arXiv:2303.03047v1 [math.PR] 6 Mar 2023

向量值 Wiener-Itˆo 积分的最优收敛速率

作者：Huiping Chen

摘要。我们研究向量值 Wiener-Itˆo 积分的多维正态逼近中的最优收敛速率，其中所有分量均属于同一个固定的 Wiener 混沌。结合 Malliavin演算、用于正态逼近的 Stein方法以及累积量方法，我们获得了关于适当光滑距离的最优收敛速率。作为应用，我们推导出复值 Wiener-Itˆo 积分、核为阶梯函数的向量值 Wiener-Itˆo 积分以及向量值托普利兹二次泛函的最优收敛速率。

1. 引言

在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，设 $X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ 是某个实可分希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 上的等距高斯过程，其中 σ-代数 $\mathcal{F}$ 由 X 生成。设 $\{F_n : n \geq 1\}$ 是一列随机变量，它们属于 X 的同一个固定 Wiener 混沌，且方差为 1。近年来，与 $\{F_n : n \geq 1\}$ 的正态逼近相关的研究一直备受关注。2005 年，Nualart 和 Peccati 发表了开创性论文 [27]，并首次证明了四阶矩定理，该定理表明，$\{F_n : n \geq 1\}$ 收敛到标准正态随机变量 N，当且仅当当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{E}\left[F_n^4\right] \to 3$。不久之后，Peccati 和 Tudor 在 [28] 中给出了这一刻画的多维版本。Nualart 和 Ortiz-Latorre 在 [26] 中运用 Malliavin演算的技巧，提出了四阶矩定理的一种新证明。此外，Nourdin 和 Peccati 在 [21], 中将 Malliavin 演算与 Stein方法相结合，推导出 $\{F_n : n \geq 1\}$ 的高斯逼近的定量且显式的上界。本文聚焦于适当距离下的最优收敛速率，并假设 F_n 依分布收敛到 N。若正数列 $\{\varphi(n) : n \geq 1\}$ 单调递减至零，且对于某个距离 $d(\cdot,\cdot)$，有 $d(F_n, N) \asymp \varphi(n)$，则称该数列给出了最优收敛速率。这里，对于两个数值序列 $\{a_n : n \geq 1\}$ 和 $\{b_n : n \geq 1\}$，若存在两个不依赖于 n 的常数 $0 < c_1 < c_2 < \infty$，使得当 n 充分大时，$c_1 b_n \leq a_n \leq c_2 b_n$，则记为 $a_n \asymp b_n$。全文中，我们用 c_1 和 c_2 表示两个有限正常数，它们不依赖于 n，且可在不同位置取不同值。

固定一个整数 $q \geq 2$。对于一列方差为 1 且所有 $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot p}$ 的随机变量 $\{F_n = I_q(f_n) : n \geq 1\}$，假设 F_n 依分布收敛到 N。关于某些适当的

2020 *Mathematics Subject Classification*。60F05、60G15、60H05、60H07。

Key Words and Phrases. 最优收敛速率、向量值Wiener-Itˆo积分、Malliavin演算、Stein方法、累积量方法。本文得到国家自然科学基金委员会（编号：11731009、12231002）和北京大学统计科学中心的资助。作者对Yong Chen教授和Yong Liu教授提出的宝贵意见并进行的讨论深表感谢。

距离 $d(\cdot,\cdot)$。在 [20], , Nourdin 和 Peccati 展示了如何在 X 泛函的正态逼近中判定最优的 Berry-Esseen 界，并进一步完善了他们在 [21]证明的主要结果。具体而言，他们还假设，当 $n\to\infty$时，二维随机向量

$$\left(F_n, \frac{1-q^{-1}\left\|DF_n\right\|_{\mathfrak{H}}^2}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(q^{-1}\left\|DF_n\right\|_{\mathfrak{H}}^2\right)}}\right) \xrightarrow{d} (N_1,N_2), \tag{1.1}$$

其中 $n\to\infty$，这里 (N_1,N_2) 是一个中心化的二维高斯向量，满足 $\mathrm{E}\left(N_1^2\right)=\mathrm{E}\left(N_2^2\right)=1$ 且 $\mathrm{E}\left(N_1N_2\right)=\rho$。如果 $\rho\neq 0$，那么对于每个 $z\in\mathbb{R}$，$P(F_n\leq z)-P(N\leq z)\sqrt{\operatorname{Var}(q^{-1}\|DF_n\|_{\mathfrak{H}}^2)}$ 都收敛到一个非零极限。因此，

$$d_{\mathrm{Kol}}\left(F_n,N\right)\asymp\sqrt{\operatorname{Var}\left(q^{-1}\left\|DF_n\right\|_{\mathfrak{H}}^2\right)}, \tag{1.2}$$

其中 $d_{\mathrm{Kol}}(F_n,N)$ 是定义如下的 Kolmogorov 距离

$$d_{\mathrm{Kol}}\left(F_n,N\right)=\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|P(F_n\leq z)-P(N\leq z)\right|.$$

注意，$\sqrt{\operatorname{Var}\left(q^{-1}\left\|DF_n\right\|_{\mathfrak{H}}^2\right)}\asymp\sqrt{\mathrm{E}\left[F_n^4\right]-3}$（见 [22, 引理 5.2.4]）。在 [20, 命题 3.6], 中，他们提出，如果 q 是偶数，则 (1.1) 的充分条件如下，

$$\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{l=1}^{2(q-r)-1}\frac{\left\|\left(f_n\tilde{\otimes}_r f_n\right)\otimes_l\left(f_n\tilde{\otimes}_r f_n\right)\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2(2(q-r)-l)}}}{\operatorname{Var}\left(q^{-1}\left\|DF_n\right\|_{\mathfrak{H}}^2\right)}\to 0, \tag{1.3}$$

and

$$-qq!(q/2-1)!\binom{q-1}{q/2-1}^2\frac{\left\langle f_n, f_n\tilde{\otimes}_{q/2}f_n\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}}{\sqrt{\operatorname{Var}\left(q^{-1}\left\|DF_n\right\|_{\mathfrak{H}}^2\right)}}\to\rho. \tag{1.4}$$

在这种情况下，如果 $\rho\neq 0$，则（1.2）成立，也就是说，对于 F_n，$\sqrt{\operatorname{Var}\left(q^{-1}\left\|DF_n\right\|_{\mathfrak{H}}^2\right)}$ 是关于 Kolmogorov 距离的最优收敛速率。然而，当 q 为偶数且 $\rho=0$，或者 q 为奇数且满足（1.3）时（这意味着在 $\rho=0$ 的条件下（1.1）成立），关于 Kolmogorov 距离的最优收敛速率尚不明确。在 [2], Bierm´e，Bonami、Nourdin 和 Peccati 针对适当的光滑距离，完整解决了最优收敛速率问题。他们证明了

$$d\left(F_n,N\right)\asymp\max\left(\left|\mathrm{E}\left[F_n^3\right]\right|,\mathrm{E}\left[F_n^4\right]-3\right),$$

其中 $d(F_n,N)=\sup\left|\mathrm{E}\left[h(F_n)\right]-\mathrm{E}[h(N)]\right|$，且 h遍历所有二阶导数有界于 1 的实值函数类。注意，[19, 命题中已证明

3.1] 即

$$\left|\mathrm{E}\left[F_n^3\right]\right| \leq c\sqrt{\mathrm{E}\left[F_n^4\right]-3},$$

其中， c 是仅依赖于 q的常数。此外，在 [23], 中，Nourdin 和 Peccati 得到， $\left\{\max\left(\left|\mathrm{E}\left[F_n^3\right]\right|, \mathrm{E}\left[F_n^4\right]-3\right): n \geq 1\right\}$ 也为全变差这一非光滑距离提供了最优收敛速率。也就是说，

$$d_{\mathrm{TV}}\left(F_n, N\right) \asymp \max\left(\left|\mathrm{E}\left[F_n^3\right]\right|, \mathrm{E}\left[F_n^4\right]-3\right),$$

其中， $d_{\mathrm{TV}}\left(F_n, N\right)$是全变差距离，其定义为

$$d_{\mathrm{TV}}\left(F_n, N\right)=\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\left|P\left(F_n \in A\right)-P(N \in A)\right|.$$

据我们所知，研究随机向量序列最优收敛速率的文献并不多，这类随机向量的各分量是某个等距高斯过程的泛函。在 [3], 中，Campese 将 [20] 的结果推广到多维情形，并提出了用于确定等距高斯过程的光滑泛函在多维正态逼近中精确渐近收敛速度的技术。设 $\{F_n =(F_{n,1}, \ldots, F_{n,d}): n \geq 1\}$ 是一个 d维随机向量序列，满足$F_{n,i} = I_{q_i}(f_{n,i})$且$f_{n,i} \in \mathfrak{H}^{\odot q_i}$ ，其中 $1 \leq i \leq d$。假设 F_n 的协方差矩阵为 C ，且 F_n 依分布收敛于 d维正态随机向量 $Z \sim \mathscr{N}_d(0, C)$。与一维情形类似，随机序列

$$\left\{\left(F_n, \frac{q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}-\mathrm{E}\left[q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)}}\right): n \geq 1\right\} \tag{1.5}$$

发挥着至关重要的作用。具体而言，设 $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是三次可微的，并且其最高三阶导数均有界。假设对于 $1 \leq i、 j \leq d$，随机序列 (1.5) 依分布收敛于中心化高斯随机向量 $\left(Z, \tilde{Z}_{ij}\right)$ ，只要

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left(q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)} \asymp \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \mathrm{Var}\left(q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)}. \tag{1.6}$$

[3, 定理 3.4、推论 3.6] 表明，序列的下极限和上极限

$$\left\{\frac{\mathrm{E}\left[g\left(F_n\right)\right]-\mathrm{E}[g(Z)]}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \mathrm{Var}\left(q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)}}: n \geq 1\right\}$$

与.....相同

$$\left\{\frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\left(q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \mathrm{Var}\left(q_j^{-1}\left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)}} \rho_{ijk} \mathrm{E}\left[\partial_{ijk} g(Z)\right]: n \geq 1\right\}, \tag{1.7}$$

其中常数 ρ_{ijk} 在 (1.6) 成立时定义为 $\rho_{ijk} = \mathrm{E}\left[\tilde{Z}_{ij} Z_k\right]$，否则定义为 $\rho_{ijk} = 0$。如果 (1.7) 的下极限和上极限均不为零且有限，那么

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \mathrm{Var}\left(q_j^{-1} \left\langle DF_{n,i}, DF_{n,j} \right\rangle_{\mathfrak{H}}\right)}$$

为 F_n 提供了关于如下距离的最优收敛速率

$$d(F_n, Z) = \sup\left\{\left|\mathrm{E}\left[g(F_n)\right] - \mathrm{E}\left[g(Z)\right]\right|\right\}, \tag{1.8}$$

其中 $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 遍历所有三次可微且三阶及以下导数有界的实值函数。[3, 命题 4.2] 建立了与 (1.3) 和 (1.4) 类似的充分条件，以保证随机序列 (1.5) 依分布收敛到中心高斯随机向量。需要指出的是，Campese 在 [3] 中发展的技术范围广泛且具有启发性。在 Campese 的框架中，研究的是高斯过程的光滑泛函，其分量不一定属于 Wiener 混沌，并且允许这些光滑泛函的协方差发生波动。然而，由于假设随机序列 (1.5) 依分布收敛，Campese 在 [3] 中的研究似乎并未对关于 (1.8) 所定义距离的 F_n 最优收敛速率给出完整刻画。例如，Campese 给出了一个反例，说明当涉及的核为阶梯函数时，他所建立的技术无法奏效（见 [3, 第 5.1] 节或本文第4.2节）。注意，在这个反例中，F_n 的所有分量都属于某个等距高斯过程的第二 Wiener 混沌。此外，Campese 在 [3, 第 5.4] 节中指出，要将其结果非平凡地应用于 Breuer-Major 中心极限定理，q_i 中至少有一个整数必须为偶数，其中 $F_{n,i}$ 表示其阶数。

本文考虑一列 d 维随机向量 $\{F_n = (F_{n,1}, \ldots, F_{n,d}): n \geq 1\}$，其中各分量均属于第 q 阶 Wiener混沌，且 $q \geq 2$。此外，仍假设 F_n 的协方差矩阵为 C，并且 F_n 在分布上收敛于 d 维正态随机向量 $Z \sim \mathcal{N}_d(0, C)$。在不作任何其他假设的情况下，我们全面研究关于光滑距离 $\rho(\cdot,\cdot)$ 的最优收敛速率，该距离定义如下：

$$\rho(F, G) = \sup\left\{\left|\mathrm{E}\left[g(F)\right] - \mathrm{E}\left[g(G)\right]\right|\right\},$$

其中 $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 遍历所有四次连续可微函数构成的函数类，这些函数满足 g 及其所有四阶及以下导数的绝对值均不超过 1；F 和 G 是两个 d 维随机向量。具体而言，在定理 3.1 中，我们得到：

$$\rho\left(F_n, Z\right) \asymp M(F_n) := \max\left\{\sum_{|m|=3} \left|\kappa_m(F_n)\right|, \sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)\right\},$$

其中，对于多重指标 m，$\kappa_m(F_n)$是 F_n 的 m 阶累积量（见定义 2.2）。也就是说，简洁的表达式 $\max\left\{\sum_{|m|=3} |\kappa_m(F_n)|, \sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)\right\}$ 是最优

关于光滑距离 $\rho(\cdot,\cdot)$ 的收敛速率。可以证明,

$$\sum_{|m|=3} |\kappa_m(F_n)| \leq c\sqrt{\sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)},$$

其中, c 是仅依赖于 q 和 C的常数，这是通过结合插值技巧（见 [19, 定理 4.2] 或 [24, 定理 7.2]）与 [22, 公式 (6.2.6)]得到的。这是将 [19, 命题 3.1] 推广到多维情形。注意, $M(F_n)$可以由 $\sum_{|m|=3} |\kappa_m(F_n)|$ 和 $\sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)$这两个量中的任意一个得到（两种情形的例子见第 4 节）。与 [3] Campese所用的技巧相比，除了使用Malliavin演算和Stein方法进行正态逼近外，我们还充分运用了累积量方法。更具体地说，在命题 3.5 中, 我们利用分部积分公式（见引理 2.1）以及累积量与相关 Γ-随机变量之间的关系（见定理 2.4），将$\mathrm{E}[\langle F, \nabla g(F)\rangle_{\mathbb{R}^d}]$ 展开为与累积量及相关 Γ-随机变量对应的各项之和。一方面，结合这一展开式与关于 Γ-随机变量的技术性估计（见命题 3.7），我们证明了上界, 即存在常数 $0 < c_2 < \infty$ ，使得当 n足够大时,

$$\rho\left(F_n, Z\right) \leq c_2 \max\left\{\sum_{|m|=3} \left|\kappa_m(F_n)\right|, \sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)\right\}.$$

另一方面，我们精心构造了若干特定的测试函数 g （见引理 3.9），以得到下界。也就是说，存在一个常数 $0 < c_1 < \infty$ ，使得当 n 足够大时,

$$\rho\left(F_n, Z\right) \geq c_1 \max\left\{\sum_{|m|=3} \left|\kappa_m(F_n)\right|, \sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)\right\}.$$

请注意，在假设 F_n 的所有分量都属于同一个固定 Wiener 混沌的条件下，我们得到的最优收敛速率相对简洁。在某种程度上，这一结果与 [18, 定理 1.5]，相一致，其中 Noreddine 和 Nourdin 证明了

$$\sup\left\{\left|\mathrm{E}\left[g(F_n)\right] - \mathrm{E}\left[g(Z)\right]\right|\right\} \leq c_1 \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\kappa_{4e_i}(F_n)},$$

其中 $g:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 遍历所有二阶导数有界于 1 的二次连续可微函数。作出这一假设, 是因为我们不确定累积量的估计以及与之相关的 Γ-随机变量类比命题 3.7 的结论，对于分量允许属于不同阶 Wiener 混沌的向量值 Wiener-Itˆo 积分是否仍然成立。如果成立, 我们便可以去掉向量值 Wiener-Itˆo 积分的所有分量都属于同一个固定 Wiener 混沌这一限制。这一改进方向将在其他研究中探讨。

作为一项应用，我们首先考虑一列复 Wiener-Itˆo 积分

$\{F_n:\ n\geq 1\}$ 见第4.1节。假设 F_n 依分布收敛于复正态随机变量 Z，且其协方差矩阵与 F_n相同。结合定理 3.1，以及复 Wiener-Itˆo 积分的实部和虚部分别可表示为实 Wiener-Itˆo 积分这一事实（见 [6, 定理 3.3]），我们得到定理 4.1，其表述如下:

$$\rho\left(F_n,Z\right)\asymp\max\left\{\left|\mathrm{E}\left[F_n^3\right]\right|,\left|\mathrm{E}\left[F_n^2\bar{F}_n\right]\right|,\mathrm{E}\left[\left|F_n\right|^4\right]-2\left(\mathrm{E}\left[\left|F_n\right|^2\right]\right)^2-\left|\mathrm{E}\left[F_n^2\right]\right|^2\right\}.$$

例如，我们得到了与复值Ornstein-Uhlenbeck过程漂移系数的最小二乘估计量相关统计量的最优收敛速率。在第4.2节中，我们考察Campese在 [3,第5节1] 中给出的反例，并应用我们的结论，推导出一列核为阶梯函数的向量值Wiener-Itˆo积分的最优收敛速率。在第4.3节中，通过结合我们的方法与文献中的一些结果（例如 [3, 9, 10],），我们得到了向量值托普利兹二次泛函多维正态逼近的最优收敛速率。

本文结构如下。第2节介绍等距高斯过程、Malliavin演算、累积量方法以及用于正态逼近的多维斯坦方法的一些基本内容。在第3节中，我们得到了关于光滑距离 $\rho(\cdot,\ \cdot)$ 的一列向量值Wiener-Itˆo积分的最优收敛速率。在第4节中，我们将第3节证明的主要结果应用于一列复值Wiener-Itˆo积分、一列核为阶梯函数的向量值Wiener-Itˆo积分以及向量值托普利兹二次泛函，从而得到它们的最优收敛速率。

2. 预备知识

本节简要介绍等距高斯过程、Malliavin演算、累积量和多维斯坦方法的一些基本理论。更多详情请参阅 [7, 15,22, 25]。

2.1. 等距高斯过程

设 $\mathfrak{H}$ 是一个实可分希尔伯特空间，其内积记为$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{H}}$。令 $\|h\|_{\mathfrak{H}}$ 表示 $h\in\mathfrak{H}$的范数。考虑定义在完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},P)$ 上的实等距高斯过程$X=\{X(h):\ h\in\mathfrak{H}\}$，其中 σ-代数 $\mathcal{F}$ 由 X生成。也就是说，$X=\{X(h):\ h\in\mathfrak{H}\}$ 是一个由中心化随机变量构成的高斯族，满足对任意 $h,g\in\mathfrak{H}$，$\mathrm{E}\ [X(h)X(g)]=\langle h,g\rangle_{\mathfrak{H}}$。

对于 $q\geq 0$，X 的第 q阶 Wiener-Itˆo 混沌 $\mathcal{H}_q(X)$ 是$L^2(\Omega)$中由随机变量 $\{H_q(X(h)):\ h\in\mathfrak{H},\|h\|_{\mathfrak{H}}=1\}$ 生成的闭线性子空间，其中 $H_q(x)$ 是由等式定义的 q 次厄米特多项式

$$\exp\left\{tx-\frac{1}{2}t^2\right\}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{t^q}{q!}H_q(x).$$

分别用 $\mathfrak{H}^{\otimes q}$ 和 $\mathfrak{H}^{\odot q}$ 表示 $\mathfrak{H}$的 q阶张量积和 q阶对称张量积。对于任意 $q\geq 1$，映射 $I_q(h^{\otimes q})=H_q(X(h))$ 可扩展为线性等距映射，将对称张量积 $\mathfrak{H}^{\odot q}$映射到配备范数

$\sqrt{q!}\|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$，以及第 q 阶 Wiener-Itˆo 混沌 $\mathcal{H}_q(X)$。对于 $q=0$，我们将 $I_0(c)=c$ 记作 $c\in\mathbb{R}$。对于任意 $f\in\mathfrak{H}^{\odot q}$，随机变量 $I_q(f)$ 称为关于 X的 f的实值第 q 阶 Wiener-Itˆo 积分。$L^2(\Omega,\sigma(X),P)$ 的 Wiener-Itˆo 混沌分解意味着，$L^2(\Omega)$ 可分解为下列空间 $\mathcal{H}_n(X)$ 的无限正交和。也就是说，任意随机变量 $F\in L^2(\Omega,\sigma(X),P)$ 都有唯一的如下形式的展开

$$F=\sum_{q=0}^{\infty}I_q\left(f_q\right),$$

其中 $f_0=\mathrm{E}[F]$，而 $f_q\in\mathfrak{H}^{\odot q}$with $q\geq 1$由 F唯一确定。

设 $\{\eta_k,k\geq 1\}$ 是 $\mathfrak{H}$中的完备正交系。给定 $f\in\mathfrak{H}^{\odot p}$, $g\in\mathfrak{H}^{\odot q}$，对于 $r=0,\ldots,p\wedge q$，f和 g的第 r 阶收缩是 $\mathfrak{H}^{\otimes(p+q-2r)}$ 中的一个元素，定义为

$$f\otimes_r g=\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{\infty}\langle f,\eta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\eta_{i_r}\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}\otimes\langle g,\eta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\eta_{i_r}\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}.$$

注意，$f\otimes_r g$ 不一定是对称的，我们用 $f\tilde{\otimes}_r g$ 或 symm$(f\otimes_r g)$ 表示其对称化。[22, 命题 2.7.10] 给出了实多重 Wiener-Itˆo 积分的乘积公式，如下所示。对于 $f\in\mathfrak{H}^{\odot p}$ 和 $g\in\mathfrak{H}^{\odot q}$，其中 $p,q\geq 0$,

$$I_p(f)I_q(g)=\sum_{r=0}^{p\wedge q}r!\binom{p}{r}\binom{q}{r}I_{p+q-2r}(f\tilde{\otimes}_r g). \tag{2.1}$$

接下来，我们引入复等距高斯过程。我们以通常的方式将 $\mathfrak{H}$, $L^2(\Omega)$ 复化，并分别记为 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$。设 $\mathfrak{h}=f+\mathrm{i}g\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$，其中$f,g\in\mathfrak{H}$，记 $X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}):=X(f)+\mathrm{i}X(g)$，它满足 $\mathrm{E}\left[X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})\,\overline{X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}')}\right]=\langle\mathfrak{h},\mathfrak{h}'\rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}}$，其中 $\mathfrak{h}'\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$。设 $Y=\{Y(h):h\in\mathfrak{H}\}$ 是等距高斯过程 X 在 $\mathfrak{H}$上的一个独立副本。按上述方式定义 $Y_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$。设$Z(\mathfrak{h}):=\frac{X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})+\mathrm{i}Y_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})}{\sqrt{2}}$，其中 $\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$，并称 $Z=\{Z(\mathfrak{h}):\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}\}$ 为 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$上的复等距高斯过程，它是一个中心对称复高斯族，满足

$$\mathrm{E}[Z(\mathfrak{h})^2]=0,\quad \mathrm{E}[Z(\mathfrak{h})\overline{Z(\mathfrak{h}')}]=\langle\mathfrak{h},\mathfrak{h}'\rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}},\ \forall\mathfrak{h},\mathfrak{h}'\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}.$$

对于每个 p、$q\geq 0$，令 $\mathscr{H}_{p,q}(Z)$ 表示由随机变量 $\left\{J_{p,q}(Z(\mathfrak{h})):\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}},\|\mathfrak{h}\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}}=\sqrt{2}\right\}$ 在 $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ 中生成的闭线性子空间，其中 $J_{p,q}(z)$ 是复厄米特多项式，或厄米特 - 拉盖尔 - 伊藤多项式，定义为

$$\exp\left\{\lambda\bar{z}+\bar{\lambda}z-2|\lambda|^2\right\}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\bar{\lambda}^p\lambda^q}{p!q!}J_{p,q}(z),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

空间 $\mathscr{H}_{p,q}(Z)$ 称为 Z 的第 (p,q) 阶维纳-伊藤混沌空间。

取 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 中的一个完备正交系 $\{\xi_k,k\geq 1\}$。我们用 Λ 表示由所有仅有有限个非零分量的非负整数序列 $\mathsf{a}=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 构成的集合

分量。对于两个序列 $\mathfrak{p}=\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$、$\mathfrak{q}=\{q_k\}_{k=1}^{\infty}\in\Lambda$，线性映射 (2.2)

$$\mathcal{I}_{p,q}\left(\operatorname{symm}\left(\otimes_{\mathfrak{k}=1}^{\infty}\xi_{\mathfrak{k}}^{\otimes\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}}\right)\otimes\operatorname{symm}\left(\otimes_{\mathfrak{k}=1}^{\infty}\overline{\xi}_{\mathfrak{k}}^{\otimes\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}}\right)\right):=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^{p_k+q_k}}}J_{p_k,q_k}\left(\sqrt{2}Z\left(\xi_k\right)\right),$$

在赋予范数$\sqrt{p!q!}\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes(p+q)}}$的张量积 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p}\otimes\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ 与第(p,q)阶 Wiener-Itˆo 混沌$\mathscr{H}_{p,\ q}(Z)$之间提供一个等距同构。注意，Itˆo 在 [15, 定理 13.2]中证明了(2.2)。对于任意的 $f\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p}\otimes\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$， $\mathcal{I}_{p,\ q}(f)$称为相对于 Z的 f 的复第(p,q)阶 Wiener-Itˆo 积分。$L_{\mathbb{C}}^2(\Omega\ \sigma(Z)\ P)$的复 Wiener-Itˆo 混沌分解表明， $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega\ \sigma(Z)\ P)$可分解为各空间$\mathscr{H}_{p,\ q}(Z)$的无穷正交和。也就是说，任意随机变量$F\in L_{\mathbb{C}}^2(\Omega\ \sigma(Z)\ P)$都具有如下形式的唯一展开:

$$F=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\mathcal{I}_{p,q}\left(f_{p,q}\right),$$

其中 $f_{0,0}=\mathrm{E}[F]$, and $f_{p,q}\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p}\otimes\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ with $p+q\geqslant 1$ 是唯一quely 确定的 b y F.

给定 $f\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot a}\otimes\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot b}$, $g\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot c}\otimes\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot d}$， 对于 $i=0,\ldots,a\wedge d$, $j=0,\ldots,b\wedge c$， f 和 g 的第（i,j）阶收缩是 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot(a+c-i-j)}\otimes\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot(b+d-i-j)}$ 中的一个元素，定义为

$$\begin{aligned}f\otimes_{i,j}g=\sum_{l_1,\ldots,l_{i+j}=1}^{\infty}&\left\langle f,\xi_{l_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{l_i}\otimes\bar{\xi}_{l_{i+1}}\otimes\cdots\otimes\bar{\xi}_{l_{i+j}}\right\rangle\\&\otimes\left\langle g,\xi_{l_{i+1}}\otimes\cdots\otimes\xi_{l_{i+j}}\otimes\bar{\xi}_{l_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\xi}_{l_i}\right\rangle,\end{aligned}$$

按照惯例，$f\otimes_{0,0}g=f\otimes g$ 表示 f 和 g的张量积。 [4, 定理 2.1]和 [14, 定理 A.1] 给出了复 Wiener-Itˆo 积分的乘积公式。对于满足 $a,b,c,d\geq 0$的 $f\in\mathfrak{H}^{\odot a}\otimes\mathfrak{H}^{\odot b}$和 $g\in\mathfrak{H}^{\odot c}\otimes\mathfrak{H}^{\odot d}$,

$$\mathcal{I}_{a,b}(f)\mathcal{I}_{c,d}(g)=\sum_{i=0}^{a\wedge d}\sum_{j=0}^{b\wedge c}\binom{a}{i}\binom{d}{i}\binom{b}{j}\binom{c}{j}i!j!\mathcal{I}_{a+c-i-j,b+d-i-j}\left(f\otimes_{i,j}g\right).\tag{2.3}$$

2.2. Malliavin演算

令 $\mathcal{S}$ 表示如下形式的光滑随机变量类： $F=f(X(h_1)\ldots,X(h_n))$，其中 h_1、.....、$h_n\in\mathfrak{H}$、 $n\geq 1$ 和 $f\in C_p^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 是所有无穷次连续可微的实值函数所构成的集合，且 f 及其所有偏导数均具有多项式增长。给定 $F\in\mathcal{S}$，Malliavin导数 DF 是一个取值于 $\mathfrak{H}$ 的随机元，定义为

$$DF=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X\left(h_1\right),\ldots,X\left(h_n\right)\right)h_i.$$

导数算子 D 是从 $L^p(\Omega)$ 到 $L^p(\Omega;\mathfrak{H})$ 的可闭且无界算子，适用于任意 $p\geq 1$。通过迭代，对于 $k\geq 2$, 可以定义 k 阶导数 $D^kF\in L^p(\Omega;\mathfrak{H}^{\otimes k})$。对于任意 $p\geq 1$和 $k\geq 0$, 令 $\mathbb{D}^{k,p}$表示关于范数$\|\cdot\|_{k,p}$的 $\mathcal{S}$闭包

给定为

$$\|F\|_{k,p}^p = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{E}\left(\left\|D^i F\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes i}}^p\right).$$

对于任意 $p \geq 1$ 和 $k \geq 0$，我们令 $\mathbb{D}^{\infty,p} = \bigcap_{k\geq 0} \mathbb{D}^{k,p}$，$\mathbb{D}^{k,\infty} = \bigcap_{p\geq 1} \mathbb{D}^{k,p}$ 和 $\mathbb{D}^{\infty} = \bigcap_{k\geq 0} \mathbb{D}^{k,\infty}$。若 $F = I_p(f)$ 且 $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$，则 $I_p(f) \in \mathbb{D}^{\infty}$，并且对于任意 $k \geq 0$，

$$D^k I_p(f) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-k)!} I_{p-k}(f), & k \leq p, \\ 0, & k > p. \end{cases}$$

导数算子 D 满足链式法则。具体而言，若 φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续可微且偏导数有界，并且 $F = (F_1, \ldots, F_n)$ 是 $\mathbb{D}^{1,2}$ 中元素构成的向量，则 $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ 且

$$D\varphi(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) DF_i.$$

若 $F_i \in \mathbb{D}^{\infty}$ 和 φ 的偏导数连续且至多呈多项式增长，链式法则仍然成立。

我们用 δ 表示散度算子，它定义为 D 的伴随算子，是一个从 $L^2(\Omega;\mathfrak{H})$ 中某个定义域到 $L^2(\Omega)$ 的无界算子。随机元 $u \in L^2(\Omega;\mathfrak{H})$ 属于 δ 的定义域，记为 $\mathrm{Dom}\delta$，当且仅当它满足

$$|\mathrm{E}\left[\langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H}}\right]| \leq c_u \sqrt{\mathrm{E}\left[F^2\right]},$$

对任意 $F \in \mathbb{D}^{1,\,2}$，其中 c_u 是仅依赖于 u的常数。特别地，如果 $u \in \mathrm{Dom}\delta$，则 $\delta(u)$由以下对偶关系刻画

$$\mathrm{E}(F\delta(u)) = \mathrm{E}\left(\langle DF, u\rangle_{\mathfrak{H})}\right), \tag{2.4}$$

对任意 $F \in \mathbb{D}^{1,\,2}$。

定义为 $L = -\sum_{n=0}^{\infty} n J_n$ 的算子 L 是奥恩斯坦–乌伦贝克半群 $T_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n$ 的无穷小生成元。它在 $L^2(\Omega)$中的定义域为

$$\mathrm{Dom}L = \left\{ F \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left\|J_n F\right\|_2^2 < \infty \right\}.$$

[25, 命题 1.4。3] 阐述了算子 D、 δ 和 L之间的关系。对于 $F \in L^2(\Omega)$， $F \in \mathrm{Dom}L$ 当且仅当 $F \in \mathrm{Dom}(\delta D)$，在此情况下

$$\delta DF = -LF. \tag{2.5}$$

对于任意 $F \in L^2(\Omega)$，我们还定义 $L^{-1}F = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(F)$。算子 L^{-1}称为 L 的广义逆。对于任意 $F \in L^2(\Omega)$，有 $L^{-1}F \in \mathrm{Dom}L$，并且

$$LL^{-1}F = L^{-1}LF = F - \mathrm{E}[F]. \tag{2.6}$$

结合 (2.4)、(2.5) 和 (2.6)，可得以下有用的引理。

LEMMA 2.1. [18, 引理 2.1] 设 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ 且 $G \in L^2(\Omega)$。则，$L^{-1}G \in \mathbb{D}^{2,2}$ 且

$$\mathrm{E}[FG] = \mathrm{E}[F]\mathrm{E}[G] + \mathrm{E}\left[\left\langle DF, -DL^{-1}G\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right].$$

2.3. 累积量

首先，我们回顾一些标准的多重指标记号。多重指标定义为一个d维向量 $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d = (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$。为简化记号，我们写作 $|m| = \sum_{i=1}^d m_i$、$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$、$\partial^m = \partial_1^{m_1} \ldots \partial_d^{m_d}$和 $x^m = \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}$。按照约定，有 $0^0 = 1$。对于任意的 $i = 1, \ldots, d$，我们用 $e_i \in \mathbb{N}_0^d$表示由 $(e_i)_j = \delta_{ij}$定义的一阶多重指标，其中 δ_{ij} 为克罗内克符号。每个多重指标m 都可以写成 $|m|$ 个一阶多重指标 $l_1, \ldots, l_{|m|}$之和，并且除加项的顺序外，该和是唯一的。例如，多重指标 (1, 2, 0) 的初等分解为 {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 0)}。

DEFINITION 2.2. 设 $F = (F_1, \ldots, F_d)$ 是一个 d 维随机向量，满足 $\mathrm{E}|F|^m < \infty$，其中 $m \in \mathbb{N}_0^d \backslash \{0\}$。$F$ 的特征函数记为 $\phi_F(t) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, F\rangle_{\mathbb{R}^d}}\right]$，其中 $t \in \mathbb{R}^d$。那么，F 的 m 阶累积量定义为

$$\kappa_m(F) = (-\mathrm{i})^{|m|} \partial^m \log \phi_F(t)\Big|_{t=0}.$$

例如，若 $F_i, F_j \in L^2(\Omega)$，则 $\kappa_{e_i}(F) = \mathrm{E}[F_i]$，且 $\kappa_{e_i+e_j}(F) = \mathrm{Cov}(F_i, F_j)$。

DEFINITION 2.3. 设 $F = (F_1, \ldots, F_d)$ 是一个 d 维随机向量，满足 $F_i \in \mathbb{D}^{1,2}$，其中 $1 \le i \le d$。假设 $l_1, l_2, \ldots$ 是一个取值于 $\{e_1, \ldots, e_d\}$ 的序列。令 $\Gamma_{l_1}(F) = F^{l_1}$。若随机变量 $\Gamma_{l_1,\ldots,l_k}(F)$ 对某个 $k \ge 1$ 是 $L^2(\Omega)$ 中定义良好的元素，则令

$$\Gamma_{l_1,\ldots,l_{k+1}}(F) = \left\langle DF^{l_{k+1}}, -DL^{-1}\Gamma_{l_1,\ldots,l_k}(F)\right\rangle_{\mathfrak{H}}.$$

[18, 引理 4.3] 表明，如果 $F_i \in \mathbb{D}^\infty$ 对于 $1 \le i \le d$ 成立，那么对于任意 $k \ge 1$，随机变量 $\Gamma_{l_1,\ldots,l_k}(F) \in \mathbb{D}^\infty$。下面的定理说明了累积量$\kappa_m(F)$与满足 $m = l_1 + \ldots + l_{|m|}$的随机变量 $\Gamma_{l_1,\ldots,l_{|m|}}(F)$ 之间的关系。

THEOREM 2.4. [18, 定理 4.4] 设 $m \in \mathbb{N}_0^d \backslash \{0\}$。记 $m = l_1 + \cdots + l_{|m|}$，其中 $l_i \in \{e_1, \ldots, e_d\}$ 对每个 i 均成立。假设随机向量 $F = (F_1, \ldots, F_d)$ 满足 $F_i \in \mathbb{D}^{|m|,2^{|m|}}$ 对所有 i 均成立。那么，我们有

$$\kappa_m(F) = (|m| - 1)!\mathrm{E}\left[\Gamma_{l_1,\ldots,l_{|m|}}(F)\right].$$

如果随机向量 $F = (F_1, \ldots, F_d)$ 的各分量均为多重 Wiener-Itˆo 积分，即 $F = (I_{q_1}(f_1), \ldots, I_{q_d}(f_d))$，其中每个 f_i 都属于 $\mathfrak{H}^{\odot q_i}$，则累积量 $\kappa_m(F)$ 以及随机变量 $\Gamma_{l_1,\ldots,l_{|m|}}(F)$（其中 $m = l_1 + \ldots + l_{|m|}$ 和 $l_i \in \{e_1, \ldots, e_d\}$）可以更清楚地表示，参见 [18, 定理 4.6，方程 (4.29)]。具体而言，当 $l_k = e_j$ 时，令 $\lambda_k = j$。为简便起见，我们省略括号，写作 $f_{\lambda_1} \tilde{\otimes}_{r_2} \cdots \tilde{\otimes}_{r_{|m|-1}} f_{\lambda_{|m|-1}}$，以默认该量是从左到右迭代定义的

例如， $f\tilde{\otimes}_\alpha g\tilde{\otimes}_\beta h$ 实际上表示 $\left(f\tilde{\otimes}_\alpha g\right)\tilde{\otimes}_\beta h$。于是

(2.7)

$$\begin{aligned}&\Gamma_{l_1,\ldots,l_{|m|}}(F)\\ =&\sum_{r_2=1}^{q_{\lambda_1}\wedge q_{\lambda_2}}\cdots\sum_{r_{|m|}=1}^{[q_{\lambda_1}+\cdots+q_{\lambda_{|m|-1}}-2r_2-\cdots-2r_{|m|-1}]\wedge q_{\lambda_{|m|}}}c_{q,l}\left(r_2,\ldots,r_{|m|}\right)\mathbf{1}_{\left\{r_2<\frac{q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}}{2}\right\}}\times\cdots\\ &\times\mathbf{1}_{\left\{r_2+\cdots+r_{|m|-1}<\frac{q_{\lambda_1}+\cdots+q_{\lambda_{|m|-1}}}{2}\right\}}I_{q_{\lambda_1}+\cdots+q_{\lambda_{|m|}}-2r_2-\cdots-2r_{|m|}}\left(f_{\lambda_1}\tilde{\otimes}_{r_2}f_{\lambda_2}\ldots\tilde{\otimes}_{r_{|m|}}f_{\lambda_{|m|}}\right).\end{aligned}$$

and

$$\kappa_m(F)=(q_{\lambda_{|m|}})!(|m|-1)!\sum c_{q,l}\left(r_2,\ldots,r_{|m|-1}\right)\left\langle f_{\lambda_1}\tilde{\otimes}_{r_2}f_{\lambda_2}\cdots\tilde{\otimes}_{r_{|m|-1}}f_{\lambda_{|m|-1}},f_{\lambda_{|m|}}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q_{\lambda_{|m|}}}},$$

其中，求和遍历所有满足以下条件的整数集合 $r_2,\ldots,r_{|m|-1}$

(i) $1\le r_i\le q_{\lambda_i}$ for all $i=2,\ldots,|m|-1$;

(ii) $r_2+\cdots+r_{|m|-1}=\frac{q_{\lambda_1}+\cdots+q_{\lambda_{|m|-1}}-q_{\lambda_{|m|}}}{2}$;

(iii) $r_2<\frac{q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}}{2},\ldots,r_2+\cdots+r_{|m|-2}<\frac{q_{\lambda_1}+\cdots+q_{\lambda_{|m|-2}}}{2}$;

(iv) $r_3\le q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}-2r_2,\ldots,r_{|m|-1}\le q_{\lambda_1}+\cdots+q_{\lambda_{|m|-2}}-2r_2-\cdots-2r_{|m|-2}$;

并且，组合常数 $c_{q,l}(r_2,..,r_s)$ 由以下关系递归定义

$$c_{q,l}\left(r_2\right)=q_{\lambda_2}\left(r_2-1\right)!\binom{q_{\lambda_1}-1}{r_2-1}\binom{q_{\lambda_2}-1}{r_2-1},$$

并且，对于 $s\ge 3$,

$$\begin{aligned}c_{q,l}\left(r_2,\ldots,r_s\right)=q_{\lambda_s}\left(r_s-1\right)!&\binom{q_{\lambda_1}+\cdots+q_{\lambda_{s-1}}-2r_2-\cdots-2r_{s-1}-1}{r_s-1}\\ &\binom{q_{\lambda_s}-1}{r_s-1}c_{q,l}\left(r_2,\ldots,r_{s-1}\right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

特别地，若 $q_1=\cdots=q_d=2$，则满足 (i)-(iv) 的整数 $r_2,\ldots,r_{|m|-1}$ 唯一可能为 $r_2=\cdots=r_{|m|-2}=1$。直接计算可得 $c_{q,l}(1)=2, c_{q,l}(1,1)=4, c_{q,l}(1,1,1)=8$，依此类推。因此，对于任意 $f_1,\ldots,f_d\in\mathfrak{H}^{\odot 2}$ 以及任意满足 $|m|\ge 3$ 的 $m\in\mathbb{N}_0^d\backslash\{0\}$，我们有

$$\kappa_m\left(I_2\left(f_1\right),\ldots,I_2\left(f_d\right)\right)=2^{|m|-1}(|m|-1)!\left\langle f_{\lambda_1}\tilde{\otimes}_1\cdots\tilde{\otimes}_1 f_{\lambda_{|m|-1}},f_{\lambda_{|m|}}\right\rangle_{\xi^{\otimes 2}}.\tag{2.9}$$

2.4. 多维 Stein方法的正态逼近

在本小节中，我们用 $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ 表示所有实 $d\times d$ 矩阵的集合。$\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ 上的希尔伯特-施密特内积和希尔伯特-施密特范数分别记为

$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathrm{HS}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$，其定义如下：

$$\langle A,B\rangle_{\mathrm{HS}}=\mathrm{Tr}\left(AB^T\right),\quad \|A\|_{\mathrm{HS}}=\sqrt{\langle A,A\rangle_{\mathrm{HS}}},\quad A,B\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R}),$$

其中，$\mathrm{Tr}(\cdot)$ 和 $(\cdot)^T$ 分别表示通常的迹和转置算子。

设 $C=(C_{ij})_{1\le i,j\le d}\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ 为一个半正定对称矩阵。我们用 $\mathcal{N}_d(0,C)$ 表示均值为零、协方差矩阵为 C 的 d 维高斯向量的分布。多维 Stein 引理（见 [22, 引理 4.1。3]）表明，随机向量 $N=(N_1,\dots,N_d)\sim\mathcal{N}_d(0,C)$ 当且仅当

$$\mathrm{E}\left[\langle N,\nabla f(N)\rangle_{\mathbb{R}^d}\right]=\mathrm{E}\left[\langle C,\mathrm{Hess}f(N)\rangle_{\mathrm{HS}}\right],$$

对于每个 $\mathcal{C}^2$ 函数 $f:\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 具有有界的一阶和二阶导数，其中$\mathcal{C}^2$ 表示具有连续二阶导数的函数类。这里，$\mathrm{Hess}f$ 表示 f 的海森矩阵，即其元素由 $(\mathrm{Hess}f)_{ij}=\partial^2_{ij}f$ 给出的 $d\times d$矩阵。

设 F 是一个 d 维随机向量，使得其期望

$$\mathrm{E}\left[\langle F,\nabla f(F)\rangle_{\mathbb{R}^d}-\langle C,\mathrm{Hess}f(F)\rangle_{\mathrm{HS}}\right],$$

对于一大类光滑函数 f，其值接近于零。根据 Stein 引理，可以得出 F 的分布接近于 N 的分布。为了给出 Stein 引理的定量版本，我们引入 Stein 方程的定义。设随机向量 $Z\sim\mathcal{N}_d(0,C)$。令 $g:\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 满足 $\mathrm{E}|g(Z)|<\infty$。与 g 和 Z 相关联的 Stein 方程是如下偏微分方程

$$\langle C,\mathrm{Hess}f(x)\rangle_{\mathrm{HS}}-\langle x,\nabla f(x)\rangle_{\mathbb{R}^d}=g(x)-\mathrm{E}[g(Z)]. \tag{2.10}$$

方程（2.10）的解是一个函数 $f\in\mathcal{C}^2$，对每个 $x\in\mathbb{R}^d$ 都满足（2.10）。给定一个至多具有多项式增长的 Lipschitz 函数 $g:\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$，我们定义$U_{g,\ C}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 如下

$$U_{g,C}(x)=\int_a^b\frac{v'(t)}{v(t)}\left(\mathrm{E}[g(N)]-\mathrm{E}\left[g\left(v(t)x+\sqrt{1-v^2(t)}N\right)\right]\right)\mathrm{d}t, \tag{2.11}$$

其中 $N\sim\mathcal{N}_d(0,C)$ 与 Z、$-\infty\le a<b\le\infty$ 独立，并且 $v:(a,b)\to(0,1)$ 是一个微分同胚，满足 $\lim_{t\to a+}v(t)=0$ 和 $\lim_{t\to b-}v(t)=1$。由变量替换 $v(t)=s$ 可知，$U_{g,\ C}$ 不依赖于 v 的选择。[3, 引理 2.4] 表明，按（2.11）定义的 $U_{g,\ C}$ 满足多维 Stein 方程（2.10）。此外，如果 g 是 k 次可微的，且直至 k 阶的导数有界，那么 $U_{g,\ C}$ 也具有相同性质。在这种情况下，对于任意满足 $|m|\le k$ 的 $m\in\mathbb{N}_0^d$，其导数为

$$\partial^m U_{g,C}(x)=\int_a^b v'(t)v^{|m|-1}(t)\mathrm{E}\left[\partial^m g\left(v(t)x+\sqrt{1-v^2(t)}N\right)\right]\mathrm{d}t, \tag{2.12}$$

并且有

$$|\partial^m U_{g,C}(x)|\le\frac{\|\partial^m g\|_\infty}{|m|}, \tag{2.13}$$

and

$$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g,C}(Z)\right] = \frac{1}{|m|}\mathrm{E}\left[\partial^m g(Z)\right]. \tag{2.14}$$

3. 向量值 Wiener-Itˆo 积分的最优收敛速率

设 $\{F_n = (F_{n,\,1},\ \ldots,\ F_{n,\,d}):\ n \geq 1\}$ 是一列随机向量，其所有分量均属于 q 阶 Wiener混沌，且 $q \geq 2$。假设 F_n 依分布收敛于一个 d 维正态随机向量 Z。令

$$M(F_n) = \max\left\{\sum_{|m|=3}\left|\kappa_m(F_n)\right|, \sum_{i=1}^{d}\kappa_{4e_i}(F_n)\right\}. \tag{3.1}$$

注意，$M(F_n) \geq \sum_{i=1}^{d}\kappa_{4e_i}(F_n) > 0$（见 [22, 引理 5.2.4]），且在假设 F_n 依分布收敛到 Z的情况下，$M(F_n) \to M(Z) = 0$。

定义两个 d 维随机向量的分布之间的距离为

$$\rho(F,G) = \sup\left\{\left|\mathrm{E}\left[g(F)\right] - \mathrm{E}\left[g(G)\right]\right|\right\}, \tag{3.2}$$

其中 $g:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 遍历所有四次连续可微函数构成的函数类，且这些函数 g 及其所有不超过四阶的导数均有界于 1。

THEOREM 3.1. 固定 $q \geq 2$。设 $\{F_n = (F_{n,\,1},\ \ldots,\ F_{n,\,d}):\ n \geq 1\}$ 为一列随机向量，其各分量属于第 q 阶 Wiener混沌。假设 F_n 的协方差矩阵为 C，且 F_n 依分布收敛到 $Z \sim \mathcal{N}_d(0, C)$。那么存在两个有限常数 $0 < c_1 < c_2$，它们仅依赖于 q 和 d，使得当 n 充分大时，

$$c_1 M\left(F_n\right) \leq \rho\left(F_n, Z\right) \leq c_2 M\left(F_n\right).$$

REMARK 3.2. 从定理 3.1 的证明中可以得出，即使不假设 F_n 依分布收敛到 $Z \sim \mathcal{N}_d(0, C)$，上界（即 $\rho(F_n, Z) \leq c_2 M(F_n)$）仍然成立。

REMARK 3.3. 我们将 $M(F_n)$ 视为最优收敛速率，并要求测试函数 g 在 (3.2) 中具有 4 阶光滑性，原因有二。首先，结合下文的命题 3.5 和 Stein方法，测试函数 g 至少应具有三阶连续可微性。然而，如果我们在命题 3.5 中取 $M = 3$，余项

$$\sum_{m=e_i+e_j+e_k,1\leq i,j,k\leq d}\mathrm{E}\left[\Gamma_{e_i,e_j,e_k}(F)\partial^m f(F)\right]$$

根据方程（3.4），其上界为 $\max\left\{\sum_{|m|=3}\left|\kappa_m(F_n)\right|, \sum_{i=1}^{d}\kappa_{4e_i}(F_n)^{\frac{3}{4}}\right\}$。该上界的收敛速度慢于在定理

3.1 中通过在命题 3.5 中取 $M=4$ 得到的上界。其次，如果 $M\geq 5$，余项

$$\sum_{s=3}^{M-1}\sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_s},\\ 1\leq j_k\leq d,1\leq k\leq s}}\frac{\kappa_m(F)}{(s-1)!}\mathrm{E}\left[\partial^m f(F)\right]+\sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_M},\\ 1\leq j_k\leq d,1\leq k\leq M}}\mathrm{E}\left[\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_M}}(F)\partial^m f(F)\right]$$

仍由 $M(F_n)$ 界定。例如，取 $M=5$，余项

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k,\\ 1\leq i,j,k\leq d}}\frac{\kappa_m(F)}{2}\mathrm{E}\left[\partial^m f(F)\right]+\sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k+e_l,\\ 1\leq i,j,k,l\leq d}}\frac{\kappa_m(F)}{3!}\mathrm{E}\left[\partial^m f(F)\right]\\ &+\sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_5},\\ 1\leq j_k\leq d}}\mathrm{E}\left[\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_5}}(F)\partial^m f(F)\right]\end{aligned}$$

由以下表达式界定

$$\max\left\{\sum_{|m|=3}\left|\kappa_m(F_n)\right|,\sum_{i=1}^{d}\kappa_{4e_i}(F_n),\sum_{i=1}^{d}\kappa_{4e_i}(F_n)^{\frac{5}{4}}\right\}=M(F_n)$$

根据命题 3.7。以上两点正是我们将最优收敛速率定义为 (3.1)、将距离定义为 (3.2) 的原因。

在定理 3.1 中，我们考虑具有确定性协方差矩阵 C 的向量值 Wiener-Itˆo 积分序列$\{F_n:n\geq 1\}$。实际上，这一结论可以推广到这样的情形：F_n 的协方差矩阵（记为 C_n）在 $\|C_n-C\|_{\mathrm{HS}}\to 0$ 的意义下，当 $n\to\infty$ 时收敛到 C。我们引入渐近正态的定义。若 $\{F_n:n\geq 1\}$ 满足$\rho(F_n,Z_n)\to 0$，则称其渐近正态，其中 Z_n 是一个 d 维高斯随机向量，其协方差矩阵与 F_n 的协方差矩阵一致。Campese 在 [3, 定义 2.3] 中针对 Prokhorov 距离 β 引入了渐近正态的定义；该定义等价于在以下意义下依分布收敛：$\beta(F_n,Z)\to 0\Leftrightarrow F_n\xrightarrow{d}Z$，当 $n\to\infty$ 时。这里，我们采用距离 $\rho(\cdot,\cdot)$（见定义 3.2），它同样等价于依分布收敛。注意，若距离 $\rho(\cdot,\cdot)$ 定义中的测试函数 g 不一定有界，则 $\rho(\cdot,\cdot)$ 所诱导的拓扑强于依分布收敛的拓扑。运用与定理 3.1 证明中类似的论证，我们可以得到以下命题。

PROPOSITION 3.4. 固定 $q\geq 2$。设 $\{F_n=(F_{n,1},\ldots\ldots,F_{n,d}):n\geq 1\}$ 为一列随机向量，其分量属于第 q阶Wiener混沌。假设 C_n（F_n的协方差矩阵）按 $\|C_n-C\|_{\mathrm{HS}}\to 0$ 的意义收敛于 C，其中 $n\to\infty$。

(i) 如果 C可逆，令 $F_n^{'}=C^{\frac{1}{2}}C_n^{-\frac{1}{2}}F_n$，并假设 $F_n^{'}$依分布收敛于 $Z\sim\mathscr{N}_d(0,C)$。那么，当 n 充分大时，

$$\rho(F_n^{'},Z)\asymp M(F_n^{'}).$$

(ii) 若 C 不可逆，则假设 $\{F_n:n\geq 1\}$ 渐近正态。也就是说，$\rho(F_n,Z_n)\to 0$，其中 Z_n 是一个 d 维高斯随机向量，其

协方差矩阵与 F_n 的协方差矩阵相同。那么当 n 足够大时，

$$\rho(F_n, Z_n) \asymp M(F_n).$$

为了证明定理 3.1，我们需要以下几个结果。

PROPOSITION 3.5. 设 $F = (F_1, .., F_d)$ 满足 $F_i \in \mathbb{D}^\infty$, $1 \le i \le d$。那么，对每个$M \ge 2$以及每个函数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，若其为 M次连续可微且导数至多具有多项式增长，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\langle F, \nabla f(F)\rangle_{\mathbb{R}^d}] = &\sum_{s=1}^{M-1} \sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_s},\\ 1\le j_k\le d, 1\le k\le s}} \frac{\kappa_m(F)}{(s-1)!}\mathrm{E}\left[\partial^m f(F)\right] \\ &+ \sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_M},\\ 1\le j_k\le d, 1\le k\le M}} \mathrm{E}\left[\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_M}}(F)\partial^m f(F)\right].\end{aligned} \tag{3.3}$$

REMARK 3.6. 对于 $d = 1$，命题 3.5 中这种类型的展开可见于 [2, 命题 3.11]。命题 3.5 可视为将 [2, 命题 3.11] 推广到多维情形。对于 $d \ge 2$，据我们所知，公式 (3.3) 是新的。

PROOF。反复应用引理 2.1 和定理 2.4,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[F_{j_1}\partial_{j_1} f(F)\right] &= \mathrm{E}\left[F_{j_1}\right]\mathrm{E}\left[\partial_{j_1} f(F)\right] + \mathrm{E}\left[\left\langle D\partial_{j_1} f(F), -DL^{-1}F_{j_1}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right] \\ &= \kappa_{e_{j_1}}(F)\mathrm{E}\left[\partial_{j_1} f(F)\right] + \sum_{j_2=1}^{d}\mathrm{E}\left[\partial^2_{j_1,j_2} f(F)\left\langle DF_{j_2}, -DL^{-1}F_{j_1}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right] \\ &= \kappa_{e_{j_1}}(F)\mathrm{E}\left[\partial_{j_1} f(F)\right] + \sum_{j_2=1}^{d}\mathrm{E}\left[\partial^2_{j_1,j_2} f(F)\right]\mathrm{E}\left[\Gamma_{e_{j_1},e_{j_2}}(F)\right] \\ &\quad + \sum_{j_2,j_3=1}^{d}\mathrm{E}\left[\partial^3_{j_1,j_2,j_3} f(F)\Gamma_{e_{j_1},e_{j_2},e_{j_3}}(F)\right] \\ &= \kappa_{e_{j_1}}(F)\mathrm{E}\left[\partial_{j_1} f(F)\right] + \sum_{j_2=1}^{d}\kappa_{e_{j_1}+e_{j_2}}(F)\mathrm{E}\left[\partial^2_{j_1,j_2} f(F)\right] \\ &\quad + \sum_{j_2,j_3=1}^{d}\mathrm{E}\left[\partial^3_{j_1,j_2,j_3} f(F)\Gamma_{e_{j_1},e_{j_2},e_{j_3}}(F)\right] \\ &= \cdots \\ &= \kappa_{e_{j_1}}(F)\mathrm{E}\left[\partial_{j_1} f(F)\right] + \sum_{j_2=1}^{d}\kappa_{e_{j_1}+e_{j_2}}(F)\mathrm{E}\left[\partial^2_{j_1,j_2} f(F)\right] + \cdots \\ &\quad + \sum_{j_2,\ldots,j_{M-1}=1}^{d}\frac{\kappa_{e_{j_1}+\cdots+e_{j_{M-1}}}(F)}{(M-2)!}\mathrm{E}\left[\partial^{M-1}_{j_1,\ldots,j_{M-1}} f(F)\right] \\ &\quad + \sum_{j_2,\ldots,j_M=1}^{d}\mathrm{E}\left[\partial^M_{j_1,\ldots,j_M} f(F)\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_M}}(F)\right].\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\langle F, \nabla f(F)\rangle_{\mathbb{R}^d}] &= \sum_{j_1=1}^{d} \mathrm{E}\left[F_{j_1}\partial_{j_1} f(F)\right] \\
&= \sum_{j_1=1}^{d} \frac{\kappa_{e_{j_1}}(F)}{(1-1)!}\mathrm{E}\left[\partial_{j_1} f(F)\right] + \sum_{j_1,j_2=1}^{d} \frac{\kappa_{e_{j_1}+e_{j_2}}(F)}{(2-1)!}\mathrm{E}\left[\partial^2_{j_1,j_2} f(F)\right] + \cdots \\
&\quad + \sum_{j_1,\ldots,j_{M-1}=1}^{d} \frac{\kappa_{e_{j_1}+\cdots+e_{j_{M-1}}}(F)}{(M-2)!}\mathrm{E}\left[\partial^{M-1}_{j_1,\ldots,j_{M-1}} f(F)\right] \\
&\quad + \sum_{j_1,\ldots,j_M=1}^{d} \mathrm{E}\left[\partial^{M}_{j_1,\ldots,j_M} f(F)\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_M}}(F)\right] \\
&= \sum_{s=1}^{M-1} \sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_s},\\ 1\le j_k\le d, 1\le k\le s}} \frac{\kappa_m(F)}{(s-1)!}\mathrm{E}\left[\partial^m f(F)\right] \\
&\quad + \sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_M},\\ 1\le j_k\le d, 1\le k\le M}} \mathrm{E}\left[\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_M}}(F)\partial^m f(F)\right].
\end{aligned}$$

□

PROPOSITION 3.7. 对于每个整数 $q \geq 2$，存在正常数$c_1(q)$ $c_2(q)$ $c_3(q)$，它们仅取决于 q，使得对于所有满足$f_i \in \mathfrak{H}^{\odot q}$ 且 $1 \leq i \leq d$的 $F = (I_q(f_1) \ldots, I_q(f_d)$，我们有

$$\mathrm{E}\left[\left|\Gamma_{e_i,e_j,e_k}(F) - \frac{1}{2}\kappa_{e_i+e_j+e_k}(F)\right|\right] \leq c_1(q) \max_{1\le i\le d}\left\{\kappa_{4e_i}(F)^{\frac{3}{4}}\right\}, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{E}\left[\left|\Gamma_{e_i,e_j,e_k,e_l}(F)\right|\right] \leq c_2(q) \max_{1\le i\le d}\left\{\kappa_{4e_i}(F)\right\}, \tag{3.5}$$

$$\mathrm{E}\left[\left|\Gamma_{e_i,e_j,e_k,e_l,e_s}(F)\right|\right] \leq c_3(q) \max_{1\le i\le d}\left\{\kappa_{4e_i}(F)^{\frac{5}{4}}\right\},$$

对于任意 $1 \leq i, j, k, l, s \leq d$。

REMARK 3.8. 关于 $d = 1$的累积量及相关Γ-随机变量的估计，参见 [2, 命题 4.3] 。

PROOF. 通过对 [2, 命题 4.3], 的证明作适当修改，我们可以得到该结论。这里，我们以式 (3.4) 为例。根据方程 (2.7),

$$\Gamma_{e_i,e_j,e_k}(F) = \sum_{r_2=1}^{q-1} \sum_{r_3=1}^{(2q-2r_2)\wedge q} c_{q,l}(r_2, r_3)\, I_{3q-2r_2-2r_3}\left(\left(f_i \tilde{\otimes}_{r_2} f_j\right) \tilde{\otimes}_{r_3} f_k\right), \tag{3.6}$$

其中，$c_{q,l}(r_2, r_3)$ 如式 (2.8) 所定义，是一个仅取决于 q、r_2 和 r_3 的常数。由定理 2.4 可得

$$\mathrm{E}\left[\Gamma_{e_i,e_j,e_k}(F)\right] = \frac{1}{2}\kappa_{e_i+e_j+e_k}(F).$$

因此，随机变量 $\Gamma_{e_i,e_j,e_k}(F)-\frac{1}{2}\kappa_{e_i+e_j+e_k}(F)$ 是将式 (3.6) 中的求和限制为满足 $2r_2+2r_3<3q$ 的项后得到的。结合存在一个仅取决于 q 的常数 $c(q)$ 这一事实，可得

$$\max_{1\le r\le q-1}\|f_i\otimes_r f_i\|^2_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}\le c(q)\kappa_{4e_i}(F),$$

由 [22, 式（5.2.6）], 可知，只需证明对于满足$1\le r_2\le q-1$的 r_2 和 r_3 ，有 $1\le r_3\le\ (2q-2r_2)\ \wedge q$ 且 $2r_2+2r_3<3q$,

$$\left\|\left(f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j\right)\tilde{\otimes}_{r_3}f_k\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(3q-2r_2-2r_3)}}\le\max_{1\le i\le d}\max_{1\le r\le q-1}\|f_i\otimes_r f_i\|^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}.$$

首先假设 $r_3<q$，则 $q-r_2$和 $q-r_3$都属于 $\{1,\dots,q-1\}$。由柯西-施瓦茨不等式（或参见 [2, 式（4.3）、式（4.4）]），可得

$$\begin{aligned}\left\|\left(f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j\right)\tilde{\otimes}_{r_3}f_k\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(3q-2r_2-2r_3)}}&\le\left\|\left(f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j\right)\otimes_{r_3}f_k\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(3q-2r_2-2r_3)}}\\&\le\left\|f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r_2)}}\sqrt{\|f_k\otimes_{q-r_3}f_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2r_3}}}\\&\le\sqrt{\|f_i\otimes_{q-r_2}f_i\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2r_2}}}\sqrt{\|f_j\otimes_{q-r_2}f_j\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2r_2}}}\sqrt{\|f_k\otimes_{q-r_3}f_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2r_3}}}\\&\le\max_{1\le i\le d}\max_{1\le r\le q-1}\|f_i\otimes_r f_i\|^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}.\end{aligned}$$

现在考虑 $r_3=q$ 且$r_2<\frac{q}{2}$的情形。于是

$$\left\|\left(f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j\right)\tilde{\otimes}_{r_3}f_k\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(3q-2r_2-2r_3)}}=\left\langle f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j,f_k\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes q}}$$

定义了一个关于 $q-2r_2$ 个变量的函数。通过与 [2, 式（4.6）], 的证明类似的论证可知

$$\left\|\left(f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j\right)\tilde{\otimes}_{r_3}f_k\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(3q-2r_2-2r_3)}}\le\max_{1\le r\le q-1}\sqrt{\|f_i\otimes_r f_i\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}}\,\|f_j\otimes_r f_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}.$$

再次利用 [2, 式（4.4）] ，可得

$$\begin{aligned}&\left\|\left(f_i\tilde{\otimes}_{r_2}f_j\right)\tilde{\otimes}_{r_3}f_k\right\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(3q-2r_2-2r_3)}}\\&\le\max_{1\le r\le q-1}\sqrt{\|f_i\otimes_r f_i\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}}\sqrt{\|f_j\otimes_r f_j\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}}\sqrt{\|f_k\otimes_r f_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}}\\&\le\max_{1\le i\le d}\max_{1\le r\le q-1}\|f_i\otimes_r f_i\|^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{H}^{\otimes(2q-2r)}}.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

受 [2, 23], 启发，接下来我们构造若干特定的测试函数，用于定理 3.1 下界的证明。令

$$a=\exp\left\{-\frac{1}{2}\max_{t\in\{-1,0,1\}^d}t^TCt\right\}.$$

定义

$$g_t(x) = a\exp\left\{\frac{1}{2}t^TCt\right\}\sin\left(\langle t,x\rangle_{\mathbb{R}^d}\right),$$
$$h_t(x) = a\exp\left\{\frac{1}{2}t^TCt\right\}\cos\left(\langle t,x\rangle_{\mathbb{R}^d}\right).$$

LEMMA 3.9. 固定满足 $i \neq j$、k 和 $j \neq k$ 的 $1 \leq i$、j、$k \leq d$，定义 $h_i(x)$ $g_i(x)$ $g_{ij}(x)$ $g_{ijk}(x)$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 如下

$$\begin{aligned}
h_i(x) &= h_{e_i}(x) = ae^{\frac{1}{2}C_{ii}}\cos x_i,\\
g_i(x) &= g_{e_i}(x) = ae^{\frac{1}{2}C_{ii}}\sin x_i,\\
g_{ij}(x) &= \frac{1}{4}\left(g_{e_i-e_j}(x) - g_{e_i+e_j}(x) + 2g_{e_j}(x)\right),\\
g_{ijk}(x) &= \frac{1}{12}\left(g_{e_i+e_j-e_k}(x) - g_{e_i+e_j+e_k}(x) - 4g_{ik}(x) - 4g_{jk}(x) + 2g_{e_k}(x)\right).
\end{aligned}$$

则 $h_i(x)$ $g_i(x)$ $g_{ij}(x)$ $g_{ijk}(x)$ 的绝对值均不超过 1，且均为无穷次连续可微函数，其所有导数的绝对值均不超过 1，并满足

$$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right] = \begin{cases} \frac{a}{|m|}(-1)^{\frac{|m|}{2}}, & m = |m|e_i, |m| = 0,2,4,\cdots,\\ 0, & otherwise,\end{cases}$$
$$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_i,C}(Z)\right] = \begin{cases} \frac{a}{|m|}(-1)^{\frac{|m|-1}{2}}, & m = |m|e_i, |m| = 1,3,5,\cdots,\\ 0, & otherwise,\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_{ij},C}(Z)\right] = \begin{cases} \frac{a}{2|m|}(-1)^{\frac{|m|+1}{2}}, & m = m_ie_i + m_je_j, m_i > 0, m_j \text{ and } |m| \text{ are odd},\\ 0, & otherwise,\end{cases}$$

and

$$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_{ijk},C}(Z)\right] = \begin{cases} \frac{a}{6|m|}(-1)^{\frac{|m|+1}{2}}, & m = m_ie_i + m_je_j + m_ke_k, m_i, m_j > 0, m_k \text{ and } |m| \text{ are odd},\\ 0, & otherwise,\end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $Z \sim \mathcal{N}_d(0,C)$ 和 $U_{g,C}(x)$ 的定义见式 (2.11)。

PROOF. 首先，显然 $h_i(x)$ $g_i(x)$ $g_{ij}(x)$ $g_{ijk}(x)$ 的绝对值均不超过 1，且均为无穷次连续可微函数，其所有导数的绝对值均不超过 1。

对于 $Z = (Z_1,\ldots,Z_d) \sim \mathcal{N}_d(0,C)$，任意给定 $t \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$e^{-\frac{1}{2}t^TCt} = \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}\langle t,Z\rangle_{\mathbb{R}^d}}\right] = \mathrm{E}\left[\cos\left(\langle t,Z\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)\right] + \mathrm{iE}\left[\sin\left(\langle t,Z\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)\right],$$

也就是说，对于任意 $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{E}\left[\sin\left(\langle t, Z\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)\right] = 0, \quad \mathrm{E}\left[\cos\left(\langle t, Z\rangle_{\mathbb{R}^d}\right)\right] = e^{-\frac{1}{2}t^T C t}.$$

固定 $1 \le i \le d$，令 $h_i(x)$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, h_i(x) = h_{e_i}(x) = ae^{\frac{1}{2}C_{ii}} \cos x_i$,

$$\partial^m h_i(x) = \begin{cases} ae^{\frac{1}{2}C_{ii}}(-1)^{\frac{|m|+1}{2}} \sin x_i, & m = |m|e_i, |m| = 1, 3, 5, \cdots, \\ ae^{\frac{1}{2}C_{ii}}(-1)^{\frac{|m|}{2}} \cos x_i, & m = |m|e_i, |m| = 0, 2, 4, \cdots, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

于是，由 (2.14),

$$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right] = \frac{1}{|m|}\mathrm{E}\left[\partial^m h_i(Z)\right] = \begin{cases} \frac{a}{|m|}(-1)^{\frac{|m|}{2}}, & m = |m|e_i, |m| = 0, 2, 4, \cdots, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

通过类似的论证，我们得到 (3.7)，并且对于满足 $i \ne j$ 的固定 $1 \le i, j \le d$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_{e_i-e_j},C}(Z)\right] &= \frac{1}{|m|}\mathrm{E}\left[\partial^m g_{e_i-e_j}(Z)\right] \\ &= \begin{cases} \frac{a}{|m|}(-1)^{\frac{|m|-1}{2}+m_j}, & m = m_i e_i + m_j e_j, |m| \text{ is odd}, \\ 0, & otherwise, \end{cases} \\ \mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_{e_i+e_j},C}(Z)\right] &= \frac{1}{|m|}\mathrm{E}\left[\partial^m g_{e_i+e_j}(Z)\right] \\ &= \begin{cases} \frac{a}{|m|}(-1)^{\frac{|m|-1}{2}}, & m = m_i e_i + m_j e_j, |m| \text{ is odd}, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \end{aligned}$$

于是对于 $g_{ij}(x) = \frac{1}{4}\left(g_{e_i-e_j}(x) - g_{e_i+e_j}(x) + 2g_{e_j}(x)\right)$，由 (2.12),

$$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_{ij},C}(Z)\right] = \frac{1}{4}\left(\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_{e_i-e_j},C}(Z)\right] - \mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_{e_i+e_j},C}(Z)\right] + 2\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g_j,C}(Z)\right]\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{a}{2|m|}(-1)^{\frac{|m|+1}{2}}, & m = m_i e_i + m_j e_j, m_i > 0, m_j \text{ is odd}, |m| \text{ is odd}, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

类似地，我们可以得到 (3.8)。

□

现在我们转向定理 3.1 的证明。

Proof. 上界。根据 Stein 方程（2.10）和命题 3.5,

$$\mathrm{E}\left[g(Z)\right] - \mathrm{E}\left[g(F_n)\right] = \mathrm{E}\left[\langle F_n, \nabla U_{g,C}(F_n)\rangle_{\mathbb{R}^d}\right] - \mathrm{E}\left[\langle C, \mathrm{Hess}\, U_{g,C}(F_n)\rangle_{\mathrm{HS}}\right] \quad (3.9)$$

$$= \sum_{s=3}^{M-1} \sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_s}, \\ 1\le j_k\le d, 1\le k\le s}} \frac{\kappa_m(F_n)}{(s-1)!} \mathrm{E}\left[\partial^m U_{g,C}(F_n)\right] + \sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_M}, \\ 1\le j_k\le d, 1\le k\le M}} \mathrm{E}\left[\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_M}}(F_n)\partial^m U_{g,C}(F_n)\right].$$

取 $M=4$,

$$\mathrm{E}\left[g(Z)\right] - \mathrm{E}\left[g(F_n)\right] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k, \\ 1\le i,j,k\le d}} \kappa_m(F_n)\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g,C}(F_n)\right] + \sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k+e_l, \\ 1\le i,j,k,l\le d}} \mathrm{E}\left[\Gamma_{e_i,e_j,e_k,e_l}(F_n)\partial^m U_{g,C}(F_n)\right].$$

结合（2.13）和命题 3.7,

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}\left[g(Z)\right] - \mathrm{E}\left[g(F_n)\right]\right| &\le \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d, |m|=3} \left|\partial^m U_{g,C}(x)\right| \sum_{m=e_i+e_j+e_k} \left|\kappa_m(F_n)\right| \\
&\quad + \sup_{x\in\mathbb{R}^d, |m|=4} \left|\partial^m U_{g,C}(x)\right| \sum_{m=e_i+e_j+e_k+e_l} \mathrm{E}\left[\left|\Gamma_{e_i,e_j,e_k,e_l}(F_n)\right|\right] \\
&\le \frac{d^3}{6} \sum_{|m|=3} \left|\kappa_m(F_n)\right| + \frac{d^4}{4} c_2(q) \sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n) \\
&\le \max\left\{\frac{d^3}{3}, \frac{d^4 c_2(q)}{2}\right\} \max\left\{\sum_{|m|=3} \left|\kappa_m(F_n)\right|, \sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)\right\}.
\end{aligned}$$

下界。取 $M=5$ 于（3.9）中，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[g(Z)\right] - \mathrm{E}\left[g(F_n)\right] \\
=&\frac{1}{2} \sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k, \\ 1\le i,j,k\le d}} \kappa_m(F_n)\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g,C}(F_n)\right] + \frac{1}{6} \sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k+e_l, \\ 1\le i,j,k,l\le d}} \kappa_m(F_n)\mathrm{E}\left[\partial^m U_{g,C}(F_n)\right] \\
&+ \sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_5}, \\ 1\le j_k\le d, 1\le k\le 5}} E\left[\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_5}}(F_n)\partial^m U_{g,C}(F_n)\right].
\end{aligned}$$

将测试函数 g 替换为 h_i，于是得到

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{E}\left[h_i(Z)\right] - \mathrm{E}\left[h_i(F_n)\right] - \frac{a}{24}\kappa_{4e_i}(F_n)\right| \\
=&\left|\mathrm{E}\left[h_i(Z)\right] - \mathrm{E}\left[h_i(F_n)\right] - \sum_{m=e_i+e_j+e_k+e_l} \frac{\kappa_m(F_n)}{6}\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right]\right| \\
=&\left|\sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k, \\ 1\le i,j,k\le d}} \frac{\kappa_m(F_n)}{2}\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\substack{m=e_i+e_j+e_k+e_l,\\ 1\le i,j,k,l\le d}} \frac{\kappa_m(F_n)}{6}\left(\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]-\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right]\right)\\
&+\sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_5},\\ 1\le j_k\le d,1\le k\le 5}} \mathrm{E}\left[\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_5}}(F_n)\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]\Bigg|\\
\le&\frac{1}{2}\sum_{m=e_i+e_j+e_k}|\kappa_m(F_n)|\left|\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]\right|\\
&+\frac{1}{6}\sum_{m=e_i+e_j+e_k+e_l}|\kappa_m(F_n)|\left|\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]-\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right]\right|\\
&+\sum_{\substack{m=e_{j_1}+\cdots+e_{j_5},\\ 1\le j_k\le d,1\le k\le 5}}\left\|\partial^m U_{h_i,C}\right\|_\infty \mathrm{E}\left[\left|\Gamma_{e_{j_1},\ldots,e_{j_5}}(F_n)\right|\right]\\
\le&\max\left\{\sum_{|m|=3}|\kappa_m(F_n)|,\sum_{i=1}^d\kappa_{4e_i}(F_n)\right\}\left[\frac{1}{2}\sum_{m=e_i+e_j+e_k}\left|\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]\right|\right.\\
&+c_2(q)\sum_{m=e_i+e_j+e_k+e_l}\left|\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]-\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right]\right|\\
&\left.+\frac{c_3(q)d^5}{5}\left(\sum_{i=1}^d\kappa_{4e_i}(F_n)\right)^{\frac{1}{4}}\right].
\end{aligned}
$$

由于 $n\to\infty$，我们有 $\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]\to\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right]=0$ 对于 $|m|=3$，$\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(F_n)\right]-\mathrm{E}\left[\partial^m U_{h_i,C}(Z)\right]\to 0$，且 $\sum_{i=1}^d\kappa_{4e_i}(F_n)\to 0$。因此，令

$$
\bar{d}=2d+d(d-1)+\frac{d(d-1)(d-2)}{6},\quad c_1=\frac{a}{36\left(\bar{d}+1\right)},
$$

对于足够大的 n，我们有，

$$
\left|\mathrm{E}\left[h_i(Z)\right]-\mathrm{E}\left[h_i(F_n)\right]-\frac{a}{24}\kappa_{4e_i}(F_n)\right|\le\frac{c_1}{\bar{d}}M(F_n),
$$

这意味着

$$
\left|\mathrm{E}\left[h_i(Z)\right]-\mathrm{E}\left[h_i(F_n)\right]\right|\ge\frac{a}{24}\kappa_{4e_i}(F_n)-\frac{c_1}{\bar{d}}M(F_n),\quad 1\le i\le d.
$$

同样，对于 $1\le i$、j、$k\le d$，

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}\left[g_i(Z)\right]-\mathrm{E}\left[g_i(F_n)\right]\right|&\ge\frac{a}{6}\left|\kappa_{3e_i}(F_n)\right|-\frac{c_1}{\bar{d}}M(F_n),\\
\left|\mathrm{E}\left[g_{ij}(Z)\right]-\mathrm{E}\left[g_{ij}(F_n)\right]\right|&\ge\frac{a}{12}\left|\kappa_{2e_i+e_j}(F_n)\right|-\frac{c_1}{\bar{d}}M(F_n),\ i\ne j,\\
\left|\mathrm{E}\left[g_{ijk}(Z)\right]-\mathrm{E}\left[g_{ijk}(F_n)\right]\right|&\ge\frac{a}{36}\left|\kappa_{e_i+e_j+e_k}(F_n)\right|-\frac{c_1}{\bar{d}}M(F_n),\ i\ne j,k \text{ and } j\ne k.
\end{aligned}
$$

Then

$$\begin{aligned}\bar{d}\rho(F_n,Z) &\geq \sum_{i=1}^{d}\left|\mathrm{E}\left[h_i(Z)\right]-\mathrm{E}\left[h_i(F_n)\right]\right|+\sum_{i=1}^{d}\left|\mathrm{E}\left[g_i(Z)\right]-\mathrm{E}\left[g_i(F_n)\right]\right| \\ &\quad+\sum_{i=1}^{d}\sum_{j\neq i}\left|\mathrm{E}\left[g_{ij}(Z)\right]-\mathrm{E}\left[g_{ij}(F_n)\right]\right|+\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=i+1}^{d}\sum_{k=j+1}^{d}\left|\mathrm{E}\left[g_{ijk}(Z)\right]-\mathrm{E}\left[g_{ijk}(F_n)\right]\right| \\ &\geq \left(\bar{d}+1\right)c_1\left(\sum_{|m|=3}\left|\kappa_m(F_n)\right|+\sum_{i=1}^{d}\kappa_{4e_i}(F_n)\right)-c_1M(F_n) \\ &\geq \left(\bar{d}+1\right)c_1M(F_n)-c_1M(F_n) \\ &= \bar{d}c_1M(F_n).\end{aligned}$$

也就是说,

$$\rho(F_n,Z)\geq c_1M(F_n).$$

□

4. 应用

4.1. 复Wiener-Itˆo积分的应用

我们将复随机变量 $F=F_1+\mathrm{i}F_2$ 的分布定义为二维随机向量（F_1, F_2）的分布。因此，两个复随机变量 $F=F_1+\mathrm{i}F_2$ 和 $G=G_1+\mathrm{i}G_2$ 的分布之间的距离实际上是两个二维随机向量（F_1, F_2）和（G_1, G_2）的分布之间的距离，即，在（3.2）中取 $d=2$，并定义

$$\rho(F,G)=\sup\left\{\left|\mathrm{E}\left[g(F_1,F_2)\right]-\mathrm{E}\left[g(G_1,G_2)\right]\right|\right\},$$

其中，$g:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 遍历所有四次连续可微函数的类，这些函数满足 g 及其最高四阶导数均以一为界。将复随机变量 $F=F_1+\mathrm{i}F_2$ 的协方差矩阵定义为二维随机向量（F_1, F_2）的协方差矩阵。对于任意2×2 矩阵 A，我们用 AF 表示 $A\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}$。

对于复随机变量序列 $\{F_n=F_{n,1}+\mathrm{i}F_{n,\ 2}:\ n\geq 1\}$，设

$$M^{'}(F_n)=\max\left\{\left|\mathrm{E}\left[F_n^3\right]\right|,\left|\mathrm{E}\left[F_n^2\bar{F}_n\right]\right|,\mathrm{E}\left[\left|F_n\right|^4\right]-2\left(\mathrm{E}\left[\left|F_n\right|^2\right]\right)^2-\left|\mathrm{E}\left[F_n^2\right]\right|^2\right\}.$$

THEOREM 4.1. 考虑复 Wiener-Itˆo 积分序列$\{F_n=\mathcal{I}_{p,q}(f_n):\ n\geq 1\}$，其中 $f_n\in\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p}\otimes\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ 和 $p+q\geq 2$。假设 F_n依分布收敛于复正态随机变量 Z，且其协方差矩阵与 F_n相同。那么存在两个有限常数 $0<c_1<c_2$，它们仅取决于

p、q，使得当 n 足够大时，

$$c_1 M^{'}(F_n) \leq \rho\left(F_n, Z\right) \leq c_2 M^{'}(F_n).$$

Proof。设 $F_n = F_{n,\ 1} + \mathrm{i}F_{n,\ 2}$。根据 [6, 定理 3.3]，$\{(F_{n,\ 1},\ F_{n,\ 2})\colon\ n \geq 1\}$实际上是由二维随机向量组成的序列，其分量属于 $p+q$ 阶 Wiener混沌，该混沌对应于 $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 上的实高斯等距正态过程。结合定理 3.1 以及

$$M\left((F_{n,1}, F_{n,2})\right) \asymp M^{'}(F_n),$$

由下述引理4.3和引理 4.4可知，便可得到结论。 □

采用定理 4.1 证明中的类似论证，我们可以将定理 4.1 推广到以下情形：F_n的协方差矩阵（记为 C_n）按照 $\|C_n - C\|_{\mathrm{HS}} \to 0$ 的意义在 $n \to \infty$时收敛于 C。

Proposition 4。2. 设 $\{F_n = \mathcal{I}_{p,q}(f_n)\colon\ n \geq 1\}$ 为复 Wiener-Itˆo 积分序列，其中 $f_n \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ 且 $p+q \geq 2$。假设 C_n，F_n的协方差矩阵按照 $\|C_n - C\|_{\mathrm{HS}} \to 0$ 的意义在 $n \to \infty$时收敛于 C。

(i) 若 C可逆，令 $F_n^{'} = C^{\frac{1}{2}} C_n^{-\frac{1}{2}} F_n$，并假设 $F_n^{'}$依分布收敛到协方差矩阵为 C的复正态随机变量 Z。那么当n 足够大时，

$$\rho(F_n^{'}, Z) \asymp M^{'}(F_n^{'}).$$

(ii) 若 C 不可逆，假设 $\{F_n : n \geq 1\}$ 渐近正态。也就是说，$\rho(F_n, Z_n) \to 0$，其中 Z_n 是一个复正态随机变量，其协方差矩阵与 F_n的协方差矩阵相同。那么当 n足够大时，

$$\rho(F_n, Z_n) \asymp M^{'}(F_n).$$

在下面的引理4.3和引理 4.4中，我们证明当$F_n = \mathcal{I}_{p,q}(f_n) = F_{n,1} + \mathrm{i}F_{n,2}$ 且 $f_n \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ 和 $p+q \geq 2$时，$M((F_{n,1}, F_{n,2})) \asymp M^{'}(F_n)$。

Lemma 4.3. 对于复 Wiener-Itˆo 积分 $F = \mathcal{I}_{p,\ q}(f) = F_1 + \mathrm{i}F_2$ 满足 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ 和 $p+q \geq 2$时，记 $\tilde{F}$ 二维随机向量 (F_1, F_2)。那么

$$\sum_{i=1}^{2} \kappa_{4e_i}(\tilde{F}) \leq \mathrm{E}\left[|F|^4\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[|F|^2\right]\right)^2 - \left|\mathrm{E}\left[F^2\right]\right|^2 \leq c \sum_{i=1}^{2} \kappa_{4e_i}(\tilde{F}),$$

其中 $\sum_{i=1}^{2} \kappa_{4e_i}(\tilde{F}) = \mathrm{E}\left[F_1^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_1^2\right]\right)^2 + \mathrm{E}\left[F_2^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_2^2\right]\right)^2$并且 $c > 1$是一个仅取决于 $p+q$ 的正常数。

Proof。直接计算可得

$$\mathrm{E}\left[|F|^4\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[|F|^2\right]\right)^2 - \left|\mathrm{E}\left[F^2\right]\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}\left[F_1^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_1^2\right]\right)^2 + \mathrm{E}\left[F_2^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_2^2\right]\right)^2 \\
&\quad + 2\left(\mathrm{E}\left[F_1^2F_2^2\right] - \mathrm{E}\left[F_1^2\right]\mathrm{E}\left[F_2^2\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[F_1F_2\right]\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

根据 [6, 定理 3.3]，F_1 和 F_2 是关于 $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$上的实高斯等距正态过程的两个（$p+q$）阶 Wiener-Itô 积分。利用乘积公式 (2.1)、等距性质以及一些组合学结果（见 [6, 引理 4.8]），可知

$$
2\left(\mathrm{E}\left[F_1^2F_2^2\right] - \mathrm{E}\left[F_1^2\right]\mathrm{E}\left[F_2^2\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[F_1F_2\right]\right)^2\right) \geq 0.
$$

因此，

$$
\mathrm{E}\left[|F|^4\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[|F|^2\right]\right)^2 - \left|\mathrm{E}\left[F^2\right]\right|^2 \geq \mathrm{E}\left[F_1^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_1^2\right]\right)^2 + \mathrm{E}\left[F_2^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_2^2\right]\right)^2.
$$

另一方面，由定理 2.4 和方程 (3.5)，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[F_1^2F_2^2\right] - \mathrm{E}\left[F_1^2\right]\mathrm{E}\left[F_2^2\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[F_1F_2\right]\right)^2 \\
&= \kappa_{2e_1+2e_2}(\tilde{F}) = 6\mathrm{E}\left[\Gamma_{e_1,e_1,e_2,e_2}(\tilde{F})\right] \\
&\leq 6\mathrm{E}\left[\left|\Gamma_{e_1,e_1,e_2,e_2}(\tilde{F})\right|\right] \leq 6c_2(p+q)\sum_{i=1}^{2}\kappa_{4e_i}(\tilde{F}),
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[|F|^4\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[|F|^2\right]\right)^2 - \left|\mathrm{E}\left[F^2\right]\right|^2 \\
&\leq (1+12c_2(p+q))\left(\mathrm{E}\left[F_1^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_1^2\right]\right)^2 + \mathrm{E}\left[F_2^4\right] - 3\left(\mathrm{E}\left[F_2^2\right]\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。 □

LEMMA 4.4. 对于一个复随机变量 $F = F_1 + \mathrm{i}F_2$，有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8}\left(\left|\mathrm{E}\left[F^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right|\right) &\leq \left|\mathrm{E}\left[F_1^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_2^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_1^2F_2\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_1F_2^2\right]\right| \\
&\leq \sqrt{2}\left(\left|\mathrm{E}\left[F^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right|\right).
\end{aligned}
$$

PROOF. 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
F_1^3 &= \left(\frac{F+\bar{F}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Re}\left(F^3\right) + 3\mathrm{Re}\left(F^2\bar{F}\right)\right), \\
F_2^3 &= \left(\frac{F-\bar{F}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(-\mathrm{Im}\left(F^3\right) + 3\mathrm{Im}\left(F^2\bar{F}\right)\right), \\
F_1^2F_2 &= \left(\frac{F+\bar{F}}{2}\right)^2\left(\frac{F-\bar{F}}{2\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Im}\left(F^3\right) + \mathrm{Im}\left(F^2\bar{F}\right)\right), \\
F_1F_2^2 &= \left(\frac{F+\bar{F}}{2}\right)\left(\frac{F-\bar{F}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(-\mathrm{Re}\left(F^3\right) + \mathrm{Re}\left(F^2\bar{F}\right)\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\mathrm{Re}(z)$ 和 $\mathrm{Im}(z)$ 分别表示复数 z 的实部和虚部，

因此,

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}\left[F_1^3\right]\right| &= \frac{1}{4}\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right) + 3\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|, \\
\left|\mathrm{E}\left[F_2^3\right]\right| &= \frac{1}{4}\left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right) - 3\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|, \\
\left|\mathrm{E}\left[F_1^2F_2\right]\right| &= \frac{1}{4}\left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right) + \mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|, \\
\left|\mathrm{E}\left[F_1F_2^2\right]\right| &= \frac{1}{4}\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right) - \mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{E}\left[F_1^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_2^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_1^2F_2\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_1F_2^2\right]\right| \\
\le& \frac{1}{2}\left(\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right| + \left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|\right) + \left(\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right| + \left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right) \\
\le& \sqrt{2}\left(\left|\mathrm{E}\left[F^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right|\right),
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由三角不等式得出，适用于 $x, y \in \mathbb{R}$；第二个不等式则依据以下事实：对于复数 $z = x + \mathrm{i}y$，$|x| + |y| \le \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}|z|$。

接下来，由三角不等式，适用于 $x, y \in \mathbb{R}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{E}\left[F_1^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_2^3\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_1^2F_2\right]\right| + \left|\mathrm{E}\left[F_1F_2^2\right]\right| \\
\ge& \frac{1}{4}\left(\left|\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right| - 3\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right| + \left|\left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right| - 3\left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right| \right. \\
&\left. + \left|\left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right| - \left|\mathrm{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right| + \left|\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right| - \left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right|\right)
\end{aligned}$$

现在我们考虑所有情况:

情况1: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| \ge 3\,|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| \ge 3\,|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况2: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| \ge 3\,|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])| \le |$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < 3\,|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况3: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| \ge 3\,|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < |$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况4: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])| \le |$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < 3\,|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| \ge 3\,|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况5: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])| \le |$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < 3\,|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])| \le |$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < 3\,|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况6: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])| \le |$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < 3\,|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < |$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况7: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < |$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| \ge 3\,|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况8: $|$实部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < |$实部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])| \le |$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < 3\,|$虚部 $(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.情况9: $|$实部$(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < |$实部$(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$, $|$虚部$(\mathrm{E}\left[F^3\right])| < |$虚部$(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right])|$.

在情况1中，

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-3\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right|+\left|\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-3\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right| \\
&\quad+\left|\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right|+\left|\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right| \\
&=\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-3\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|+\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-3\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right| \\
&\quad+\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|+\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right| \\
&=2\left(\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|+\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|\right)-4\left(\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|+\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right) \\
&\geq\frac{1}{2}\left(\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|+\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|\right)+\frac{1}{2}\left(\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|+\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right) \\
&\geq\frac{1}{2}\left(\left|\mathrm{E}\left[F^3\right]\right|+\left|\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right|\right),
\end{aligned}$$

其中，倒数第二个不等式由条件 $\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|\geq 3\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|$ and $\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|\geq 3\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|$ 得出，最后一个不等式则根据以下事实得出：对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，若 x, $y\in\mathbb{R}$，则 $|x|+|y|\geq\sqrt{x^2+y^2}=|z|$。

通过类似的论证，我们还可以得到

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-3\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right|+\left|\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-3\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right| \\
&\quad+\left|\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-\left|\operatorname{Im}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right|+\left|\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^3\right]\right)\right|-\left|\operatorname{Re}\left(\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right)\right|\right| \\
&\geq\frac{1}{2}\left(\left|\mathrm{E}\left[F^3\right]\right|+\left|\mathrm{E}\left[F^2\bar{F}\right]\right|\right),
\end{aligned}$$

在其余八种情况下均成立。至此，证明完成。 □

作为一个例子，我们考虑由随机微分方程定义的复 Ornstein–Uhlenbeck 过程

$$\mathrm{d}Z_t=-\gamma Z_t\mathrm{d}t+\mathrm{d}\zeta_t,\quad t\geq 0, \tag{4.1}$$

其中，Z_t 是一个复值过程，$Z_0=0$、$\gamma\in\mathbb{C}$ 未知，$\lambda:=\operatorname{Re}\gamma>0$，而 ζ_t 是复布朗运动。也就是说，$\zeta_t=\frac{B_t^1+\mathrm{i}B_t^2}{\sqrt{2}}$，其中 $(B_t^1,\sout{B_t^2})$ 是二维标准布朗运动。假设只能观测到一条轨迹（Z_t，$0\leq t\leq T$）。通过最小化 $\int_0^T\left|\dot{Z}_t+\gamma Z_t\right|^2\mathrm{d}t$，可以得到$\gamma$ 的最小二乘估计量，如下所示，

$$\hat{\gamma}_T=-\frac{\int_0^T\bar{Z}_t\mathrm{d}Z_t}{\int_0^T|Z_t|^2\,\mathrm{d}t}=\gamma-\frac{\int_0^T\bar{Z}_t\mathrm{d}\zeta_t}{\int_0^T|Z_t|^2\,\mathrm{d}t}.$$

在 [5], Chen、Hu 和 Wang 证明了 $\sqrt{T}\left(\hat{\gamma}_T-\gamma\right)$ 渐近正态。也就是说，当 $T\to\infty$ 时，

$$\sqrt{T}\left[\hat{\gamma}_T-\gamma\right]=-\frac{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T\bar{Z}_t\mathrm{d}\zeta_t}{\frac{1}{T}\int_0^T|Z_t|^2\,\mathrm{d}t}\xrightarrow{d}\mathcal{N}_2\left(0,\lambda\mathrm{Id}_2\right),$$

其中 Id_2 表示 2×2 单位矩阵。他们证明分母满足

$$\frac{1}{T}\int_0^T |Z_t|^2 \,\mathrm{d}t \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{2\lambda},$$

以及分子 $F_T := \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \bar{Z}_t \mathrm{d}\zeta_t$,

$$(F_{1,T}, F_{2,T}) = (\mathrm{Re}\,(F_T), \mathrm{Im}\,(F_T)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2\left(0, \frac{1}{4\lambda}\mathrm{Id}_2\right).$$

由此得到估计量 $\hat{}\gamma_T$ 的渐近正态性。需要注意的是，在[5], 中，Chen、Hu 和 Wang 考虑的复 Ornstein–Uhlenbeck 过程由复分数布朗运动驱动，其赫斯特参数属于$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$。噪声为复分数布朗运动的情形涉及更复杂的计算和更精确的估计。这里，为了展示我们的方法的适用性，我们聚焦于噪声为复标准布朗运动的情形。接下来，我们将推导出 $\frac{1}{\sqrt{T}}$ 是分子 F_T的最优收敛速率。我们尚不清楚如何处理统计量 $\sqrt{T}\,[\hat{}\gamma_T - \gamma]$的最优收敛速率，不过我们猜想它仍为$\frac{1}{\sqrt{T}}$。需要指出的是，Kim 和 Park 在 [16, 17] 中得出，对于由标准布朗运动驱动的实值一维 Ornstein–Uhlenbeck 过程的漂移系数最小二乘估计量，其正态逼近的最优 Berry-Esseen界为 $\frac{1}{\sqrt{T}}$。正如他们在 [17], 中所述，在统计学中遇到的许多情形下，我们需要考虑满足 $G_n > 0$ 几乎处处成立的序列F_n/G_n 的收敛速率（例如 $\sqrt{T}\,[\hat{}\gamma_T - \gamma]$）。因此，我们将在另一项研究中处理统计量 $\sqrt{T}\,[\hat{}\gamma_T - \gamma]$ 的最优收敛速率。

定义希尔伯特空间 $\mathfrak{H} = L^2([0,+\infty))$，其内积为 $\langle f,g\rangle_{\mathfrak{H}} = \int_0^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t$。我们以通常的方式将 $\mathfrak{H}$ 复化，并记作 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$。对于任意$f,g \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, $\langle f,g\rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} = \int_0^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t$。给定 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot a} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot b}$, $g \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot c} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot d}$，对于$i = 0,\ldots,a\wedge d$, $j = 0,\ldots, b\wedge c$, f与 g的第 (i,j) 阶收缩是 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot(a+c-i-j)} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot(b+d-i-j)}$ 中的元素，定义如下:

$$\begin{aligned}
&f \otimes_{i,j} g\,(t_1,\ldots,t_{a+c-i-j}; s_1,\ldots,s_{b+d-i-j}) \\
=&\int_{\mathbb{R}_+^{2l}} f\,(t_1,\ldots,t_{a-i},u_1,\ldots,u_i; s_1\ldots,s_{b-j},v_1,\ldots,v_j) \\
&\qquad g\,(t_{a-i+1},\ldots,t_{p-l},v_1,\ldots,v_j; s_{b-j+1},\ldots,s_{q-l},u_1,\ldots,u_i)\,\mathrm{d}\vec{u}\mathrm{d}\vec{v},
\end{aligned}$$

其中 $l = i+j, p = a+c, q = b+d, \vec{u} = (u_1,\ldots,u_i)$ 和 $\vec{v} = (v_1,\ldots,v_j)$。

根据（4.1），我们知道

(4.2)

$$F_T = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \bar{Z}_t\mathrm{d}\zeta_t = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T\int_0^T e^{-\bar{\gamma}(t-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}\mathrm{d}\zeta_t\mathrm{d}\bar{\zeta}_s = I_{1,1}(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T(t,s)),$$

其中

$$\psi_T(t,s) = e^{-\bar{\gamma}(t-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}},$$

且 $\mathbf{1}_E$ 是集合 E的示性函数。令

$$h_T(t,s)=\overline{\psi_T(s,t)}=e^{-\gamma(s-t)}\mathbf{1}_{\{0\le t\le s\le T\}},$$

then

$$\bar{F_T}=I_{1,1}(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T(t,s)).$$

根据复 Wiener-Itô 积分的等距性质，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[F_T^2\right]&=\mathrm{E}\left[F_T\bar{\bar{F}}_T\right]=\mathrm{E}(I_{1,1}(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T)\overline{I_{1,1}(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T)})=\frac{1}{T}\left\langle\psi_T,h_T\right\rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}}\\&=\frac{1}{T}\int_0^\infty\int_0^\infty\psi_T\left(t,s\right)\overline{h_T\left(t,s\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{T}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\bar{\gamma}(t-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}e^{-\bar{\gamma}(s-t)}\mathbf{1}_{\{0\le t\le s\le T\}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=0,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|F_T|^2\right]&=\mathrm{E}\left[F_T\bar{F}_T\right]=\mathrm{E}(I_{1,1}(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T)\overline{I_{1,1}(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T)})=\frac{1}{T}\left\langle\psi_T,\psi_T\right\rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}}\\&=\frac{1}{T}\int_0^\infty\int_0^\infty\psi_T\left(t,s\right)\overline{\psi_T\left(t,s\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{T}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\bar{\gamma}(t-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}e^{-\gamma(t-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t e^{-2\lambda(t-s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{4\lambda^2T}e^{-2\lambda T}-\frac{1}{4\lambda^2T}\\&\to\frac{1}{2\lambda}\text{ as }T\to\infty.\end{aligned}$$

由于 $\lim_{T\to\infty}\left(1+\frac{1}{2\lambda T}e^{-2\lambda T}-\frac{1}{2\lambda T}\right)=1$，对于充分大的 T，
$1+\frac{1}{2\lambda T}e^{-2\lambda T}-\frac{1}{2\lambda T}>0$。考虑

$$F_T^{'}=\left(1+\frac{1}{2\lambda T}e^{-2\lambda T}-\frac{1}{2\lambda T}\right)^{-\frac{1}{2}}F_T.$$

那么， $F_T^{'}$的协方差矩阵等于 $\frac{1}{4\lambda}\mathrm{Id}_2$。现在，我们考虑在距离 $\rho(F_T^{'},Z)$ 下， $F_T^{'}$ 收敛到协方差矩阵为$\frac{1}{4\lambda}\mathrm{Id}_2$的复正态随机变量 Z 时的最优收敛速率，其中 $T\to\infty$。

THEOREM 4。5. $F_T^{'}$ 依分布收敛于复正态随机变量 Z，其协方差矩阵为 $\frac{1}{4\lambda}\mathrm{Id}_2$ ，并且存在两个与 T 无关的有限常数 $0<c_1<c_2$ ，使得当 T 充分大时，

$$c_1\frac{1}{\sqrt{T}}\le\rho\left(F_T^{'},Z\right)\le c_2\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

PROOF。根据定理 4.1，只需证明

$$M^{'}\left(\left(1+\frac{1}{2\lambda T}e^{-2\lambda T}-\frac{1}{2\lambda T}\right)^{-\frac{1}{2}}F_T\right)\asymp\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

等价地，我们需要证明

$$\begin{aligned}(4.3)\qquad & M^{'}(F_T)\\ &=\max\left\{\left|\mathrm{E}\left[F_T^3\right]\right|,\left|\mathrm{E}\left[F_T^2\bar{F_T}\right]\right|,\mathrm{E}\left[|F_T|^4\right]-2\left(\mathrm{E}\left[|F_T|^2\right]\right)^2-\left|\mathrm{E}\left[F_T^2\right]\right|^2\right\}\\ &\asymp\frac{1}{\sqrt{T}}.\end{aligned}$$

结合以下引理 4.6 和引理 4.7，我们得到 (4.3)。至此，证明完毕。

□

LEMMA 4.6. F_T 定义如 (4.2)，则

$$\left|\mathrm{E}\left[F_T^3\right]\right|=0,\quad \left|\mathrm{E}\left[F_T^2\bar{F_T}\right]\right|\asymp\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

PROOF. 根据复 Wiener-Itˆo 积分的乘积公式 (2.3)，我们得到

$$\begin{aligned}F_T^2&=I_{1,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)I_{1,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\\ &=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{i}^2\binom{1}{j}^2 i!j!I_{2-i-j,2-i-j}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{i,j}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\\ &=I_{2,2}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)+I_{1,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,0}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\\ &\quad+I_{1,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{0,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)+\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_T^3&=F_T^2F_T\\ &=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\binom{2}{i}\binom{1}{i}\binom{2}{j}\binom{1}{j}i!j!I_{3-i-j,3-i-j}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{i,j}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{i}^2\binom{1}{j}^2 i!j!I_{2-i-j,2-i-j}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,0}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{i,j}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{i}^2\binom{1}{j}^2 i!j!I_{2-i-j,2-i-j}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{0,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{i,j}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)I_{1,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}F_T^2\bar{F_T} = &\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\binom{2}{i}\binom{1}{i}\binom{2}{j}\binom{1}{j}i!j!I_{3-i-j,3-i-j}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{i,j}\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)\\&+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{i}^2\binom{1}{j}^2 i!j!I_{2-i-j,2-i-j}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,0}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{i,j}\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)\\&+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{i}^2\binom{1}{j}^2 i!j!I_{2-i-j,2-i-j}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{0,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{i,j}\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)\\&+\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)I_{1,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right).\end{aligned}$$

取期望可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[F_T^3\right] &= \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,0}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T+\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{0,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\\&=2\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,0}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\\&=2\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{T^{3/2}}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}(t-s)\,e^{-\bar{\gamma}(t-s)}e^{-\bar{\gamma}(s-t)}\mathbf{1}_{\{0\le t\le s\le T\}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=0,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[F_T^2\bar{F_T}\right] &= \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,0}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}h_T+\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{0,1}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\\&=2\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\otimes_{1,0}\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,1}\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\\&=2\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{T^{3/2}}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}(t-s)\,e^{-\bar{\gamma}(t-s)}e^{-\gamma(t-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T^{3/2}}\int_0^T\int_0^t(t-s)\,e^{-2\lambda(t-s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T^{3/2}}\int_0^T\int_0^t se^{-2\lambda s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\lambda^2\sqrt{T}}e^{-2\lambda T}\left(1+\frac{1}{\lambda T}\right)-\frac{1}{2\lambda^3T^{3/2}}+\frac{1}{4\lambda^2\sqrt{T}}\\&\asymp\frac{1}{\sqrt{T}}.\end{aligned}$$

由此得出结论。 □

LEMMA 4.7. F_T 定义为 (4.2)，则

$$\mathrm{E}\left[|F_T|^4\right]-2\left(\mathrm{E}\left[|F_T|^2\right]\right)^2-\left|\mathrm{E}\left[F_T^2\right]\right|^2\asymp\frac{1}{T}.$$

PROOF. [5, 引理 2.3] 表明

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[|F_T|^4\right] - 2\left(\mathrm{E}\left[|F_T|^2\right]\right)^2 - \left|\mathrm{E}\left[F_T^2\right]\right|^2 \\
=& \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\right\|^2_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}} + \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,0}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\right\|^2_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}} \\
&+ \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,0}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)\right\|^2_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}}.
\end{aligned}$$

直接计算可得,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)(t,s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,0}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)(t,s) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^\infty \psi_T(t,u)\psi_T(u,s)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\int_0^\infty e^{-\bar{\gamma}(t-u)}\mathbf{1}_{\{0\le u\le t\le T\}}e^{-\bar{\gamma}(u-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le u\le T\}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}\int_s^t e^{-\bar{\gamma}(t-s)}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}(t-s)\,e^{-\bar{\gamma}(t-s)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)(t,s) &= \frac{1}{T}\int_0^\infty \psi_T(t,u)h_T(u,s)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\int_0^\infty e^{-\bar{\gamma}(t-u)}\mathbf{1}_{\{0\le u\le t\le T\}}e^{-\gamma(s-u)}\mathbf{1}_{\{0\le u\le s\le T\}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\mathbf{1}_{\{0\le s,t\le T\}}e^{-\bar{\gamma}t-\gamma s}\int_0^{t\wedge s} e^{2\lambda u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\lambda T}\mathbf{1}_{\{0\le s,t\le T\}}e^{-\bar{\gamma}t-\gamma s}\left(e^{2\lambda(t\wedge s)}-1\right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,0}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)(t,s) &= \frac{1}{T}\int_0^\infty \psi_T(u,s)h_T(t,u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\int_0^\infty e^{-\bar{\gamma}(u-s)}\mathbf{1}_{\{0\le s\le u\le T\}}e^{-\gamma(u-t)}\mathbf{1}_{\{0\le t\le u\le T\}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{T}\mathbf{1}_{\{0\le s,t\le T\}}e^{\bar{\gamma}s+\gamma t}\int_{t\vee s}^T e^{-2\lambda u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\lambda T}\mathbf{1}_{\{0\le s,t\le T\}}e^{\bar{\gamma}s+\gamma t}\left(e^{-2\lambda(t\vee s)}-e^{-2\lambda T}\right).
\end{aligned}$$

Then

$$\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\right\|^2_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{0\le s\le t\le T\}}\left(t-s\right)^2 e^{-\gamma(t-s)}e^{-\bar{\gamma}(t-s)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^t \left(t-s\right)^2 e^{-2\lambda(t-s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^t s^2 e^{-2\lambda s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\lambda^2}e^{-2\lambda T}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda T}+\frac{3}{4\lambda^2T^2}\right)-\frac{3}{8\lambda^4T^2}+\frac{1}{4\lambda^3T}\asymp\frac{1}{T},
\end{aligned}
$$

$$
\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,0}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\right\|^2_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}} = \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\right\|^2_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}}\asymp\frac{1}{T},
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\psi_T\right)\otimes_{1,0}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}h_T\right)\right\|^2_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}}\\
=&\frac{1}{4\lambda^2T^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{0\le s,t\le T\}}\left(e^{-\bar{\gamma}t-\gamma s}\left(e^{2\lambda(t\wedge s)}-1\right)+e^{\bar{\gamma}s+\gamma t}\left(e^{-2\lambda(t\vee s)}-e^{-2\lambda T}\right)\right)\\
&\qquad\left(e^{-\gamma t-\bar{\gamma}s}\left(e^{2\lambda(t\wedge s)}-1\right)+e^{\gamma s+\bar{\gamma}t}\left(e^{-2\lambda(t\vee s)}-e^{-2\lambda T}\right)\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{2\lambda^2T^2}\int_0^T\int_0^t \left(e^{-\bar{\gamma}t-\gamma s}\left(e^{(\gamma+\bar{\gamma})s}-1\right)+e^{\bar{\gamma}s+\gamma t}\left(e^{-(\gamma+\bar{\gamma})t}-e^{-2\lambda T}\right)\right)\\
&\qquad\left(e^{-\gamma t-\bar{\gamma}s}\left(e^{(\gamma+\bar{\gamma})s}-1\right)+e^{\gamma s+\bar{\gamma}t}\left(e^{-(\gamma+\bar{\gamma})t}-e^{-2\lambda T}\right)\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{4\lambda^2}e^{-2\lambda T}\left(2+\frac{8}{\lambda T}+\frac{5}{\lambda^2T^2}+\frac{1}{2\lambda^2T^2}e^{-2\lambda T}\right)-\frac{11}{8\lambda^4T^2}+\frac{1}{\lambda^3T}\\
\asymp&\frac{1}{T}.
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。 □

4.2. 阶梯函数核的 Wiener-Itˆo 积分应用

在 [3, 第 5 节1], 中，Campese 提出了这个反例，以说明他的方法有时无法给出最优收敛速率。本节中，对于这个例子，我们应用所得结论，得到关于距离 $\rho(\cdot,\cdot)$ 的最优收敛速率。具体而言，令 $\mathfrak{H}=L^2([0,1)\ \mu)$，其中 μ 是 $[0,1)$ 上的勒贝格测度，并将 $[0,1)$ 划分为 N 个等距区间 $\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_N$，其中$\alpha_k=\left[\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}\right)$ 对于 $k=1,\ldots,N$。定义 $f\in\mathfrak{H}^{\odot 2}$ 为

$$
f(x,y)=\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\mathbf{1}_{\alpha_i}(x)\mathbf{1}_{\alpha_j}(y), \tag{4.4}
$$

其中 $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $a_{ij}=a_{ji}$ 对于 $1\le i,j\le d$。显然， f 由对称矩阵 $A=(a_{ij})_{1\le i,\ j\le N}$唯一确定。如果 g 是另一种类型为 (4.4) 的核，由

矩阵 $B=(b_{ij})_{1\leq i,\ j\leq N}$给出，则有

$$\begin{aligned}(f\otimes_1 g)(x,y)&=\int_0^1\left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\mathbf{1}_{\alpha_i}(x)\mathbf{1}_{\alpha_j}(t)\right)\left(\sum_{k,l=1}^N b_{kl}\mathbf{1}_{\alpha_k}(y)\mathbf{1}_{\alpha_l}(t)\right)\mathrm{d}\mu(t)\\&=\sum_{i,j,k=1}^N a_{ij}b_{kj}\mu(\alpha_j)\,\mathbf{1}_{\alpha_i}(x)\mathbf{1}_{\alpha_k}(y)\\&=\frac{1}{N}\sum_{i,j,k=1}^N a_{ij}b_{jk}\mathbf{1}_{\alpha_i}(x)\mathbf{1}_{\alpha_k}(y),\end{aligned}$$

and

$$\left(f\tilde{\otimes}_1 g\right)(x,y)=\frac{1}{2N}\sum_{i,j,k=1}^N\left(a_{ij}b_{jk}+a_{kj}b_{ji}\right)\mathbf{1}_{\alpha_i}(x)\mathbf{1}_{\alpha_k}(y).$$

因此， $f\otimes_1 g$可通过$\frac{1}{2}\left(C+C^T\right)$与矩阵 $C=\frac{1}{N}AB$和 $f\tilde{\otimes}_1 g$对应。类似地，可以证明

$$\langle f,g\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}=\frac{1}{N^2}\langle A,B\rangle_{\mathrm{HS}}=\frac{\mathrm{tr}\left(AB^T\right)}{N^2}. \tag{4.5}$$

为简单起见，我们固定 $d=2$。对于 $n\geq 1$，我们定义二维随机向量 $F_n=(I_2(f_{n,1}),I_2(f_{n,2}))$，其中核$f_{n,1}$和$f_{n,2}$分别由（$3n$）$\times$($3n$)矩阵$A_{n,1}=\sqrt{n}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n\\ \mathbb{1}_n&\mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n\end{pmatrix}$和$A_{n,2}=\sqrt{n}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n&\mathbb{1}_n&\mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n&\mathbf{0}_n\end{pmatrix}$给出。这里，

我们用$\mathbf{0}_n$表示所有元素均为0的 $n\times n$ 矩阵，用 $\mathbb{1}_n$表示副对角线上的元素均为1、其余元素均为0的 $n\times n$ 矩阵。

根据 (2.9) 和 (4.5)，对于 $1\leq i$、j、$k\leq 2$，我们得到

$$\kappa_{e_i+e_j}(F_n)=2\left\langle f_{n,i},f_{n,j}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}=\frac{2\mathrm{Tr}\left(A_{n,i}A_{n,j}\right)}{9n^2}=\begin{cases}\frac{4}{9}, & i=j=1,\\ \frac{2}{9}, & i=j=2,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{e_i+e_j+e_k}(F_n)&=2^2\cdot 2!\left\langle f_{n,i}\tilde{\otimes}_1 f_{n,j},f_{n,k}\right\rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}}\\&=\frac{8\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{6n}\left(A_{n,i}A_{n,j}+A_{n,j}A_{n,i}\right)A_{n,k}\right)}{9n^2}\\&=\frac{8\mathrm{Tr}\left(A_{n,i}A_{n,j}A_{n,k}\right)}{27n^3}=\begin{cases}\frac{8}{27n^{3/2}}, & n\text{ is odd and }i=j=k=2,\\ 0, & otherwise.\end{cases}\end{aligned}.$$

通过类似的论证，我们知道

$$\kappa_{4e_i}(F_n)=2^3\cdot 3!\frac{\mathrm{Tr}\left(A_{n,i}^4\right)}{(3n)^4}=\begin{cases}\frac{32}{27n}, & i=1,\\ \frac{16}{27n}, & i=2.\end{cases}$$

因此， $n\to\infty$, F_n 依分布收敛于一个二维正态随机

向量 $Z \sim \mathcal{N}_2\left(0, \frac{2}{9}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$，依据多维第四矩定理（见 [28,定理 1]），并且

$$M(F_n) = \max\left\{\sum_{|m|=3} |\kappa_m(F_n)|, \sum_{i=1}^{d} \kappa_{4e_i}(F_n)\right\} \asymp \frac{1}{n}.$$

于是我们得到以下定理。

THEOREM 4.8. 对于 $n \geq 1$，如上定义 F_n。则当 $n \to \infty$ 时，F_n 依分布收敛于 $Z \sim \mathcal{N}_2\left(0, \frac{2}{9}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$，并且存在两个不依赖于 n 的有限常数 $0 < c_1 < c_2$，使得当 n 足够大时，

$$c_1\frac{1}{n} \leq \rho(F_n, Z) < c_2\frac{1}{n}.$$

4.3. 向量值托普利兹二次泛函的应用

设 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个中心化的实值平稳高斯过程，其协方差函数为 $r(t)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，且具有可积偶谱密度 $f(\lambda)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。也就是说，对于任意 u、$t \in \mathbb{R}$，都有

$$E\left(X_u X_{u+t}\right) := r(t) = \hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\lambda t} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

ˆ其中 f 表示其傅里叶变换。我们考虑归一化随机变量

$$\tilde{Q}_{g,T} = \frac{Q_{g,T} - \mathrm{E}\left(Q_{g,T}\right)}{\sqrt{T}},$$

其中，$Q_{g,\ T}$ 称为与某个可积偶函数 g 及 $T > 0$相关联的过程 X 的托普利兹二次泛函，定义为

$$Q_{g,T} = \int_0^T \int_0^T \hat{g}(t-s)X(t)X(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

给定 $T > 0$ 和 $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$，我们用 $B_T(\psi)$表示与 ψ 和 T相关联的截断托普利兹算子，它定义在$\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$上，如下:

$$B_T(\psi)(u)(t) = \int_0^T u(x)\hat{\psi}(t-x)\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

给定 ψ，$\gamma \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$，令 $B_T(\psi)B_T(\gamma)$为两个算子 $B_T(\psi)$和$B_T(\gamma)$的乘积。我们用$\mathrm{Tr}(A)$表示算子 A的迹。

关于离散时间和连续时间平稳高斯过程的托普利兹二次泛函的中心极限定理，请参阅 [1, 8, 9, 10, 11, 12, 13] 。取偶函数 g_1、...、$g_d \in L^1(\mathbb{R})$，我们考虑随机向量$G_T = (G_{1,\ T}, ..., G_{d,\ T})$，其定义为令$G_{i,\ T} = Q_{g_i,\ T}$，其中 $1 \leq i \leq d$且 $T > 0$。

THEOREM 4.9. [3, 定理 5.3] 设 $m \in \mathbb{N}_0^d$ 为一个多重指标，满足 $|m| \geq 2$，且

其初等分解为 $\{l_1,\ldots,l_{|m|}\}$。对于 $1\le i\le |m|$，若 $l_i=e_j$，则令 $g_{l_i}=g_j$ $1\le j\le d$。于是

(i) 累积量 $\kappa_m(G_T)$ 由下式给出

$$\kappa_m(G_T)=T^{-|m|/2}2^{|m|-1}(|m|-1)!\,\mathrm{Tr}\left[B_T(f)^{|m|}\prod_{i=1}^{|m|}B_T(g_{l_i})\right].$$

(ii) 若 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^{q_0}(\mathbb{R})$ 且 $g_i\in L^1(\mathbb{R})\cap L^{q_i}(\mathbb{R})$ 满足 $1/q_0+1/q_i\le 1/|m|$ for$1\le i\le d$, 则

$$\lim_{T\to\infty}T^{|m|/2-1}\kappa_m(G_T)=2^{|m|-1}(|m|-1)!(2\pi)^{2|m|-1}\int_{-\infty}^{\infty}f^{|m|}(x)\prod_{i=1}^{|m|}g_{l_i}(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) 若 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^{q_0}(\mathbb{R})$ 且 $g_i\in L^1(\mathbb{R})\cap L^{q_i}(\mathbb{R})$ 满足 $1/q_0+1/q_i\le 1/2$ for$1\le i\le d$, 则

$$G_T\xrightarrow{d}Z\sim\mathcal{N}_d(0,C),\quad T\to\infty,$$

其中协方差矩阵 $C=(C_{ij})_{1\le i,j\le d}$ 由下式给出

$$C_{ij}=16\pi^3\int_0^{\infty}f^2(x)g_i(x)g_j(x)\mathrm{d}x.$$

假设 C 可逆。记 C_T 为 G_T的协方差矩阵。那么，当 T足够大时， G_T可逆。现在考虑随机向量 $G_T^{'}=C^{\frac{1}{2}}C_T^{-\frac{1}{2}}G_T$。~注意， G_T的每个分量 $G_{i,T}=Q_{g_i,T}$都可以表示为关于 X的二重 Wiener-Itˆo 积分。结合定理 3.1 和定理 4.9，我们得到 $G_T^{'}$在距离 $\rho(G_T^{'},Z)$ 下收敛到多元正态分布 $Z\sim\mathcal{N}_d(0,C)$ 的最优收敛速率为 $T\to\infty$。我们指出，与 [3, 命题 5.3]相比，定理 4.10 给出的最优收敛速率更为显式。

THEOREM 4.10. 如果 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^{q_0}(\mathbb{R})$ 且 $g_i\in L^1(\mathbb{R})\cap L^{q_i}(\mathbb{R})$ 满足 $1/q_0+1/q_i\le 1/4$ 对于 $1\le i\le d$，那么当 $\to\infty$ 时， $G_T^{'}\xrightarrow{d}Z\sim\mathcal{N}_d(0,C)$。此外，

(i) 如果对于某个多重指标 m（满足 $|m|=3$）及其初等分解 $\{l_1,l_2,l_3\}$，有 $\int_{-\infty}^{\infty}f^3(x)\prod_{i=1}^3g_{l_i}(x)\mathrm{d}x\neq 0$，则存在两个与 T 无关的有限常数 $0<c_1<c_2$，使得当 T 足够大时，

$$c_1\frac{1}{\sqrt{T}}\le\rho(G_T^{'},Z)\le c_2\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

（ii）若 $\int_{-\infty}^{\infty}f^4(x)g_i^4(x)\mathrm{d}x\neq 0$ 对某个 $1\le i\le d$ 成立，并且对任意满足 $|m|=3$ 且具有初等分解 $\{l_1,l_2,l_3\}$ 的多重指标 m， $\int_{-\infty}^{\infty}f^3(x)\prod_{i=1}^3g_{l_i}(x)\mathrm{d}x=0$ 成立，则存在两个不依赖于 T 的有限常数 $0<c_1<c_2$，使得当 T 足够大时，

$$c_1\frac{1}{T}\le\rho(G_T^{'},Z)\le c_2\frac{1}{T}.$$

参考文献

[1] Avram, F.: 关于高斯随机变量的双线性型与Toeplitz矩阵。 *Probab. Theory* , （） , –。MR *Related Fields* **79** 1988 37 45 0952991
[2] Bierme, H.、Bonami, A.、Nourdin, I.和Peccati, G.: Wiener空间上的最优Berry–Esseen速率：三阶和四阶累积量的障碍。 *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **9**, （2012） , 473–500。MR 3069374[3] Campese, S.: 高斯场多维泛函的最优收敛速率与一项Edgeworth展开。 *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **10**, （2013） , 881–919。MR 3149458[4] Chen, Y.: 复多重Wiener-Itˆo积分的乘积公式与独立性。 *Adv.* , （） , –。MR *Math. (China)* **46** 2017 819 827 3778509
[5] Chen, Y.、Hu, Y. Z.和Wang, Z.: 带分数噪声的复分数阶Ornstein–Uhlenbeck过程的参数估计。 *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **14**, （2017） , 613–629。MR 3778509[6] Chen, Y.和Liu, Y.: 关于复多重Wiener-Itˆo积分的四阶矩定理。*Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **20**, （ 2017 1750005, 24 3623878 ） , 第 MR Chen, Y.和Liu, Y.:
[7] 复Wiener-Itˆo混沌分解再探。 *Acta Math. Sci. Ser. B* , *(Engl. Ed.)* **39** 2019 797 4036506
（） , –。MR[8] Fox, R.和Taqqu, M. S.: 具有长程依赖的随机变量二次型的中心极限定理。 *Probab. Theory Related Fields* **74**, （ 1987 213 240 0871252 ） , –。MR Ginovian, M. S.: 关于
[9] 平稳高斯过程的Toeplitz型二次泛函。 *Probab.* , （） , –。MR *Theory Related Fields* **100** 1994 395 406 1305588
[10] Ginovyan, M. S.和Sahakyan, A. A.: 平稳序列Toeplitz二次型的中心极限定理。 *Theory Probab. Appl.* **49**, （ 2005 612 628 2142560 ） , –。MR Ginovyan, M. S.和
[11] Sahakyan, A. A.: 连续时间平稳过程Toeplitz二次泛函的极限定理。 *Probab. Theory Related Fields* **138**, （2007） , 551–579。MR 2299719[12] Giraitis, L.和Surgailis, D.: 强依赖线性变量二次型的中心极限定理及其在Whittle估计渐近正态性中的应用。 *Probab. Theory* , （） , –。MR *Related Fields* **86** 1990 87 104 1061950
[13] Grenander, U.和Szego, G.: Toeplitz型及其应用。 *University of California Press*, 伯克利—洛杉矶, 1958。vii+245 页。MR 0094840[14] Hoshino, M.、Inahama, Y.和Naganuma, N.: 带时空白噪声的随机复Ginzburg–Landau方程。 *Electron. J. Probab.* **22**, （ 2017 1 68 3742401 ） , –。MR Itˆo, K.: 复多重Wiener积分。 , *Jpn. J. Math.* **22** 1952 63 86 0063609
[15] （） , –。MR[16] Kim, Y. T.和Park, H. S.: Ornstein–Uhlenbeck过程参数估计量的最优Berry-Esseen界。 *J. Korean Statist. Soc.* **46**, （ 2017 413 425 3685579 ） , –。MR Kim, Y. T.和Park, H.
[17] S.: 统计估计的最优Berry-Esseen界及其在随机偏微分方程中的应用。 *J. Multivariate Anal.* **155**, （ 2017 284 304 3607896 ） , –。MR Noreddine, S.和Nourdin, I.:
[18] 向量值多重积分的高斯逼近。*J. Multivariate Anal.* **102**, （ 2011 1008 1017 2793872 ） , –。MR Nourdin, I.和Peccati, G.: Stein方法遇上Malliavin演算[19]: 一篇带有新估计的简短综述。 *Recent development in stochastic dynamics and stochastic analysis*, （2010） , 207–236。MR 2807823[20] Nourdin, I.和Peccati, G.: Stein方法与高斯场泛函的精确Berry-Esseen渐近性。 *Ann. Probab.* **37**, （ 2009 2231 2261 2573557 ） , –。MR Nourdin, I.和Peccati, G.: Wiener混沌上的
[21] Stein方法。 *Probab. Theory Related Fields* **145**, （ 2009 75 118 2520122 ） , –。MR Nourdin, I.和Peccati, G.: 基于Malliavin演算的正态逼近：从Stein方法到普适性（剑桥数学论丛）[22]。 *Cambridge University Press*, 剑桥, 2012。xiv+239 页。MR 2962301[23] Nourdin, I.和Peccati, G.: 最优四阶矩定理。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **143**, （ 2015 3123 3133 3336636 ） , –。MR Nourdin, I.、Peccati, G.和Reinert, G.: 齐次和的不变性原理：高斯Wiener混
[24] 沌的普适性。 *Ann. Probab.* **38**, （ 2010 1947 1985 2722791 ） , –。MR Nualart, D.: Malliavin演算及相关主题[25]。第二版。 *Springer-Verlag*, 柏林, 2006。xiv+382 页。MR 2200233[26] Nualart, D.和Ortiz-Latorre, S.: 多重随机积分与Malliavin演算的中心极限定理。 *Stochastic Process. Appl.* **118**, （2008） , 614–628。MR 2394845

[27] Nualart, D. 和 Peccati, G.：多重随机积分序列的中心极限定理。*Ann. Probab.* **33**, (
2005 177 193 2118863), – . MR Peccati, G. 和 Tudor, C. A.：向量值多重随机积分的高
[28]
斯极限。*Séminaire de Probabilités XXXVIII*, *Lecture Notes in Math.* **1857**, (2005), 247–262. MR 2126978

Huiping CHENLMAM，数学科学学院，北京大学，北京 100871，
中国 电子邮箱：chenhp@pku.edu.cn