k+1} imp_i^{-}\gamma);$$

$$|\gamma| = |imp\gamma|,\ |\gamma_i^{\varepsilon}| = |imp_i^{\varepsilon}\gamma|,\ |\gamma_i| = |\gamma_i^{+}| + |\gamma_i^{-}|.$$

容易看出，由边界 σ_n生成的轮廓 $\tau = \{\gamma_r\}$ 集具有以下性质:

(*i*) 每个轮廓 $\gamma \in \tau$ 都包含在集合 V_{n+1} 内;

(*ii*) 对于任意两个轮廓 γ_1、$\gamma_2 \in \tau$，有 dist(γ_1, γ_2) > 2，因此它们的支撑集 suppγ_1 和 suppγ_2 不相交。

具有性质 (*i*)-(*ii*) 的轮廓集合 $\tau = \{\gamma\}$ 称为轮廓构型。正如我们所看到的，自旋构型 σ_n 生成轮廓构型 $\tau = \tau(\sigma_n)$。反过来的断言也成立。事实上，对于给定的轮廓集合 $\{\gamma_r\}_{r=1}^m$，我们对每个 $x \in$ Intγ_r、$r = 1$、...、m 定义 $\sigma_n(x) = -1$，并对每个 $x \in V_n \setminus \cup_{r=1}^m$ Intγ_r. 定义 $\sigma_n(x) = +1$

我们如下在 M 上定义一个图结构（即在凯莱树的所有单位球集合上定义）。如果两个球 b、$b' \in M$ 是邻居，即具有公共边，则用一条边将它们连接起来。将此图记为 $G(M)$。注意，图 $G(M)$ 是一个阶为 $k \geq 1.$ 的凯莱树。这里，该图的顶点是 M 的球。

记 $N_r(x) = |\{\gamma :\ x \in \gamma,\ |\gamma| = r\}|$。

引理3。 [15] 若 $k = 2$ （即二阶凯莱树）。则

$$N_r(x) \leq \text{Const} \cdot (4e)^{2r}. \tag{19}$$

下面的引理给出了哈密顿量的轮廓表示。

引理4。能量 $H_n(\sigma_n) \equiv H_{V_n}(\sigma_n|\omega_{V_n'} = +1)$（见（18））具有如下形式

$$H_n(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{k+1}(U_{+,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^{+}| + \sum_{i=0}^{k+1}(U_{-,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^{-}| + |M_{n+2}| \cdot U_{+,0}. \tag{20}$$

证明。

$$H_n(\sigma_n) = \sum_{b \in M_{n+2}} U(\sigma_{n,b}) = \sum_{i=1}^{k+1} U_{+,i} \cdot |\partial_i^{+}| + \sum_{i=0}^{k+1} U_{-,i} \cdot |\partial_i^{-}| +$$

$$+(|M_{n+2}| - \sum_{i=1}^{k+1} |\partial_i^{+}| - \sum_{i=0}^{k+1} |\partial_i^{-}|) \cdot U_{+,0}. \tag{21}$$

由（21）可得（20）。引理得证。

引理5. 假设 $(J_1, J_2, \alpha) \in IntA_{+,\ 0}$。设 γ 为一个固定的轮廓，并且

$$p_{+}(\gamma) = \frac{\sum_{\sigma_n : \gamma \in \partial} \exp(-\beta H_n(\sigma_n))}{\sum_{\tilde{\sigma}_n} \exp(-\beta H_n(\tilde{\sigma}_n))} \tag{22}$$

Then

$$p_+(\gamma) \leq \exp(-\beta\lambda_0 \mid \gamma \mid), \tag{23}$$

其中 λ_0 由公式 (17) 定义，即

$$\lambda_0 = \min\{\mathbf{U} \setminus \{U_{+,0}\}\} - U_{+,0}$$

且 $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ − 温度。

证明。令 $\Omega_\gamma = \{\sigma_n : \gamma \subset \partial\}, \Omega^0_\gamma = \{\sigma_n : \gamma \cap \partial = \varnothing\}$，并定义映射 $\chi_\gamma : \Omega_\gamma \to \Omega^0_\gamma$如下

$$\chi_\gamma(\sigma_n)(x) = \begin{cases} +1, & if \quad x \in \mathrm{Int}\gamma, \\ \sigma_n(x), & if \quad x \bar{\in} \mathrm{Int}\gamma. \end{cases}$$

对于给定的 γ，映射 χ_γ 是一一映射。我们需要证明以下内容

引理6。对于任意 $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$，我们有

$$|\partial_i^+(\sigma_n)| = |\partial_i^+(\chi_\gamma(\sigma_n))| + |\gamma_i^+|,$$

其中 $i = \overline{1, k+1}$,

$$|\partial_i^-(\sigma_n)| = |\partial_i^-(\chi_\gamma(\sigma_n))| + |\gamma_i^-|,$$

其中 $i = \overline{0, k+1}$.

证明。容易看出，映射 χ_γ 会破坏轮廓 γ，而所有其他轮廓关于 χ_γ 都是不变的。证明完毕。

现在继续证明引理5。由引理4可得

$$p_+(\gamma) = \frac{\sum_{\sigma_n \in \Omega_\gamma} \exp(-\beta(\sum_{i=1}^{k+1}(U_{+,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^+(\sigma_n)| + \sum_{i=0}^{k+1}(U_{-,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^-(\sigma_n)|))}{\sum_{\tilde{\sigma}_n} \exp(-\beta(\sum_{i=1}^{k+1}(U_{+,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^+(\tilde{\sigma}_n)| + \sum_{i=1}^{k+1}(U_{-,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^-(\tilde{\sigma_n})|))}$$

$$\leq \frac{\sum_{\sigma_n \in \Omega_\gamma} \exp(-\beta(\sum_{i=1}^{k+1}(U_{+,i} - U_{+,i}) \cdot |\partial_i^+(\sigma_n)| + \sum_{i=0}^{k+1}(U_{-,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^-(\sigma_n)|))}{\sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega^0_\gamma} \exp(-\beta(\sum_{i=1}^{k+1}(U_{+,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^+(\tilde{\sigma}_n)| + \sum_{i=0}^{k+1}(U_{-,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^-(\tilde{\sigma}_n)|))} =$$

$$= \frac{\sum_{\sigma_n \in \Omega_\gamma} \exp(-\beta(\sum_{i=1}^{k+1}(U_{+,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^+| + \sum_{i=0}^{k+1}(U_{-,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^-(\sigma_n)|))}{\sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_\gamma} \exp(-\beta(\sum_{i=1}^{k+1}(U_{+,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^+(\chi_\gamma(\tilde{\sigma}_n))| + \sum_{i=0}^{k+1}(U_{-,i} - U_{+,0}) \cdot |\partial_i^-(\chi_\gamma(\tilde{\sigma}_n))|))}. \tag{24}$$

由于 $(J_1, J_2, \alpha) \in IntA_{+,0}$，根据定理1，我们有 $GS(H) = \{\sigma^+\}$，因此 $U_{+,i} - U_{+,0} \geq \lambda$ 对任意 $i = 1, ..., k+1$ 成立；并且 $U_{-,i} - U_{+,0} \geq \lambda_0$ 对任意 $i = 0, 1, ..., k+1$ 成立。因此，利用这一事实和式（24）中的引理6，可得式（23）。引理得证。

运用引理13和引理15，采用与 [15] 非常相似的论证，可以证明

定理 7。I. 若 $(J_1, J_2, \alpha) \in intA_{+,0}$，则对所有充分大的 β，模型（1）在二阶凯莱树上至少存在一个吉布斯测度。

II. 如果 $(J_1, J_2, \alpha) \in intA_{-,0}$ 那么对于所有充分大的 β，在二阶凯莱树上的模型 (1) 至少存在一个吉布斯测度。

注 2. 注意，在 [2] 中已经发现，具有竞争相互作用和零外场的伊辛模型在凯莱树上存在吉布斯测度。定理 7 表明，当外场非零时，吉布斯测度仍然存在。

致谢。我们感谢 U.A. Rozikov 教授提出的宝贵意见。数据可用性声明。不适用。利益冲突。作者声明不存在利益冲突。

参考文献

1. U.A. Rozikov，《凯莱树上的吉布斯测度》，World scientific，（2013）。2. U.A.Rozikov，《凯莱树上具有两步相互作用的伊辛模型的基态和吉布斯测度的构造性描述》，《统计物理学杂志》，122：217–235（2006）。3. R.J. Baxter，《统计力学中精确求解的模型》，（Academic Press，伦敦/纽约，1982）。4. P.M. Bleher、J. Ruiz、V.A. Zagrebnov，《关于贝特格上伊辛模型极限吉布斯态的纯性》，《统计物理学杂志》，79：473–482（1995）。5. N.N. Ganikhodzhaev，《凯莱树的群表示与自同构》，《乌兹别克斯坦共和国科学院学报》，4：3–5（1994）。6. P.M. Bleher、J. Ruiz、R.H. Schonmann、S. Shlosman 和 V.A. Zagrebnov，《凯莱树上临界相的刚性》，《莫斯科数学杂志》，3：345–362（2001）。7. N.N. Ganikhodjaev 和 U.A. Rozikov，《凯莱树上某些格点模型的周期极端吉布斯测度的描述》，《理论数学物理》，111：480–486（1997）。8. R.A. Minlos，《数理统计物理学导论》（大学讲座丛书，19，2000）。9. F.M. Mukhamedov、U.A. Rozikov，《具有竞争性三元和二元相互作用的模型的吉布斯测度及相应的冯·诺依曼代数》，《统计物理学杂志》，114：825–848（2004）。10. Kh.A. Nazarov、U.A. Rozikov，《具有竞争相互作用的伊辛模型的周期吉布斯测度》，《理论数学物理》，135：881–888（2003）。11. C. Preston，《可数集上的吉布斯态》（剑桥大学出版社，伦敦，1974）。12. U.A. Rozikov，《凯莱树群表示按有限指数正规子群分解为陪集的分划结构及其在描述周期吉布斯分布中的应用》，《理论数学物理》，112：929–933（1997）。13. Ya.G. Sinai，《相变理论：严格结果》（Pergamon，牛津，1982）。14. M.M. Rahmatullaev、M.A. Rasulova，《凯莱树上具有

外场的伊辛模型的基态》，《乌兹别克数学杂志》，3：147–155（2018）。15. U.A. Rozikov, 《凯莱树上的 q-分量模型：轮廓方法》，《数学物理学通讯》，71：27–38（2005）。16. M.M. Rahmatullaev, 《凯莱树上具有竞争相互作用的伊辛模型弱周期基态的描述》，《应用数学与信息科学》。AMIS USA，4(2)：237–241（2010）。17. U.A. Rozikov、M.M. Rahmatullaev, 《凯莱树上具有竞争相互作用的伊辛模型的弱周期基态和吉布斯测度》，《理论数学物理》，160，第3期：1292–1300（2009）。18. U.A. Rozikov、M.M. Rakhmatullaev、R.M. Khakimov, 《凯莱树上平移不变和周期外场中的波茨模型周期吉布斯测度》，《理论数学物理》，210(1)：135–153（2022）。19. G.I. Botirov、U.A. Rozikov, 《凯莱树上具有竞争相互作用的波茨模型：轮廓方法》，《理论数学物理》，153(1)：1423–1433（2007）。