arXiv:2303.03051v1 [math.FA] 6 Mar 2023

通过算子的极分解改进数值半径界

Pintu Bhunia

Abstract. 利用定义在复希尔伯特空间上的有界线性算子的极分解，我们得到该算子 A的若干数值半径不等式，这些不等式推广并改进了此前相关结果。在众多界中，我们证明：若 $w(A)$是A的数值半径，则

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^{1/2}\left\||A|^t + |A^*|^{1-t}\right\|,$$

对所有 $t \in [0,1]$. 此外，我们还得到了涉及算子的谱半径和 Aluthge 变换的数值半径的一些上界。可以证明

$$w(A) \leq \|A\|^{1/2}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{|A|+|A^*|}{2}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\widetilde{A}\right\|\right)^{1/2},$$

其中，$\widetilde{A} = |A|^{1/2}U|A|^{1/2}$是 A的 Aluthge 变换，而 $A = U|A|$是 A的极分解。我们还给出了其他相关结果。

1. 引言

令 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子的 C^*-代数，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相应的范数为 $\|\cdot\|$. 对于$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，令 $|A| = (A^*A)^{1/2}$ 以及 $|A^*| = (AA^*)^{1/2}$，其中 A^* 是 A. 的伴随算子。对于 $t \in [0,1]$， t-Aluthge 变换（广义 Aluthge 变换）$\sim A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 定义为 $A_t = |A|^tU|A|^{1-t}$，其中 $A = U|A|$ 是 A 的极分解， U是部分等距算子。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$， $\widetilde{A} = \widetilde{A_{\frac{1}{2}}} = |A|^{1/2}U|A|^{1/2}$ 是 A.的 Aluthge 变换

令 $\|A\|$、 $w(A)$ 和 $r(A)$ 分别表示 A的算子范数、数值半径和谱半径。 A的数值半径定义为

$$w(A) = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$$

并且它是以原点为圆心、包含数值域的最小圆盘的半径。注意，数值域 $W(A)$ 定义为 $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$. 众所周知，数值半径 $w(\cdot)$:

2020 年数学主题分类：47A12、47A30、15A60。关键词与短语：数值半径、算子范数、极分解、不等式。Pintu Bhunia 博士谨此诚挚感谢 Kallol Paul 教授对本文提出的宝贵意见。Bhunia 博士还感谢印度政府的 SERB 提供资助，使其在 Apoorva Khare 教授的指导下获得国家博士后奖学金（N-PDF，档案编号：PDF/2022/000325）。

$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上定义了一个范数，并且与算子范数等价。对于每个 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|, \tag{1.1}$$

成立。 A 的谱半径定义为 $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$，其中$\sigma(A)$是 A. 的谱。由于谱 $\sigma(A)$包含于数值域的闭包中（即 $\sigma(A) \subset W(A)$），因此我们有

$$r(A) \leq w(A).$$

因此，对于每个 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$， $r(A) \leq w(A) \leq \|A\|$ 成立，且当 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$是正规算子时， $r(A) = w(A) = \|A\|$。此外，注意到 $r(A) = r(A)$， $w(A) \leq w(A)$以及 $\|\widetilde{A}\| \leq \|A^2\|^{1/2} \leq \|A\|$. 。关于数值域、数值半径及相关不等式的更多细节，读者可参阅书籍 [7, 23]。多年来，人们对式（1.1）中的数值半径界进行了各种改进。Kittaneh分别在 [19, 2003] 和 [18, 2005],中推导出了以下界

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\| + \|A^2\|^{1/2} \tag{1.2}$$

and

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\|. \tag{1.3}$$

式（1.2）和（1.3）中的界改进了式（1.1）中的相应界。Dragomir 在 [15, 2008]证明了

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}w(A^2). \tag{1.4}$$

显然，式（1.4）中的界改进了式（1.1）中的相应界。此后，Abu-Omar 和 Kittaneh 在[1, 2015] 得到了

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{2}w(A^2), \tag{1.5}$$

这改进了式（1.2）、（1.3）和（1.4）中的界。此外，Bhunia 和 Paul 在 [12, 2021]证明了

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{2}w(|A||A|^*) \tag{1.6}$$

and

$$w(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}w(|A| + i|A|^*). \tag{1.7}$$

(1.6)中的界与(1.5)中的界不可比较，且比(1.2)和(1.3)中的界更精确。(1.7)中的界比界(1.3)更精确。同一作者在[10, 2021]利用谱半径改进了(1.2)，即:

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}r^{1/2}(|A||A|^*). \tag{1.8}$$

此外，Bhunia [5, 2023] 改进了(1.1)中的第二个不等式，即：

$$w(A) \leq \|A\|^{1/2}\left\|\alpha|A| + (1-\alpha)|A^*|\right\|^{1/2}, \tag{1.9}$$

对所有 $\alpha \in [0,1]$。最近，Kittaneh、Moradi 和 Sababheh [17, 2023] 还提出了对（1.1）中第二个不等式的一项精妙改进：

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^{1/2}\left\||A|^{1/2} + |A^*|^{1/2}\right\|. \tag{1.10}$$

文献中还研究了（1.3）、（1.5）、（1.6）和（1.7）中不等式的一些推广及其他改进，参见 [2, 3, 4, 9, 11, 12, 13, 16, 24]。

本文得到了有界线性算子的若干数值半径不等式，它们推广并改进了（1.1）、（1.2）、（1.3）、（1.6）、（1.7）、（1.8）、（1.9）和（1.10）中的界。本文还得到了其他界，从而改进了已有结果。

2. 主要结果

我们从以下已知引理开始研究。第一个引理称为 McCarthy不等式。

Lem理 2.1. [22] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为正，且设 $x \in \mathcal{H}$ 满足 $\|x\| = 1$。 n

$$\langle Ax, x\rangle^p \leq \langle A^p x, x\rangle,$$

对所有 $p \geq 1$.

第二个引理涉及 2×2 正算子矩阵。

引理 2.2. [21, 引理 1] 设 $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 A 和 B 为正。那么，算子矩阵 $\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$为正当且仅当

$$|\langle Cx, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle By, y\rangle.$$

第三个引理称为布扎诺不等式。

引理 2.3. [14] 设 $x, y, z \in \mathcal{H}$，其中 $\|z\| = 1$。那么

$$|\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle| \leq \frac{\|x\|\|y\| + |\langle x, y\rangle|}{2}.$$

利用上述引理，我们先证明以下命题。

命题 2.4. 设 $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 A 和 B 为正。若 $\begin{bmatrix} A & C^* \\ C & B \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 为正，则以下界成立：

(i) $w^2(C) \leq \frac{1}{2}\|A^2 + B^2\|$. (ii) $w^2(C) \leq \frac{1}{2}\|A\|\|B\| + \frac{1}{2}w(AB)$。
(iii) $w^2(C) \leq \frac{1}{4}\|A^2 + B^2\| + \frac{1}{2}w(AB)$。(iv) $w^2(C) \leq \|\alpha A + (1-\alpha)B\|\|A\|^{1-\alpha}\|B\|^{\alpha}$，对所有 $\alpha \in [0,1]$ 均成立。

证明。取 $x \in \mathcal{H}$，使得 $\|x\| = 1$.
(i) 根据引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} |\langle Cx, x\rangle|^2 &\leq \langle Ax, x\rangle\langle Bx, x\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\langle Ax, x\rangle^2 + \langle Bx, x\rangle^2\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\langle A^2x, x\rangle + \langle B^2x, x\rangle\right) \text{ (by Lemma 2.1)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|A^2 + B^2\right\|. \end{aligned}$$

这意味着，$w^2(C) \leq \frac{1}{2}\|A^2 + B^2\|$.
(ii) 根据引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} |\langle Cx, x\rangle|^2 &\leq \langle Ax, x\rangle\langle x, Bx\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|Ax\|\|Bx\| + |\langle Ax, Bx\rangle|\right) \text{ (by Lemma 2.3)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|A\|\|B\| + w(AB)\right). \end{aligned}$$

由此得到，$w^2(C) \leq \frac{1}{2}\|A\|\|B\| + \frac{1}{2}w(AB)$。
(iii) 根据引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} |\langle Cx, x\rangle|^2 &\leq \langle Ax, x\rangle\langle x, Bx\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|Ax\|\|Bx\| + |\langle Ax, Bx\rangle|\right) \text{ (by Lemma 2.3)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2}{2} + |\langle Ax, Bx\rangle|\right) \\ &\leq \frac{1}{4}\left\|A^2 + B^2\right\| + \frac{1}{2}w(AB). \end{aligned}$$

这意味着，$w^2(C) \leq \frac{1}{4}\|A^2 + B^2\| + \frac{1}{2}w(AB)$。
(iv) 根据引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} |\langle Cx, x\rangle|^2 &\leq \langle Ax, x\rangle\langle Bx, x\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle^{\alpha}\langle Bx, x\rangle^{1-\alpha}\langle Ax, x\rangle^{1-\alpha}\langle Bx, x\rangle^{\alpha} \\ &\leq \left(\alpha\langle Ax, x\rangle + (1-\alpha)\langle Bx, x\rangle\right)\langle Ax, x\rangle^{1-\alpha}\langle Bx, x\rangle^{\alpha} \\ &\leq \|\alpha A + (1-\alpha)B\|\,\|A\|^{1-\alpha}\|B\|^{\alpha}. \end{aligned}$$

这意味着，$w^2(C) \leq \|\alpha A + (1-\alpha)B\|\,\|A\|^{1-\alpha}\|B\|^{\alpha}$，正如所需。 □

利用命题 2.4，我们证明以下引理。

引理 2.5. 设 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则 $w(BC)$ 满足以下界：(i) $w^2(BC) \leq \frac{1}{2}\||B^*|^4 + |C|^4\|$.(ii) $w^2(BC) \leq \frac{1}{2}\|B\|^2\|C\|^2 + \frac{1}{2}w\left(B(CB)^*C\right)$。(iii) $w^2(BC) \leq \frac{1}{4}\||B^*|^4 + |C|^4\| + \frac{1}{2}w\left(B(CB)^*C\right)$。(iv) $w^2(BC) \leq \|\alpha|B^*|^2 + (1-\alpha)|C|^2\|\,\|B\|^{2(1-\alpha)}\|C\|^{2\alpha}$，对所有 $\alpha \in [0, 1]$.

证明。根据引理 2.2，容易观察到算子矩阵$\begin{bmatrix} BB^* & BC \\ C^*B^* & C^*C \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 是正的。利用命题 2.4中的这个正算子矩阵，我们得到 $w(BC)$ 的所需上界。□

现在，我们可以得到第一个主要结果。

定理 2.6. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}w\left(|A|^{2t}|A^*|^{2(1-t)}\right),$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}w\left(|A||A^*|\right). \tag{2.1}$$

证明。 设 $A = U|A|$ 是 A的极分解。取 $B = U|A|^{1-t}$和 $C = |A|^t$ 代入引理 2.5的(ii)，可得

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}w\left(U|A|^{1-t}\widetilde{A_t^*}|A|^t\right), \tag{2.2}$$

$\widetilde{\ }$其中 $A_t = |A|^t U|A|^{1-t}$ 是 $A.$ 的 t-Aluthge 变换。现在，容易看出 $U|A|^{1-t}\widetilde{A_t^*}|A|^t = |A^*|^{2(1-t)}|A|^{2t}.$。证明完毕。□

注2.7. (i) 由于 $w(|A||A^*|) \leq \|A^2\|$,

$$\begin{aligned} w^2(A) &\leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}w\left(|A||A^*|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}\|A^2\| \\ &\leq \|A\|^2. \end{aligned}$$

因此，(2.1) 中的界改进了 (1.1) 中的第二个界。(ii) 由(2.2) 可得

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}\left\||A|^t\widetilde{A_t}|A|^{1-t}\right\|, \tag{2.3}$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}\left\||A|^{1/2}\widetilde{A}|A|^{1/2}\right\|, \tag{2.4}$$

其中 $\widetilde{A} = \widetilde{A_{\frac{1}{2}}} = |A|^{1/2}U|A|^{1/2}$ 是 $A.$ 的 Aluthge 变换

下一个定理表述如下:

定理 2.8. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}\left\||A|^{4t} + |A^*|^{4(1-t)}\right\| + \frac{1}{2}w\left(|A|^{2t}|A^*|^{2(1-t)}\right),$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{2}w\left(|A||A^*|\right). \tag{2.5}$$

证明。 设 $A = U|A|$ 是 A的极分解。取 $B = U|A|^{1-t}$和 $C = |A|^t$ 代入引理 2.5 的 (iii)，并采用与定理2.6中类似的论证，即可得到所需结果。 □

注记 2.9. (i) 2.5中的界也在 [12, 定理 2.5]中采用不同的方法得到了。

(ii) 利用与 (2.3) 和 (2.4) 类似的论证，可得

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}\left\||A|^{4t} + |A^*|^{4(1-t)}\right\| + \frac{1}{2}\left\||A|^t\widetilde{A_t}|A|^{1-t}\right\|, \tag{2.6}$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{2}\left\||A|^{1/2}\widetilde{A}|A|^{1/2}\right\|. \tag{2.7}$$

下面给出如下结果:

定理 2.10. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w(A) \leq \left\|\alpha|A|^{2(1-t)} + (1-\alpha)|A^*|^{2t}\right\|^{1/2} \|A\|^{(1-\alpha)(1-t)+\alpha t},$$

对所有 $\alpha, t \in [0,1]$。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$w(A) \leq \|\alpha|A| + (1-\alpha)|A^*|\|^{1/2} \|A\|^{1/2}, \tag{2.8}$$

对所有 $\alpha \in [0,1]$。此外，特别地，对于 $\alpha = \frac{1}{2}$

$$w(A) \leq \left\|\frac{|A|^{2t} + |A^*|^{2(1-t)}}{2}\right\|^{1/2} \|A\|^{1/2}, \tag{2.9}$$

对所有 $t \in [0,1]$。

证明。 令 $A = U|A|$ 为 A的极分解。由引理 2.5 中的 (iv)，取 $B = U|A|^{1-t}$ 和 $C = |A|^t$即可得证。 □

注意，(2.8) 中的界也在 [5, 定理 2。8]中以不同的方法得到了。接下来的结果需要以下引理。

引理 2.11. [8, 定理 2.5] 设 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $|B|C = C^*|B|$。若f, g: $[0,\infty)$ $\to [0,\infty)$ 是连续函数，且 $f(\lambda)g(\lambda) = \lambda$，对所有 $\lambda \geq 0$，则

$$w^p(BC) \leq r^p(C)w\left(\begin{bmatrix} 0 & f^{2p}(|B|) \\ g^{2p}(|B^*|) & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}r^p(C)\left\|f^{2p}(|B|) + g^{2p}(|B^*|)\right\|,$$

对所有 $p \geq 1$.

利用上述引理，我们得到以下界。

定理 2.12. 设 f, g: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 为连续函数，满足 $f(\lambda)g(\lambda) = \lambda$，对所有 $\lambda \geq 0$. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w^p(A) \leq \frac{1}{2}\|T\|^{pt}\left\|f^{2p}\left(|A|^{1-t}\right) + g^{2p}\left(|A^*|^{1-t}\right)\right\|,$$

对于所有 $p \geq 1$，以及所有 $t \in [0,1]$。特别地，对于 $p = 1$

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^t\left\|f^2\left(|A|^{1-t}\right) + g^2\left(|A^*|^{1-t}\right)\right\|, \tag{2.10}$$

对于所有 $t \in [0,1]$。

证明。 设 $A = U|A|$ 是 A的极分解。取 $B = U|A|^{1-t}$和 $C = |A|^t$ 代入引理 2.11，得

$$w^p(A) \leq \frac{1}{2} r^p(|A|^t) \left\| f^{2p}\left(|A|^{1-t}\right) + g^{2p}\left(|A^*|^{1-t}\right) \right\|.$$

由于 $r(|A|^t) = \||A|^t\| = \|A\|^t$，我们得到所需结果。 □

考虑 $f(\lambda) = \lambda^\alpha$ 和 $g(\lambda) = \lambda^{1-\alpha}$， $0 \leq \alpha \leq 1$，由（2.10）可得以下推论。

推论 2.13. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^t \left\| |A|^{2\alpha(1-t)} + |A^*|^{2(1-\alpha)(1-t)} \right\|,$$

对所有 $\alpha, t \in [0,1]$ 均成立。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^{1/2} \left\| |A|^\alpha + |A^*|^{1-\alpha} \right\|, \tag{2.11}$$

对所有 $\alpha \in [0,1]$。

注 2.14。 (i) 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。 特别地，将 $\alpha = \frac{1}{2}$ 代入 (2.11)，可得到以下界

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^{1/2} \left\| |A|^{1/2} + |A^*|^{1/2} \right\|, \tag{2.12}$$

这是 Kittaneh 等人近期证明的结果 [17]。

(ii) 由 (2.11) 中的界可得

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\|^{1/2} \min_{\alpha\in[0,1]} \left\| |A|^\alpha + |A^*|^{1-\alpha} \right\|, \tag{2.13}$$

对每个 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 均成立。显然，(2.13) 中的界比 (2.12) 中的界更精确。考虑 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus [1]$ (定义在 $\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}$ 上)，我们有：$\||A|^\alpha + |A^*|^{1-\alpha}\| =$最大值

$\{2^{1-\alpha}, 2^\alpha + 3^{1-\alpha}, 3^\alpha, 2\}$. 显然，

$$\left\| |A|^{1/2} + |A^*|^{1/2} \right\| = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approxeq 3.14626436994$$

and

$$\left\| |A|^{\alpha_0} + |A^*|^{1-\alpha_0} \right\| = 2^{\alpha_0} + 3^{1-\alpha_0} \approxeq 2.98118458519, \text{ where } \alpha_0 = \frac{87}{100}.$$

因此，$\min_{\alpha\in[0,1]} \||A|^\alpha + |A^*|^{1-\alpha}\| < \left\| |A|^{1/2} + |A^*|^{1/2} \right\|$. 这意味着，式（2.13）中的界是对式（2.12）中界的非平凡改进。

接下来，我们需要以下引理。

引理 2.15. [8, 推论 2.7] 设 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $|B|C = C^*|B|$。则

$$w(BC) \leq \frac{1}{4}\left(\left\||B|^2 + |B^*|^2\right\| + 2\|B^2\|\right)^{1/2} \left(\left\||C|^2 + |C^*|^2\right\| + 2\|C^2\|\right)^{1/2}.$$

现在，我们利用 $A.$ 的 Aluthge 变换得到 $w(A)$ 的上界

定理 2.16. 如果 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w(A) \leq \|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{|A| + |A^*|}{2} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \widetilde{A} \right\| \right)^{1/2},$$

其中，$\widetilde{A} = |A|^{1/2} U |A|^{1/2}$ 是 A 的 Aluthge 变换，而 $A = U|A|$ 是 A 的极分解。

证明。取 $B = U|A|^{1/2}$ 和 $C = |A|^{1/2}$ 在引理 2.15中，可得到所需的第一个不等式。第二个不等式由第一个不等式推出。□

注 2.17. (i) 显然,

$$\|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{|A| + |A^*|}{2} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \widetilde{A} \right\| \right)^{1/2} \leq \|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} \left\| \widetilde{A} \right\| \right)^{1/2}.$$

由于 $\|\widetilde{A}\| \leq \|A^2\|^{1/2}$,

$$\|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} \|\widetilde{A}\| \right)^{1/2} \leq \|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} \|A^2\|^{1/2} \right)^{1/2} \leq \|A\|.$$

因此，定理 2.16 中得到的界改进了（1.1）中的第二个界。(ii) 根据 [20, 推论 2], , 我们有 $\||A| + |A^*|\| \leq \|A\| + \left\| |A|^{1/2} |A^*|^{1/2} \right\|$.此外，容易观察到 $\left\| |A|^{1/2} |A^*|^{1/2} \right\| = r^{1/2} \left(|A||A^*| \right)$ 。 因此，由定理 2.16，我们推得

$$\begin{aligned} w(A) &\leq \|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{|A| + |A^*|}{2} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \widetilde{A} \right\| \right)^{1/2} \\ &\leq \|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} r^{1/2} \left(|A||A^*| \right) \right) + \frac{1}{2} \|\widetilde{A}\| \right)^{1/2} \\ &\leq \|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} w^{1/2} \left(|A||A^*| \right) \right) + \frac{1}{2} \|\widetilde{A}\| \right)^{1/2} \\ &\leq \|A\|^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} \left\| A^2 \right\|^{1/2} \right) + \frac{1}{2} \|\widetilde{A}\| \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

根据备注2.17 中(ii)的各个不等式以及（1.1）中的第一个不等式，我们得到以下命题。

命题 2.18。设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。若 $A^2 = 0$，则

$$w(A) = \frac{1}{2} \|A\| \quad and \quad \||A| + |A^*|\| = \|A\|.$$

上述命题的逆命题未必成立。例如，考虑$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus [1]$ （定义在 $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ 上），可知 $w(A) = 1 = \frac{1}{2} \|A\|$ 和$\||A| + |A^*|\| = 2 = \|A\|$，但 $A^2 \neq 0.$。为了推导下一个结果，我们需要以下引理。

引理 2.19。 [10, 推论 2.13] 设 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $|B|C = C^*|B|$。则

$$w(BC) \leq \frac{1}{2} r(C) \left(\|B\| + r^{1/2}(|B||B^*|) \right).$$

现在，我们证明以下定理。

定理 2.20. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|A\|^t r^{1/2} \left(|A|^{1-t}|A^*|^{1-t} \right),$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$w(A) \leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|A\|^{1/2} r^{1/2} \left(|A|^{1/2}|A^*|^{1/2} \right). \tag{2.14}$$

证明。 令 $A = U|A|$ 为 A的极分解。令 $B = U|A|^{1-t}$和 $C = |A|^t$ 代入引理 2.19，即可得到所需结果。 □

注 2.21. 令 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。对于 $0 \leq t \leq 1$，我们看到

$$\begin{aligned} r^{1/2} \left(|A|^{1-t}|A^*|^{1-t} \right) &\leq w^{1/2} \left(|A|^{1-t}|A^*|^{1-t} \right) \\ &\leq \left\| |A|^{1-t}|A^*|^{1-t} \right\|^{1/2} \\ &\leq \left\| |A||A^*| \right\|^{(1-t)/2} = \left\| A^2 \right\|^{(1-t)/2}. \end{aligned}$$

因此，由定理 2.20 可知，对于所有 $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} w(A) &\leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|A\|^t r^{1/2} \left(|A|^{1-t}|A^*|^{1-t} \right) \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|A\|^t w^{1/2} \left(|A|^{1-t}|A^*|^{1-t} \right) \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|A\|^t \left\| |A|^{1-t}|A^*|^{1-t} \right\|^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|A\|^t \left\| A^2 \right\|^{(1-t)/2}. \end{aligned}$$

特别地，考虑 $t = 0$，可得

$$\begin{aligned} w(A) &\leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2} r^{1/2} \left(|A||A^*| \right) \\ &\leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|A^2\|^{1/2}, \end{aligned}$$

这也已在 [10, 定理 2.1 和注 2.2] 中通过不同的方法得到证明。

为实现我们的目的，所需的下一个引理如下。

引理 2.22。 [12, 推论 2.17] 设 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$w^r(BC) \leq \frac{1}{2} w^2 \left(|C|^r + i|B^*|^r \right),$$

对于所有 $r \geq 2$.

利用上述引理，我们证明如下定理。

定理 2.23. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\begin{aligned} w^r(A) &\leq \frac{1}{2} w^2\left(|A|^{rt} + i|A^*|^{r(1-t)}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left\||A|^{2rt} + |A^*|^{2r(1-t)}\right\|, \end{aligned}$$

对所有 $t \in [0,1]$ 以及所有 $r \geq 2$. 。特别地，对于 $r = 2$

$$\begin{aligned} w(A) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} w\left(|A|^{2t} + i|A^*|^{2(1-t)}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left\||A|^{4t} + |A^*|^{4(1-t)}\right\|^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

对所有 $t \in [0,1]$。

证明。 设 $A = U|A|$ 是 A的极分解。考察 $B = U|A|^{1-t}$ 和 $C = |A|^t$ 在引理 2.22中，可得所需的第一个不等式。其余不等式很容易推出。 □

特别地，将 $t = \frac{1}{2}$ 代入不等式（2.15），得到

$$\begin{aligned} w^2(A) &\leq \frac{1}{2} w^2\left(|A| + i|A^*|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\|, \end{aligned}$$

这也曾用不同的方法在 [12, 推论 2.15 和备注 2.16]中证明。为了证明最后一个结果，我们需要以下引理。

引理 2.24. [6, 推论 2.11] 设 $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $|B|C = C^*|B|$。则

$$w(BC) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} r(C) w\left(|B| + i|B^*|\right).$$

定理 2.25. 若 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则

$$\begin{aligned} w(A) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|A\|^t w\left(|A|^{1-t} + i|A^*|^{1-t}\right) \\ &\leq \|A\|^t \left\|\frac{|A|^{2(1-t)} + |A^*|^{2(1-t)}}{2}\right\|^{1/2}, \end{aligned}$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。特别地，对于 $t = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} w(A) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|A\|^{1/2} w\left(|A|^{1/2} + i|A^*|^{1/2}\right) \\ &\leq \|A\|^{1/2} \left\|\frac{|A| + |A^*|}{2}\right\|^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

证明。 设 $A = U|A|$ 是 A的极分解。通过考察 $B = U|A|^{1-t}$ 和 $C = |A|^t$ 在引理 2.24 中的情形，我们得到所需的第一个不等式。其余不等式很容易得出。 □

注 2.26。 我们想指出，界（2.16）比界

$$w(A) \leq \|A\|^{1/2} \left\| \frac{|A| + |A^*|}{2} \right\|^{1/2}. \tag{2.17}$$

界 (2.17) 由以下界推出 $w(A) \leq \|A\|$ (参见 (1.1)) 以及 $w(A) \leq \left\| \frac{|A|+|A^*|}{2} \right\|$ (参见 [19])。

References

1. A. Abu-Omar, and F. Kittaneh, 数值半径的上界与下界及其在对合算子中的应用, Rocky Mountain J. Math. 45 (2015), no. 4, 1055–1065. 2. A. Abu-Omar, and F. Kittaneh, 涉及广义 Aluthge 变换的数值半径不等式, Studia Math. 216 (2013), no. 1, 69–75. 3. S. Bag, P. Bhunia, and K. Paul, 利用 t-Aluthge 变换求有界线性算子的数值半径界, Math. Inequal. Appl. 23 (2020), no. 3, 991–1004. 4. P. Bhunia, and K. Paul, 复希尔伯特空间算子数值半径不等式的改进, Acta Sci. Math. (Szeged) (2023). https://doi.org/10.1007/s44146-023- 00070-1 5. P. Bhunia, 有界线性算子的数值半径不等式及 (α, β)-正规算子, (2023). https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.03877 6. P. Bhunia, S. Jana, and K. Paul, 数值半径不等式与多项式零点的估计, (2023). https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.03159 7. P. Bhunia, S.S. Dragomir, M.S. Moslehian, and K. Paul, 数值半径不等式讲义, Infosys Science Foundation Series, Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sciences, Springer Cham, 2022, XII+ 209页. ISBN: 978-3-031-13670-2. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13670-2 8. P. Bhunia, and K. Paul, 算子及算子矩阵数值半径不等式的若干改进, Linear Multilinear Algebra 70 (2022), no. 10, 1995–2013. 9. P. Bhunia, and K. Paul, 数值半径不等式的发展及等号条件的刻画, Linear Algebra Appl. 630 (2021), 306–315. 10. P. Bhunia, and K. Paul, 希尔伯特空间算子数值半径不等式的进一步发展, Arch. Math. (Basel) 117 (2021), no. 5, 537–546. 11. P. Bhunia, and K. Paul, 对著名数值半径不等式的适当改进及其应用, Results Math. 76 (2021), no. 4, Paper No. 177, 12 pp. 12. P. Bhunia, K. Paul, 希尔伯特空间算子数值半径的新上界, Bull. Sci. Math. 167 (2021), Paper No. 102959, 11 pp. 13. P. Bhunia, S. Bag, and K. Paul, 数值半径不等式及其在多项式零点估计中的应用, Linear Algebra Appl. 573 (2019), 166–177. 14. M.L. Buzano, 柯西–施瓦茨不等式的推广, Rend. Semin. Mat. Univ. Politech. Torino 31(1971/73) (1974) 405–409. 15. S.S. Dragomir, 希尔伯特空间中线性算子的范数与数值半径的一些不等式, Tamkang J. Math. 39 (2008), no. 1, 1–7. 16. M. El-Haddad and F. Kittaneh, 希尔伯特空间算子的数值半径不等式 II, Studia Math. 182 (2007), no. 2, 133–140. 17. F. Kittaneh, H.R. Moradi, and M. Sababheh, 数值半径的更精确界, Linear Multilinear Algebra, (2023). https://doi.org/10.1080/03081087.2023.2177248 18. F. Kittaneh, 希尔伯特空间算子的数值半径不等式, Studia Math. 168 (2005), no. 1, 73–80. 19. F. Kittaneh, 数值半径不等式及 Frobenius 伴随矩阵数值半径的估计, Studia Math. 158 (2003), no. 1, 11–17.

20. F. Kittaneh, 某些算子和的范数不等式, J. Funct. Anal. 143 (1997), 337– 348. 21. F. Kittaneh, 关于希尔伯特空间算子若干不等式的札记, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988), no. 2, 283–293. 22. C.A. McCarthy, C_p, 《以色列数学杂志》5 (1967), 249–271. 23. P.Y. Wu and H-L Gau, 希尔伯特空间算子的数值域. 数学及其应用百科全书，第179卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2021. xviii+483页. ISBN: 978-1-108-47906-6 47-02 24. T. Yamazaki, 关于数值半径的上界和下界及一个等号条件, Studia Math. 178 (2007), no. 1, 83–89.

Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bengaluru 560012, Karnataka, India电子邮箱地址：pintubhunia5206@gmail.com；pintubhunia@iisc.ac.in