人工细胞质流的受限热黏性流理论模型

Weida Liao, [1] Elena Erben, [2] Moritz Kreysing, [2,3] 和 Eric Lauga[1], *

[1] *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Wilberforce Road, Cambridge, CB3 0WA, United Kingdom*

[2] *Max Planck Institute of Molecular Cell Biology and Genetics, Pfotenhauerstraße 108, 01307 Dresden, Germany*[3] *Institute of Biological and Chemical Systems, Karlsruhe Institute of Technology, Hermann-von-Helmholtz-Platz 1, 76344 Eggenstein-Leopoldshafen, Germany*（日期：2023年3月7日）

arXiv:2303.03063v1 [physics.flu-dyn] 6 Mar 2023

近期的细胞生物学实验探究了人工诱导的细胞内流动对细胞和生物体时空组织的影响。在这些实验中，利用激光发出的聚焦红外光进行温和的动态加热（数开尔文），会在细胞内部引发细胞质的长程热黏性流动。为了拓展这种方法今后在细胞生物学中的应用——该方法通常称为聚焦光诱导的细胞质流动（FLUCS）——需要新的定量模型，将外部光驱动与产生的流动和输运联系起来。本文提出一种完全解析的理论模型，描述动态激光刺激在二维受限条件下、所有长度尺度上（包括激光束扫描路径附近和远场）的流体流动。我们将聚焦光的作用建模为流体中局部微小的温度变化，由此引起流体局部密度和黏度的微小变化，进而产生局部可压缩流体流动。我们解析求得了任意时变振幅的热斑沿任意长度扫描路径平移时所诱导的瞬时流场。我们表明，瞬时流场的主阶项源于流体的热膨胀，且与热黏度系数无关。该主阶速度场与热膨胀系数及温度扰动的幅值成正比，其远场行为通常由源汇流主导，并与热斑振幅的变化率成正比。相比之下，与实验测量结果一致，热斑完整扫描所造成的物质点净位移与热斑振幅的平方成正比，这是热膨胀和热黏度变化相互作用的结果。扫描过程中物质点的相应平均速度在远场呈流体动力学源偶极子，其方向取决于热膨胀和热黏度变化的相对重要性。我们的定量研究结果与近期实验结果高度吻合，并将有助于设计新的受控实验，以确定细胞内物理输运过程的生理作用。

* e.lauga@damtp.cam.ac.uk

I. 引言

在自然界中，流体流动负责在广泛的长度尺度上实现维持生命的基本过程中的输运 [1]。在宏观尺度上，海洋环流 [2, 3] 和沿海流动 [4, 5] 在决定气候和塑造生态系统方面发挥着关键作用；与此同时，风与植物的相互作用会将种子传播到远处，并促进光合作用中的气体交换 [6]。在人体内，呼吸 [7]和血流 [2, 8, 9] 通过管道网络输送氧气。在微米尺度上，则是细胞构成的黏性世界：从决定发育中胚胎左右不对称性的纤毛驱动流 [10, 11] 到单个细胞内部的流动 [12]。

细胞内流体流动的一个典型例子称为细胞质流。细胞质流于18世纪首次被发现 [13], ，指细胞内一种以水为基础的黏性流体——细胞质——整体移动或环流。多种生物体中都存在这类流体流动，包括植物、藻类、动物和真菌 [14, 15]。研究表明，细胞质流具有多种流动拓扑结构，例如花朵花粉管内类似喷泉的流动（*Lilium longiflorum*） [16], 、绿藻细胞内高度对称的流动（*Chara corallina*） [17], ，以及果蝇属卵母细胞中的漩涡和涡流（*Drosophila*） [18]。

细胞质流由主动机制驱动：分子马达沿着细胞内的聚合物丝移动大型货物，例如囊泡和细胞器，从而带动流体。由此产生的细胞内整体流体流动会促使流体中的各种物质输运，包括蛋白质、营养物质和细胞器；这对代谢和细胞分裂等基本过程至关重要 [19, 20]。这种主动平流输运对于较大的细胞尤其重要，其尺寸可达数百微米量级 [21]。事实上，在这些较大的长度尺度上，单靠扩散输运可能过于缓慢 [19]；细胞质拥挤的特性又会进一步阻碍扩散，大分子占据了细胞质体积的20–30% [22]。因此，有研究认为，细胞质流引起的平流输运会显著影响细胞过程以及细胞的时空组织 [21, 23]。

许多理论和实验研究都探讨了细胞质流在这些过程中发挥的确切作用 [12]。例如，绿藻*Chara corallina* 具有细长的圆柱形细胞。在这些细胞内，研究人员通过实验测量了螺旋流；这种流动由肌球蛋白马达沿肌动蛋白丝轨道运动所驱动，驱动力来自细胞边界 [17]。从理论上探究这种旋转流动的影响时，水动力学模型表明，螺旋流能够增强混合 [24] 和跨细胞边界的质量通量 [25]。对于动物细胞，数值模拟表明，细胞质流可能使细胞器稳定地定位。在这些模拟中，秀丽隐杆线虫 胚胎中的流动由沿微管运动的马达驱动 [26], ，而小鼠卵母细胞中的细胞质流则由边界附近肌动蛋白丝的运动驱动 [27]。尽管分子驱动机制不同，两者都形成了喷泉状流动模式，能够将细胞器输运至所需位置 [12]。

从实验角度来看，要确立细胞内流动的生物学功能，存在两个重要且密切相关的挑战。首先，需要在细胞内制造类似自然发生的细胞质流动、但由人工驱动的流动，同时避免遗传或化学扰动可能带来的不良副作用。第二个与之密切相关的挑战，是扰动细胞内已有的流动，以便观察其对细胞过程的影响。可以说，这种扰动技术对于深入理解细胞内流动的生理学至关重要，能够推动研究超越相关性，进一步探究因果关系 [28]。

为详细探究细胞内流动的成因及其影响，文献 [28]的作者最近展示了如何利用细胞和发育中的胚胎内的热黏性流动 [29, 30]来产生并扰动细胞质流动与输运，从而推广了这一细胞生物学研究方法，并将其命名为聚焦光诱导的细胞质流动（FLUCS）。研究者利用激光发出的聚焦红外光，在细胞内一个很小的区域进行照射；流体受热后，便会在整个细胞内诱发热黏性流动。激光束在流体中形成一个热斑，并以约 2 kHz 的频率沿一条较短的扫描路径反复移动；这种重复扫描随后会使物质在流体中产生净输运，而在扫描路径附近，输运方向通常与激光移动方向相反。要以生理速度产生净输运，所需的温度变化仅为几开尔文，因此不会损伤细胞。此外，这种净输运虽然在扫描路径附近最强，却会延伸至整个

细胞，与细胞质流一样具有长程特性。这种非侵入性技术有助于研究细胞组织和细胞过程中的细胞内流动与输运。

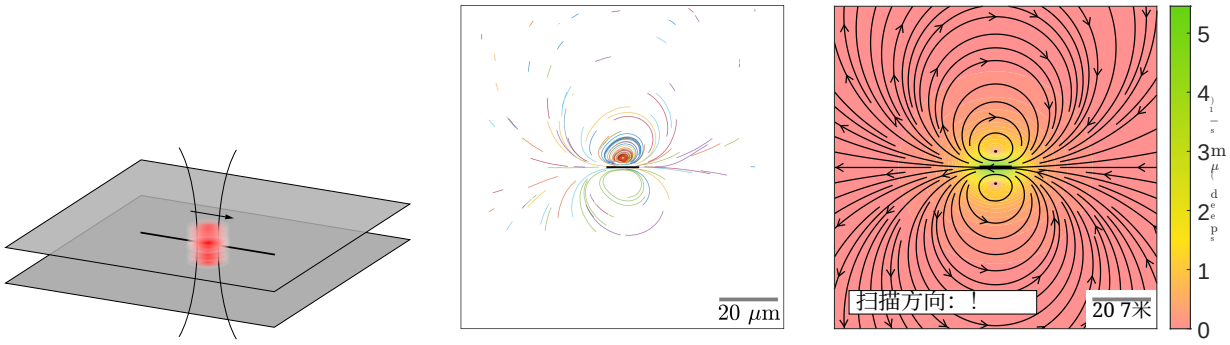
着眼于细胞生物学应用，同一研究团队利用 FLUCS 展示了细胞发育中的基本过程如何由细胞内流动驱动 [28]。例如，在发育开始时，秀丽隐杆线虫合子会先极化，随后不对称细胞分裂，形成两个大小不同的子细胞。特定蛋白质（PAR2）的浓度决定合子的哪一端成为较小的生殖细胞，哪一端成为较大的体细胞，从而确定身体轴。研究显示，利用 FLUCS 产生的生理量级且持续时间适当的流动，足以使这些蛋白质定位 [28]。这既证明了细胞内物理输运过程具有生物学意义，也表明 FLUCS 有望用于开展新实验，以揭示细胞内流体流动的确切作用 [31]。

FLUCS 技术还使研究人员能够对发育过程进行实验扰动 [28, 32, 33]。在数值模拟的指导下，研究人员利用 FLUCS 重新分布秀丽隐杆线虫合子内的 PAR2，令人瞩目的是，这导致其身体轴发生反转 [28]。文献 [32] 的作者通过 FLUCS 人为改变细胞体积，从而控制秀丽隐杆线虫的卵母细胞生长。结合使用 FLUCS、遗传学和药理学干预，研究人员揭示了秀丽隐杆线虫胚胎发育过程中中心体的材料性质及其分子基础 [33]。在生物学之外，热黏性流动与输运还与闭环反馈控制结合使用，实现了微米级颗粒的高精度定位 [34] 和高灵敏度力测量 [35]。

从流体动力学视角来看，FLUCS 实验中产生的流动和净输运，可用激光引起的流体热膨胀与热黏度变化的共同作用来解释，早期研究已首次证明了这一点 [29, 30, 36]。这些研究考察了具有温度依赖型密度和黏度特征的牛顿黏性流体。这可以作为细胞质的简化模型 [28], ；细胞质复杂的流变学已成为许多研究的主题 [19, 37, 38]。对于行进温度波，数学分析和实验均表明，在薄膜几何中，热黏度变化与热膨胀驱动的流动相结合，会使示踪粒子沿扫描路径产生净输运 [29]。随后的一项研究转而考察激光局部加热所产生的热斑沿扫描路径反复移动的情形 [30]；这是后来在细胞内进行的生物学 FLUCS 实验所采用的相关技术 [28]。结合理论、数值模拟和实验，该研究证明，在两块平行板之间的黏性流体薄膜中，局部加热同样会使示踪粒子产生净输运 [30]。文献 [30] 中提出的理论着重研究恒定振幅的热斑沿无限长扫描路径移动时，示踪粒子在扫描路径上及其平行方向上的净输运。

在实验中 [28, 30, 34], ，瞬时热黏性流动和激光加热引起的净输运都不局限于扫描路径，而是延伸至整个空间，这与自然细胞质流动的情况相同。近期一项实验研究量化了示踪粒子的平均速度如何随空间变化；研究在两块平行板之间的黏性流体（甘油-水溶液）中开展受控微流体实验，发现远离扫描路径时速度遵循平方反比定律 [34]。对于建模而言，这种实验设置还有一个优点，即能够将 FLUCS 的物理影响与生物学效应区分开来。此外，在实验中 [28, 30, 34], ，扫描路径长度有限，且热斑的振幅随时间变化。针对椭球体（代表细胞）内 FLUCS 的数值模拟 [28], 表明，这两个因素对于理解实际应用中流体内示踪粒子的净输运如何随空间变化至关重要。

在我们的研究中（总结见图1 ，并直接受到参考文献 [34], 中的受控实验启发），我们提出了一种解析理论模型，用于描述聚焦光在两块平行板之间的受限黏性流体中驱动的流动；该模型适用于任意长度的扫描路径，以及完全一般、随时间变化的热斑振幅。我们首先解析求解扫描周期内热斑诱导的瞬时流体流场，该解在整个空间域（即从近场到远场）均有效；随后分析一个扫描周期内流体中示踪粒子的轨迹，以及热斑完整扫描一周所致的示踪粒子净位移。该理论定量且严格地预测了重复扫描所诱导的示踪粒子净输运如何随空间位置变化，与近期微流控实验 [34]的数据一致。我们的建模阐明了 FLUCS 介导细胞内输运的基本物理机制。我们的研究结果将有助于设计新的 FLUCS 实验，以确立



(a) (b) (c)

图 1. 左图（图 1a）：装置示意图；聚焦于两块平行板之间流体的激光会产生一个热斑（红色），该热斑沿扫描路径移动并诱导流体流动。中图（图 1b）：由于重复扫描热斑而在流体中观察到的示踪微珠轨迹，俯视图，经许可改编自参考文献 [34]©光学学会。右图（图 1c）：本研究推导的流体中示踪粒子的理论时间平均轨迹（颜色表示示踪粒子的平均速度），参数对应于图1b中的实验。

物理输运过程在细胞内的生理作用。我们的解析描述还有助于在对活细胞造成更低温度影响的同时生成更精确的流场，并训练数学模型（例如机器学习模型），利用流场实现更有效的微操作。

本文的组织如下。在第II节中，我们在流体温度变化较小的极限下，解析求解了两个平行板之间平移热斑所诱导的瞬时流场。我们从数学上证明，热膨胀驱动了该流动。首阶瞬时流动与热斑振幅呈线性关系，完全由热膨胀引起，而与热黏度变化无关，这与早期研究 [29, 36]一致。我们对瞬时流体速度场的解析解表明，对于有限扫描路径（如实验中的情况），热斑振幅的时间依赖性至关重要，热斑振幅的变化率决定了远场源流的强度。在远场中，这一源流通常占主导地位，超过与热斑平移相关的源偶极子。接下来，我们求解瞬时流场的高阶贡献，即热斑振幅的二次项，其中包括热黏度变化的首个影响。这些高阶项对于量化瞬时流动在多个扫描周期内导致的示踪粒子净输运至关重要；高阶项源于热斑对首阶流动的放大，并且在参考文献 [34], 的实验中主要由热黏度变化引起。在首阶瞬时流场解析解的基础上，我们在第III节中进一步解析求解单个物质点或示踪粒子沿扫描路径经历一次热斑扫描时的首阶轨迹。随后，我们证明，对于一般的热斑，物质点在一个完整扫描周期后的净位移出现在更高阶。受此启发，我们在第IV 节中表明，扫描导致的物质点首阶净位移与热斑振幅的平方成正比，这与实验结果 [28, 30], 定量一致，并且源于温度对流体密度和黏度的综合影响，这与早期理论 [29]一致。随后，我们将物质点沿有限扫描路径重复扫描热斑所产生的轨迹进行了可视化。我们表征了一个扫描周期内示踪粒子的平均速度（平均拉格朗日速度），发现其在远场中表现为流体动力学源偶极子，这与衰减较慢的远场瞬时流体流动不同。最后，在第V节中，我们将理论模型的结果与参考文献 [34], 中的微流控实验进行了定量比较；该实验测量了重复扫描热斑导致的示踪粒子轨迹和平均速度。我们最后讨论建模方法的预测和局限性，并在第VI节总结我们的工作，提出模型可能的进一步应用。

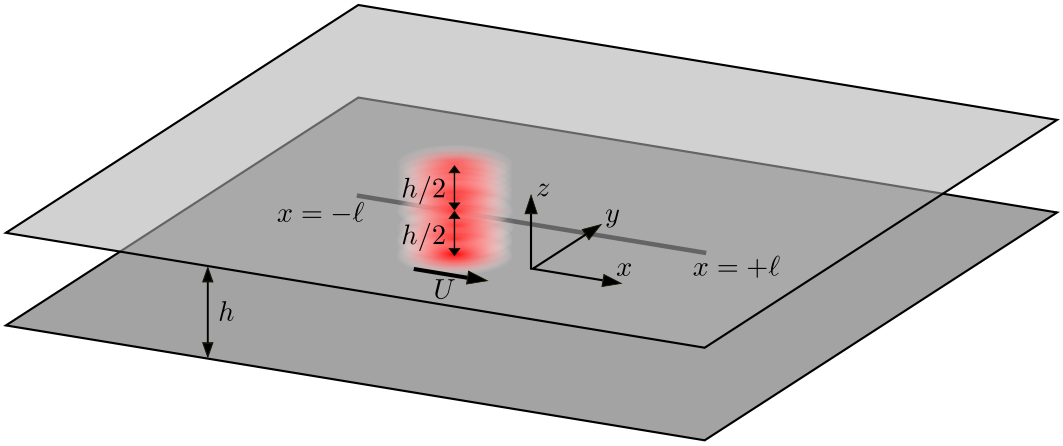


图2. 理论模型的设置。特征半径为 a 的热斑以速度 U 沿 x 方向移动，沿着 $y = 0$ 从 $x = -\ell$ 到 $x = +\ell$扫描，导致流体在位于 $z = 0$ 和$z = h$处的两个无滑移边界之间发生无惯性流体流动。

II. 瞬时流动的理论模型

A. 设置

在本节中，我们介绍用于参考文献 [34] 中微流控实验的理论模型，该实验是对生物细胞 [28]中实验的简化且受控版本。装置示意图见图2，图3给出了从上方观察的简化视图，其中包括可能的瞬时流线示意图。我们考虑被限制在位于 $z = 0$ 和 $z = h$ 处的平行无滑移表面之间的流体（Hele-Shaw几何构型）。一个特征半径为 a 的热斑以恒定速度 U 沿扫描路径平移。扫描路径是一条从 $x = -\ell$ 到 $x = +\ell$、沿 $y = 0$方向的线段。在时间 t，热斑中心因此位于（$x = Ut$， $y = 0$， $z = h/2$），其中 $-\ell/U \leq t \leq \ell/U$（即在一次扫描期间）。起初，我们关注热斑瞬时诱导的流体流动。我们将在第III节考察示踪粒子或物质点在一次扫描周期内受瞬时流动影响的运动，其中初始位置可以任意；随后在第IV节考察示踪粒子完成一次热斑扫描后的净位移。这将使我们能够理解重复扫描（如实验中所进行的扫描，第V节）导致的示踪粒子轨迹和平均速度，即热斑从 $x = -\ell$ 移动到 $x = +\ell$，随后消失并立即在 $x = -\ell$重新出现，并重复这一过程 [30, 34]；瞬时速度场与示踪粒子的时间平均速度之间的区别，对于定量重现实验结果至关重要。

流体的温度场 $T(x,\ y,\ z,\ t)$可写为

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \Delta T(x, y, z, t), \tag{1}$$

其中， T_0 为常数参考温度， $\Delta T(x,\ y,\ z,\ t)$为热斑引起的流体温度变化。下文将给出这一温度场，并讨论这一近似成立的条件。我们对温度变化对流体的影响建模如下。通过热膨胀（即体积变化），流体温度升高会使其局部密度 ρ 降低（对大多数流体而言确实如此）。由于生物学应用要求温度变化较小，我们可以用标准线性关系对此进行建模

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha\Delta T), \tag{2}$$

其中， ρ_0 是流体在参考温度 T_0 下的密度，我们引入热膨胀系数 α。温度局部小幅升高也会使流体的剪切黏度（即动力黏度） η 局部降低

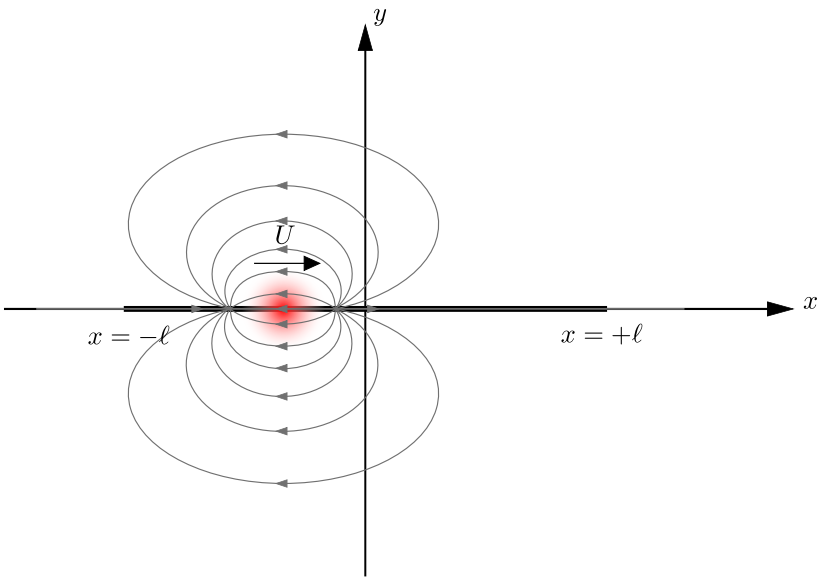


图3. 图2中平移热斑的俯视图，并示意瞬时流线。

其模型表示为

$$\eta = \eta_0(1 - \beta\Delta T), \tag{3}$$

其中， η_0 是流体在参考温度 T_0 下的剪切黏度，我们引入热黏度系数 β。对于典型流体，系数 α 和 β 通常都为正 [39]。本文仅考虑温度变化较小的情况，使得相对密度变化和黏度变化都很小，即 $|\alpha\Delta T|$， $|\beta\Delta T| \ll 1$。这既适用于文献 [34] （第V节）的微流控实验，也适用于生物实验中的聚焦光诱导细胞质流动，以避免温度变化在细胞内引发不良副作用。

由于这些效应，热斑　　会诱导流体流动，我们将对其进行求解。首先，质量守恒关系为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{4}$$

其中， $\mathbf{u} \equiv (u,\ v,\ w)$ 是速度场。

接下来，柯西动量方程表示为

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \rho \mathbf{g}, \tag{5}$$

其中 $\mathbf{g}$ 是重力　　加速度，而根据牛顿假设，应力张量 $\mathbf{\Pi}$表示为

$$\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{1} + \kappa(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1} + 2\eta \left\{ \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}}] - \frac{1}{3}\mathbf{1}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\}. \tag{6}$$

这里， p 是压力场， $\mathbf{1}$ 是单位张量， κ 是体积黏度。剪切黏度 η 将应力与线性变形率联系起来，而体积黏度 κ 将应力与体积变形率 [40]联系起来，对于可压缩流动而言，体积黏度可能很重要。我们还注意到，体积黏度 κ与剪切黏度 η一样，通常是温度 [40, 41]的函数。

现在，为了在分析上取得进展，我们采用润滑极限，这与早期研究 [29, 30]中的做法相同。也就是说，我们假设板之间的垂直间距 h 远小于流动在水平方向 x 和 y上发生变化时所对应的特征长度尺度，该尺度由特征热斑直径 $2a$给出。因此，沿 z 方向的热扩散时间尺度远小于沿 x 和 y 方向的时间尺度。激光

在实验中，光束强度在水平方向上的衰减也远快于其沿 z 方向的变化。因此，作为一项简化假设，我们认为流体的温度与 z无关，从而将激光导致的温度变化建模为 $\Delta T = \Delta T(x,\ y,\ t)$。

基于这两个假设，$h \ll 2a$ 和 $\frac{\partial \Delta T}{\partial z} = 0$，我们可以采用与经典不可压缩情形 [42] 类似的标度论证来简化动量方程。详细推导见附录A。我们发现，在润滑极限下，动量方程变为

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{7}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{9}$$

与标准的不可压缩润滑流动量方程相同。我们注意到，体积黏度不再出现在这些方程中；因此，从现在起，为简洁起见，我们将剪切黏度 η 简称为黏度。

这里对所作假设有几点说明。首先，我们指出，在第VD 节中，我们将根据参考文献 [34] 中的实验长度尺度（该研究量化了平均示踪粒子速度的空间变化）重新讨论润滑极限的有效性；在第VC节中，我们还将事后通过标度论证验证惯性项确实可以忽略。其次，我们指出，上述方程中未包含重力。本文主要关注由热膨胀驱动的流动。在重力作用下，密度差会导致静水压力出现水平梯度，通常会驱动重力流 [43]。然而，在第VC节中，我们将通过标度论证表明，对于实验参数值 [36]，由此产生的重力流与热膨胀驱动流动之比很小。

为使方程组封闭，我们采用以下边界条件。假设速度场在热斑中心处不出现奇异。在刚性静止的平行板 $z = 0$ 和 $z = h$处，速度场满足无滑移边界条件。对于在远场衰减的温度变化，速度也假设在远场衰减（假设流体无界）。

本文推导了适用于一般温度分布 $\Delta T(x,\ y,\ t)$ 的各种方程和结果。为了阐释这些内容并给出流动的显式解析解，我们还将在部分结果中采用热斑的高斯温度分布，其形式为

$$\Delta T(x, y, t) = \Delta T_0 A(t) \exp\{-[(x - Ut)^2 + y^2]/2a^2\}, \tag{10}$$

其中，ΔT_0 为特征温度变化（取为正值的常数），而 $A(t)$ 为热斑的无量纲振幅，是时间的函数，在我们的理论研究中保持任意。式（10）中的温度分布适用于热斑沿扫描路径进行一次扫描的过程。对于热斑，我们假设振幅$A(t)$为正，$A(t) \geq 0$。

热斑振幅的时间依赖性是我们理论中的关键要素，它推广了先前的理论建模 [30] ；先前的建模假设热斑振幅恒定，且扫描路径无限长。在实验中，扫描路径是有限的。振幅函数体现了这一点，因此必须随时间变化：根据定义，扫描路径两端的振幅均为零，也就是说，我们始终假设 $A(\pm \ell/U) = 0$。此外，针对另一种几何构型（椭球体内的流体）开展的数值研究 [28] 发现，要重现实验观测到的净输运，热斑振幅必须随时间变化。

温度分布的高斯空间依赖性 ΔT （方程（10）中的形式源于实验中对温度场的测量 [30], ，测量结果表明，只要激光束的平移速度远低于流体达到热平衡的速度，这种近似就很好。在第VD节中，我们将利用热的平流扩散方程的标度论证，讨论这一假设对文献 [34], 中实验的适用性。对于细胞生物学实验，理想的做法是采用不会损伤细胞的非侵入性技术。方程（10）中的温度扰动高度局部化，其特征尺寸远小于细胞，因此

这种加热方式具有优势。我们将严格证明，这种指数衰减加热既能在扫描路径附近产生强烈的净输运，也能在远场产生衰减缓慢的流动，其随距离的标度关系为代数形式，而非指数形式。

我们强调，尽管这里引入了高斯温度场，但本文中的许多结果对任意温度分布 $\Delta T(x,y,t)$ 都成立。这种普适性很重要，因为在实验中，如果热斑的平移速度过高，它可能会失去方程（10）中假设的圆对称性；由于冷却流体所需的热平衡时间，它可能会变得细长 [28, 30]。

B. 二维流动方程

根据第 IIA 节所述的设置，现按照参考文献 [29] 中的标准润滑理论论证，将问题简化为二维问题。我们可以直接对润滑动量方程（7）–（9）积分，并采用无滑移边界条件。水平速度场 $\mathbf{u}_\mathrm{H} \equiv (u,v) \equiv \mathbf{u}_\mathrm{H}(x,y,z,t)$ 的抛物线分布为

$$\mathbf{u}_\mathrm{H} = -\frac{\nabla_\mathrm{H} p}{2\eta} z(h-z). \tag{11}$$

其中，水平梯度为 $\nabla_\mathrm{H} \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$。

我们将 z 平均定义为

$$\overline{(.)} = \frac{1}{h}\int_0^h (.)\, dz, \tag{12}$$

因此，二维的 z 平均水平速度场 $\mathbf{u}_\mathrm{H}(x,\ y,\ t)$ 可表示为 $\qquad\qquad -\qquad\qquad \mathrm{y}$

$$\overline{\mathbf{u}}_\mathrm{H} = -\frac{h^2}{12\eta}\nabla_\mathrm{H} p. \tag{13}$$

我们指出，为便于稍后与第V 节中的实验数据进行比较，该速度与中平面上的速度$z = h/2$相差一个因子 $2/3$；换言之，我们有

$$\mathbf{u}_\mathrm{H}|_{z=h/2} = -\frac{h^2}{8\eta}\nabla_\mathrm{H} p = \frac{3}{2}\overline{\mathbf{u}}_\mathrm{H}. \tag{14}$$

我们还对质量守恒方程（式（4））取 z 平均。将其与平行板上的不可穿透边界条件 $z=0$ 和 $z=h$结合，可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_\mathrm{H}\cdot(\rho\overline{\mathbf{u}}_\mathrm{H}) = 0. \tag{15}$$

请注意，由于我们的理论允许热斑振幅随时间任意变化，流动的解通常在平移热斑的坐标系中并非定常。因此，本文始终采用实验室坐标系，在该坐标系中扫描路径固定，且流体在无穷远处静止。

为简化记号，从现在起，我们只讨论两个空间维度（$x,\ y$）以及相应的二维、 z 平均水平速度场$\mathbf{u}_\mathrm{H}$。因此，在下文中，我们省略该速度场上的横线和下标 H，并将其记为$\mathbf{u}$。类似地，我们现在用 ∇ 代替 ∇_H 表示水平梯度。

C. 无量纲问题表述

现在，我们将问题的关键方程，即式（2）、（3）、（10）、（13）和（15）进行无量纲化。我们采用以下特征尺度：热斑速度 U 作为速度，特征热斑半径 a 作为长度， a/U 作为时间，黏性润滑应力尺度 $12\eta_0 aU/h^2$ 作为压力（为便于数学处理，其中包含因子 12），

特征温度变化 ΔT_0 作为温度，参考值 ρ_0 作为密度， η_0 作为黏度。为简单起见，我们使用相同的变量（$\mathbf{u}$、 x、 y、 ℓ、 ∇、 t、 p、 α、 β、 ΔT、 ρ和 η）表示它们的无量纲等价量。

接下来，总结无 量纲问题：二维速度场由压力决定，表达式为

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\eta}\nabla p, \tag{16}$$

质量守恒方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{17}$$

我们将推导适用于一般给定温度变化 $\Delta T(x,\ y,\ t)$ 的结果，并利用给定的高斯温度分布（具有任意时变振幅），显式求解这些方程，具体如下

$$\Delta T(x, y, t) = A(t) \exp\{-[(x-t)^2 + y^2]/2\}, \tag{18}$$

在一次扫描过程中。温 度变化通过方程决定流体的密度 ρ 和黏度 η ns

$$\rho = 1 - \alpha \Delta T, \tag{19}$$

$$\eta = 1 - \beta \Delta T, \tag{20}$$

分别。二维问题的边界条件为：假设速度场在热斑中心不出现奇异性，且流体速度在无穷远处趋于零。

由于压力场决定了速度场，我们还可以通过将式（ p 16）代入式（17），推导出压力的单个方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\eta} \nabla p \right) = 0. \tag{21}$$

利用式（19）和式（20），将其写成一般温度场的形式 ΔT 可得

$$\nabla \cdot \left(\frac{1 - \alpha \Delta T}{1 - \beta \Delta T} \nabla p \right) = -\alpha \frac{\partial \Delta T}{\partial t}. \tag{22}$$

压力的边界条件由速度的边界条件继承而来，因此假设压力梯度∇p 在热斑中心不出现奇异性，且压力梯度在无穷远处趋于零。（请注意，压力本身不一定在无穷远处趋于零；例如，与源流相关的压力会在无穷远处呈对数增长。）

D. 微扰展开

为了在求解方程（22）时取得解析进展，我们采用了参考文献 [29] 中的类似方法。我们考虑热膨胀系数（$\alpha \ll 1$）较小且热黏度系数（$\beta \ll 1$）较小的极限。需要指出的是，这些都是无量纲参数；由于实验中的特征温度扰动 ΔT_0 足够小，因此它们也较小。我们对这两个参数进行微扰展开，并将压力 p表示为

$$\begin{aligned} p &= \sum_{(m,n)=(0,0)}^{(\infty,\infty)} \alpha^m \beta^n p_{m,n} \\ &\equiv p_{0,0} + \alpha p_{1,0} + \beta p_{0,1} + \alpha^2 p_{2,0} + \alpha\beta p_{1,1} + \beta^2 p_{0,2} + \text{cubic and higher-order terms}, \end{aligned} \tag{23}$$

当 α, $\beta \to 0$ 时。换言之， $\alpha^m\beta^n$ 阶压力为 $p_{m,\ n}$。下面我们逐阶求解压力。这种系统的方法使我们能够理解热膨胀和热黏度变化在所诱导流动中的作用。

接下来，我们可通过对方程（16）关于小量 α 和 β 展开并收集各项，得到相应的流体速度场：

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= -\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\Delta T)^k\right]\sum_{(m,n)=(0,0)}^{(\infty,\infty)}\alpha^m\beta^n\nabla p_{m,n}\\ &\equiv \sum_{(m,n)=(0,0)}^{(\infty,\infty)}\alpha^m\beta^n\mathbf{u}_{m,n}\\ &\equiv \mathbf{u}_{0,0}+\alpha\mathbf{u}_{1,0}+\beta\mathbf{u}_{0,1}+\alpha^2\mathbf{u}_{2,0}+\alpha\beta\mathbf{u}_{1,1}+\beta^2\mathbf{u}_{0,2}+\text{cubic and higher-order terms.}\end{aligned} \tag{24}$$

我们看到， $\alpha^m\beta^n$ 阶的速度场 $\mathbf{u}_{m,n}$ 显式依赖于压力场 $p_{m,n'}$，其中 $0 \le n' \le n$，即其在 β 中的阶数较低或相同。

现在，我们利用方程（23）展开方程（22）中的压力 p，得到

$$\nabla\cdot\left\{(1-\alpha\Delta T)\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\Delta T)^k\right]\sum_{(m,n)=(0,0)}^{(\infty,\infty)}\alpha^m\beta^n\nabla p_{m,n}\right\} = -\alpha\frac{\partial\Delta T}{\partial t}. \tag{25}$$

我们强调，该压力方程对任意温度分布均成立 ΔT，并指出此方程的强迫项出现在 α 阶。因此，我们预期首阶压力及其驱动的首阶流动也出现在 α 阶。

最后我们注意到，对于任意温度分布 ΔT， α^m 阶的速度场 $\mathbf{u}_{m,0}$ 对所有 m 都是势流（即无旋流），其表达式为

$$\mathbf{u}_{m,0} = -\nabla p_{m,0}. \tag{26}$$

换言之，正如参考文献 [29],所述，若黏度为常数，则压力可充当速度势。

E. β^n阶解

现在我们逐阶求解方程（25）。需要指出的是，由于这是一组带有诺伊曼边界条件的压力泊松方程，因此每一阶的流动解都是唯一的。首先，我们考虑方程（ β^n 25）中的 $n \ge 0$阶，即所有 β阶：1、 β^2、p_0，依此类推。我们可以通过归纳法证明，在所有这些阶上，压力$_n$ 为零，因此相应的速度场$\mathbf{u0}$，n 在这些阶上也均为零；对于任何在无穷远处衰减的给定温度分布 ΔT，这一结论都成立。证明见附录B。

因此，瞬时流动的主阶项出现在 α 阶，完全是由流体加热时发生的局部体积变化引起的。此外，在 β 阶和 β^2阶均不存在流动。因此，在我们的微扰展开中，热黏度变化的首个影响出现在 $\alpha\beta$阶。

参考文献 [34] 中微流控实验（我们将在第V节讨论）所使用的流体（甘油-水溶液）的热黏度系数 β 远大于热膨胀系数 α，因此， $\alpha\beta$阶的流动大于 α^2阶的流动。然而，对于一般流体而言，系数 α 和 β 的幅值可能更为接近，[39],因此 α^2 阶的流动可能与 $\alpha\beta$阶的流动同样重要。因此，本节将给出最高至二次阶的瞬时流动解。两个二次项（ $\alpha\beta$ 阶和 α^2阶）对于理解物质点经过多次扫描后的轨迹至关重要，因为我们将发现，瞬时流动的主阶项（ α阶）实际上会导致物质点在热斑完成一次完整扫描后，在 α阶上产生零净位移。

总之，速度场 $\mathbf{u}$ 的微扰展开可简化为

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}_{1,0}+\alpha^2\mathbf{u}_{2,0}+\alpha\beta\mathbf{u}_{1,1}+\text{cubic and higher-order terms.} \tag{27}$$

由于 β^n 阶不存在流动，因此这一修正后的微扰展开中的所有项都包含热膨胀系数 α。从物理上讲，这意味着瞬时流动由热膨胀驱动。热膨胀无需热黏度变化即可产生流动，但热黏度变化只有通过与热膨胀相互作用才能导致流动。

F. α阶解

现在，我们求解由振幅随时间任意变化的平移热斑诱导的瞬时流动的主阶项。该流动出现在 α 阶，与温度变化对质量守恒方程的强迫项相对应；换言之，这种流动纯粹源于热膨胀。

我们首先推导一个结果：对于形状任意的热斑， α 阶的瞬时流体速度场是一个与热斑振幅 $A(t)$ 成正比的函数对时间的导数。这对于理解第 III节中一个完整扫描周期后物质点的净位移至关重要。接下来，我们讨论一般热斑所诱导流动的物理机制。随后，我们专门研究高斯热斑，并得出首阶流场的显式解析公式$\mathbf{u}^{1,0}$ ，其阶数为 α，见式（46）、（47）和（48）。为直观展示这一关键结果，我们在图 6 和图8中绘出流动中两个独立贡献项的流线；随后，在图 10 和图 11中展示一个扫描周期内的完整速度场。

1. *General heat spot*

在 α 阶，压力方程 [式（25）] 为

$$\nabla^2 p_{1,0} = -\frac{\partial \Delta T}{\partial t}, \tag{28}$$

该式对任意温度分布 ΔT 均成立；这是完全线性化的主阶问题。我们注意到，式（28）中的强迫项是时间导数。若能找到函数 $F(x,y,t)$，使得

$$\nabla^2 F = -\Delta T, \tag{29}$$

那么 $p_{1,\ 0} = \partial F/\partial t$ 就是式（28）的一个解。

现在假设，扫描过程中温度分布 $\Delta T(x,y,t)$ 由某个任意形状函数$\Theta(x-t,y)$决定。该形状函数在随热斑移动的参考系中保持稳态，并乘以（任意的）时变振幅函数 $A(t)$，即：

$$\Delta T(x,y,t) = A(t)\Theta(x-t,y). \tag{30}$$

若 $A(t)$ 为正，则振幅函数 ΔT 代表热斑；若 ΔT 为负，则代表冷斑。形状函数 $\Theta(x-t,y)$ 可理解为振幅恒定、沿正 x 方向以单位速度平移的热斑。例如，式（18）中的高斯热斑对应的形状函数为$\Theta(x,y) = \exp[-(x^2+y^2)/2]$；一般而言，形状函数不必具有圆对称性。

为求解方程（29），结合方程（30）中的一般热斑，我们设定如下试探形式

$$F(x,y,t) = A(t)p_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y), \tag{31}$$

如后文所述， $p_{1\ 0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y)$ 是与热斑振幅的时间变化相关的压力场，即热斑逐渐开启或关闭时产生的压力场（上标中的 S 表示“切换”（switch））。压力场 $p_{1\ 0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 p_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) = -\Theta(x-t,y). \tag{32}$$

对于任意给定的形状函数 Θ，我们都可以根据方程（32）求解 $p^{(\mathrm{S})}_{1\,0}(x-t,y)$（在热斑中心处非奇异，且梯度在无穷远处衰减）。随后可推导出，$p_{1,0}$ 阶下的完整压力场为

$$\begin{aligned} p_{1,0}(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}[A(t)p^{(\mathrm{S})}_{1,0}(x-t,y)] \\ &\equiv A'(t)p^{(\mathrm{S})}_{1,0}(x-t,y) + A(t)p^{(\mathrm{T})}_{1,0}(x-t,y), \end{aligned} \tag{33}$$

其中，撇号 $(')$ 表示对自变量（此处为时间 t）求导，并将压力场$p^{(\mathrm{T})}_{1\,0}(x-t,\ y)$定义为

$$p^{(\mathrm{T})}_{1,0}(x-t,y) \equiv \frac{\partial}{\partial t}p^{(\mathrm{S})}_{1,0}(x-t,y). \tag{34}$$

我们稍后将看到，压力场 $p^{(\mathrm{T})}_{1\,0}(x-t,\ y)$与热斑的平移有关（上标 T 表示“平移”）。

在式（33）中，我们将 α 阶的压力场分解为两个贡献项。相应的速度场为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1,0}(x,y,t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla[A(t)p^{(\mathrm{S})}_{1,0}(x-t,y)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[A(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1,0}(x-t,y)] \\ &\equiv A'(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1,0}(x-t,y) + A(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1,0}(x-t,y), \end{aligned} \tag{35}$$

其中，两个独立的速度场 $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}$，（与热斑的开启有关）和 $\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1\,0}$，（与热斑平移有关）分别为

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1,0} = -\nabla p^{(\mathrm{S})}_{1,0}, \tag{36}$$

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1,0} = -\nabla p^{(\mathrm{T})}_{1,0}. \tag{37}$$

重要的是，我们注意到，该速度场$\mathbf{u}^{1,0}$ 是一个与 $A\ (t)$ 成正比的函数对时间的导数。我们将在第 IIID 节看到，这意味着物质点因热斑一次完整扫描而产生的 α 阶净位移恰为零。因此，为了理解实验中由热斑重复扫描所观察到的示踪粒子的时间平均轨迹 [34]，我们将在第 II G 节和第 IIH节求解瞬时流场的高阶贡献。

2. *Physical mechanism for general heat spot*

尽管我们尚未完全明确求出由热斑诱导的瞬时流动的主阶项（阶 α），但根据第 IIF 1节的一般结果，从热膨胀的角度出发，我们已经能够获得物理上的理解。

我们首先从物理角度解释一般速度场 $\mathbf{u}^{1,0}$ 在方程（α 中的阶 35）所包含的两个项。在实验温度场测量中 [28]，，热斑似乎会在扫描路径起始处逐渐开启，即温度扰动的振幅逐渐增大；类似地，在扫描路径末端，温度扰动似乎也会逐渐关闭。在这些实验中，其原因是激光偏转器在大角度下的效率降低；然而，更一般地说，对于任何有限扫描路径，热斑的振幅都必须在扫描路径起点从零增大，并在终点减小至零，即振幅必须随时间变化。

速度场的第一个贡献，$A'(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}(x-t,y)$，与热斑振幅的变化率成正比。因此，速度场$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}(x-t,y)$与热斑的开启有关。更具体地说，式（32）指出，流动贡献$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}$的散度由热斑的形状 Θ决定，即一个热

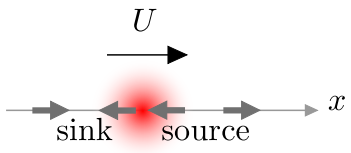


图4. 与热斑平移（即温度扰动）相关的瞬时流场贡献的物理机制示意图 $\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，其阶数为 α，基于文献 [30] 中恒幅热斑的情况。数学模型中由函数 $\Theta(x-t,\ y)$ 指定的热斑形状（以红色表示）沿 x 正方向平移。在热斑前方，热斑正在到达，因此局部温度升高，$\partial\Theta/\partial t>0$，产生一个流体动力源。在后方，热斑正在离开，因此相反地 $\partial\Theta/\partial t<0$，形成一个汇。

源。从物理上看，热斑开启时会导致局部流体体积增加，即发生热膨胀。质量守恒，因此必须有流体从热斑向外流出。由此我们预期，瞬时流动$\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{S})}$,在远场呈现二维源流，其空间衰减形式为 $1/r$，其中 r 是到热斑中心的距离。

请注意，实验测量表明，在对热斑进行多次扫描的过程中，远场中的示踪粒子平均速度反而按照 $1/r^2$ 衰减 [34]。因此，有必要区分热斑在一次扫描期间诱导的瞬时流体速度场（本节重点讨论的对象）与流体中示踪粒子（或物质点）的时间平均速度。我们强调，现有实验数据 [28, 30, 34] 涉及的是多次扫描过程中示踪粒子的平均速度，而不是瞬时流体流动。

速度场的第二个贡献，$A(t)\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,\ y)$，与热斑本身的振幅成正比；即使热斑的振幅恒定，它也不为零。这里我们说明流动$\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，为何与热斑的平移相关，并针对这一项，借鉴文献 [30] 中的物理机制。速度场$\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，满足方程

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y)=\frac{\partial}{\partial t}\Theta(x-t,y), \tag{38}$$

这里我们回顾一下，热斑形状 Θ 可解释为振幅恒定的热斑。我们在图 4 中示意这一物理机制。在热斑前方，强迫项 $\partial\Theta/\partial t$ 为正，是一个源项，因为平移的热斑正在到达，也就是说，流体局部正在升温。在热斑后方，强迫项$\partial\Theta/\partial t$ 为负，是一个汇项，因为热斑正在离开，也就是说，流体局部正在冷却。因此，根据这一机制，我们预期速度场 $\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，在远场表现为流体动力学源偶极子，其衰减形式为$1/r^2$。

本文给出的完整流动$\mathbf{u}^{1,0,}$ 建立在早期研究 [30] 的基础上。早期研究聚焦于沿无限扫描路径平移的恒幅热斑。对于这种情况，根据参考文献 [30], 中的机制，前方的源和后方的汇表明，远场瞬时流动的主阶项是一个源偶极子，其衰减形式为 $1/r^2$。这与我们理论中的平移贡献相一致。然而，对于一般的、热斑振幅随时间变化的情况，我们的理论预测与恒幅机制之间存在重要差异。我们的理论预测，振幅的时间变化通常会产生完整瞬时流动主阶项的远场，其衰减形式为 $1/r$，而不是 $1/r^2$ 特殊恒幅情况下纯粹由热斑平移导致的标度关系。我们在第II F4节中明确展示了高斯热斑的这些结果，并在第II F6节中确认了远场行为。

我们注意到，瞬时流动的主阶项的物理机制并不依赖热黏度变化（其大小由热黏度系数 β 量化）；这反映出首阶流动仅由热膨胀所致。

最后，我们观察到，由方程（$\mathbf{u}^{1,0,}$ 35）给出的速度场与热斑振幅 $A(t)$ 呈线性关系。为了从物理角度解释这种数学对称性，我们考虑局部冷却而非加热的情况。未来的实验或许可以这样实现：对一个大区域进行均匀加热，只留一个局部斑点不加热，即形成一个“冷”斑点（相对而言）。根据我们的理论，如果存在一个冷斑 $[A(t)\le 0]$ 而不是一个

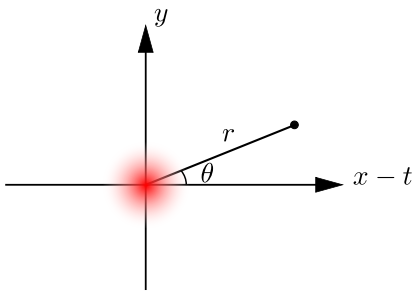


图 5. 极坐标系，原点与时间 t 时的热斑中心重合。

热斑，那么 α 阶的瞬时流动方向相反。这与上文所述的机制一致。

3. *Pressure field*

上文讨论了一般热斑所诱导的瞬时流动主阶项的物理机制。为从数学上验证这一直觉，我们现在聚焦于方程（18）中的特定高斯热斑，即形状函数为 $\Theta(x,\ y) = \exp[-(x^2+y^2)/2]$ 的方程（30），并显式求解方程（28），得到 α 阶的压力 $p_{1,\ 0}$。

高斯热斑具有圆对称性，因此我们引入平面极坐标（r，θ），其原点位于时间 t 时的热斑中心（图 5），定义如下：

$$x - t = r\cos\theta, \tag{39}$$

$$y = r\sin\theta. \tag{40}$$

如第 IIF1 节所述，我们首先求解方程（32），得到与热斑振幅时间变化相关的压力场 $p_{1\ 0}^{(\mathrm{S})}$。由于强迫项具有圆对称性，我们选取具有相同对称性的试探形式 $p_{1\ ,\ 0}^{(\mathrm{S})} = p_{1\ 0}^{(\mathrm{S})}(r)$。于是泊松方程可简化为常微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_{1,0}^{(\mathrm{S})}}{\partial r}\right) = -\exp(-r^2/2). \tag{41}$$

对其积分，并施加解在热斑中心处非奇异的边界条件。由此得到压力 $p_{1\ 0}^{(\mathrm{S})}$ 为

$$p_{1,0}^{(\mathrm{S})}(r) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{E}_1(r^2/2) - \ln r, \tag{42}$$

其中，指数积分 E_1 定义为

$$\mathrm{E}_1(z) \equiv \int_z^\infty \frac{\exp(-s)}{s}\,ds. \tag{43}$$

因此，由式（33）可得 α 阶下的完整压力场 $p_{1,\ 0}$：

$$p_{1,0}(x,y,t) = A'(t)p_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) + A(t)p_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y), \tag{44}$$

其中，压力 $p_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y)$ 为

$$p_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y) = \frac{(x-t)[1-\exp(-r^2/2)]}{r^2}. \tag{45}$$

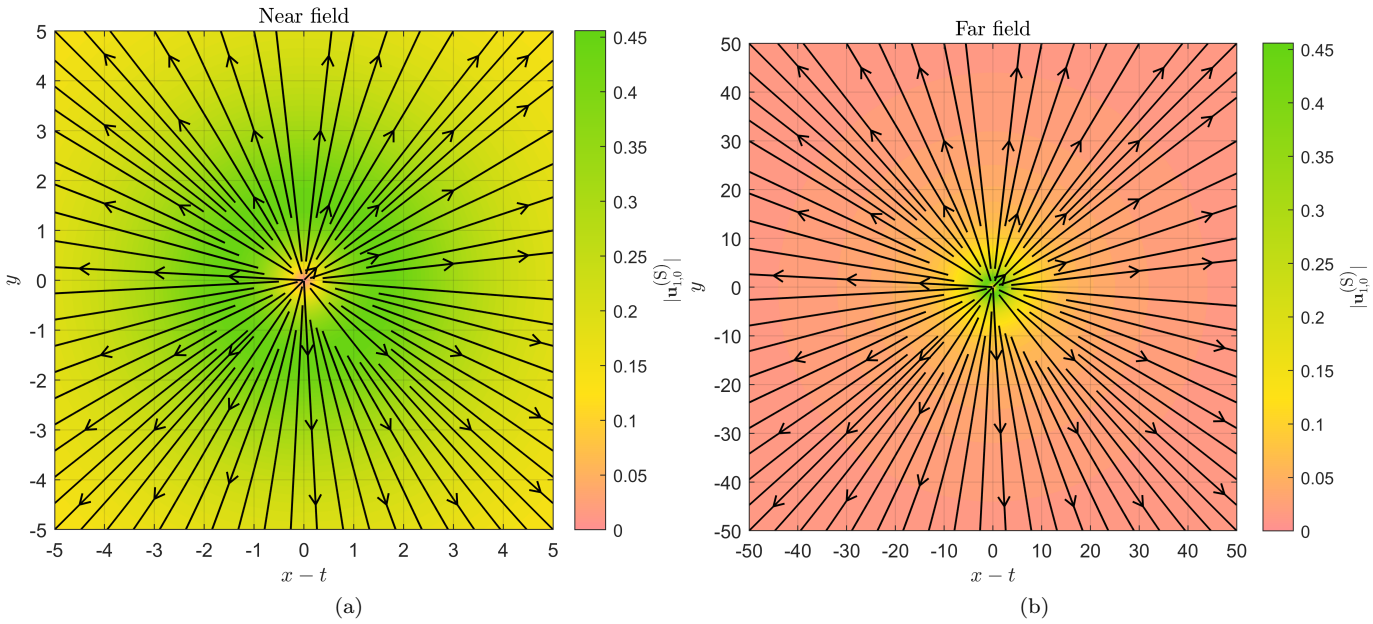


图6. 流场的流线$\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,\ y)$ [如式（35）所示，对应于与热斑振幅时间变化相关的 α] 阶瞬时流动。左图（图6a）：热斑附近（近场）的流线，$-5 \le x-t,\ y \le 5$，速度场的幅值 $|\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{S})}(x-t,\ y)|$ 以颜色表示。右图（图6b）：流线 $-50 \le x-t,\ y \le 50$ 用于展示远场行为。

4. *Velocity field: $\mathbf{u}_{1,0}^{(S)}$ term associated with time-variation of heat-spot amplitude*

相应的 α [完整瞬时速度场（35式，为方便起见重复如下] 为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{1,0}(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial t}[A(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y)] \\ &\equiv A'(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) + A(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y),\end{aligned} \tag{46}$$

其中，根据式（36）和式（37），两个起作用的无旋速度场为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) =& \frac{(x-t)[1-\exp(-r^2/2)]}{r^2}\mathbf{e}_x + \frac{y[1-\exp(-r^2/2)]}{r^2}\mathbf{e}_y \\ \equiv& \frac{1-\exp(-r^2/2)}{r}\mathbf{e}_r,\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y) =& -\mathbf{e}_x\left\{\frac{1}{r^2} - \frac{2(x-t)^2}{r^4} + \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{2(x-t)^2}{r^4} + \frac{(x-t)^2}{r^2}\right]\exp(-r^2/2)\right\} \\ & -\mathbf{e}_y\left\{-\frac{2(x-t)y}{r^4} + \left[\frac{2(x-t)y}{r^4} + \frac{(x-t)y}{r^2}\right]\exp(-r^2/2)\right\}.\end{aligned} \tag{48}$$

上述内容中，$\mathbf{e}_x$ 和$\mathbf{e}_y$ 分别是沿 x 和 y 方向的单位向量；$\mathbf{e}_r \equiv \frac{x-t}{r}\mathbf{e}_x + \frac{y}{r}\mathbf{e}_y$ 是径向单位向量（从热斑中心指向外）。这是两个独立流动的线性叠加，正如第II F 2节中从物理角度所作的解释：$A'(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,\ y)$与热斑振幅的时间变化（“启动”和“关闭”）有关，而 $A(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,\ y)$则与热斑平移有关。现在我们来考察流场$\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}$，和$\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}$。

我们在图中展示流场$\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}$，见图6，近场见图6a，远场见图6b。（请注意，长度尺度以 a为单位，它是高斯温度分布的特征半径。）流动是纯

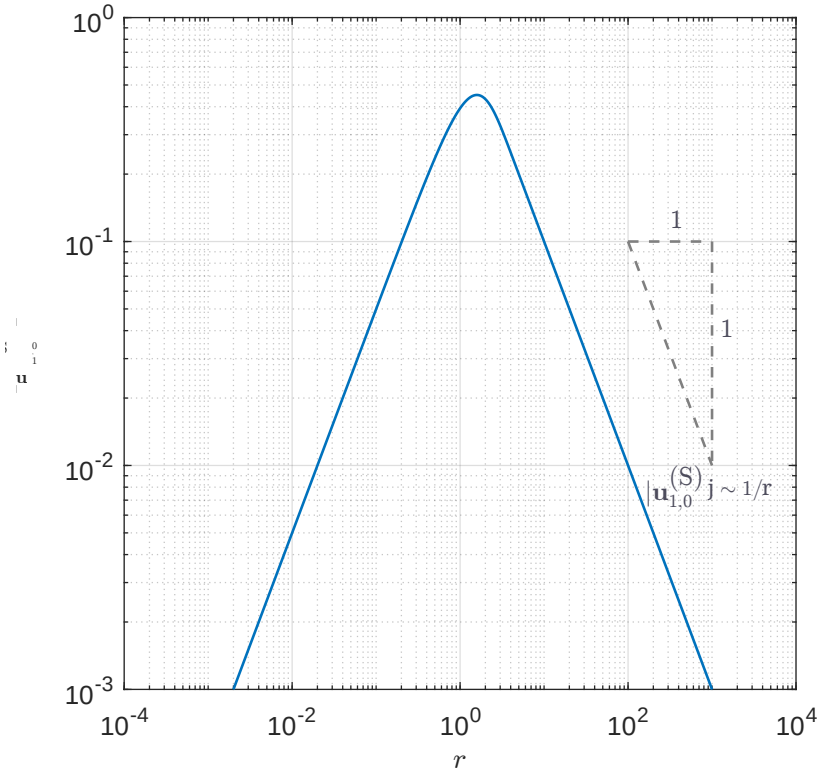


图7. 流场在阶 α 下的幅值，与热斑振幅的时间变化相关，$|\mathbf{u}_1^{(S)}{}_{,0}|$ [方程（49)], 随到热斑中心的径向距离 r 变化，图中采用双对数坐标。该流动是一个正则化源：在热斑中心处为零，而其远场行为为 $|\mathbf{u}_1^{(S)}{}_{,0}| \sim 1/r$。

径向的，继承了对称性　　热斑的对称性。其幅值在图中以双对数坐标表示7，由下式给出　　y

$$|\mathbf{u}_{1,0}^{(S)}| = \frac{1-\exp(-r^2/2)}{r}. \tag{49}$$

在热斑中心处，该流动为零，因此我们得到点源所产生流动的正则化版本。在远场中，我们有

$$\mathbf{u}_{1,0}^{(S)}(x-t,y) \sim \frac{(x-t)}{r^2}\mathbf{e}_x + \frac{y}{r^2}\mathbf{e}_y \equiv \frac{1}{r}\mathbf{e}_r. \tag{50}$$

这是一个以热斑为中心的源流，符合我们对物理机制的预期（第IIF 2节）。相应地，该流动的幅值按 $|\mathbf{u}_1^{(S)}{}_{,0}| \sim 1/r$衰减。

5. *Velocity field: $\mathbf{u}_{1,0}^{(T)}$ term associated with translation of the heat spot*

我们在图 8 中展示了与热斑平移相关的流场 $\mathbf{u}_{1\,0}^{(T)}$,：图 8a 给出了近场中的流线图，图 8b给出了远场中的流线图。其幅值 $|\mathbf{u}_{1\,0}^{(T)}|$,为

$$|\mathbf{u}_{1,0}^{(T)}| = \frac{1}{r^2}\{[(1+r^2)\exp(-r^2/2)-1]^2 + r^2\exp(-r^2)[2\exp(r^2/2)-(2+r^2)]\sin^2\theta\}^{1/2}, \tag{51}$$

在任意固定半径 r 下，它是 $\sin^2\theta$ 的递增函数。幅值 $|\mathbf{u}_1^{(T)}{}_{,0}|$ 如图 9 所示，该图为速度 $|\mathbf{u}_1^{(T)}{}_{,0}|$ 随半径 r 变化的双对数图，沿径向线 $\theta = 0$、$\pi/8$、$\pi/4$、$3\pi/8$ 和 $\pi/2$ 绘制。

这些图支持了第 $\mathbf{u}_{1\,0}^{(T)}$, 节中提出的这种流动的物理机制：IIF 2。从图 8a 中可以看到，右侧是一个源，热斑正在到达这里，因此流体正在升温；左侧则是一个汇，热斑正在离开，因此流体

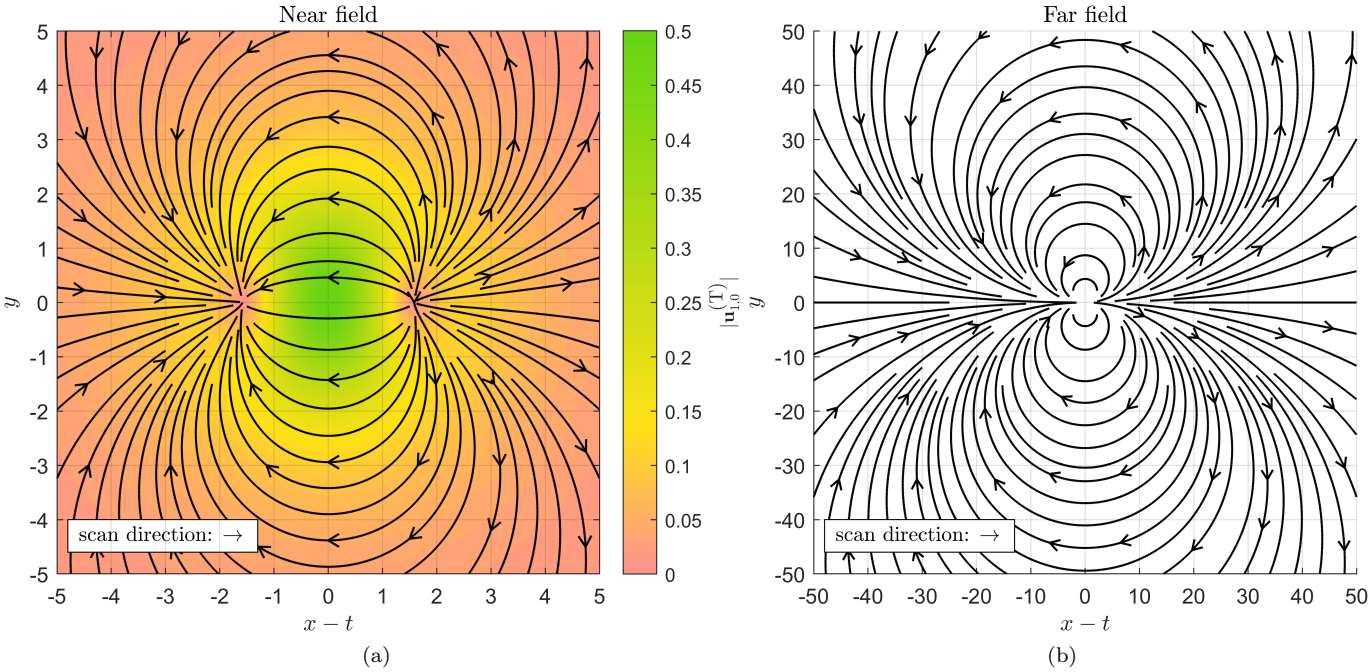


图8。速度场的流线 $\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，（$x-t$，$y$）[，如式（35）所示，表示与热斑沿正 α] 方向（扫描方向）平移相关的 x 阶瞬时流动。左图（图8a）：热斑附近（近场）的 $-5 \le x-t$，$y \le 5$流线，速度场的幅值 $|\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,\,0}|$ 以颜色表示。右图（图8b）：$-50 \le x-t$，$y \le 50$ 用于展示远场行为。

正在冷却。与这一机制相符，我们通过数学推导表明，流动 $\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y)$ 的远场是一个流体动力学源偶极子，其表达式为

$$\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y) \sim -\left\{\mathbf{e}_x\left[\frac{1}{r^2}-\frac{2(x-t)^2}{r^4}\right]+\mathbf{e}_y\left[-\frac{2(x-t)y}{r^4}\right]\right\}, \tag{52}$$

其幅值按 $|\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,\,0}| \sim 1/r^2$ 衰减。

6. *Far-field behaviour*

提醒一下，α 阶的完整瞬时速度场 $\mathbf{u}^{1,0}$ 是由线性叠加 [给出的，如式（46）所示；对于一般的振幅函数 $A(t)$]，它由流动 $\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{S})}{}_{,0}$ [式（47）] 和 $\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,0}$ [式（48）]组成。我们已经看到，$\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{S})}$ 的远场是源流 [式（50）]，，其按 $1/r$ 衰减；而 $\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ 的远场是源偶极子 [式（52）]，，其按 $1/r^2$衰减。因此，只要 $A'(t) \neq 0$，α 阶的完整瞬时流动 $\mathbf{u}^{1,0}$ 的远场为

$$\mathbf{u}_{1,0}(x,y,t) \sim \frac{A'(t)}{r}\mathbf{e}_r, \tag{53}$$

即一种源流，与热斑振幅的变化率成正比，并随空间距离增大而按 $1/r$ 衰减。这种流动的贡献大于热斑平移所产生的贡献，因而说明了热斑振幅的时间依赖性在我们的模型中的重要性。例如，对于正弦振幅函数，这正是相关的行为，我们将在本节后文中加以说明。

在热斑振幅函数相对于时间 [保持静止的时刻 t，即处于局部最大值或最小值时，$A'(t)=0$]，瞬时流动 $\mathbf{u}^{1,0}$ 的远场行为则由下式给出

$$\mathbf{u}_{1,0}(x,y,t) \sim -A(t)\left\{\mathbf{e}_x\left[\frac{1}{r^2}-\frac{2(x-t)^2}{r^4}\right]+\mathbf{e}_y\left[-\frac{2(x-t)y}{r^4}\right]\right\}, \tag{54}$$

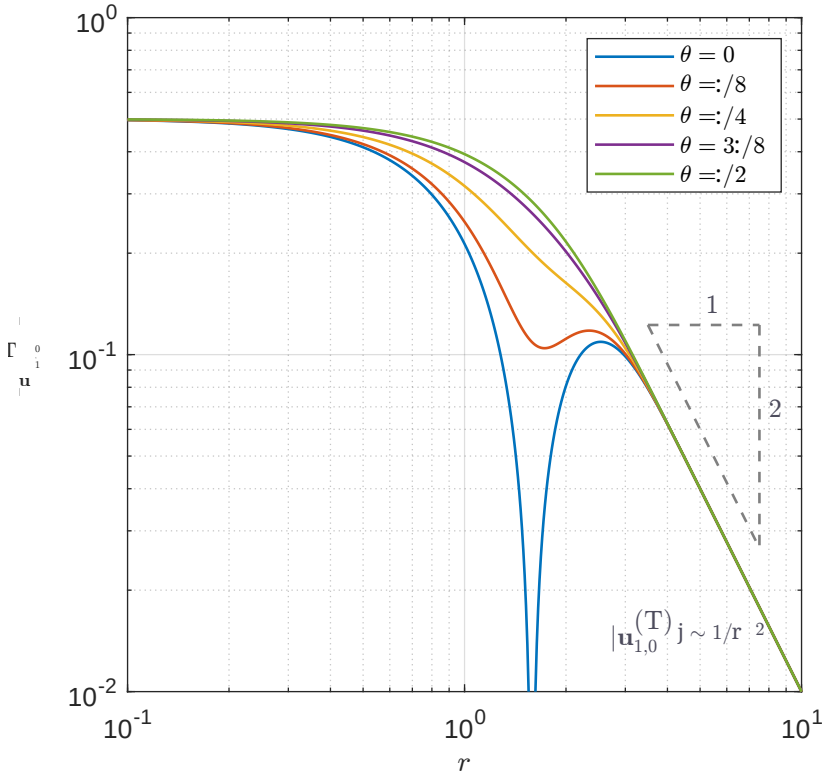


图 9. 阶 α 热斑平移所对应的流场幅值 $|\mathbf{u}_1^{(\mathrm{T})}{}_{,0}|$ [式（51)], $\mathbf{u}_1^{(\mathrm{T})}{}_{,0}| \sim 1/r^2$相对于热斑中心的径向距离 r，在双对数坐标上绘制，适用于 $\theta = 0$、$\pi/8$、$\pi/4$、$3\pi/8$ 和 $\pi/2$。远场行为由下式给出：|。

它是一个流体动力学源偶极子，与热斑的振幅成正比，且随空间距离按$1/r^2$ 衰减（因此比前一种情况衰减得慢）。例如，当热斑在大部分扫描周期内（远离扫描路径两端、尚未开启或关闭时）保持某个最大振幅，或者如先前的理论建模 [30], 所示，热斑振幅恒定不变且扫描路径无限长时，这一点便具有相关性。

7. *Full velocity field*

在目前的研究中，我们一直允许振幅函数 $A(t)$ 具有完全一般的形式。为了展示给定时间 $\mathbf{u}^{1,0}(x, y, t)$ 下 α 阶的完整瞬时速度场，t [本节中的方程（46）、（47）和（48）] 需要选取一个特定的振幅函数 $A(t)$。

遵照参考文献 [28], ，我们选取正弦振幅函数 $A(t)$，其定义为

$$A(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t}{2t_0}\right), \tag{55}$$

适用于 $-t_0 \le t \le t_0$，其中 $t_0 = \ell$ 是无量纲形式下扫描周期的一半。对于该振幅函数[方程（55）] 以及 $t_0 = 1.375$ （为匹配实验 [34]），我们在图$\mathbf{u}^{1,0}$ 所示的 α 阶速度场瞬时流线中，10 展示了扫描周期前半段内的变化。热斑中心以红点标示。扫描周期后半段的流线可由对称性得到。

正如预期，在扫描周期开始附近（例如，$t = -1.375$ 和 $t = -0.275$对应的图板），当热斑的振幅较小且正在增大时，瞬时流动主要由贡献 $A'(t)\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{S})}{}_{,}(x - t,\ y)$ 主导，

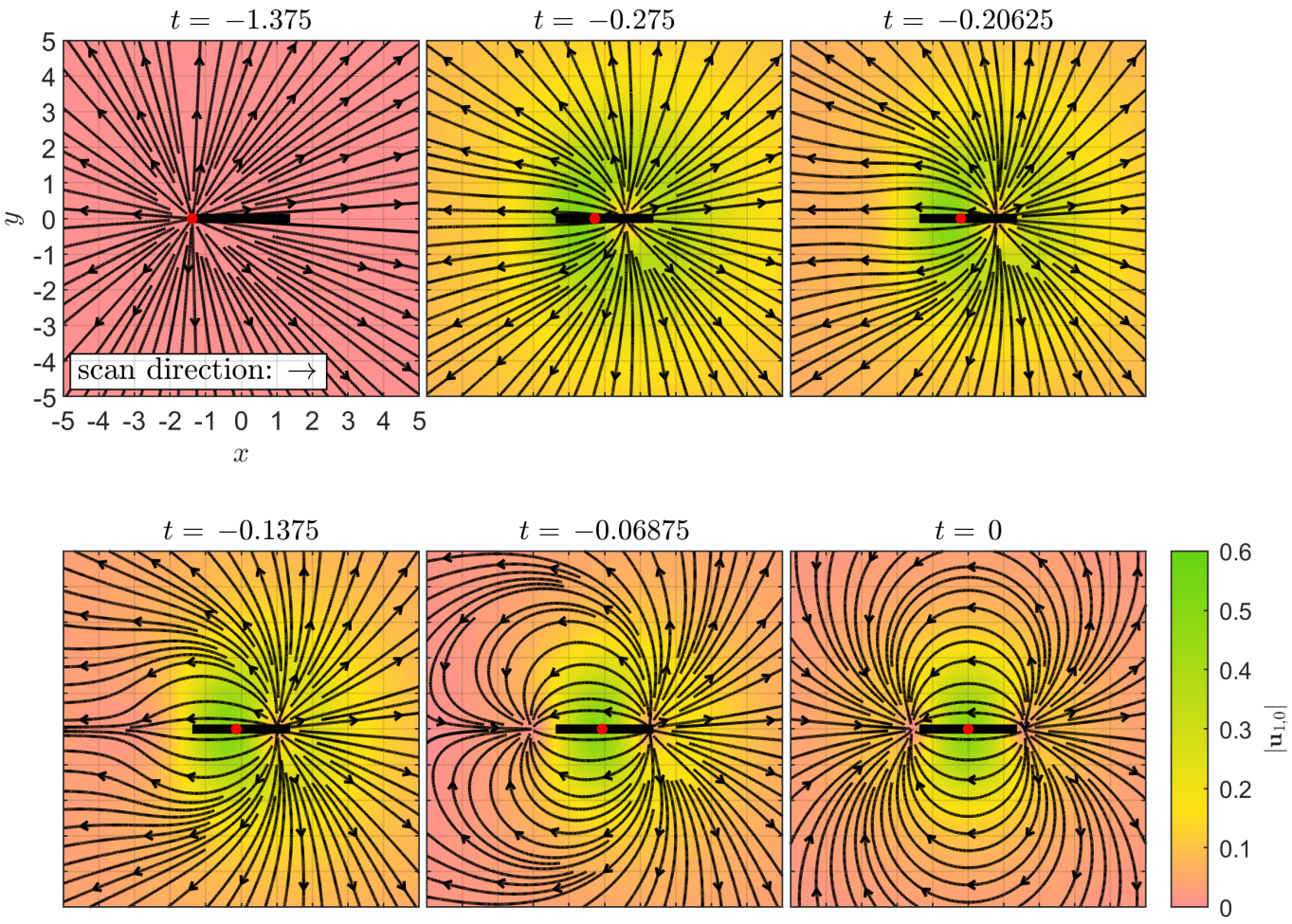


图10. 在半个扫描周期 ^{1,0} 内，首阶 α瞬时流体速度场$\mathbf{u}^{1,0}$ 在不同时刻的流线快照， $-t_0 \le t \le 0$，其中 $t_0 = 1.375$ ，正弦振幅函数由方程（55）给出。热斑沿 x 正方向平移。热斑中心以红点标出，扫描路径则以粗黑色线段表示。

该贡献与热斑振幅的时间变化有关。热斑正在启动，从而产生源流。

在 $t = 0$ （扫描周期进行到一半）这一时刻，热斑的振幅达到最大值，流动中没有开启贡献。此时瞬时流动仅由与热斑平移相关的贡献$A(t)\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}(x - t,\ y)$给出，前方为源，后方为汇。

对于方程（55）中选取的正弦振幅函数，热斑开启和关闭所经历的特征时间尺度与扫描周期相同，这与参考文献 [28]中的实验和数值模拟一致。除 $t = -t_0$、 $t = 0$和 $t = t_0$之外，振幅变化率均不为零。因此，对于这一正弦振幅函数，我们预测，瞬时流场通常由远场中的源汇流主导，其衰减形式为 $1/r$，而非由流体动力学源偶极子（按 $1/r^2$ 衰减）主导。

显然，也可以采用其他振幅函数。在热黏性流动的其他应用中，热斑也可以先快速开启，然后在大部分扫描周期内以恒定振幅移动，最后快速关闭

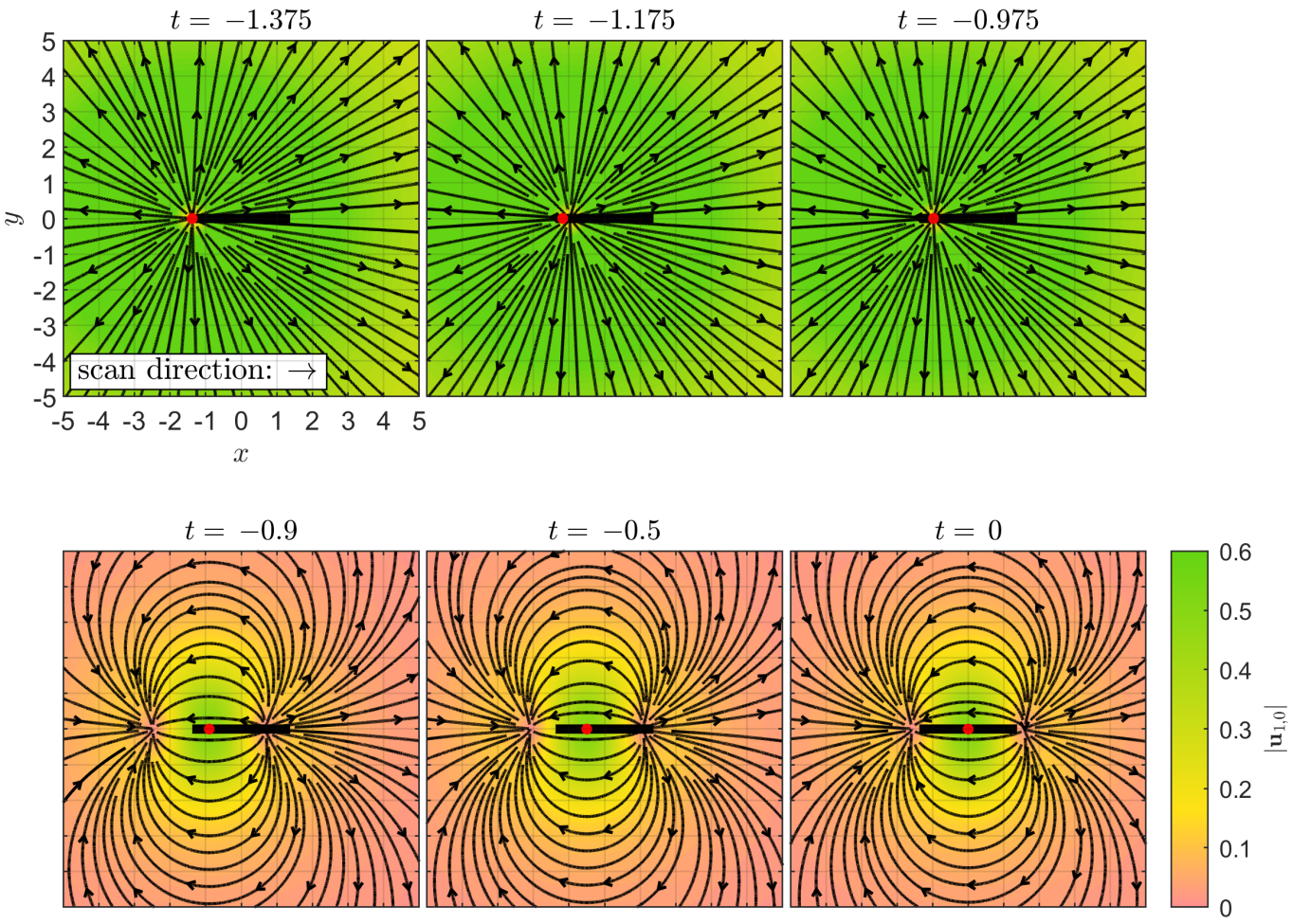


图11。与图10 相同，但采用梯形热斑振幅函数代替正弦函数，展示热斑快速开启和关闭、且振幅在大部分扫描周期内保持恒定的情况。展示了半个扫描周期内$\mathbf{u}^{1,0}$ 在 α阶（即首阶）时的瞬时流体速度场流线快照， $-t_0 \le t \le 0$，其中 $t_0 = 1.375$ 和梯形振幅函数由式（56）给出，开启时间为$t_s = 0.4$。热斑沿 x 正方向平移。热斑中心以红点标出，扫描路径则以粗黑色线段表示。

。这种“梯形”振幅函数的一个示例如下

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_s}(t + t_0), & \text{if } -t_0 \le t \le -t_0 + t_s, \\ 1, & \text{if } -t_0 + t_s \le t \le t_0 - t_s, \\ -\frac{1}{t_s}(t - t_0), & \text{if } t_0 - t_s \le t \le t_0, \end{cases} \tag{56}$$

其中 t_s 是“开启”时间，在此期间振幅从 0 变为 1，或反之。极限 $t_s \to 0$对应于这样一种热斑：它在扫描路径起点快速开启时近似保持静止，随后以恒定振幅平移至扫描路径终点，并在那里关闭。对于这一振幅函数，我们在图 **11**（情形 $t_s = 0.4$）中展示了扫描周期前半段、阶 α 的流体速度瞬时流线$\mathbf{u}^{1,0}$ 。在这种情况下，在扫描周期的大部分时间里，瞬时流场在远场呈源偶极子形式。值得指出的是，尽管振幅在扫描周期的大部分时间里保持恒定，但热斑在扫描路径两端开启和关闭这一事实，对于解释示踪粒子最终产生的净位移至关重要。

G. αβ阶的解

在第IIF节中，我们求得了任意振幅、高斯形状热斑所产生的瞬时流动主阶项（阶 α）。现在我们继续讨论流场 [方程（24）],微扰展开中的二次项，因为这些项会产生示踪粒子的主阶净位移（第 IV节），与实验结果一致。

如第 IIE 节所述， $\alpha\beta$ 阶体现了热黏度变化的首个效应，因为 β阶和 β^2 阶的流动为零。此外，对于参考文献 [34] 中的实验所采用的特定流体（甘油-水溶液），我们将在第 V 节将理论与之进行比较，其热黏度系数 β 远大于热膨胀系数 α。因此，本节从 $\alpha\beta$阶开始；下一节将研究 α^2 阶的流动（对于其他液体而言，这一阶可能很重要）。方程（81）和（82）的关键结果是，给出了热斑诱导的 $\alpha\beta$ 阶瞬时流动的显式解析公式；我们在图 12 中绘出流线，并在第 IIG6 节解释该流动的物理机制。

1. *General heat spot*

由方程（ $\alpha\beta$）阶的压力泊松方程，根据式（25）可写为

$$\begin{aligned}\nabla^2 p_{1,1} &= -\nabla\cdot(\Delta T\,\nabla p_{1,0})\\ &= \nabla\cdot(\Delta T\,\mathbf{u}_{1,0}),\end{aligned} \tag{57}$$

其中，我们利用了 β 阶压力为零这一结果来简化方程，并利用 式 (16) 在 α 阶的形式，将强迫项写成 α 阶速度场的函数。式 (57) 的结果适用于任意温度分布 $\Delta T(x,y,t)$，并表明 $\alpha\beta$ 阶流动是不可压缩的。

与第 IIF 1 节一样，我们现在考虑由式 (30) 给出的一般热斑，为方便起见，现将其重述如下，

$$\Delta T(x,y,t) = A(t)\Theta(x-t,y), \tag{58}$$

其中， $A(t)$ 为振幅函数，而 $\Theta(x-t,y)$ 为形状函数，在随热斑平移的参考系中保持稳态。回顾一下，在 α 阶，我们将速度场 $\mathbf{u}_{1,0}$ [式 (35)] 分解为两个贡献项：一个源于热斑振幅的时间变化，另一个源于热斑平移。由于式 (57) 对 $p_{1,1}$ 在 $\alpha\beta$ 阶的压力是线性的，我们也可以将 $p_{1,1}$ 分解为

$$p_{1,1}(x,y,t) = A(t)A'(t)p_{1,1}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) + A(t)^2 p_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y), \tag{59}$$

其中，两个贡献压力场 $p_{1\,1}^{(\mathrm{S})},(x-t,y)$ 和 $p_{1\,1}^{(\mathrm{T})},(x-t,y)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 p_{1,1}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) = \nabla\cdot[\Theta(x-t,y)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y)], \tag{60}$$

$$\nabla^2 p_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y) = \nabla\cdot[\Theta(x-t,y)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y)], \tag{61}$$

分别。根据方程（ $\alpha\beta$，在 16）中，阶速度场为

$$\mathbf{u}_{1,1} = -\nabla p_{1,1} + \Delta T\,\mathbf{u}_{1,0}, \tag{62}$$

可将其分解为

$$\mathbf{u}_{1,1}(x,y,t) = A(t)A'(t)\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) + A(t)^2\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y), \tag{63}$$

其中

$$\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) = -\nabla p_{1,1}^{(\mathrm{S})}(x-t,y) + \Theta(x-t,y)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(x-t,y), \tag{64}$$

$$\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y) = -\nabla p_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y) + \Theta(x-t,y)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y). \tag{65}$$

2. Pressure field $p_{1\,1}^{(S)}$, velocity field $\mathbf{u}_{1\,1}^{(S)}$, and physical mechanism associated with time-variation of heat-spot amplitude for heat spot with circular symmetry

现在，我们专门研究具有圆对称性的热斑情形，$\Theta(x-t,\ y)=\Theta(r)$。在本节中，我们求解式（60）以得到与热斑振幅的时间变化相对应的 $p_{1\,1}^{(\mathrm{S})}$ 压力，其阶为 $\alpha\beta$；随后推导出相应的速度场$\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{S})}$，为零。

对于具有圆对称性的热斑，压力场的泊松方程 $p_{1\,0}^{(\mathrm{S})}$，在 α [阶的 α [式（32）]的强迫项和边界条件均具有圆对称性，因此解 $p_{1\,0}^{(\mathrm{S})}$，以及速度场$\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{S})}$，也具有相同的对称性。因此，在 $\alpha\beta$阶，式（60）中的强迫项具有圆对称性，解出的压力也继承这一对称性，$p_{1}^{(\mathrm{S})}{}_{,\,1}=p_{1\,1}^{(\mathrm{S})}{}_{,}(r)$。因此，泊松方程 [式（60）] 是关于 r 的常微分方程，形式如下

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_{1,1}^{(\mathrm{S})}}{\partial r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Theta\frac{\partial p_{1,0}^{(\mathrm{S})}}{\partial r}\right). \tag{66}$$

对其积分可得

$$\frac{\partial p_{1,1}^{(\mathrm{S})}}{\partial r}=-\Theta\frac{\partial p_{1,0}^{(\mathrm{S})}}{\partial r}, \tag{67}$$

其中，我们将积分常数设为零，因为速度在热斑中心处不存在奇异性。注意到，用矢量形式表示，这简单地就是

$$\nabla p_{1,1}^{(\mathrm{S})}=\Theta\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}. \tag{68}$$

再次积分可得压力场 $p_{1\,1}^{(\mathrm{S})}$，在 $\alpha\beta$ 阶、与热斑振幅的时间变化相关的项为

$$p_{1,1}^{(\mathrm{S})}(r)=\int_{r}^{\infty}\Theta(\tilde{r})\frac{\partial p_{1,0}^{(\mathrm{S})}(\tilde{r})}{\partial\tilde{r}}\,d\tilde{r}, \tag{69}$$

其中，我们选择了积分常数，使得该压力在无穷远处衰减。

由此以及式（64），我们推 deduce 相应的速度场 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{S})}$，在 $\alpha\beta$ 阶、与热斑振幅的时间变化相关的项为

$$\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{S})}=\mathbf{0}. \tag{70}$$

利用这一结果，我们现在可以简化式（63）得到

$$\mathbf{u}_{1,1}(x,y,t)=A(t)^{2}\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y). \tag{71}$$

换言之，$\alpha\beta$ 阶的流动与热斑平移所对应的流动成正比；振幅 $A'(t)$ 的变化率并未出现在这一表达式中。对于任何具有圆对称性的热斑（扫描速度足够慢时的相关情形），这一结论都成立。

现在，我们可以推广并从物理角度解释这一结果：对于任何具有圆对称性的热斑，$\alpha\beta$阶速度场中都不存在“开启”贡献。具体而言，在热斑具有圆对称性的同一假设下，我们证明，热斑振幅 $A'(t)$ 的变化率实际上仅对 $m\geq 0$ 时的 α^{m} 阶流动有贡献；热斑开启所对应的流动完全源自热膨胀。因此，由热膨胀与热黏度变化耦合引起的任何流动都与热斑振幅的变化率无关；相反，它们取决于热斑振幅本身的瞬时值。

代入密度与温度之间的关系 [式（19）] 到质量守恒 [式（17）], 可得

$$-\alpha\left[A'(t)\Theta(r)-\frac{A(t)\Theta'(r)(x-t)}{r}\right]+\nabla\cdot[\rho(r,t)\mathbf{u}]=0, \tag{72}$$

其中，撇号（′）表示对自变量求导。我们引入与热斑开启相关的速度场 $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$，其满足

$$-\alpha A'(t)\Theta(r) + \nabla \cdot [\rho(r,t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}] = 0, \tag{73}$$

满足以下边界条件：$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$ 在热斑中心处无奇异性，且在无穷远处衰减。换言之，根据线性性，完整速度场$\mathbf{u}$ 中任何涉及振幅变化率$A'(t)$的贡献项，都包含在开启速度中。

此时，我们注意到问题具有圆对称性，并预计解也具有这一性质。采用试探形式$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})} = u^{(\mathrm{S})}(r,t)\mathbf{e}_r$，方程变为

$$-\alpha A'(t)\Theta(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\rho(r,t)u^{(\mathrm{S})}(r,t)] = 0. \tag{74}$$

对式 (74) 积分并利用边界条件，可得开启速度场

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}(r,t) = \frac{\alpha A'(t)}{r\rho(r,t)}\int_0^r \tilde{r}\Theta(\tilde{r})\,d\tilde{r}\,\mathbf{e}_r. \tag{75}$$

这是关于热斑振幅变化率 $A'(t)$ 的线性函数。

重要的是，这只取决于热膨胀系数 α，而不取决于热黏度系数 β。这是因为，为了求得此处的流动$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$，我们无需使用动量方程。温度分布的圆对称性使密度场和黏度场也具有圆对称性。因此，我们仅凭质量守恒就能求得流动$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$；如此得到的流动也满足动量方程，并对应一个同样具有圆对称性的压力场 $p^{(\mathrm{S})}$。

此外，请注意，解 $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$ 对所有 α 和 β 均有效；它不依赖于极限 $\alpha, \beta \ll 1$。为了与微扰展开所得结果进行比较，我们对小 α 下的$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$ 进行展开，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(\mathrm{S})} &= \frac{\alpha A'(t)}{r}\sum_{k=0}^{\infty}[\alpha A(t)\Theta(r)]^k\int_0^r \tilde{r}\Theta(\tilde{r})\,d\tilde{r}\,\mathbf{e}_r \\ &\equiv \alpha A'(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})} + \alpha^2 A'(t)A(t)\mathbf{u}_{2,0}^{(\mathrm{S})} + O(\alpha^3),\end{aligned} \tag{76}$$

这里我们加入了 $A(t)$ 和 $A'(t)$ 的因子，以使记号与前文保持一致。特别地，在 α 阶，我们得到

$$\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})} = \frac{1}{r}\int_0^r \tilde{r}\Theta(\tilde{r})\,d\tilde{r}\,\mathbf{e}_r, \tag{77}$$

在 α^2 阶，我们得到

$$\mathbf{u}_{2,0}^{(\mathrm{S})} = \frac{\Theta(r)}{r}\int_0^r \tilde{r}\Theta(\tilde{r})\,d\tilde{r}\,\mathbf{e}_r. \tag{78}$$

对于高斯温度分布 $\Theta(r) = \exp(-r^2/2)$，这恢复了式（47）中 α 阶的结果；当我们考虑第 α^2 节中的 IIH 时，这也与式（96）中的结果一致。

3. *Pressure field*

在得到更一般温度分布的结果后，我们现在聚焦于式（18）中的特定高斯温度分布。根据流动 $\mathbf{u}^{1,1}$ 在 $\alpha\beta$ 阶时的式（71），我们只需找到与热斑平移相关的速度场 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$，。为此，本节将求解式（61），以确定相应的压力场 $p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$，。

将式（48）代入式（61），泊松方程在极坐标下可写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_{1,1}^{(\mathrm{T})}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p_{1,1}^{(\mathrm{T})}}{\partial\theta^2}=\cos\theta\left[2r\exp(-r^2)-\frac{\exp(-r^2/2)}{r}+\frac{\exp(-r^2)}{r}\right]. \tag{79}$$

例如，可以通过分离变量法和降阶法求解。与热斑平移相关的 $\alpha\beta$ 阶压力 $p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$，可表示为

$$p_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y)=(x-t)\left[-\frac{1}{4r^2}-\frac{1}{2r^2}\exp(-r^2/2)+\frac{3}{4r^2}\exp(-r^2)+\frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2/2)-\frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2)\right], \tag{80}$$

这里回顾一下，E_1 是指数积分 [，定义见式（43）]。

4. *Velocity field*

由式（65）、（80）和（48）可得，与热斑平移相关的速度场$\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$，可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y)=\mathbf{e}_x\Bigg\{&\frac{1}{4r^2}-\frac{(x-t)^2}{2r^4}+\left[-\frac{1}{2r^2}+\frac{(x-t)^2}{r^4}\right]\exp(-r^2/2)\\&+\left[\frac{1}{4r^2}-\frac{(x-t)^2}{2r^4}\right]\exp(-r^2)-\frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2/2)+\frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2)\Bigg\}\\&+\mathbf{e}_y\left[-\frac{(x-t)y}{2r^4}+\frac{(x-t)y}{r^4}\exp(-r^2/2)-\frac{(x-t)y}{2r^4}\exp(-r^2)\right].\end{aligned} \tag{81}$$

阶的完整瞬时流$\mathbf{u}^{1,1}$ 可由式（ $\alpha\beta$ **71**）给出，为方便起见，此处重列如下：

$$\mathbf{u}_{1,1}(x,y,t)=A(t)^2\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y). \tag{82}$$

图$\mathbf{u}^{1,1}$ 在 $\alpha\beta$ 阶时的流线绘于图12。为量化空间变化，我们在双对数坐标上绘出缩放后的幅值 $|\mathbf{u}_{1,\ 1}|/A(t)^2=|\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,\ 1}|$ 随半径 r变化的曲线，其中角度固定为 $\theta=0,\ \ \pi/8,\ \ \pi/4,\ 3\pi/8$和 $\pi/2$，见图13。该幅值为

$$\begin{aligned}\frac{|\mathbf{u}_{1,1}|}{A(t)^2}=|\mathbf{u}_{1,1}^{(\mathrm{T})}|=\frac{1}{4r^2}\{&[1-2\exp(-r^2/2)+\exp(-r^2)-r^2\,\mathrm{E}_1(r^2/2)+r^2\,\mathrm{E}_1(r^2)]^2\\&+4r^2[1-\exp(-r^2/2)]^2[\mathrm{E}_1(r^2/2)-\mathrm{E}_1(r^2)]\cos^2\theta\}^{1/2},\end{aligned} \tag{83}$$

它会随着角度 θ 从 0 增大到 $\pi/2$而减小。

当我们在第 V 节将这一瞬时流动的某些性质与我们的理论和实验进行比较时，这些性质会很重要。首先，$\alpha\beta$ 阶的流动与振幅的平方成正比，这与 α 阶的瞬时流动不同，后者与热斑振幅成正比。其次，与 α 阶不同，这种流动是不可压缩的。流动中没有源或汇。相反，流线形成闭合回路，在 x 轴上速度向左（即与热斑平移方向相反），而在远离 x 轴处速度向右。

5. *Far-field behaviour*

在远场，$\alpha\beta$ 阶的瞬时流动 $\mathbf{u}^{1,1}$ 是一个源偶极子，其表达式为

$$\mathbf{u}_{1,1}\sim\frac{1}{4}A(t)^2\left\{\mathbf{e}_x\left[\frac{1}{r^2}-\frac{2(x-t)^2}{r^4}\right]+\mathbf{e}_y\left[-\frac{2(x-t)y}{r^4}\right]\right\}, \tag{84}$$

其幅值随距离衰减为 $|\mathbf{u}_{1,\ 1}|\sim A(t)^2/4r^2$。

该 $1/r^2$ 流动在 $\alpha\beta$ 阶下的衰减快于 $1/r$ 源流的衰减，后者通常 [在 $A'(t)\neq 0$]阶下主导瞬时流动远场的首阶项，即 α阶。然而，在第III节、第IV节和第V节中，我们将说明，示踪粒子的首阶平均速度继承了瞬时流动在 $\alpha\beta$阶下的关键特征。

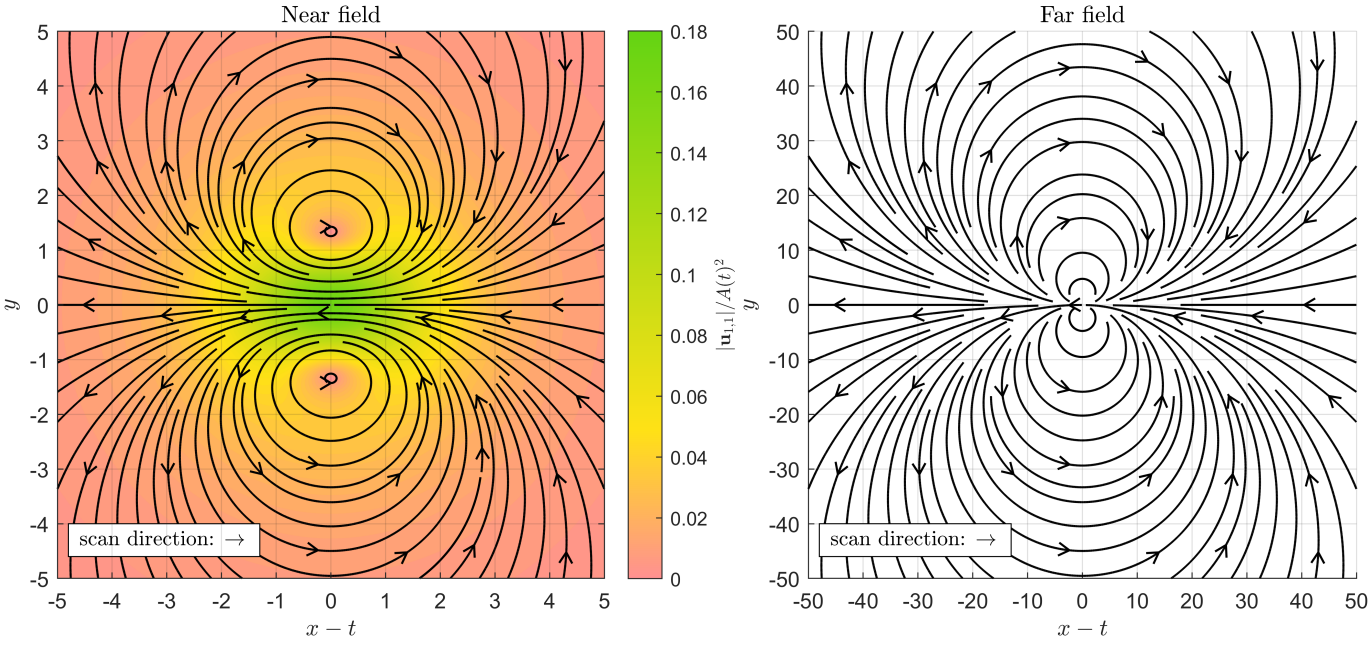


图12。流动 $\mathbf{u}^{1,1}$ 在 $\alpha\beta$阶时的流线，其中包含黏度随温度的变化所产生的第一阶效应。热斑沿正 x 方向（扫描方向）平移。左图（图 12a）： $-5 \leq x-t$的流线， $y \leq 5$靠近热斑（近场）。速度场的幅值除以振幅的平方，即 $|\mathbf{u}_{1,\,1}|/A(t)^2 = |\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}|$. 通过颜色表示。右图（图 12b）： $-50 \leq x-t$的流线， $y \leq 50$ 用于展示远场行为。

6. *Physical mechanism*

现在，我们为瞬时流场$\mathbf{u}^{1,1}$ 在 $\alpha\beta$阶下的解析结果背后的物理机制提出一种解释，即热黏度变化产生的首个效应。提醒一下，我们已经在第 $A'(t)A(t)\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{S})}$,节中考察了与 $\alpha\beta$阶下热斑振幅的时间变化相关的贡献，该节为IIG 2。我们发现，这一贡献实际上为零，$\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{S})}{}_{,1} = \mathbf{0}$，并从物理角度给出了解释：对于具有圆对称性的热斑，启动产生的流动完全由热膨胀和质量守恒引起，与黏度无关。因此，流动$\mathbf{u}^{1,1}$ 与贡献$\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$,成正比，该贡献 [式（71）]与热斑的平移相关。

回顾方程（65）可知，速度场 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ 是两项之和：势流 $-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ ，以及与热斑平移相关、并受热斑形状调制的 α 阶速度场，即 $\Theta\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ 。这两个独立流动的流线绘于图*14*中，其中 $-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ 见图 14a ， $\Theta\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ 见图 14b。我们可以解释流场 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ 中各个贡献的物理来源，以及它们如何在 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ 的远场中产生流体动力学源偶极子、流体流动的环流方向，并最终导致完整流动 $\mathbf{u}^{1,1}$ 在 $\alpha\beta$ 阶时随热斑振幅呈二次标度关系。

我们在图 15 中展示了热黏度变化与热膨胀之间的相互作用。我们可以将 $\alpha\beta$ 阶流动的物理机制简要概括如下。热斑放大了与热斑平移相关的首阶流动（ α阶）。然而，为了确保 $\alpha\beta$阶完整流动不可压缩，必须在此基础上叠加第二种流动，以补偿放大效应所带来的可压缩性。

具体而言，首先，我们关注修正后的首阶流动项， $\Theta\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ ，（图14b）。我们以先前的研究为基础， [29, 30] 该研究关注 x 轴上的流动。首先，回顾第IIF 节中首阶流动（阶数为 α）背后的物理机制，该流动与热斑平移相关，完全由热膨胀引起。如图4所示。考虑热斑向右平移时 x 轴上的流动：热斑到达时，由于加热，右侧出现一个源；热斑离开时，由于冷却，左侧出现一个

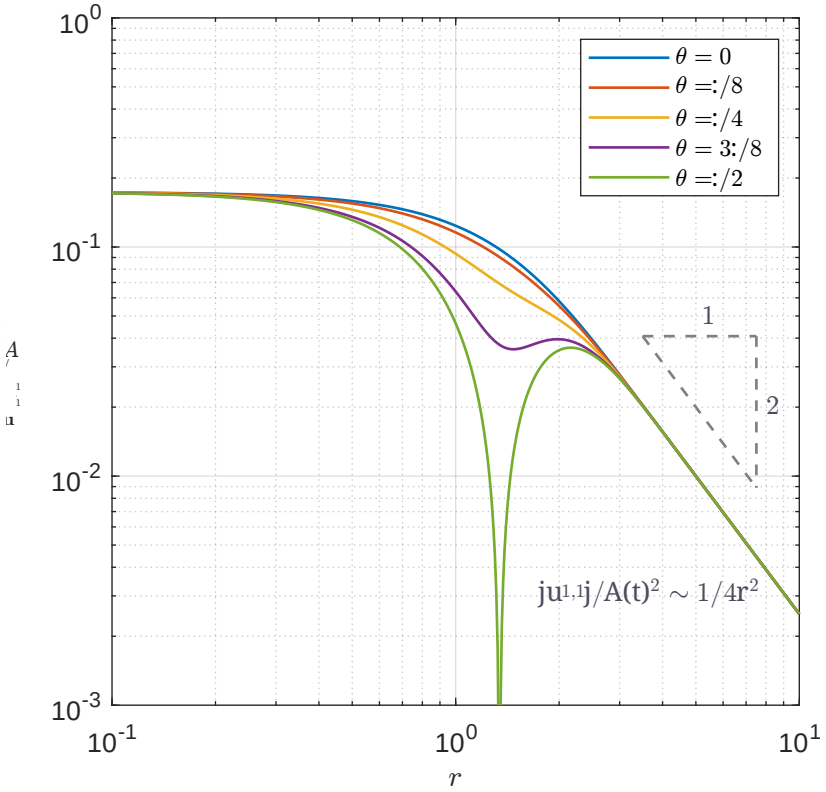


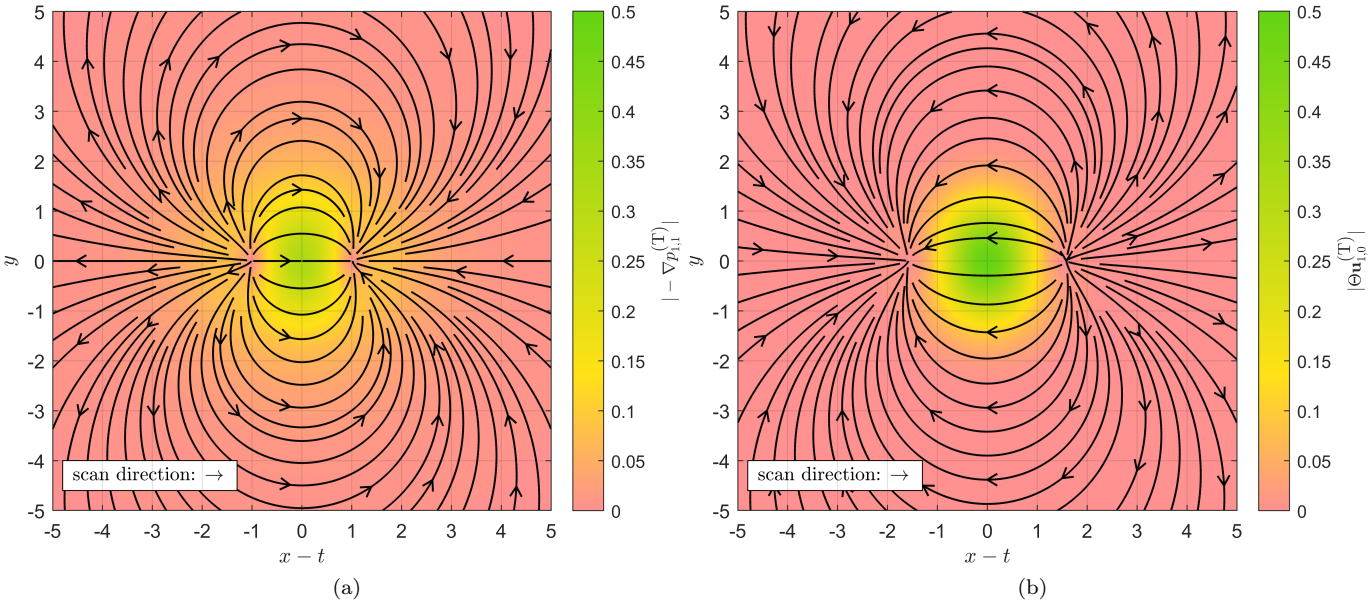
图13. 阶$\alpha\beta$ 速度场， $|\mathbf{u}_{1,\ 1}|/A(t)^2 = |\mathbf{u}_1^{(\mathrm{T})}{}_{,\ 1}|$ [方程（83)], 相对于热斑中心的径向距离 r， 以双对数坐标绘制，适用于 $\theta = 0$、$\pi/8$、 $\pi/4$、 $3\pi/8$ 和 $\pi/2$。远场行为为$|\mathbf{u}_{1,\ 1}|/A(t)^2 \sim 1/4r^2$。

汇。因此，热斑附近的流动方向朝左，即从源流向汇；而这两个驻点外、沿 x 轴的流动方向朝右。阶数为 α 的这一流动未考虑任何热黏度变化；它将黏度视为恒定的参考值。

现在我们可以利用这一流动$\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 来解释流动$\mathbf{u}_{1\ 1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 中的贡献 $\Theta\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$。加热会使流体的黏度在局部降低 [式（20）]，偏离参考值；这一变化可通过热斑形状函数 $\Theta(x - t,\ y)$ [式（30）]进行量化。因此，给定的压力梯度能够驱动更大的流动 [式（16）]；换言之，局部降低的黏度会放大与热斑平移（在 α 阶）相关的首阶流动$\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$。这种放大是热黏度变化的首阶效应，由热黏度系数 β 描述，并发生在 $\alpha\beta$ 阶。根据我们的理论，这一 $\alpha\beta$ 阶的放大修正为 $\Theta\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$；由于其继承了局部温度扰动的局部化特征，并呈指数衰减，因此高度局限于热斑附近。因此，主要被放大的是热斑附近向左的流动，而不是更远处向右的流动；在后者区域，温度和黏度扰动都呈指数级微小。

然而，上文解释的项 $\Theta\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 不可能是与 $\alpha\beta$ 阶热斑平移相关的完整速度场 $\mathbf{u}_{1\ 1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$。这是因为放大修正流 $\Theta\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 是可压缩的；图 14b 中的流线清楚地显示，右侧有一个源，左侧有一个汇。另一方面， $\alpha\beta$ 阶的总流动 $\mathbf{u}_{1\ 1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 是不可压缩的。我们通过解析方法发现，流动 $\mathbf{u}_{1\ 1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 在 x 轴上处处向左（图12），而放大修正流 $\Theta\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 仅在近场向左流动，这是从 $\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 继承而来的。 $\Theta\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 的这两个物理特征表明， $\alpha\beta$ 阶的流动 $\mathbf{u}_{1\ 1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 必然还存在另一个贡献。这就是势流 ,， 它在数学上源自平行板几何。

该势流 $-\nabla p_1^{(\mathrm{T})}$ $_{,1}$ （图 14a）确保速度场$\mathbf{u}_{1\ 1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$在 $\alpha\beta$ 阶时满足不可压缩性。该



(a) (b)

图14。构成阶 $\alpha\beta$速度场 $\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,1} = -\nabla p_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,1} + \Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ 的两个项的流线，它们对应于热斑沿正 x 方向（扫描方向）的平移。每个速度场的幅值以颜色表示。左图（图14a）：势流 $-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}(x-t,y)$ 在 $-5 \le x-t, y \le 5$下的流线。势流在远场呈代数衰减，而流动 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ 呈指数衰减，因此在阶 $\alpha\beta$的流动 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ 的远场中，势流占主导。右图（图14b）：与热斑平移相关的首阶流动的流线，该流动受热斑形状 $\Theta(x-t,y)\,\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，$(x-t,y)$ 调制，适用于 $-5 \le x-t, y \le 5$。包络函数 Θ 使远离热斑处的幅值呈指数衰减。因而，流动 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ 对阶 $\alpha\beta$ 速度场 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ 的贡献主要局限于近场。在近场中，流动 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$ 的幅值大于势流 $-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$，从而产生了流动 $\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}$ 近场中所见的向左流动。

因此，势流的散度必须恰好抵消放大修正流 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$的散度，其数学表达式为

$$\nabla \cdot (-\nabla p_{1,1}^{(\mathrm{T})}) = -\nabla \cdot (\Theta \mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{T})}). \tag{85}$$

这正是我们先前为压力场求解的泊松方程 [方程（61）]。我们在图16b中绘出了左侧项$\nabla\cdot(-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})},)$。红色表示源 $[\nabla\cdot(-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})},) > 0]$；蓝色表示汇 $[\nabla\cdot(-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})},) < 0]$。我们看到左侧存在一个源，用于补偿放大修正流 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，中左侧的汇；右侧存在一个汇，用于补偿 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$，中的源。在图16b近场中远离这些红色和蓝色区域的地方，由于温度分布的衰减，散度呈指数级减小。作为比较，我们还在图16a中绘出了阶 α 下的等效项 $\nabla\cdot(-\nabla p_{1\,0}^{(\mathrm{T})},)$。

在 $\alpha\beta$ 阶，左侧的源和右侧的汇产生了势流 $-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 的远场，即一个流体动力学源偶极子，其按代数衰减。这也正是 $\alpha\beta$ 阶的完整速度场$\mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 的远场，这是由热斑平移引起的，因为放大贡献 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 呈指数衰减。

现在回到不可压缩速度场 $\mathbf{u}_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,\,1} = -\nabla p_{1}^{(\mathrm{T})}{}_{,\,1} + \Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 在 $\alpha\beta$ 阶，如图 12所示。在热斑附近（向右平移），由放大效应引起的向左流动 $\Theta \mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 占主导地位。在远场中，来自势流的流体动力学源偶极子 $-\nabla p_{1\,1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}$ 占主导地位。这些贡献项共同在 x 轴的两侧产生环流。关于热斑扫描导致物质点净位移的讨论，我们将在第 IV 节重新审视这一解释。

最后，我们指出，可以将阶$\alpha\beta$ 流动 $\mathbf{u}^{1,1}(x,\ y,\ t) = A(t)^2 \mathbf{u}_{1\,1}^{(\mathrm{T})}{}_{,}(x-t,\ y)$ 的物理解释调整到冷斑 $[A(t) \mapsto -A(t)]$的情况；该流动与热斑的情况相同，这与热斑

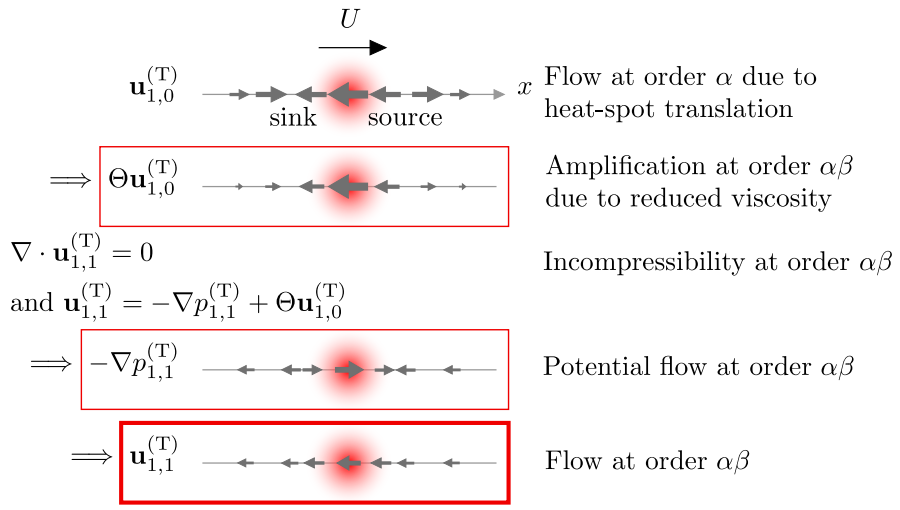


图15. 流动的物理机制示意图 $\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1\,1}$。在 $\alpha\beta$阶时，黏度变化对 x 轴上流动的首阶影响。我们先来看 $\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1\,0}$，它与首阶（即$\alpha$阶）热斑平移所伴随的流动有关，如图 4中的示意图所示。接下来，我们考虑热黏度变化的首个影响，其发生在 $\alpha\beta$ 阶。加热会导致局部黏度降低。直观而言，这会增强热斑中的首阶流动（相较于黏度保持在参考值时的情况），从而对 $\alpha\beta$ 阶流动产生可压缩贡献 $\Theta\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1\,0}$。然而，$\alpha\beta$ 阶流动是不可压缩的，这由与 $\alpha\beta$ 阶热斑平移相关的压力 $p^{(\mathrm{T})}_{1\,1}$ 来保证。这会引入势流 $-\nabla p^{(\mathrm{T})}_{1\,1}$；从数学上说，这是由平行板几何导致的。 $\alpha\beta$ 阶流动 $\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1\,1}$ 是这两种效应——增强和不可压缩性——的结合。

振幅的二次标度关系一致。

H. α^2阶的解

在计算出瞬时流动的主阶项（第 II F 节中的 α 阶）以及热黏度变化的主阶效应（第 II G 节中的 $\alpha\beta$ 阶）后，我们现在转而关注 α^2阶，即另一个二次阶。先前的研究 [30] 着重探讨了 $\alpha\beta$阶热膨胀与热黏度变化之间的相互作用，并忽略了 α^2阶的流动。然而，对于某些流体，热膨胀系数 α 与热黏度系数 β 的幅值 [39]可能相近；因此， α^2 阶的流动幅值可能与 $\alpha\beta$阶的相当。在本节中，为了全面理解任意流体中的二次效应，我们将求解 α^2阶的瞬时流动。其解析公式由式（98）、（99）和（100）给出。图17和图18绘出了 α^2 阶流动的两个独立贡献项的流线，而在第 II H 6 节中，我们将从物理角度解释这种流动。

1. *General heat spot*

阶 α^2 [方程（25）] 给出的压力泊松方程为

$$\begin{aligned}\nabla^2 p_{2,0} &= \nabla\cdot(\Delta T\,\nabla p_{1,0})\\ &= -\nabla\cdot(\Delta T\,\mathbf{u}_{1,0}),\end{aligned}\tag{86}$$

其中我们回顾一下， ΔT 是温度分布（一般形式），而$\mathbf{u}^{1,0}$ 是在 α阶的瞬时流动。重要的是，这个泊松方程与 $\alpha\beta$阶的方程（式（57））几乎完全相同，唯一的区别是相差一个 -1因子。根据线性， α^2 阶的压力$p_{2,\,0}$ 的解因此为

$$p_{2,0}(x,y,t) = -p_{1,1}(x,y,t).\tag{87}$$

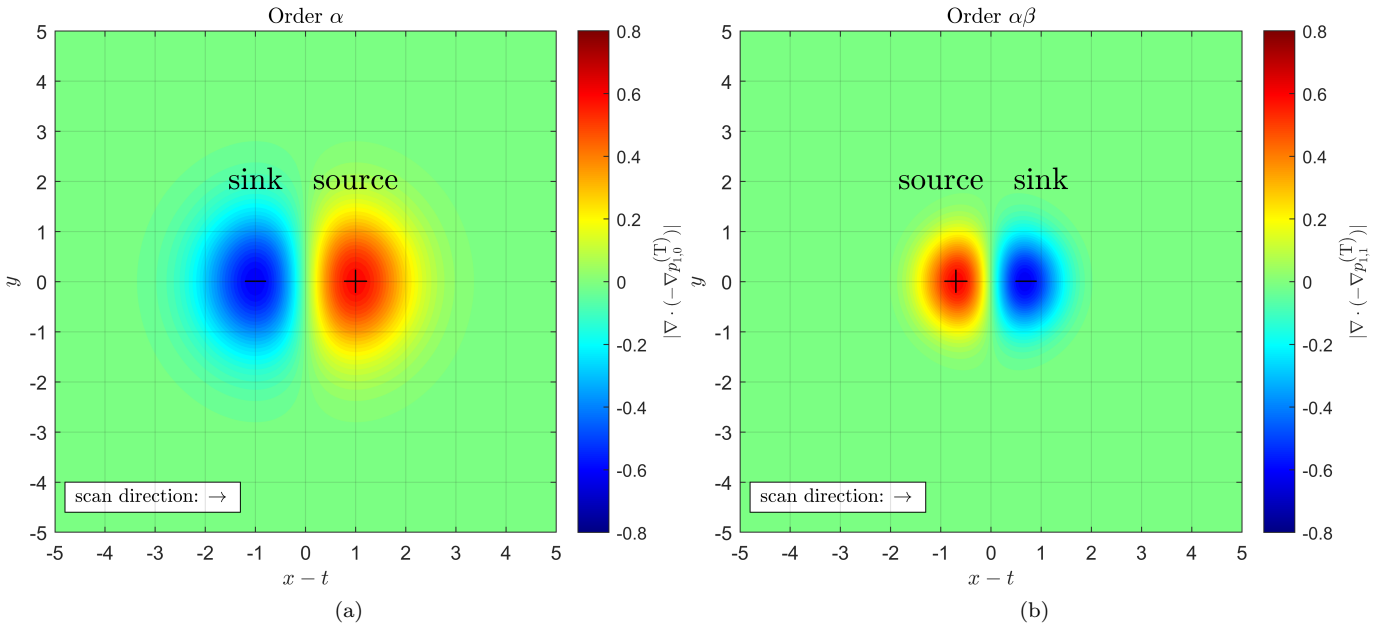


图16. 势流场的散度 $-\nabla p^{(\mathrm{T})}_{1\,0}$，在 α 阶（左）和 $-\nabla p^{(\mathrm{T})}_{1\,1}$，在 $\alpha\beta$ 阶（右）对应于热斑沿正 x 方向（扫描方向）的平移。红色表示源（正散度）；蓝色表示汇（负散度）；绿色表示散度幅值较小。左图（图16a）：$\nabla\cdot(-\nabla p^{(\mathrm{T})}_{1\,0},)$的填充等值线图。右图（图16b）：$\nabla\cdot(-\nabla p^{(\mathrm{T})}_{1\,1},)$的填充等值线图。

对于式（30）中的一般热斑，我们将其分解为

$$p_{2,0}(x,y,t)=A(t)A'(t)p^{(\mathrm{S})}_{2,0}(x-t,y)+A(t)^2p^{(\mathrm{T})}_{2,0}(x-t,y), \tag{88}$$

与式（59）相同。压力场 $p^{(\mathrm{S})}_{2\,0}$，与热斑振幅的时间变化（“启动”）有关。压力场 $p^{(\mathrm{T})}_{2\,0}$，与热斑平移有关。根据式（87），我们可以将 α^2 阶的这些压力与 $\alpha\beta$ 阶的压力关联起来，如下所示

$$p^{(\mathrm{S})}_{2,0}(x-t,y)=-p^{(\mathrm{S})}_{1,1}(x-t,y), \tag{89}$$
$$p^{(\mathrm{T})}_{2,0}(x-t,y)=-p^{(\mathrm{T})}_{1,1}(x-t,y). \tag{90}$$

阶的速度场，由方程（24）给出，是一个势流，表示为

$$\mathbf{u}_{2,0}=-\nabla p_{2,0}. \tag{91}$$

我们将其分解为

$$\mathbf{u}_{2,0}(x,y,t)=A(t)A'(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{2,0}(x-t,y)+A(t)^2\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{2,0}(x-t,y), \tag{92}$$

其中

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{2,0}(x-t,y)=-\nabla p^{(\mathrm{S})}_{2,0}(x-t,y), \tag{93}$$
$$\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{2,0}(x-t,y)=-\nabla p^{(\mathrm{T})}_{2,0}(x-t,y). \tag{94}$$

尽管 α^2 阶和 $\alpha\beta$ 阶的压力场仅相差一个 -1倍数，但速度场在结构上将存在定性差异。这是因为 α^2 阶的瞬时流动纯粹是势流且具有可压缩性，而 $\alpha\beta$ 阶的流动则包含两个独立的贡献项（势流和热斑调制的首阶流动），并且是不可压缩的。

2. *Pressure field $p^{(S)}_{2\,0}$, velocity field $\mathbf{u}^{(S)}_{2\,0}$, and physical mechanism associated with time-variation of heat-spot amplitude for heat spot with circular symmetry*

与第 II G2 节中关于阶 $\alpha\beta$的讨论相同，我们现在专门考虑具有圆对称性的热斑，即形状函数为$\Theta(x-t,y) = \Theta(r)$。根据式（89）和式（69），与热斑振幅的时间变化相关的阶 α^2 压力场 $p^{(\mathrm{S})}_{2\,0}$,为

$$p^{(\mathrm{S})}_{2,0}(r) = -\int_r^\infty \Theta(\tilde{r})\frac{\partial p^{(\mathrm{S})}_{1,0}(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}}\,d\tilde{r}. \tag{95}$$

与第 II G2 节的结果一致，根据式（93）和式（68），相应的速度场为

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{2,0}(r) = \Theta(r)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1,0}(r). \tag{96}$$

这是由热斑形状调制的首阶源状流 $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}$,$(r)$。因此，阶$\alpha^2$ 的流动 $A(t)A'(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{2\,0}$,会在局部增强与热斑振幅增大相关的首阶源状流，$A'(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}$,。从物理上说，加热会使流体局部密度低于其参考值，因此，为满足质量守恒，流速必须增大以作补偿。

3. *Pressure field*

现在，我们基于一般结果，写出式（18）中高斯温度分布对应的压力场。正如我们在前几节所看到的，这是可行的，因为这里的大部分数学推导与第 IIG 节相同。

回顾压力 $p_{2,0}$ 在 α^2 阶时分解为两个贡献项，如式（88）所示。我们已经得到式（95）中与热斑振幅的时间变化相关的压力场 $p^{(\mathrm{S})}_{2\,0}$,。根据式（80）和（90），可以写出与热斑平移相关的压力 $p^{(\mathrm{T})}_{2\,0}$.，其表达式为

$$p^{(\mathrm{T})}_{2,0}(x-t,y) = (x-t)\left[\frac{1}{4r^2} + \frac{1}{2r^2}\exp(-r^2/2) - \frac{3}{4r^2}\exp(-r^2) - \frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2/2) + \frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2)\right]. \tag{97}$$

4. *Velocity field*

α^2 阶的瞬时流动可写为

$$\mathbf{u}_{2,0}(x,y,t) = A(t)A'(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{2,0}(x-t,y) + A(t)^2\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{2,0}(x-t,y), \tag{98}$$

由式（92）给出，为方便起见，这里再次列出。

根据式（96）和（47），与热斑振幅的时间变化相关的 α^2 阶速度场 $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{2\,0}$,为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{2,0}(x-t,y) &= \frac{(x-t)\exp(-r^2/2)[1-\exp(-r^2/2)]}{r^2}\mathbf{e}_x + \frac{y\exp(-r^2/2)[1-\exp(-r^2/2)]}{r^2}\mathbf{e}_y \\ &\equiv \frac{\exp(-r^2/2)[1-\exp(-r^2/2)]}{r}\mathbf{e}_r.\end{aligned} \tag{99}$$

我们在图 17 中绘出了这一纯径向流的流线。这是由热斑形状函数调制的首阶源状流 $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}$，因此其在远场中呈指数衰减，而非代数衰减。

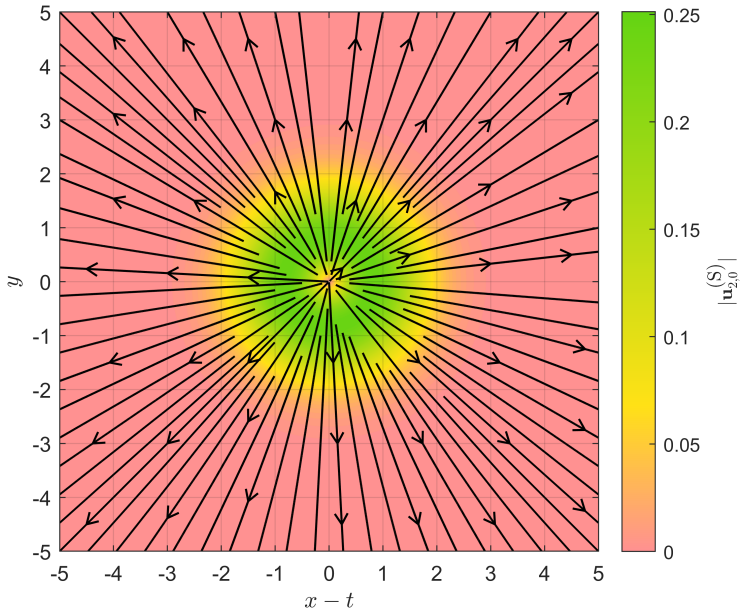


图 17. 速度场$\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{S})}$. $(x-t,\ y)$ [如式（98）所示，对应于热斑振幅时间变化的 α^2] 阶瞬时流动，适用于 $-5 \le x-t,\ y \le 5$; 速度场幅值 $|\mathbf{u}_{2}^{(\mathrm{S})}{}_{,\,0}|$ 以颜色表示。流动在远场呈指数衰减。

根据公式（94）和（97），与热斑平移相关的 α^2 阶速度场$\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{T})}$, 可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{2,0}^{(\mathrm{T})}(x-t,y) = \mathbf{e}_x\Bigg\{ &-\frac{1}{4r^2}+\frac{(x-t)^2}{2r^4}+\left[-\frac{1}{2r^2}+\frac{(x-t)^2}{r^4}\right]\exp(-r^2/2)\\ &+\left[\frac{3}{4r^2}-\frac{3(x-t)^2}{2r^4}-\frac{(x-t)^2}{r^2}\right]\exp(-r^2)+\frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2/2)-\frac{1}{4}\,\mathrm{E}_1(r^2)\Bigg\}\\ +\mathbf{e}_y\Bigg\{ &\frac{(x-t)y}{2r^4}+\frac{(x-t)y}{r^4}\exp(-r^2/2)\\ &+\left[-\frac{3(x-t)y}{2r^4}-\frac{(x-t)y}{r^2}\right]\exp(-r^2)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{100}$$

图 18 展示了流动的流线 $\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{T})}$, 其中近场见图 18a，远场见图 18b。幅值 $|\mathbf{u}_{2}^{(\mathrm{T})}{}_{,\,0}|$ 随半径 r 的变化如图 19 所示，采用双对数坐标，沿径向线$\theta = 0,\ \pi/8,\ \pi/4,\ 3\pi/8$以及 $\pi/2$。

5. *Far-field behaviour*

瞬时流动的远场行为 $\mathbf{u}_{2,0}$ 在 α^2 阶时由下式给出

$$\mathbf{u}_{2,0} \sim -\frac{1}{4}A(t)^2\left\{\mathbf{e}_x\left[\frac{1}{r^2}-\frac{2(x-t)^2}{r^4}\right]+\mathbf{e}_y\left[-\frac{2(x-t)y}{r^4}\right]\right\}, \tag{101}$$

其幅值按 $|\mathbf{u}_{2,0}| \sim A(t)^2/4r^2$ 衰减。这是一个源偶极子，与阶 $\alpha\beta$ 处的流体力学奇点相同，但符号相反。它完全由与热斑平移相关的贡献 $A(t)^2\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{T})}{}_{,}(x-t,y)$ 产生。这是因为与热斑振幅时间变化相关的贡献 $A(t)A'(t)\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{S})}{}_{,}(x-t,y)$ 高度局限于热斑附近，并呈指数衰减。这与瞬时流动的主阶项（阶 α）形成对比：在该情形下，热斑的开启会产生代数衰减（源流），并主导远场。

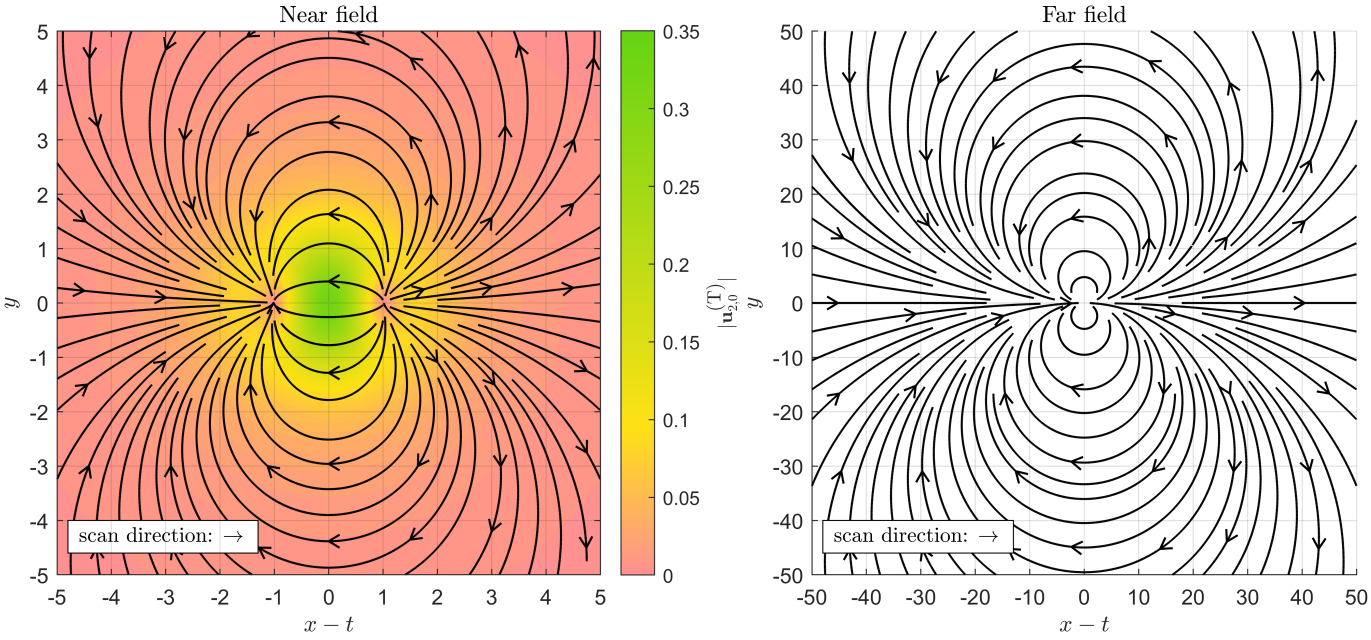


图18。流场 $\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{T})}$。 $(x-t,\ y)$ [如式（92）所示的阶数 α^2]，对应于热斑沿正 x 方向（扫描方向）平移时的瞬时流动。左图（图 18a）：热斑附近（近场）的 $-5 \le x-t,\ y \le 5$流线，速度场的幅值 $|\mathbf{u}_2^{(\mathrm{T})}{}_{\text{以}0}|$ 颜色表示。右图（图 18b）： $-50 \le x-t$的流线， $y \le 50$ 用于展示远场行为。

6. *Physical mechanism*

现在，我们已经解析求得阶 α^2的瞬时流动，因此可以从物理角度解释结果。我们已在第 II H2节解释了与热斑振幅时间变化相关的贡献 $A(t)A'(t)\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{S})}$。现在讨论与热斑平移相关的贡献 $A(t)^2\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{T})}$；其作用机制与第 $\alpha\beta$ 节 II G 6 中阶 的机制相似，但涉及的是密度变化而非黏度变化，体现了两者在数学上的相似性。

如第IIF 2 节所述，并在第II G 6节中再次概述，热斑平移所对应的首阶（阶数 α）瞬时流动 $A(t)\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{T})}$。在热斑附近向左流动。阶数 α^2 所描述的对首阶的修正如下。加热会使局部流体密度低于参考值。因此，为确保质量守恒，流速必须在局部增大，以补偿密度低于首阶理论所计入的密度这一事实。从本质上说，阶数 α^2 的势流强化了热斑引起的首阶流动。

具体而言，在微扰展开中，在 α 阶，质量守恒方程中项 $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})$（质量通量的散度）里的密度 ρ 近似为参考值 ρ_0。 α^2 阶的势流修正源于这样一个事实：在项 $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})$ 中，由于加热，密度 ρ 略低于 ρ_0。与此相反，在 α 阶，热膨胀仅通过质量守恒方程中的密度变化率 $\partial\rho/\partial t$ 驱动流动。

我们可以将其与 $\alpha\beta$ （第IIG节）阶的机制进行比较。在 $\alpha\beta$阶流动中，势流补偿了受温度分布调制的首阶流动的可压缩性。而在这里， α^2 阶流动则是与受温度分布调制的首阶流动具有相同散度的势流。与热斑平移相关的 α^2 阶流动是一种势流，它在热斑前方有一个源，在后方有一个汇，就像相应的首阶流动一样。因此，它会增强

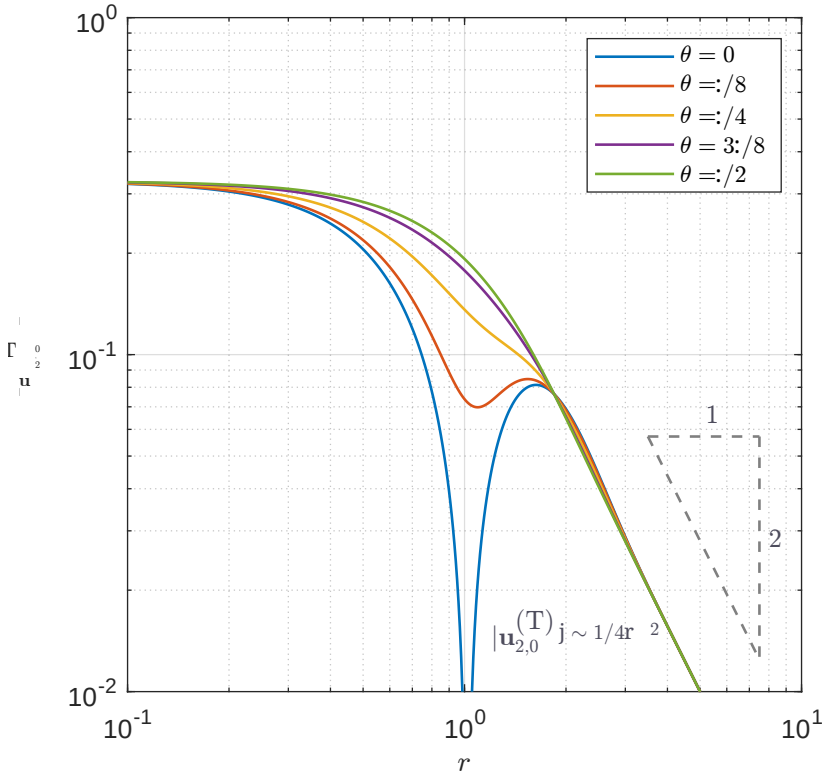


图19. 与热斑平移相关的第 α^2 阶流场幅值，$|\mathbf{u}_{2\ 0}^{(\mathrm{T})}|$.，随至热斑中心的径向距离$r$ 变化的双对数坐标图，适用于 $\theta = 0$、 $\pi/8$、 $\pi/4$、$3\pi/8$和 $\pi/2$。远场行为为 $|\mathbf{u}_{2}^{(\mathrm{T})}{}_{,0}| \sim 1/4r^2$。

热源 di　　与热斑平移相关的首阶流动$\mathbf{u}_{1\ 0}^{(\mathrm{T})}$ 的远场极点　　.

III. 主阶　　一次扫描期间物质点的首阶轨迹

在第II节中，我们求解了平移热斑所诱导的瞬时速度场，其中热斑的振幅可随时间任意变化，并取热膨胀系数 α 和热黏度系数 β较小的极限。这是欧拉视角。在实验中，热斑沿扫描路径反复扫描，由此产生的流动会输运悬浮在流体中的各种物体，包括细胞内的蛋白质 [28] ，或在黏性流体中受控实验所用的示踪微珠 [30, 34]。为理解这种输运，本节首先分析一次扫描期间由瞬时流动的主阶项产生的物质点首阶轨迹。这是拉格朗日视角。我们证明，在 α阶下，任意物质点的净位移都恰为零，因此我们在第IV节求得的主阶净位移出现在更高阶。

A. 物质点的运动方程

我们首先求解一个扫描过程中物质点的轨迹，即当时间从 $t = -t_0$ 到 $t = t_0$ 时，热斑以无量纲速度 1 沿扫描路径从 $x = -\ell$ 移动到 $x = \ell$，其中$t_0 = \ell$ （采用无量纲形式）。考虑一个物质点，其在时间 $t = -t_0$ 的初始位置为 $\mathrm{X}_0 \equiv (X_0, Y_0)$；图20展示了这种记法。在时间 t，其相对于原点的位置向量为 $\mathrm{X}(\mathrm{X}_0; t) \equiv (X(\mathrm{X}_0; t)\ Y(\mathrm{X}_0; t))$，为简便起见，我们将其写作 $\mathrm{X}(t) \equiv (X(t)\ Y(t))$。我们的目标是求出该位置向量随时间变化的函数。在

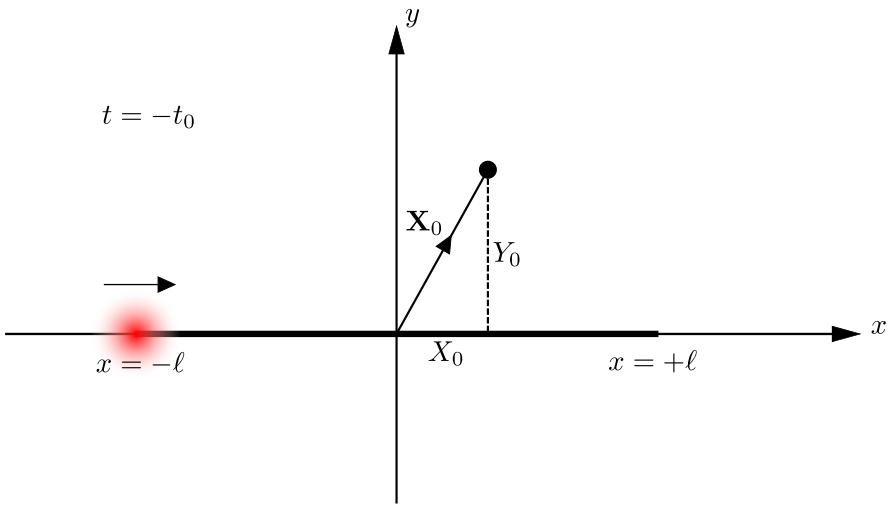


图20. 示意图：热斑位于扫描路径 $x = -\ell$ 起点时，初始位置为$\mathbf{X}_0$ 的物质点，在时间$t = -t_0$的情况。

无噪声的缺　　物质点的运动学由常微分方程控制　　n

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t), \tag{102}$$

也就是说，物质点受热斑诱导的流场$\mathbf{u}$ 输运。对两边积分并应用初始条件，可得等价的积分方程：

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(-t_0) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0 = \int_{-t_0}^{t} \mathbf{u}(\mathbf{X}(\tilde{t}), \tilde{t})\, d\tilde{t}, \tag{103}$$

其中，左边表示热斑位于扫描路径左端点 $x = -\ell$时，物质点相对于其在 $t = -t_0$的初始位置的位移。

B. 微扰展开

位置向量$\mathbf{X}(t)$ 在方程（103）两边均出现。为进一步进行解析推导，我们将位移向量表示为微扰展开： $\Delta\mathbf{X}(t)$ $\equiv (\Delta X(t)\ \Delta Y(t))$ $\equiv \mathbf{X}(t)$ $- \mathbf{X}_0$ 为

$$\Delta\mathbf{X}(t) = \alpha\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t) + \alpha^2\Delta\mathbf{X}_{2,0}(t) + \alpha\beta\Delta\mathbf{X}_{1,1}(t) + \text{cubic and higher-order terms}, \tag{104}$$

其中， $\Delta\mathbf{X}_{m,n}(t)$ $\equiv (\Delta X_{m,n}(t)\Delta Y_{m,n}(t))$ 表示物质点在时间 t 相对于位置 $\mathbf{X}_0$ 处的 $\alpha^m\beta^n$ 阶位移。这里，我们将 $\Delta\mathbf{X}(t)$ 记作 $\Delta\mathbf{X}(\mathbf{X}_0; t)$，为简洁起见，省略了记号中对初始位置的依赖，正如对位置向量 $\mathbf{X}(t)$ 所做的那样。在上述讨论中，我们预期位移将具有与速度场微扰展开相同的结构，因为位移是速度对时间的积分。

利用这一点，我们还可以将物质点在初始位置$\mathbf{X}_0$, 附近、位置为$\mathbf{X}(t)$处的速度场展开为

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) =& \mathbf{u}(\mathbf{X}_0 + \alpha\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t) + \text{h.o.t.}, t) \\
=& \alpha\mathbf{u}_{1,0}(\mathbf{X}_0 + \alpha\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t) + \text{h.o.t.}, t) \\
&+ \alpha^2\mathbf{u}_{2,0}(\mathbf{X}_0 + O(\alpha), t) + \alpha\beta\mathbf{u}_{1,1}(\mathbf{X}_0 + O(\alpha), t) + \text{cubic and higher-order terms} \\
=& \alpha\mathbf{u}_{1,0}(\mathbf{X}_0, t) + \alpha^2[\mathbf{u}_{2,0}(\mathbf{X}_0, t) + \Delta\mathbf{X}_{1,0}(t) \cdot \nabla\mathbf{u}_{1,0}(\mathbf{X}_0, t)] \\
&+ \alpha\beta\mathbf{u}_{1,1}(\mathbf{X}_0, t) + \text{cubic and higher-order terms}.
\end{aligned} \tag{105}$$

将其代入方程（103），得到

$$\begin{aligned}&\alpha\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t)+\alpha^2\Delta\mathbf{X}_{2,0}(t)+\alpha\beta\Delta\mathbf{X}_{1,1}(t)+\text{cubic and higher-order terms}\\=&\alpha\int_{-t_0}^{t}\mathbf{u}_{1,0}(\mathbf{X}_0,\tilde{t})\,d\tilde{t}+\alpha^2\int_{-t_0}^{t}[\mathbf{u}_{2,0}(\mathbf{X}_0,\tilde{t})+\Delta\mathbf{X}_{1,0}(\tilde{t})\cdot\nabla\mathbf{u}_{1,0}(\mathbf{X}_0,\tilde{t})]\,d\tilde{t}+\alpha\beta\int_{-t_0}^{t}\mathbf{u}_{1,1}(\mathbf{X}_0,\tilde{t})\,d\tilde{t}.\end{aligned}\tag{106}$$

我们注意到，在 α 阶（首阶）和 $\alpha\beta$阶时，该位移仅仅是对物质点初始位置处的速度场随时间积分。与此不同，在 α^2 阶时，还会出现一个额外的贡献，它与物质点的α 阶位移有关。

C. Order α

根据方程（106），物质点在 $\Delta\mathbf{X}^{1,0}(t)$ 阶的位移为 α

$$\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t)=\int_{-t_0}^{t}\mathbf{u}_{1,0}(\mathbf{X}_0,\tilde{t})\,d\tilde{t},\tag{107}$$

这里回顾一下，$\mathbf{u}^{1,0}$ 是 α阶的瞬时速度场。一次扫描过程中， $\Delta\mathbf{X}^{1,0}(t)$ 阶的位移 α 通常给出物质点在时间 t处的首阶位移。（在第IIID节中，我们将证明，热斑完成一次完整扫描后，物质点在 α阶的净位移为零。）要计算方程（107）中的积分，回顾方程（35，对于方程（$\mathbf{u}^{1,0}$ ）中的速度场， α 阶速度场是一个与热斑振幅成正比的函数的精确时间导数；这对方程（30）中的一般热斑均成立。因此，对于一般热斑，方程（107）变为

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t)&=\int_{-t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}[A(\tilde{t})\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(X_0-\tilde{t},Y_0)]\,d\tilde{t}\\&=A(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(X_0-t,Y_0)-A(-t_0)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(X_0+t_0,Y_0),\end{aligned}\tag{108}$$

根据微积分基本定理。若扫描路径有限（如实验中的情形），则根据定义，扫描路径两端的热斑振幅为零，因此第二项消失 $[A(-t_0)=0]$。对于无限扫描路径（$t_0\to\infty$），如相关理论研究中所述， [30], 无论热斑振幅如何，第二项都会消失，因为速度场$\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{S})}$，在无穷远处衰减。无论哪种情况，一次扫描过程中 α 阶的位移可简化为

$$\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t)=A(t)\mathbf{u}_{1,0}^{(\mathrm{S})}(X_0-t,Y_0).\tag{109}$$

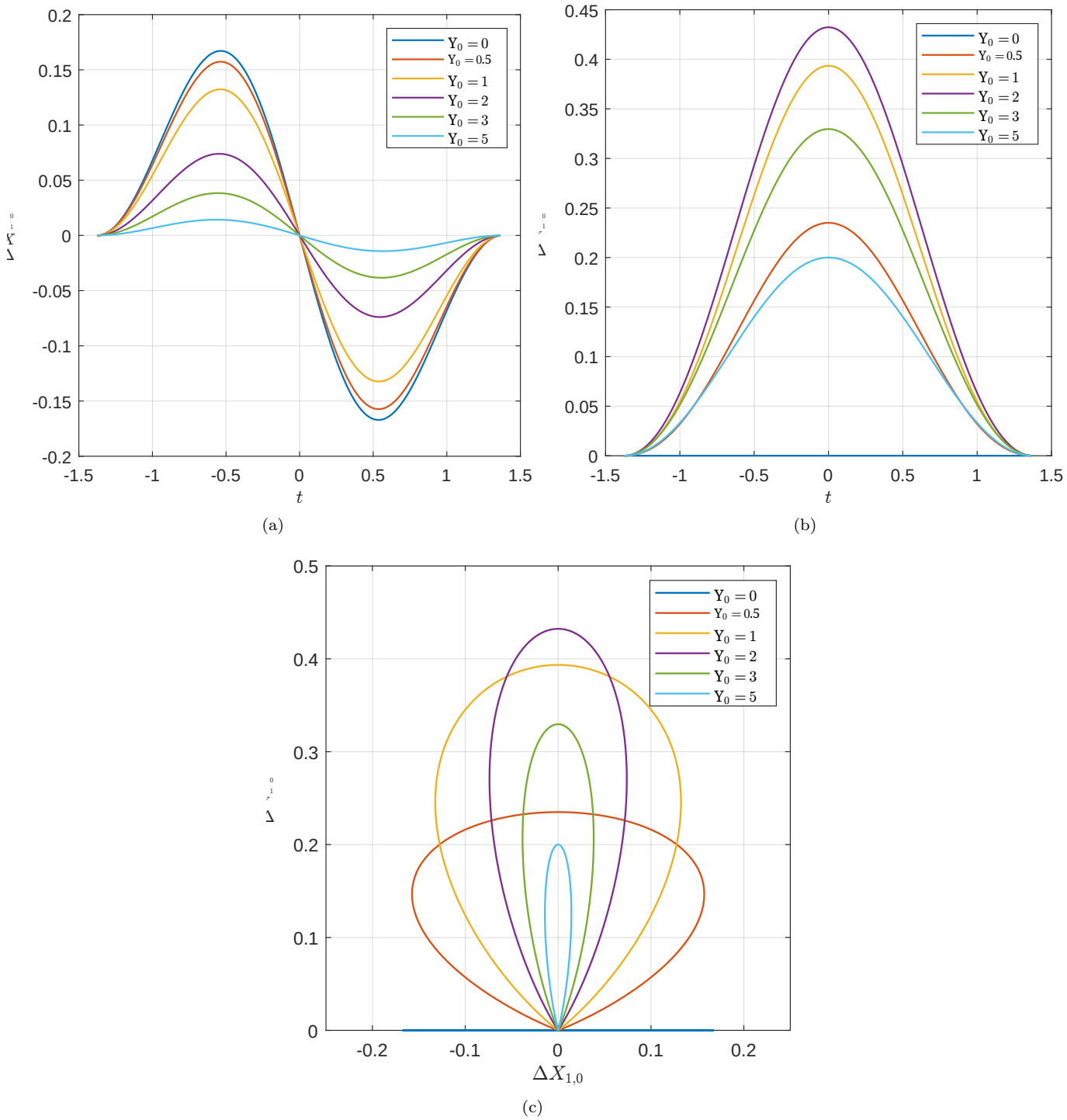
对于高斯热斑 [方程（18）], 相关速度场$\mathbf{u}_{1\,0}^{(\mathrm{S})}$，由方程（47给出。因此，物质点 $\Delta\mathbf{X}^{1,0}(t)$ 在 α 阶时经过一次扫描的位移为

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t)=&\;A(t)\left\{\frac{(x-t)[1-\exp(-r^2/2)]}{r^2}\mathbf{e}_x+\frac{y[1-\exp(-r^2/2)]}{r^2}\mathbf{e}_y\right\}\Bigg|_{\mathbf{X}_0}\\\equiv&\;A(t)\left[\frac{1-\exp(-r^2/2)}{r}\mathbf{e}_r\right]\Bigg|_{\mathbf{X}_0},\end{aligned}\tag{110}$$

这里回顾一下，半径 r 和径向单位向量 $\mathbf{e}_r$ 是相对于（平移的）热斑中心测量的。

1. *Sinusoidal heat-spot amplitude and finite scan path*

图21 展示了物质点在一次扫描过程中的轨迹。我们选取方程（55）中的正弦振幅函数，并选择扫描路径长度为 $2\ell=2t_0=2.75$ 以匹配实验 [34]。在图21中，物质点的初始位置为$\mathbf{X}_0=$（0，0），（0，0。5），（0，1），（0，2），（0，3），以及（0，5）。这些



(a) (b)

(c)

图21. 首阶（即 α阶）时一次扫描过程中物质点的轨迹。热斑于时间 $t = -t_0$ 从 $x = -\ell$开始扫描时，物质点从 y 轴上的位置$(0, Y_0)$出发，选取的 $Y_0 = 0$值为0.5、1、2、3和5。左上（图21a）：一次扫描（即 $-t_0 \le t \le t_0$）期间，物质点在 α 阶位移的 x 分量$\Delta X_{1,}$0随时间 t变化的曲线。右上（图21b）：与图21a相同，但绘制的是物质点在 α阶位移的 y 分量$\Delta Y_{1,}$0。下方（图21c）：在$(\Delta X_{1,}0,\Delta Y_{1,}0)$平面内绘制相同的轨迹。扫描路径长度取为 $2\ell \equiv 2t_0 = 2.75$，以匹配微流控实验 [34]。

为简单起见，位于 y 轴上。我们分别在图21a和图21b中绘制了 α 阶时位移的 x 分量$\Delta X_{1,0}(t)$和 y 分量$\Delta Y_{1,0}(t)$随时间的变化。在图21c中，我们绘制了从 $t=-t_0$ 到 $t=t_0$对应的空间轨迹（$\Delta X_{1,0}(t)\Delta Y_{1,0}(t)$）。这些轨迹呈“花瓣状”。 [顺带一提，如果恒幅热斑沿无限长的扫描路径平移，可以通过解析方法证明，远离 x 轴的物质点（$Y_0 \gg 1$）的轨迹是一个圆，这是由于远离热斑处的平移源偶极流所致。该圆形轨迹的直径与 $1/Y_0$成比例。] 在 α阶时，图21中的每个物质点似乎在热斑完成一次完整扫描后都恰好回到其初始位置；我们将在后续各节中证明，这是所有物质点都适用的一般结论，而不仅限于 y 轴上的物质点。

D. 一般热斑在 α 阶时的零净位移

方程（109）的结果给出了物质点在时间 t 的位置为 $\mathbf{X}_0$ 、且热斑位于扫描路径起点（$t=-t_0$）时，该物质点在 α 阶的位移。上一节中，我们举例说明了物质点在一次扫描过程中的首阶轨迹，并看到物质点在一次完整扫描后会回到初始位置，且这一结论在 α 阶上成立。针对行进温度波的早期理论研究 [29] 表明，扫描路径上的物质点在 α 阶时净位移为零。这里，我们将这一净位移在 α 阶时为零的结论推广到任意初始位置的物质点，并适用于一般热斑。

重要的是，注意方程（109）对于方程（30）中的一般热斑成立，其振幅函数$A(t)$ 和由函数 $\Theta(x-t,\ y)$ 指定的形状均为任意。在本节中，我们将证明，对于这种一般热斑，任意物质点的净位移 $\Delta\mathbf{X}^{1,0}(t_0)$ ——即热斑完成一次完整扫描所产生的位移——在 α 阶时恰为零，无论扫描路径有限还是无限。因此，重复扫描热斑（第 IV 节）所产生的物质点净位移，进而其轨迹，源于二次效应，而非线性效应。这对于理解实验观察到的示踪粒子轨迹至关重要 [34] （第 V 节）。

1. *Finite scan path*

首先考虑有限扫描路径。这是生物学（FLUCS）实验 [28] 和微流控实验 [34]所涉及的情形。根据有限扫描路径的定义，扫描路径两端的热斑振幅为零，因此有 $A(t_0)=0$。根据式（109），任意物质点在 $\Delta\mathbf{X}^{1,0}(t_0)$处的 α阶净位移因此为

$$\Delta\mathbf{X}_{1,0}(t_0)=\mathbf{0}, \tag{111}$$

正如所述。从数学上讲，该净位移为零，是因为 α 阶的速度场是一个函数的精确时间导数，而该函数与热斑振幅 [成正比；见式（35）] 。此外，在这一阶，物质点的净位移等于在初始位置处对流体速度进行时间积分。由热斑振幅的时间变化 [所导致的净位移贡献，与速度场贡献$A'(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1,0}(x-t,y)$]，恰好抵消了由热斑平移 [所导致的净位移贡献；后者与 $A(t)\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1,0}(x-t,y)$],阶$\alpha$有关。该证明推广了先前关于共动坐标系中温度分布保持稳态情形的研究思路 [29] 。

因此，任意物质点在热斑完成一次完整扫描后，其净位移在 α 阶始终为零。这适用于任何热斑形状和振幅函数，而不仅仅是我们为求得显式解析解而采用的理想化高斯分布。在实验中，当热斑速度足够高时，热斑可能会被拉长，从而失去低速时所具有的圆对称性。至关重要的是，根据我们的理论模型，热斑的对称性并非净位移在 α 阶为零的必要条件。重要的是，这意味着主阶净位移与热斑振幅的关系至少呈二次标度，而非线性标度。这与实验结果一致 [28, 30]： 实验测得净位移与温度扰动呈二次标度关系。

为了从瞬时流动的主阶项（图 21c ； 图 10）的角度解释图 22中示踪粒子的轨迹，我们展示了一个扫描过程中热斑导致物质点发生的位移。为简明起见，

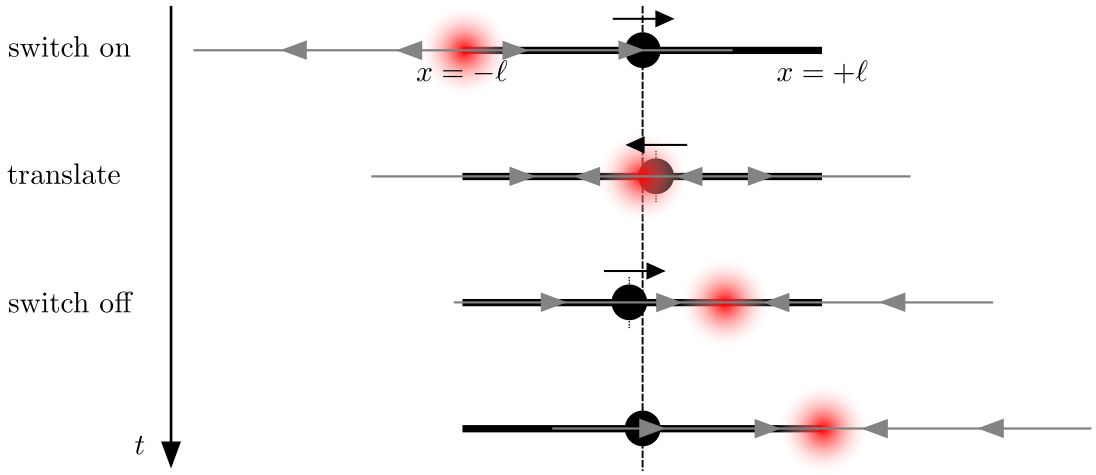


图22. 示意图总结了物质点在 α 阶的零净位移，该物质点以黑色圆圈表示。热斑沿扫描路径从 $x = -\ell$ 平移至 $x = \ell$ ，诱导出速度场，初始位置向量为$\mathbf{X}_0$的物质点受到该速度场的作用。（此处，物质点起始于扫描路径的中点$\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$。）这使物质点在时间 t 发生微小位移。热斑在扫描路径两端开启和关闭所导致的物质点向右位移，与热斑平移导致的向左位移相抵消，且此结论在 α阶成立。

图 22 中的示意图展示了一个特殊情形：物质点从扫描路径中点出发；由于对称性，它始终位于 x 轴上。热斑开启时，随之产生的源状流将原点处的物质点向右推移一小段距离（α阶）。随后，热斑平移所诱发的流动总体上将物质点向左推移。这是因为物质点靠近热斑，此处的流动比远场更偏向左侧。最后，在扫描路径末端热斑关闭时产生的汇状流将物质点向右拉回其初始位置，误差为 α阶。

为了直观理解远场物质点的净位移，我们注意到，恒幅热斑平移所诱导的远场瞬时流动是一个源偶极子。远离扫描路径的物质点的平均速度在 α阶继承了该流动的远场源偶极子特征，对应于右侧为源、左侧为汇（对于向右平移）。在一次扫描过程中，这一效应恰好被扫描路径起点处热斑的开启和终点处热斑的关闭所抵消。因此，对于有限扫描路径，热斑振幅随时间变化这一点在我们的理论中至关重要。一次扫描过程中，热斑的开启和关闭会在示踪粒子的平均速度（平均拉格朗日速度）远场产生一个源偶极子，在 α阶对应于左侧为源、右侧为汇；也就是说，这与热斑平移所导致的源偶极子方向相反。

2. *Infinite scan path*

为了将我们的理论与以往研究进行比较， [29, 30], 此处我们考虑无限扫描路径（ α ）下，物质点的$t_0 \to \infty$阶净位移这一特殊情况。在这种情况下，热斑振幅 $A(t)$不一定会按 $t \to \pm\infty$衰减，例如， $A(t) =$ 为常数。然而，对于在无穷远处衰减的温度分布，速度场$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}_{1\,0}$. 确实会在无穷远处衰减。利用这一点和式（109），对于无限扫描路径，任意物质点在$\Delta\mathbf{X}^{1,0}(\infty)$处的 α 阶净位移为

$$\Delta\mathbf{X}_{1,0}(\infty) = \mathbf{0}. \tag{112}$$

特别是，对于恒定振幅 $A(t) = A$ 的情形也是如此，早期研究 [30] 曾对此进行考察。物质点经历速度场 $\alpha A\mathbf{u}^{(\mathrm{T})}_{1\,0}$. $(x - t,\ y)$，因此先向右移动一个 α 阶位移，随后向左移动，最后再向右移动，回到其初始位置（精确到 α 阶）。

IV. 一次扫描导致物质点的主阶净位移

我们在第 IIID 节看到，对于具有任意时变振幅和任意形状的热斑，无论物质点的初始位置为何，在一次完整的热斑扫描中，其线性阶净位移均为零。因此，我们预期主阶净位移关于热斑振幅呈二次关系，这与实验结果 [30]一致。参考文献 [30] 中的模型采用恒幅热斑，并考察了无限扫描路径上物质点的净位移。这里，我们讨论流体中任意位置处的物质点在热斑振幅任意、扫描路径长度任意时的主阶净位移。特别是，我们在图 23 和图 25 中分别展示了正弦振幅函数下，按 $\alpha\beta$ 阶和 α^2阶计算的示踪粒子单次扫描平均速度。随后，在第 V 节中，我们将把这一结果应用于近期有关重复扫描热斑所导致的示踪粒子轨迹和平均速度的实验结果 [34]。

A. $\alpha\beta$阶的净位移

从数学上讲，主阶净位移可以表示为以下各阶净位移的线性组合： α^2阶、 $\alpha\beta$阶和 β^2阶。然而，我们可以排除 β^2阶，因为 β^2 阶的瞬时流动为零（第IIE节）。因此，我们现在考虑 $\alpha\beta$阶的净位移； α^2 阶的贡献将在下一节讨论。根据式（106），物质点在任意初始位置 $\Delta\mathbf{X}^{1,1}(t_0)$ 处的 $\alpha\beta$ 阶净位移由下式给出：

$$\Delta\mathbf{X}_{1,1}(t_0) = \int_{-t_0}^{t_0} \mathbf{u}_{1,1}(\mathbf{X}_0, t)\, dt, \tag{113}$$

其中，$\mathbf{u}^{1,1}$ 是 $\alpha\beta$阶的瞬时速度场。与 α阶时一样，这只是对在物质点初始位置处求得的速度场进行积分，该位置近似于物质点的真实位置。对于高斯热斑，$\mathbf{u}^{1,1}$ 在 $\alpha\beta$ 阶时的速度场由式（81）和（82）明确给出。

1. *Sinusoidal heat-spot amplitude and finite scan path*

式（113）中的净位移随后可在选定振幅函数 $A(t)$ 后通过数值方法求得。为说明净位移如何随物质点的初始位置而变化，我们在此考虑正弦热斑振幅函数 [式（55），与前文相同]，并采用有限扫描路径；这是 FLUCS 实验所涉及的相关设置 [28]。

图23绘出了物质点在 $\alpha\beta$ 阶、经一个扫描周期平均后的速度 $\Delta\mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0)/2t_0$ 的流线，其中近场见图23a，远场见图23b。为量化空间变化，我们在图24中绘出了该平均拉格朗日速度 $|\Delta\mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0)/2t_0|$ 在 $\alpha\beta$ 阶时的幅值随物质点到扫描路径中点的初始距离 $|\mathbf{X}_0|$ 的变化关系。对于这幅双对数图，我们将物质点的初始位置写为 $\mathbf{X}_0 = |\mathbf{X}_0|(\cos\phi, \sin\phi)$，即采用以扫描路径中点为原点的极坐标。

2. *Far-field behaviour for general heat-spot amplitude and finite scan path*

根据公式（84）可知，在远场，阶 $\mathbf{u}^{1,1}$ 的瞬时流动 $\alpha\beta$ 是一个流体动力学源偶极子。具体而言，这适用于距离平移热斑中心许多热斑半径的位置， $r \gg 1$。将其代入公式（113），在整个扫描过程中始终与热斑相距许多热斑半径的物质点，其净位移为

$$\Delta\mathbf{X}_{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0) \sim \frac{1}{4}\int_{-t_0}^{t_0} A(t)^2 \left\{ \mathbf{e}_x \left[\frac{1}{r^2} - \frac{2(x-t)^2}{r^4} \right] + \mathbf{e}_y \left[-\frac{2(x-t)y}{r^4} \right] \right\} \Bigg|_{\mathbf{X}_0} dt, \tag{114}$$

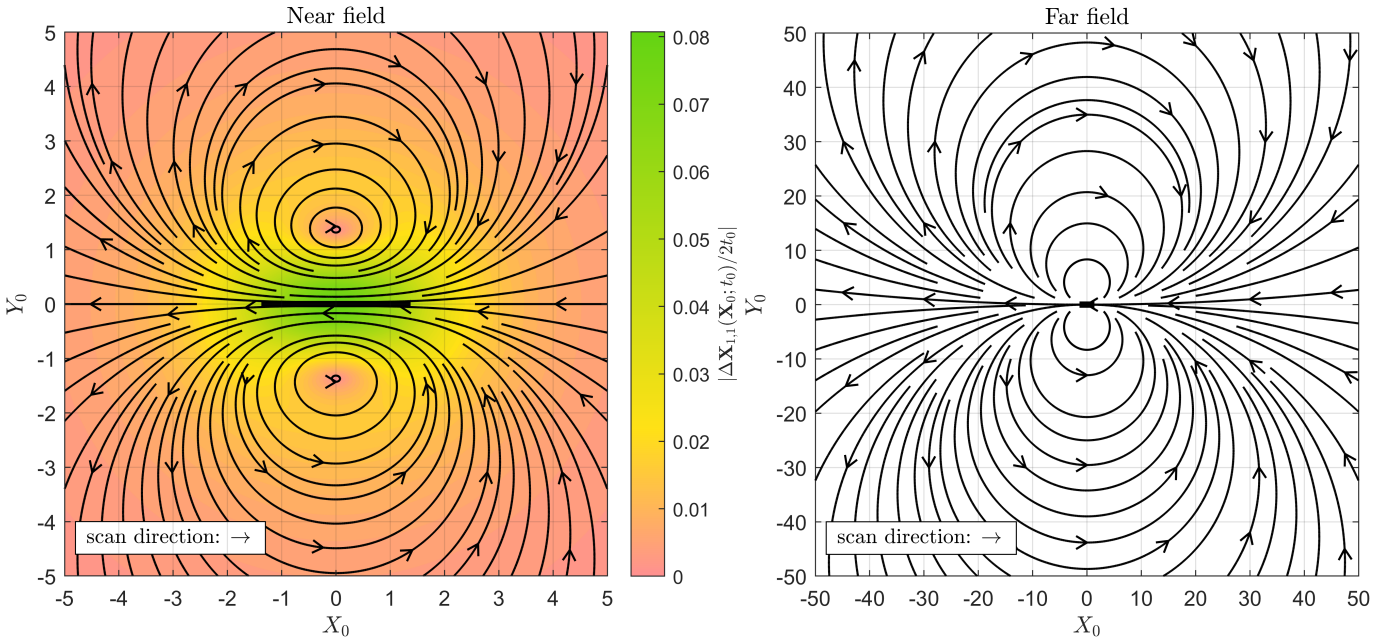


图23。在 $\alpha\beta$ 一个扫描周期内，物质点在 $\Delta\mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0;\ t_0)/2t_0$处的平均速度的流线。热斑沿正 x 方向平移（扫描方向）。扫描路径用一条粗黑色线段表示。左图（图 23a）： $-5 \le X_0, Y_0 \le 5$处靠近扫描路径（近场）的流线，其物质点平均速度的幅值 $|\Delta \mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0;\ t_0)/2t_0|$ 用颜色表示。右图（图 23b）： $-50 \le X_0, Y_0 \le 50$处的流线，展示远场行为。

其中我们回顾一下， $r^2 = (x-t)^2 + y^2$。

此外，如果物质点始终距离热斑许多个扫描路径长度，即 $r \gg \ell$，那么在首阶近似下，我们还可以将被积函数中的空间变化因子近似为其在 $t = 0$ 处的值。由此得到

$$\Delta\mathbf{X}_{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0) \sim \frac{1}{4}\int_{-t_0}^{t_0} A(t)^2\, dt \left[\mathbf{e}_x\left(\frac{1}{|\mathbf{X}_0|^2} - \frac{2X_0^2}{|\mathbf{X}_0|^4}\right) + \mathbf{e}_y\left(-\frac{2X_0Y_0}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)\right]. \tag{115}$$

相应地，初始位于 $\mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0)/2t_0$ 的物质点在一次扫描期间的平均速度 Δ 为

$$\frac{\Delta\mathbf{X}_{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0)}{2t_0} \sim \frac{1}{8t_0}\int_{-t_0}^{t_0} A(t)^2\, dt \left[\mathbf{e}_x\left(\frac{1}{|\mathbf{X}_0|^2} - \frac{2X_0^2}{|\mathbf{X}_0|^4}\right) + \mathbf{e}_y\left(-\frac{2X_0Y_0}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)\right], \tag{116}$$

如果物质点远离扫描路径，即距离热斑半径和扫描路径长度都很远。需要注意的是，这只有在扫描路径长度有限时才有可能。该远场平均拉格朗日速度场是一个源偶极子，其强度与热斑振幅平方的时间平均值成正比。环流方向对应于左侧为源、右侧为汇，这继承自 $\alpha\beta$ 阶的瞬时流动（见第 IIG 6节）。

3. Net displacement of material points on the x axis for general heat-spot amplitude and general scan path length

现在，我们考察 x 轴上物质点的净位移，或等价地说，平均速度。对于高斯热斑，瞬时速度场$\mathbf{u}_{1,1}$ [式（82），图12和图 13] 在 x 轴上的任何位置均指向负 x 方向，即与热斑平移方向相反。如第IIG 6节所述，

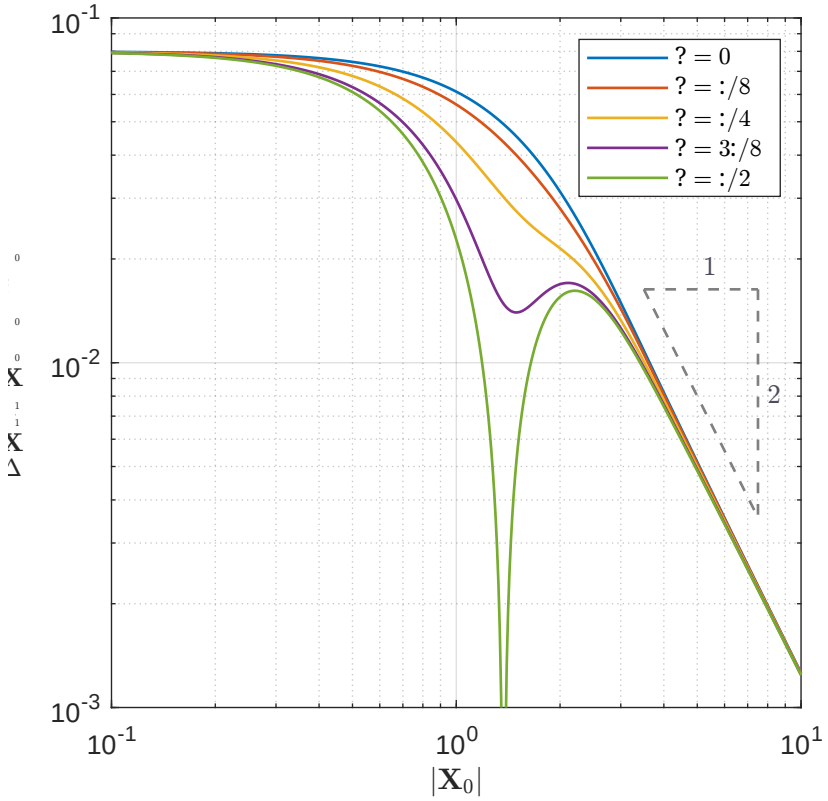


图24. 在 $\phi = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ 和 $\pi/2$ 条件下，物质点的 $\alpha\beta$ 阶平均拉格朗日速度幅值 $|\Delta\mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0)/2t_0|$ 与距离$|\mathbf{X}_0|$的关系，采用双对数坐标绘制。这里，物质点的初始位置写作$\mathbf{X}_0 = |\mathbf{X}_0|(\cos\ \phi, \sin\ \phi)$，即采用极坐标，原点位于扫描路径的中点。在远场，幅值$|\Delta\mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0; t_0)/2t_0|$ 遵循平方反比定律 $\sim 1/|\mathbf{X}_0|^2$。

这是因为在近场中，热斑平移会局部放大首阶流动，而在远场中，则由源偶极流来维持不可压缩性。因此，式（113）中的净位移对 x 轴上的任意物质点而言，也指向负 x 方向，并且扫描路径附近存在强烈的向左输运。图23 和图24展示了正弦振幅函数对应的情况。

4. Constant heat-spot amplitude and infinite scan path

回顾早期理论研究 [30]关注的是恒幅热斑作用下，位于无限扫描路径上的物质点的净位移。因此，为了开始将我们的数学模型与之进行比较，我们首先代入热斑振幅 $A(t) = A =$const，并取扫描路径长度趋于无限的极限（$t_0 \to \infty$），但仍允许物质点具有任意初始位置$\mathbf{X}_0$（即 Y_0 不一定为零）。对于这一特殊情况，阶 $\alpha\beta$ [Eq.(113)] 处的净位移可解析求得如下：

$$\Delta\mathbf{X}_{1,1}(\infty) = -A^2\mathbf{e}_x\{\sqrt{\pi}[\sqrt{2}\exp(-Y_0^2/2) - \exp(-Y_0^2)] - \pi Y_0[\mathrm{erf}(Y_0) - \mathrm{erf}(Y_0/\sqrt{2})]\}. \tag{117}$$

上述结果 [式（117）] 使我们能够作出重要的物理观察。首先，在 $\alpha\beta$ 阶，所有 x 物质点的净位移均沿负 Y_0方向，即不仅扫描路径上的物质点如此。对于热斑（$A > 0$）和冷斑（$A < 0$）均成立，因为净位移与热斑振幅的平方成正比。由于瞬时流动的对称性，在 y 方向上不存在净位移。其次，在 $\alpha\beta$ 阶，净位移与 X_0 无关（即物质点初始位置的水平分量）。这并不令人意外，因为当扫描路径无限长时，所有 x 均不可区分。

第三，我们观察到，在 $\alpha\beta$ 阶，净位移完全源于瞬时流动的主阶项的放大，而非 $\alpha\beta$阶的势流。回顾一下， $\alpha\beta$ 阶的瞬时流动是势流$-\nabla p_{1,\ 1}$ 与由温度分布调制的首阶流动之和 $\Delta T\mathbf{u}_{1,0}$ [式（62）]。由于这里考虑的是振幅的时间导数为零的情形，热斑的开启或关闭对这两个项均无贡献，贡献仅来自热斑平移。因此，在共动坐标系中，瞬时流动是稳态的。由此，势流的 x 分量是压力（势）的精确时间导数，并且在无穷远处衰减。因此，势流对时间的积分为零；也就是说，势流不贡献净位移。对于行波温度分布扫描路径上的物质点，也有类似结果 [29], ，其在x 方向上具有周期性边界条件而非衰减。

物质点出现非零净位移，是由于主阶速度贡献得到放大 $\Delta T\mathbf{u}^{1,0}$ ，如方程（62）所示；这一结论不仅适用于高斯温度分布，也适用于任何在无穷远处衰减的温度分布。回顾前文的讨论（总结于图 15），这一贡献是热斑产生的直观效应：热斑通过降低当地黏度，增强热斑内向左的主阶流动，正如参考文献 [30]所述。由此，物质点最终产生向左的净位移。

因此，我们现在看到，阶数为 $\alpha\beta$ 的瞬时速度场中，两个项各自对应一个关键的物理特征： $\mathbf{u}_{1,\ 1}=-\nabla p_{1,\ 1}+\Delta T\mathbf{u}^{1,0}$，势流 $-\nabla p_{1,\ 1}$是平均拉格朗日速度 $\Delta\mathbf{X}^{1,1}(\mathbf{X}_0;\ t_0)/2t_0$远场中流体动力学源偶极子的唯一成因；该偶极子继承自 $\mathbf{u}^{1,1}$（详见第 IIG节）。另一方面，对于无限长扫描路径，放大的主阶流动 $\Delta T\,\mathbf{u}^{1,0}$，是物质点向左产生主阶净位移的唯一成因，该位移出现在 $\alpha\beta$ 阶。

5. *Comparison with earlier theoretical work*

现在，我们可以将迄今为止关于净位移的结果与早期研究 [30]进行比较。文献 [30] 的作者发现，对于恒定振幅的高斯热斑，无限长扫描路径上物质点的净位移为

$$\Delta\mathbf{X}(\mathbf{0};\infty)_{[30]}=-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\alpha\beta\Delta T_0^2A^2a\mathbf{e}_x, \tag{118}$$

其中，我们已转换为本理论采用的记号（包括使用 z平均速度，而非中平面速度）。在我们的研究中，我们在第 IIID 节发现， α 阶的净位移为零，这与式（118）一致。我们还在第IIE 节证明， β^2 阶不存在瞬时流动，因此该阶也没有净位移。对于水（文献 [30]中所用），热膨胀系数 α 远小于热黏度系数 β；因此，在我们的理论中，可以忽略 α^2 阶对净位移的贡献，而考虑 $\alpha\beta$阶的贡献。因此，在我们的微扰展开框架内，我们系统地证明了物质点的主阶净位移出现在 $\alpha\beta$阶，这与文献 [30] 及式（118）一致。

我们将初始位置 $\mathbf{X}_0=\mathbf{0}$ 代入式（117），回顾一下，该式是对瞬时流场的解析表达式积分得到的。因此，我们的系统性理论方法预测，该物质点的有量纲主阶净位移为

$$\Delta\mathbf{X}(\mathbf{0};\infty)=-\sqrt{\pi}(\sqrt{2}-1)\alpha\beta\Delta T_0^2A^2a\mathbf{e}_x+O(\alpha^2)+\text{cubic and higher-order terms.} \tag{119}$$

这与峰值温度变化的平方成正比 ΔT_0A 且始终沿负 x 方向，即与热斑平移方向相反。比较式（119）和式（118）可见，我们严谨的摄动计算得到了改进的数值因子（$\sqrt{2}-1\approx0.41$ 与 $1/2=0.5$）；不过，所有标度都一致。

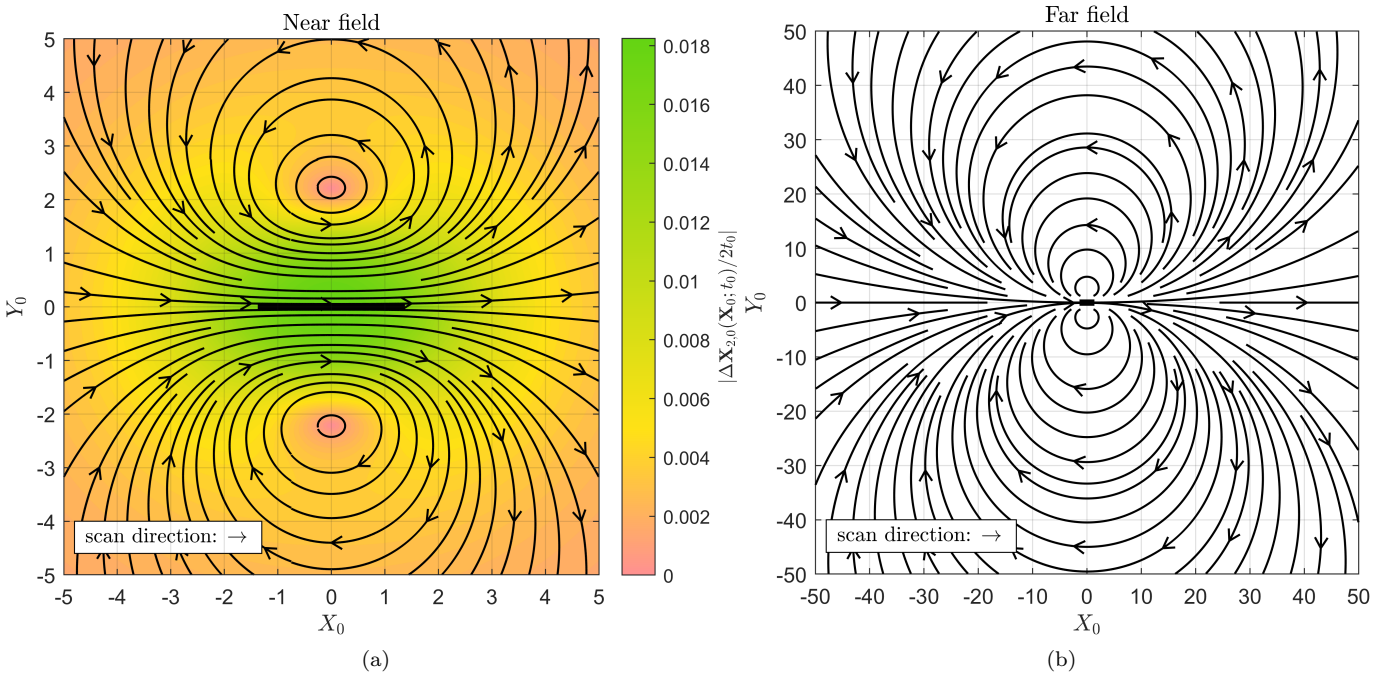


图25. 扫描周期内，阶 α^2 的物质点平均速度流线， $\Delta\mathbf{X}^{2,0}(\mathbf{X}_0; t_0)/2t_0$。热斑沿 x 正方向平移（扫描方向）。扫描路径以粗黑色线段标出。左图（图 25a）：靠近扫描路径处 $-5 \le X_0$， $Y_0 \le 5$的流线，物质点平均速度的幅值$|\Delta\mathbf{X}^{2,0}(\mathbf{X}_0; t_0)/2t_0|$ 以颜色表示。右图（图 25b）： $-50 \le X_0$， $Y_0 \le 50$ 的流线，用于表示远场行为。

B. 阶 α^2净位移

现在我们考虑物质点在 α^2 阶的净位移。这仅取决于热膨胀，因此即使流体黏度为常数，它也会存在。根据式（106）， $\Delta\mathbf{X}^{2,0}(t_0)$ 在 α^2 阶的净位移为

$$\Delta\mathbf{X}_{2,0}(t_0) = \int_{-t_0}^{t_0} [\mathbf{u}_{2,0}(\mathbf{X}_0, t) + \Delta\mathbf{X}_{1,0}(t) \cdot \nabla\mathbf{u}_{1,0}(\mathbf{X}_0, t)]\, dt, \tag{120}$$

其中回顾一下，$\mathbf{u}^{2,0}$ 是阶 α^2 [的瞬时速度场，见方程（98）、（99）和（100）]， $\Delta\mathbf{X}^{1,0}(t)$是阶 α 时刻 t 物质点 [的位移，见方程（110）], $\mathbf{u}^{1,0}$ 是阶 α[的瞬时速度场，见方程（46）、（47）和（48）], , 而 $\mathbf{X}_0$ 是热斑位于扫描路径起点时物质点的位置（$t = -t_0$）。方程编号对应于我们针对高斯热斑得到的解析结果。

我们观察到，由于方程（106）中的泰勒展开，这里有两项贡献。第一项是在物质点的初始位置处，对 α^2 阶速度场积分。这与 α 阶和 $\alpha\beta$ 阶的净位移类似。然而，与 α 阶和 $\alpha\beta$ 阶不同，这里还有第二项贡献。它源于物质点在 t 时刻相对于其初始位置的 α 阶位移；此时物质点正经历由热斑诱导的 α 阶瞬时流动。

1. *Sinusoidal heat-spot amplitude and finite scan path*

此处展示，对于式（ α^2 55）给出的正弦热斑振幅函数，物质点的速度在扫描一次后的平均值在空间中的变化情况。图 25 绘出了阶数为 **Δ的平均拉格朗日速度流线，近场见图** ^{2,0}**25a，远场见图** $_0$**25b**。图 $t_0$26中，我们绘制了

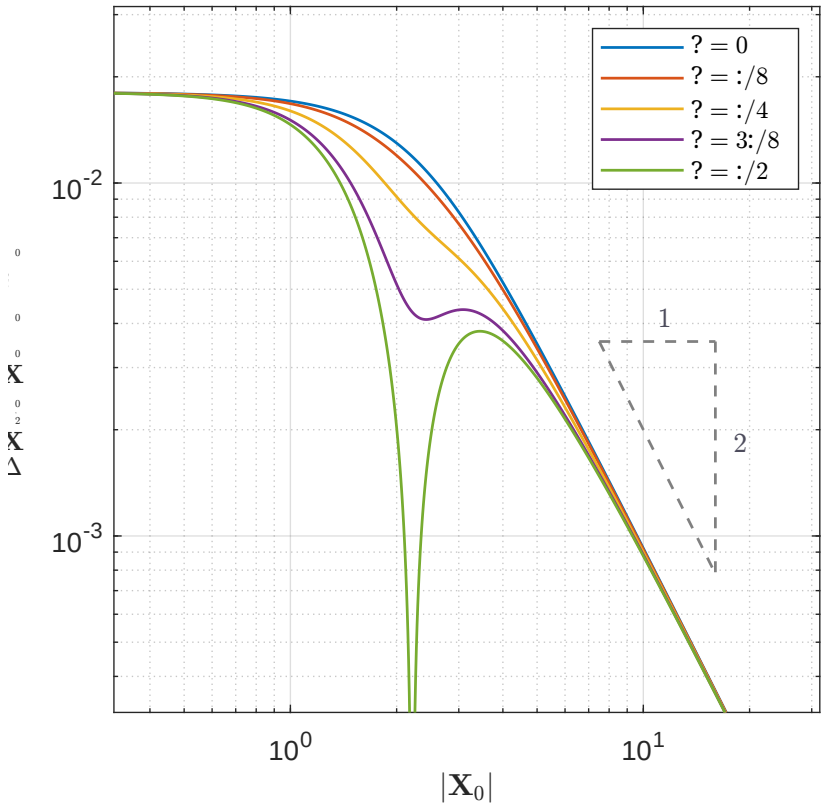


图 26. 物质点在 α^2 阶时的平均速度 $|\Delta\mathbf{X}^{2,0}(\mathbf{X}_0;t_0)/2t_0|$ 幅值与距离 $|\mathbf{X}_0|$的关系，采用双对数坐标绘制，参数为 $\phi=0$, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$和 $\pi/2$。与 $\alpha\beta$阶时一样，物质点的初始位置写作$\mathbf{X}_0=|\mathbf{X}_0|(\cos\ \phi,\sin\ \phi)$，即采用极坐标，原点位于扫描路径中点。在远场，幅值$|\Delta\mathbf{X}^{2,0}(\mathbf{X}_0;t_0)/2t_0|$ 遵循平方反比定律 $\sim 1/|\mathbf{X}_0|^2$。

在双对数坐标下，绘出阶数为 α^2 时平均拉格朗日速度的幅值 $|\Delta\mathbf{X}^{2,0}(\mathbf{X}_0;t_0)/2t_0|$，它随物质点与扫描路径中点之间的初始距离 $|\mathbf{X}_0|$ 变化。和之前一样，我们将物质点的初始位置表示为 $\mathbf{X}_0=|\mathbf{X}_0|(\cos\ \phi,\sin\phi)$。

我们观察到， α^2 阶平均拉格朗日速度场的流线（图25）在定性上与 $\alpha\beta$ 阶的流线（图23）相似，但环流方向相反：在 α^2阶，靠近扫描路径处，物质点的平均速度与热斑平移方向相同（向右）；而远离 x 轴处，示踪粒子的净输运则向左，且强度逐渐减弱。因此，即使黏度保持恒定（$\beta=0$），我们也会预测示踪粒子存在α^2 阶净输运，其空间变化方式与热黏度变化和热膨胀共同作用产生的净输运相似，但环流方向相反。

2. *Far-field behaviour for general heat-spot amplitude and finite scan path*

对于振幅任意的高斯热斑，我们可以求得扫描一次的时间平均远场物质点速度，其阶为α^2 。首先注意，在极限 $r\gg 1$ （距离热斑中心 r ，即远离多个热斑半径）下，公式（120）中被积函数各项如何随距离变化。阶为 α^2 的瞬时流动 $\mathbf{u}^{2,0}$ 在远场是一个流体动力学源偶极子 [公式（101）]，，按 $1/r^2$变化；这来自与热斑平移相关的贡献 $A(t)^2\mathbf{u}_{2\ 0}^{(\mathrm{T})}$ 。阶为 α 的位移 $\Delta\mathbf{X}^{1,0}(t)$按 $1/r$变化。阶为α 的流动 $\mathbf{u}^{1,0}$ 按 $1/r$变化，因此其梯度 $\nabla\mathbf{u}^{1,0}$，按 $1/r^2$变化。所以，在远场，阶为 α^2 的流动 $\mathbf{u}_{2,0}$ [，具体而言是贡献 $A(t)^2\mathbf{u}_{2\ 0}^{(\mathrm{T})}$]，对公式（120）的被积函数起主导作用。

利用这一点和公式（101）可得

$$\Delta\mathbf{X}_{2,0}(\mathbf{X}_0;t_0)\sim-\frac{1}{4}\int_{-t_0}^{t_0}A(t)^2\left\{\mathbf{e}_x\left[\frac{1}{r^2}-\frac{2(x-t)^2}{r^4}\right]+\mathbf{e}_y\left[-\frac{2(x-t)y}{r^4}\right]\right\}\Big|_{\mathbf{X}_0}dt, \tag{121}$$

前提是 $r\gg 1$ 在整个扫描周期内。

此外，若物质点距离热斑很远，远超扫描路径长度，即 $r\gg\ell$，那么我们还可以用被积函数中的空间变化因子在 $t=0$ 处的取值来近似。这只是关于 t 的首阶泰勒展开。由此得到

$$\Delta\mathbf{X}_{2,0}(\mathbf{X}_0;t_0)\sim-\frac{1}{4}\int_{-t_0}^{t_0}A(t)^2\,dt\left[\mathbf{e}_x\left(\frac{1}{|\mathbf{X}_0|^2}-\frac{2X_0^2}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)+\mathbf{e}_y\left(-\frac{2X_0Y_0}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)\right]. \tag{122}$$

相应地，物质点的速度 $\Delta\mathbf{X}_{2,0}(t_0)/2t_0$ 在 α^2 阶时，对一个扫描周期取平均后为

$$\frac{\Delta\mathbf{X}_{2,0}(\mathbf{X}_0;t_0)}{2t_0}\sim-\frac{1}{8t_0}\int_{-t_0}^{t_0}A(t)^2\,dt\left[\mathbf{e}_x\left(\frac{1}{|\mathbf{X}_0|^2}-\frac{2X_0^2}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)+\mathbf{e}_y\left(-\frac{2X_0Y_0}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)\right], \tag{123}$$

对于远离扫描路径的物质点（距离扫描路径远超多个热斑半径和多个扫描路径长度）。与 $\alpha\beta$ 阶（即另一个二次阶）类似，这一远场平均拉格朗日速度是一个流体动力学源偶极子，其强度正比于热斑振幅平方的时间平均值。然而，在这里的 α^2 阶，远场流动的方向对应于左侧为汇、右侧为源。因此，这与 $\alpha\beta$ 阶相反，这与瞬时流动的物理机制 $A(t)^2\mathbf{u}_{2\,0}^{(\mathrm{T})}$，在第 IIH 6 节中的解释一致。

C. 远场净位移

上文计算了物质点截至二次阶的净位移，并推导出了高斯热斑振幅任意时，远离扫描路径的物质点在 $\alpha\beta$ 阶和 α^2 阶下的净位移解析表达式。因此，结合式（115）和（122），远离扫描路径的物质点的量纲净位移为

$$\Delta\mathbf{X}(\mathbf{X}_0;t_0)\sim\frac{1}{4}(\alpha\beta-\alpha^2)\Delta T_0^2U\int_{-t_0}^{t_0}A(t)^2\,dt\left[\mathbf{e}_x\left(\frac{a^2}{|\mathbf{X}_0|^2}-\frac{2a^2X_0^2}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)+\mathbf{e}_y\left(-\frac{2a^2X_0Y_0}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)\right], \tag{124}$$

截至二次阶。初始位置为 $\mathbf{X}_0$ 的物质点对应的平均速度（在一个扫描周期内）为

$$\frac{\Delta\mathbf{X}(\mathbf{X}_0;t_0)}{2t_0}\sim\frac{1}{8t_0}(\alpha\beta-\alpha^2)\Delta T_0^2U\int_{-t_0}^{t_0}A(t)^2\,dt\left[\mathbf{e}_x\left(\frac{a^2}{|\mathbf{X}_0|^2}-\frac{2a^2X_0^2}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)+\mathbf{e}_y\left(-\frac{2a^2X_0Y_0}{|\mathbf{X}_0|^4}\right)\right]. \tag{125}$$

这是一个流体动力学源偶极子，其强度与热斑振幅的平方成正比。因此，我们证明了指数衰减热斑会驱动示踪粒子运动，其平均速度在远场代数衰减（即比强迫项衰减得慢）。远场物质点净位移的方向，取决于热膨胀系数 α 与热黏度系数 β 的相对大小，具体由（$\alpha\beta-\alpha^2$）前的系数决定。提醒一下，对于水或甘油-水溶液，该系数预计为正，即 $\alpha\beta$ 阶行为占主导。

V. 与实验比较

A. 多个扫描周期内示踪粒子的轨迹

在第 II节中，我们介绍了文献 [34]所报道的微流控实验的数学模型。我们显式求解了任意振幅的平移高斯热斑所诱导的瞬时流动，然后

在第 III 节中考察了一个扫描周期内物质点的首阶轨迹，其出现于 α 阶。特别是，我们证明了任意物质点经过一个完整扫描周期后的净位移在 α 阶为零。主阶净位移则出现在更高阶，是一个二次效应（第 IV节）；事实上，对于一般的热斑，这一结论也成立。在实验中，沿有限扫描路径重复扫描热斑，即施加局域驱动，会产生大尺度流体流动，在多个扫描周期内将物质点输运至很远的距离。为理解重复扫描所导致的净输运，我们运用第 IV节关于物质点在一次完整扫描后净位移和平均速度的结果。在本节中，我们将这些理论结果与实验数据 [34]进行定量比较。具体而言，我们关注文献 [34]中的图 2d 和图 2f。

在参考文献 [34], 的受控实验中，激光光斑以 1–3 kHz 的频率扫描，扫描路径长度为 11 μm。激光光斑对流体进行局部加热，使温度扰动最大达到数开尔文；温度扰动的特征半径为 $a = 4$–4.5 μm。实验记录了流体中示踪微珠在 100 s 内形成的轨迹。流动录像的曝光时间至少是扫描周期的 10 倍。因此，轨迹展示的是示踪粒子经过多个扫描周期后的位移，而非单个扫描周期内的位移。

在实验中，示踪微珠的运动是在中平面（即平行板之间的中间位置）追踪的， $z = h/2$ 按图 2中的符号表示。回想一下，在我们的理论中，我们处理的是 z平均速度场$\mathbf{u}_{\mathrm{H}}$，为简化符号，我们将其记为 $\mathbf{u}$ 。要转换为中平面速度场，我们回想一下，在润滑近似下，中平面内的速度 $z = h/2$ 由下式给出

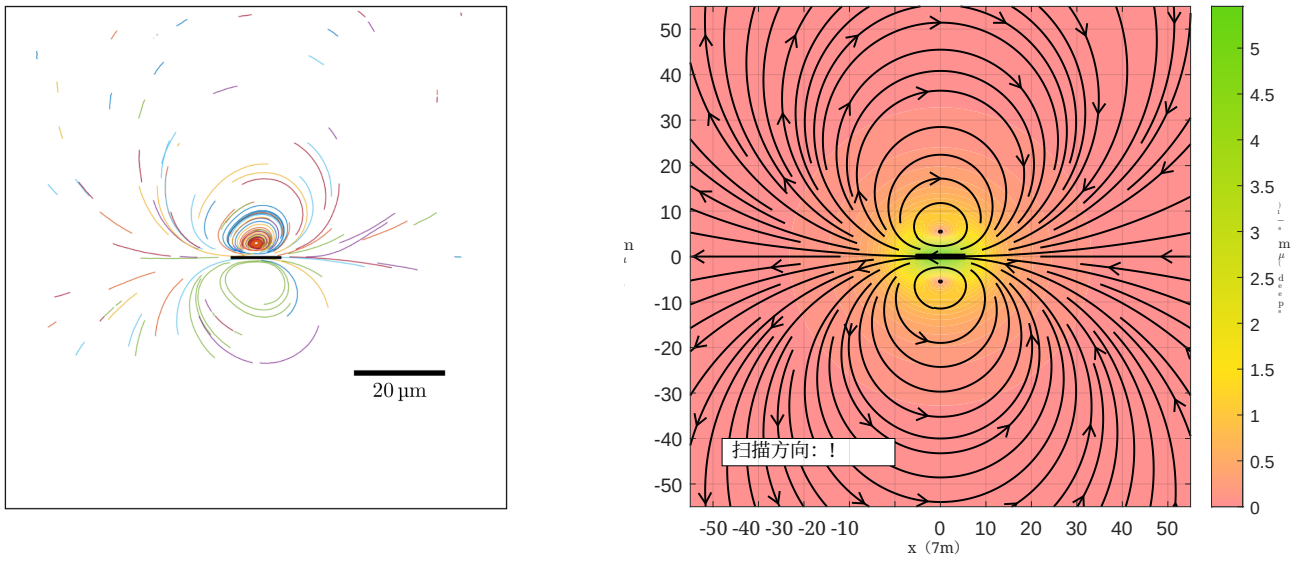
$$\mathbf{u}_{\mathrm{H}}|_{z=h/2} = \frac{3}{2}\overline{\mathbf{u}}_{\mathrm{H}}, \tag{126}$$

由于流动在两个无滑移表面之间对 z 具有二次依赖关系。为简化起见，我们将示踪微珠建模为物质点，并将在后文讨论这一假设。

为绘制我们的理论图，我们依据先前的实验和建模，选取了由式（55）给出的正弦加热斑点振幅 [28]。我们采用实验范围内的参数值：特征热斑半径为 $a = 4$ μm，扫描路径长度为 $2\ell = 11$ μm，扫描频率为 $f = 3.2$ kHz，特征温度变化为$\Delta T_0 = 8$ K。实验中的流体为体积分数50%的甘油-水溶液。对此，我们估计有量纲的热膨胀系数为 $\alpha = 5 \times 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$，热黏度系数为 $\beta = 4 \times 10^{-2}\,\mathrm{K}^{-1}$ [39]。相应的无量纲值为 $\alpha = 4 \times 10^{-3}$ 和 $\beta = 0.32$。由于我们有 $\beta \gg \alpha$，因此在我们的理论中，相对于 α^2阶贡献项，可以忽略 $\alpha\beta$阶贡献项。

首先，我们对示踪微珠在多次扫描中的实验轨迹与理论轨迹进行定性比较。在参考文献 [34], 中，绘出了各个示踪微珠的实验轨迹。我们在图 27 中将这些实验数据（图 27a）与我们的有量纲理论（图 27b）进行比较。回想一下，我们的理论适用于无量纲热膨胀系数 α 和热黏度系数 β都很小的极限；在多次扫描中，物质点的首阶轨迹由物质点首阶平均速度（阶 $\alpha\beta$）的流线给出。我们在图 27b中绘出这些流线；这是图 23的有量纲版本。

接下来，为了定量比较理论与实验，我们在图 28中展示示踪微珠的速度如何随空间变化。在图 28a中，我们重新绘制了参考文献 [34]中的图 2f 数据。这是一张中平面内示踪微珠速度的双对数散点图，速度取 0.5 s 内的平均值，并以微珠到扫描路径中点的距离（在我们的理论模型中即原点）为横坐标。我们在图 28b中展示了物质点对应的等效理论散点图，其初始位置位于间距为 0.3 μm 的正方形网格上。最后，在图 28c中，我们绘制了中平面内物质点的领先阶速度在一次扫描期间的平均值，并将其表示为物质点到原点的距离（双对数坐标）的函数，其中角度 $\phi = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8,$ 以及 $\pi/2$ 相对于 x 轴的角度固定。这样，我们便能更好地理解图 28a 和 28b中前两个可直接比较的图。



(a) (b)

图27. 热斑多次扫描过程中示踪微珠轨迹的实验结果与理论结果比较。左图（图 27a）：中平面（位于两平行板正中间）内示踪微珠的实验轨迹，数据采集时间为100 s，经许可改编自参考文献 [34] ©光学学会。右图（图 27b）：多次扫描过程中中平面内物质点的理论首阶轨迹（$z = h/2$），采用完整的量纲单位；物质点的平均速度以颜色表示。在每次扫描过程中，热斑沿正 x 方向平移（即我们的理论中的扫描方向）。两个面板中，扫描路径均以粗黑色线段标出。

B. 理论模型的预测

从图 27和 28中可以看出，我们的理论模型能够给出与实验数据一致的定性和定量预测，覆盖从近场到远场的范围。

首先，我们的理论准确预测了示踪粒子的平均速度在远场按距离平方的倒数衰减。关键的是，我们严格证明了，在远场中，尽管瞬时速度场的主阶项是源流（按 $1/r$ 衰减），示踪粒子的主阶平均速度却是源偶极子（按 $1/r^2$ 衰减），因为瞬时流动的主阶项在一个扫描周期内的平均值始终为零。因此，示踪粒子的主阶平均速度继承了热斑诱导的瞬时流动中高阶贡献项所产生的 $1/r^2$ 衰减。

其次，我们的理论严格证明，对于具有 $\beta \gg \alpha$ 的流体，在一般热斑和有限扫描路径的情况下，整个空间中的示踪粒子平均速度在首阶按 $\alpha\beta\Delta T_0^2 U$ 缩放。这再次源于我们的结果：物质点在 α 阶的净位移为零；因此，首阶平均速度与热斑振幅的平方成正比。与 α 成正比的线性缩放，与一些实验结果一致：在这些实验中，α 为负值（水温低于 4 ℃ 时） [30]，而不是正值；观察到的示踪粒子净输运方向发生了反转。实验数据 [28, 30] 以及针对位于扫描路径上的示踪粒子的早期理论 [30]，也支持热斑振幅的平方缩放关系。

第三，我们的流体动力学理论成功再现了实验中观察到的示踪粒子经过多次扫描后形成的闭合环路轨迹，并近似预测了闭合回路中部的位置；在该处，示踪微珠的平均速度会降低。示踪粒子相对于扫描方向的环流方向与实验报告的结果一致 [30]。重要的是，根据远场平均拉格朗日速度的公式（125），该方向由热膨胀系数 α 与热黏度系数 β 的相对大小决定。这里，对于甘油 - 水溶液，我们有 $\beta \gg \alpha$ ；与此一致，我们的理论正确预测了在扫描路径上，平均速度

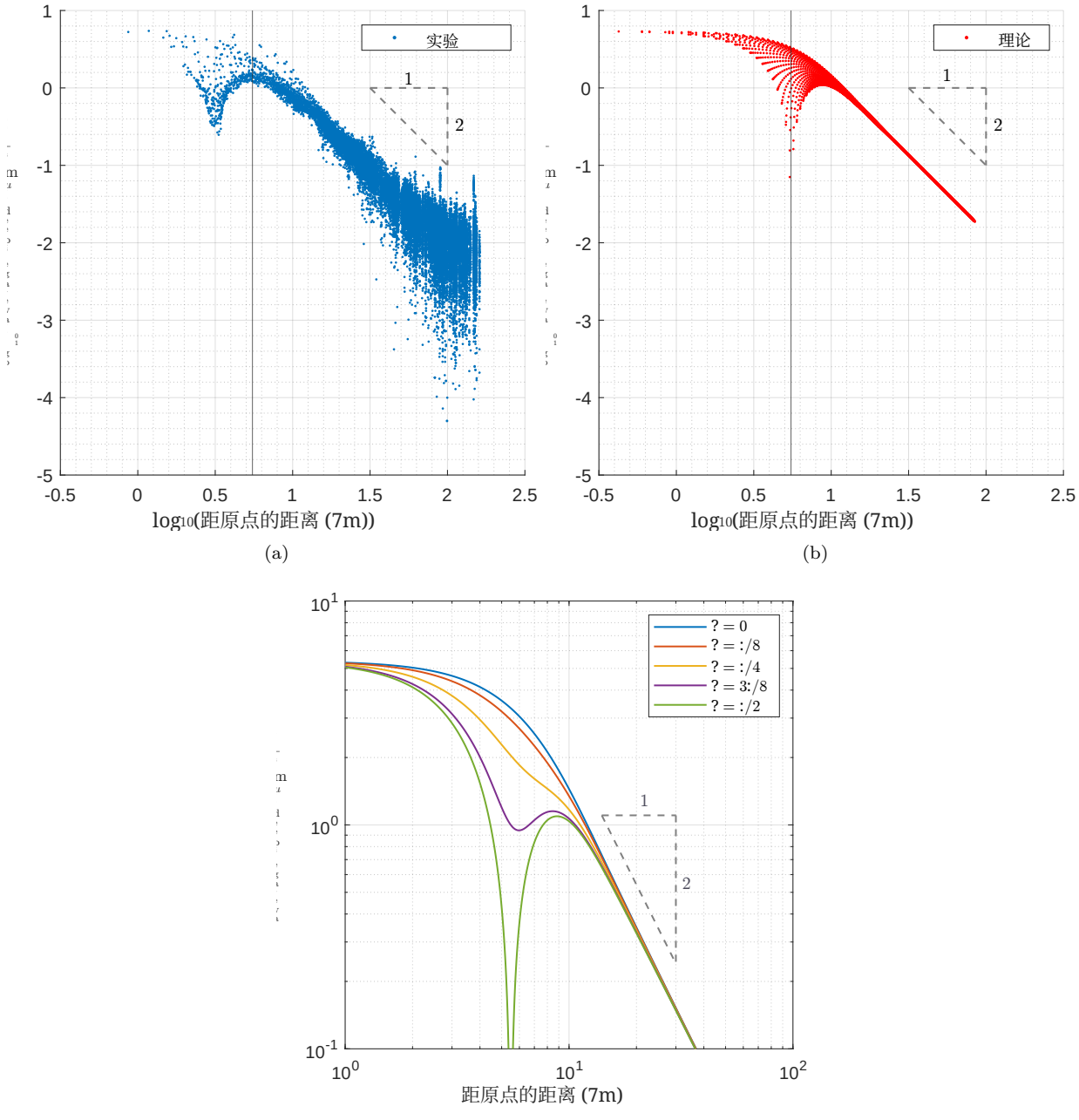


图28. 示踪微珠平均速度的实验数据与理论对比。左上（图28a）：实验数据 [34]。示踪微珠在中平面上的速度在 0.5 s 内取平均值，并绘制为相对于示踪微珠到原点（扫描路径中点）距离的双对数散点图。数据取自参考文献 [34] 中的图 2f，重新绘制。右上（图 28b）：图 28a的理论首阶预测，现以有量纲形式表示。为生成数据点，将示踪粒子置于正方形网格上，初始位置间距为 0.3 μm。在图 28a 和 28b中，黑色竖线标示了从原点到扫描路径终点的距离，即 $\ell = 5.5$ μm。下方（图 28c）：理论预测。物质点在一次扫描中的首阶速度平均值相对于物质点到原点的距离的双对数图，沿固定角度的径向线 $\phi = 0$，$\pi/8$，$\pi/4$，$3\pi/8$，以及 $\pi/2$ 相对于 x 轴。参数与图 28b相同。

示踪粒子的运动方向与热斑平移方向相反。

进一步探究这种近场行为，在 y 轴上闭合回路的中点处，物质点在一次扫描过程中的平均速度为零，正如图28c所示。相比之下，在实验数据（图28a）和理论对应结果（图28b）中，近场的数据点的平均速度并未达到零。比较图28b 和图28c中的两幅理论图可知，这可以用实验中示踪微珠之间的非零间距来解释。在我们的完全确定性流体动力学理论中，对散点图有所贡献的物质点之间存在间距，因而可以确保它们的平均速度均不恰好为零。

C. 被忽略物理效应的尺度分析

回想一下，在我们的模型中，由于涉及的长度尺度很小，我们忽略了重力和惯性。现在，我们通过尺度分析事后验证这一处理的合理性，事后。

作为对重力影响的提醒，水平密度梯度会产生静水压力的水平梯度，从而驱动重力流 [36, 43]。根据动量方程，这种重力驱动流的尺度为$\rho_0\alpha g h^3\Delta T_0/2\eta_0 a$。另一方面，由热膨胀驱动的流动——本文重点研究的对象——其尺度为 $\alpha\Delta T_0 U$。因此，重力驱动流与热膨胀驱动流之比的尺度为 $\rho_0 g h^3/2\eta_0 a U$，对于参考文献 [34] 中的实验，该比值约为 0.03。这确实很小，因此可以忽略重力。

类似地，我们可以根据无惯性问题的解，检查动量方程中惯性项相对于黏性项的大小。惯性项的尺度为

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{H}}}{\partial t} \sim \rho_0\alpha\Delta T_0\left\{2af^2, Uf, \frac{U^2}{2a}\right\}, \tag{127}$$

这里有三种情况，是因为流动有两个贡献项（启动和平移），也就是说，问题中存在两个不同的时间尺度（扫描周期和平流时间尺度）。黏性项的尺度为

$$\eta\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\mathrm{H}}}{\partial z^2} \sim \frac{\eta_0\alpha\Delta T_0}{h^2}\{2af, U\}. \tag{128}$$

因此，惯性项与黏性项之比的标度为（使用 $U = 2\ell f$）

$$\frac{\text{inertial term}}{\text{viscous term}} \sim \frac{\rho_0 h^2 f}{\eta_0}\left\{1, \frac{a}{\ell}, \frac{\ell}{a}, \frac{\ell^2}{a^2}\right\}. \tag{129}$$

最大 值在参考文献 [34]，的实验中约为 0.1，这确实很小 ll.

D. 理论模型的局限性

我们在图 27 和 28 中观察到实验结果与理论结果之间存在两个关键差异，下面对此进行讨论。首先，在实验数据（图 28a）中，示踪微珠平均速度的下降点距离扫描路径中点不到扫描路径长度的一半（即小于 ℓ），而在理论对应结果中，该下降点的位置略微更远（图 28b）。其次，在远场中，对于距原点的任意给定距离，实验数据显示出的速度范围远大于理论模型的预测。

1. *Lubrication limit*

我们的模型有哪些局限性可能导致这些差异？首先，为了简化动量方程，我们采用了润滑极限。这对应于特征水平长度尺度远大于垂直尺度的情形；具体而言，即热斑直径远大于平行板之间的间距。然而，在对示踪粒子平均速度的空间衰减进行量化的实验中

, [34], 特征热斑直径为 $2a = 8$–9 μm，平行板之间的间距为 $h = 15$ μm，也就是说，特征热斑直径与板间距相当。在近场，这种长宽比为 1 阶的情况（而非薄膜几何）预计会变得重要，因此或可解释预测结果与实验测得的示踪粒子平均速度低谷位置之间的细微差异。

2. *Diffusion of tracer beads*

其次，我们的理论模型是完全确定性的；我们未纳入任何噪声。我们将示踪微珠建模为物质点，仅由热斑诱导的流动携带。在实验中， [34], 示踪微珠的半径为 $b = 0.25$ μm，这远小于流场发生变化的长度尺度，即热斑的特征半径 $a = 4$ μm。与示踪粒子的平均（确定性）速度相比，热噪声的贡献有多大？示踪粒子速度的扩散标度为 D/b，其中 D是与示踪微珠相关的扩散系数。根据斯托克斯–爱因斯坦关系，该扩散系数按以下方式标度：

$$D \approx \frac{k_{\mathrm{B}} T_0}{6\pi\eta_0 b}, \tag{130}$$

其中， k_B 是玻尔兹曼常数， T_0 是参考温度， η_0 是流体的参考黏度。因此，速度的扩散标度为

$$\frac{D}{b} \approx \frac{k_{\mathrm{B}} T_0}{6\pi\eta_0 b^2}. \tag{131}$$

取 $k_{\mathrm{B}} \approx 10^{-23}$ J K^{-1}、 $T_0 \approx 300$ K和 $\eta_0 \approx 10^{-2}$ Pa s，我们发现 D/b 约为0.1 μm s^{-1}。

这与确定性结果相比如何？正如我们在图28a中所看到的，示踪粒子平均速度随空间位置而变化。在近场中，示踪粒子的平均速度约为 1 μm s^{-1}，远大于扩散速度。因此，在近场中，我们通常可以忽略噪声的影响。由此，我们的确定性理论成功预测了图 28中速度与半径双对数图的包络函数形状。

在闭合环路轨迹的中部（图 27b），我们的确定性理论预测示踪粒子的平均速度为零（图28c）。另一方面，实验和理论散点图（分别为图 28a 和 28b）都只显示出平均速度的一个低谷。如前文所述，在我们的确定性理论中，对散点图有贡献的示踪微珠之间的间距可以解释这一现象；噪声也可能促成这一特征。

在远场中，我们的确定性理论预测，示踪粒子的平均速度会按照平方反比定律衰减。因此，对于远离扫描路径的示踪粒子而言，噪声变得十分重要。这或许有助于解释实验双对数图中速度与半径关系在远场出现的离散（图 28a），而在确定性流体动力学理论中并未观察到这种现象（图 28b）。值得注意的是，当平均速度小于约 0.1 μm s^{-1}时，这种离散尤为明显；而这正是本文预测的示踪粒子平均速度的扩散尺度。在文献 [34], 中，研究人员利用反复扫描的热斑所诱导的输运来操纵微珠，并且需要借助反馈回路来应对粒子位置的随机性。我们的流体动力学理论定量预测了：相较于确定性流动，这种随机性会在何处变得重要。

3. *Temperature profile*

在我们的流体动力学理论中，为了以解析方式求解方程而施加的二维高斯温度分布是一种理想化设定。微流控实验中的温度扰动 [34]可能不具有圆对称性，这取决于所采用的扫描频率。正弦振幅函数也

是理想化的，其选择基于早期的数值研究 [28]。不过，需要强调的是，我们的理论结果表明，物质点的平均速度关于温度扰动呈二次关系；对于具有任意形状和任意时变振幅的热斑，这一结论同样成立。

还需注意，我们的理论处理的是与 z 无关的温度分布，因为我们假设平行板之间的间距远小于热斑直径。在实验中，温度分布是三维的，水平方向和垂直方向的长度尺度大小相近。激光束具有束腰；激光束的宽度沿 z 方向变化，不过这种变化确实比水平方向的指数衰减更缓慢。相应地，温度扰动也具有束腰，而我们的理论未考虑这一点。

4. Energy balance

最后，在我们的理论中，我们预先给定温度场，再求解动量方程和质量方程。实际上，温度分布满足能量平衡方程 [36], ，其中流体受激光光斑加热，热量通过流体扩散并随流动平流，而流动又取决于温度场。这使热传递问题与流体流动问题相互耦合。尺度分析表明，热量的平流（$\mathbf{u}\cdot\nabla T$）远小于扫描导致的固定位置处温度变化率（$\partial T/\partial t$）。然而，将这一温度变化率与热扩散进行比较，可得热佩克莱数的标度为

$$\mathrm{Pe}_{\mathrm{thermal}} \sim \frac{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}{\nabla\cdot(k\nabla T)} \sim \frac{(2a)^2\rho_0 c_p f}{k}\left\{1, \frac{\ell}{a}\right\}, \tag{132}$$

其中，c_p 是流体的比热容，k 是流体的热导率；同样，这两种可能的标度源于温度分布中出现的两个时间尺度。只要扫描频率足够低，佩克莱数就很小；但对于参考文献 [34]中的某些实验，该数值可能约为 **1**。因此，未来的理论模型可以通过求解输运方程来计算温度，而不是预先指定温度场。

VI. 总结与展望

总之，受人工细胞质流近期实验进展的启发，本文提出了一个解析理论模型，用于描述扫描热斑所诱导的流体流动和输运。在第 II 节中，我们对两块平行板之间黏性流体的瞬时流场进行了解析求解；该流场由预先设定的小幅温度变化驱动，也就是说，考虑的是无量纲热膨胀系数 α 和热黏度系数 β 均较小的极限。我们的模型允许热斑的振幅随时间变化，扫描路径的长度也可以任意。我们从数学上证明，流动由热膨胀驱动。瞬时流场的主阶项是仅由流体热膨胀引起的势流，与热黏度系数无关，这与早期研究 [29]一致。具体而言，该流场与特征温度变化成正比，且为 α 阶。我们证明，只要热斑振幅随时间变化，远场瞬时流动就是源流（或汇流），这是由热斑的开启（或关闭）引起的。一般而言，这种流动在远场占主导地位，超过由热斑平移引起的流体动力学源偶极子。不过，与热斑平移相关的流动构成了我们解释热黏性流动所致净输运的基础。

接下来，我们求解二次阶的瞬时流动，即 $\alpha\beta$ 阶和 α^2阶的流动，因为这实际上会导致物质点产生主阶净位移。这两者都是特征温度扰动的二次项。热黏度变化对首阶流动的首个修正出现在 $\alpha\beta$ 阶，由两项贡献组成：与热斑平移相关、受温度分布调制的首阶流动，以及另一种势流。受温度分布调制的首阶流动，是热黏度变化所产生的直观效应，正如前文所述 [29, 30]。随后我们从数学上看到，势流

在 $\alpha\beta$ 阶确保流动的不可压缩性，并且是 $\alpha\beta$ 阶流动远场的唯一成因；该远场是一个流体力学源偶极子。

另一个二次阶流动，即阶数为 α^2 的流动，是可压缩的。在远场，这种流动同样是流体动力学源偶极子，其方向与阶数为 $\alpha\beta$ 时的源偶极子相反。

接下来，我们在第 III 节采用拉格朗日视角，考察了一个扫描周期内物质点的轨迹。我们解析地求出了单个物质点的主阶轨迹随时间变化的关系。物质点的位移通常出现在 α阶。在实验中 [34], ，热斑沿有限扫描路径反复扫描，诱发的输运则通过示踪粒子进行可视化。由于记录的曝光时间远长于扫描周期，我们看到的是这些示踪粒子的净位移。然而，我们证明，对于任意热斑振幅和形状，以及任意扫描路径长度，物质点经过一次完整扫描后在 α 阶的净位移均为零，这一结果推广了早期研究 [29]。

随后，我们在第 IV节讨论了物质点的高阶净位移。物质点的主阶净位移出现在二次阶，因此与热斑振幅的平方成正比。它可以出现在 $\alpha\beta$ 阶，也可以出现在 α^2阶；但对于实验所用的流体， [30, 34], 阶$\alpha\beta$ 贡献占主导。在 $\alpha\beta$阶，净位移源于局部受热流体黏度降低所导致的流动增强。这使扫描路径附近产生强烈的向左输运，详见参考文献 [30]。利用解析解，我们进一步表明，示踪粒子的远场平均速度呈源偶极子形式，在远离 x 轴处产生向右输运，这一特征继承自同阶的瞬时流动。对于其他流体，α^2 阶对平均拉格朗日速度的贡献也可能很重要；它在远场同样呈源偶极子形式。

在第 V节中，我们重新考察了物质点的净位移，并将其与实验中经过多次扫描后物质点的轨迹进行了比较 [34]。具体而言，我们的流场解析表达式使我们能够了解整个空间中物质点的净位移，而不仅限于扫描路径上的物质点。我们发现，对于现实的参数值，我们的模型能够与实验结果定量吻合，并解释了实验发现的示踪粒子平均速度作为源偶极子时的 $1/r^2$ 远场空间衰减。

我们还结合文献 [34], 中的具体实验讨论了模型的局限性，其中最重要的是热噪声、润滑近似以及预设的温度分布所起的作用。当然，未来的研究可以重新审视这些简化假设，从而进一步深入理解热黏性流体流动。

我们的分析还提出了可用于验证该模型的潜在后续实验。例如，现有成像工作主要关注激光重复扫描所诱导的净输运，而采用较低激光扫描频率的新实验或许能够实现瞬时流体流动的可视化，并将其与理论进行比较。激光扫描的特性选择，例如振幅函数或热斑的形状，也可以针对具体应用进行研究和优化。

除了加深对文献 [34], 中实验的基础理解外，我们的工作还提供了一个严谨的理论平台，有助于以更低的计算开销设计未来的 FLUCS 实验。事实上，在本研究中，我们不仅推导出了所有输运量如何随问题参数变化，还推导出了所有数学前因子。因此，我们的方法能够预测热黏性流体流动在空间和时间上的具体特征。

即使在本文所考虑的几何设置下，我们的工作也可以扩展并应用于激光扫描路径沿任意二维曲线移动的情况，而非本文假设的直线段。我们还可以考虑同时沿多条扫描路径扫描多个热斑的局部加热，从而生成新的流体流动与输运模式。这反过来或可实现对微米尺度颗粒的更精细控制，并有望应用于热捕获、微型机器人学和医学领域 [31, 44–46]。除了本文讨论的平行板装置外，未来的理论建模还可研究不同几何形状中以类似方式生成的热黏性流动，并特别探究限域在流动生成中的作用。

此外，虽然在我们的微流控实验模型中，我们假设甘油-水溶液的流动具有牛顿行为 [34], 但我们预计，在细胞生物学中的 FLUCS 实验里 [28], 细胞质的流动反而会表现出复杂的流变行为。特别是，鉴于激光产生的强迫项具有时间周期性，

只要扫描速率快于流体的相关弛豫速率，就可能诱导出与牛顿情况在性质上不同的流动。FLUCS 实验中使用的典型扫描速率约为 1 kHz，而细胞流动中的典型弛豫时间通常约为十分之几秒 [47], 因此，在许多 FLUCS 应用中，预计黏弹性会发挥作用。

附录 A：在润滑极限下推导动量方程的标度论证

本附录通过标度论证，给出润滑极限下动量方程（7）–（9）的推导，正如第 II A 节所述。回顾第 II A 节，我们提出了两个假设：板的垂直间距远小于特征热斑直径 $h \ll 2a$，且温度分布与 z $\frac{\partial \Delta T}{\partial z} = 0$无关。水平坐标 x 和 y 以特征热斑半径 a 为标度（省略数值因子）；垂直坐标 z 以板间距 h为标度。因此，关于水平坐标的偏导数以 $\partial/\partial x\, \partial/\partial y \sim 1/a$为标度，而关于 z 的偏导数以 $\partial/\partial z \sim 1/h$为标度。我们将 u 记为水平速度标度，将 w 记为垂直速度标度。在参考温度 T_0下，流体的剪切黏度、体积黏度和密度分别以其参考值 η_0、 κ_0和 ρ_0为标度。

为了推导水平和垂直流体速度的相对标度，我们首先考虑质量守恒方程。该方程可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathrm{H}} \cdot (\rho \mathbf{u}_{\mathrm{H}}) + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0, \tag{A1}$$

其中 $\mathbf{u}_{\mathrm{H}} \equiv (u, v)$ 是水平速度场，水平梯度为 $\nabla_{\mathrm{H}} \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$。考察该方程中第二项和第三项的相对标度时，需要考虑三种情况：(i) $u/a \sim w/h$，(ii) $u/a \gg w/h$，以及 (iii) $u/a \ll w/h$。可以证明，情况 (ii) 和情况 (iii) 均不一致，会导致矛盾。在情况 (ii) 中，方程 (A1) 中的项 $\partial_{(\rho w)\ \partial z}$ 被忽略，而由另外两项占主导。尽管标度论证在情况 (ii) 下得出的动量方程与情况 (i) 下相同，但所得的抛物线型水平速度分布无法满足情况 (ii) 假设下的主导阶质量守恒方程。在情况 (iii) 中，方程 (A1) 中的水平贡献 $\nabla_{\mathrm{H}} \cdot (\rho \mathbf{u}_{\mathrm{H}})$ 被忽略，而由另外两项占主导。因此，此时可以直接对质量守恒方程关于 z 积分（注意密度场与 z无关），以求得垂直速度场；但所得结果无法满足两块平行板上的无滑移边界条件，因此这种情况同样不一致。

唯一　因此，联系水平速度和垂直速度的唯一一致标度关系为

$$\frac{u}{a} \sim \frac{w}{h}. \tag{A2}$$

本文中，我们求解水平速度场。由此，可通过对质量守恒方程关于 z积分来计算垂直速度场 w ；因此可验证上述标度是一致的。

接下来我们考虑动量方程。如第II A节式（7）–（9）下方所述，由于所涉及的长度尺度较小且具有薄膜几何，我们忽略惯性和重力；我们将在第$V\,C$ 节中通过标度论证对此进行事后验证。根据式（5）和式（6），因此，以带下标记法（$i = 1,\ 2,\ 3$）表示的动量方程简化为

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \kappa \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \kappa}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \tag{A3}$$

我们注意到，由于假设温度分布与 z 无关，且体积黏度和剪切黏度是温度的函数，因此体积黏度和剪切黏度也与 z 无关；相应地，它们对 z 的导数 $\frac{\partial \kappa}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ 均为零。现在我们列出水平动量方程中所有项的标度 —
—

方程（$i = 1,\ 2$）为

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \sim \frac{p}{a}; \tag{A4}$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \frac{\partial \kappa}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \sim \frac{\kappa_0}{a}\max\left\{\frac{u}{a}, \frac{w}{h}\right\} \sim \frac{\kappa_0 u}{a^2},\ \text{using } \frac{u}{a} \sim \frac{w}{h}; \tag{A5}$$

$$\eta \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sim \eta_0 u \max\left\{\frac{1}{a^2}, \frac{1}{h^2}\right\} \sim \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \sim \frac{\eta_0 u}{h^2},\ \text{using } h \ll a; \tag{A6}$$

$$\eta \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \sim \frac{\eta_0}{a}\max\left\{\frac{u}{a}, \frac{w}{h}\right\} \sim \frac{\eta_0 u}{a^2},\ \text{using } \frac{u}{a} \sim \frac{w}{h}; \tag{A7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \sim \frac{\eta_0 u}{a^2},\ \text{using } \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \tag{A8}$$

比较这些标度，我们得到 $\frac{\eta_0 u}{a^2} \ll \frac{\eta_0 u}{h^2}$，因为 $h \ll a$。我们还假设 κ_0 和 η_0 具有相近的幅值，因此有 $\frac{\kappa_0 u}{a^2} \ll \frac{\eta_0 u}{h^2}$。在润滑极限下，水平动量方程中的主阶平衡，用标度表示为

$$\frac{p}{a} \sim \frac{\eta_0 u}{h^2}, \tag{A9}$$

由此我们推导出压力标度，该标度与经典不可压缩情形中的压力标度相同。

Ne接下来，我们列出垂直动量方程中所有项的标度：

$$\frac{\partial p}{\partial z} \sim \frac{p}{h} \sim \frac{\eta_0 a u}{h^3},\ \text{using Eq. (A9)}; \tag{A10}$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \sim \frac{\kappa_0}{h}\max\left\{\frac{u}{a}, \frac{w}{h}\right\} \sim \frac{\kappa_0 u}{ah},\ \text{using } \frac{u}{a} \sim \frac{w}{h}; \tag{A11}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial z}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \sim 0,\ \text{using } \frac{\partial \kappa}{\partial z} = 0; \tag{A12}$$

$$\eta \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} \sim \eta_0 w \max\left\{\frac{1}{a^2}, \frac{1}{h^2}\right\} \sim \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \sim \frac{\eta_0 w}{h^2} \sim \frac{\eta_0 u}{ah},\ \text{using } h \ll a \text{ and } \frac{u}{a} \sim \frac{w}{h}; \tag{A13}$$

$$\eta \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \sim \frac{\eta_0}{h}\max\left\{\frac{u}{a}, \frac{w}{h}\right\} \sim \frac{\eta_0 u}{ah},\ \text{using } \frac{u}{a} \sim \frac{w}{h}; \tag{A14}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} \sim \frac{\eta_0 w}{a^2} \sim \frac{\eta_0 u h}{a^3},\ \text{using } \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \text{ and } \frac{u}{a} \sim \frac{w}{h}; \tag{A15}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial z} \sim \frac{\eta_0 u}{ah},\ \text{using } \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0; \tag{A16}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \sim 0,\ \text{using } \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \tag{A17}$$

我们看到，垂直压力梯度的标度至少是垂直动量方程中其他各项标度的 $a^2/h^2 \gg 1$ 倍；垂直压力梯度未达到平衡，这与不可压缩流动的标准润滑理论相同。

因此，润滑极限下的动量方程最终可写为

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{A18}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \tag{A19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{A20}$$

如式（7）–（9）所述。

附录 B： β^n阶瞬时流动解的推导

在本附录中，我们推导出第IIE节所述的结论：对于任意给定的、在无穷远处衰减的温度分布 ΔT，对所有 $n \geq 0$，在 β^n 阶均不存在流动。我们采用归纳法进行证明。

对于基例，在式 β^0 （25）的阶，我们只需考虑拉普拉斯方程

$$\nabla^2 p_{0,0} = 0, \tag{B1}$$

压力$p_{0,\ 0}$，并满足压力梯度在无穷远处衰减这一边界条件。该方程的解唯一，除去一个加性常数；不失一般性，我们将该常数取为零，解为

$$p_{0,0} = 0. \tag{B2}$$

根据式（24）的速度扰动展开，可得相应的流场

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0,0} &= -\nabla p_{0,0} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{B3}$$

也就是说，在 1 阶时，没有流动。从物理上看，这是可以预期的，因为在热膨胀系数 α 和热黏度系数 β都很小的极限下，流体流动与温度变化之间的耦合作用较弱，因此加热引起的体积变化和流动也较弱。

对于归纳步骤，我们假设 $p_{0,\ n-k} = 0$ 对所有满足 k 的 $1 \leq k \leq n$均成立，其中 $n \geq 1$。我们将证明这意味着 $p_{0,\ n} = 0$ （同样不失一般性地将任意常数取为零），由此通过归纳法完成证明。式（ β^n 25）的阶项为

$$\nabla^2 p_{0,n} + \nabla \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} (\Delta T)^k \nabla p_{0,n-k} \right] = 0. \tag{B4}$$

根据归纳假设，泊松方程变为拉普拉斯方程，

$$\nabla^2 p_{0,n} = 0, \tag{B5}$$

因此，再次利用无穷远处的边界条件， β^n 阶的解为

$$p_{0,n} = 0, \tag{B6}$$

如所断言。该 结果完成了归纳法证明，并对应于以下给出的速度场

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0,n} &= -\sum_{k=0}^{n} (\Delta T)^k \nabla p_{0,n-k} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{B7}$$

即，在 β^n阶不存在流动。

致谢

我们感谢 Francesco Boselli 和 John Lister 提供宝贵的讨论。我们谨此感谢工程与物理科学研究委员会（向 W.L. 提供博士生奖学金）、欧洲研究委员会（向 M.K. 提供“GHOSTs”项目资助，编号 8953619），以及欧洲研究委员会通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划（向 E.L. 提供资助，协议编号 682754）提供的经费支持。

[1] S. Vogel, *Life in Moving Fluids: The Physical Biology of Flow - Revised and Expanded Second Edition*（普林斯顿大学出版社，2020 年）。

[2] G. K. Batchelor、H. K. Moffatt 和 M. G. Worster， *Perspectives in fluid dynamics: a collective introduction to current research*（剑桥大学出版社，2003）。[3] R. Ferrari 和 C. Wunsch，“海洋环流动能：储库、源与汇”，《流体力学年度评论》41，253–282（2009）。[4] B. M. Hickey、R. M. Kudela、J. Nash、K. W. Bruland、W. T. Peterson、P. MacCready、E. J. Lessard、D. A. Jay、N. S. Banas、A. M. Baptista、E. P. Dever、P. M. Kosro、L. K. Kilcher、A. R. Horner-Devine、E. D. Zaron、R. M. McCabe、J. O. Peterson、P. M. Orton、J. Pan 和 M. C. Lohan，“河流对陆架生态系统的影响：导论与综述”（2010）。[5] A. R. Horner-Devine、R. D. Hetland 和 D. G. MacDonald，“沿岸河流羽状流中的混合与输运”，《流体力学年度评论》47，569–594（2015）。[6] E. de Langre，“风对植物的影响”，《流体力学年度评论》40，141–168（2008）。[7] J. B. Grotberg，“呼吸流体力学与输运过程”，《生物医学工程年度评论》3，421–457（2001）。[8] O. E. Jensen 和 I. L. Chernyavsky，“人类胎盘中的血流与输运”，《流体力学年度评论》51，25–47（2019）。[9] T. W. Secomb，“微循环中的血流”，《流体力学年度评论》49，443–461（2017）。[10]S. Nonaka、S. Yoshiba、D. Watanabe、S. Ikeuchi、T. Goto、W. F. Marshall 和 H. Hamada，“节点纤毛向后倾斜使左右不对称性从头形成”，PLoS Biol. 3，e268（2005）。[11] E. Lauga，*The Fluid Dynamics of Cell Motility*（剑桥大学出版社，英国剑桥，2020）。[12] A. Mogilner 和 A. Manhart，“细胞内流体力学：细胞质流动与活性细胞骨架凝胶的耦合”，《流体力学年度评论》50，347–370（2018）。[13] B. Corti，*Osservazioni microscopiche sulla tremella e sulla circolazione del fluido in una pianta acquajuola*（Rocchi，1774）。[14] N. S. Allen 和 R. D. Allen，“绿色植物中的细胞质流”，《生物物理与生物工程年度评论》7，497–526（1978）。[15] N. Kamiya，“细胞质流的物理和化学基础”，《植物生理学年度评论》32，205–236（1981）。[16] P. K. Hepler、L. Vidali 和 A. Y. Cheung，“高等植物中的极化细胞生长”，《细胞与发育生物学年度评论》17，159（2001）。[17] J.-W. van de Meent、A. J. Sederman、L. F. Gladden 和 R. E. Goldstein，“利用磁共振测速测量单个植物细胞中的细胞质流”，《流体力学杂志》642，5–14（2010）。[18] S. Ganguly、L. S. Williams、I. M. Palacios 和 R. E. Goldstein，“ *Drosophila* 卵母细胞中的细胞质流随驱动蛋白活性而变化，并与微管细胞骨架结构相关”，《美国国家科学院院刊》109，15109–15114（2012）。[19] R. E. Goldstein 和 J.-W. van de Meent，“关于细胞质流的物理学视角”，Interface Focus 5，20150030（2015）。[20] N. W. Goehring、P. K. Trong、J. S. Bois、D. Chowdhury、E. M. Nicola、A. A. Hyman 和 S. W. Grill，“通过平流触发成图案系统使 PAR 蛋白极化”，《科学》334，1137–1141（2011）。[21] W. F. Pickard，“ *Chara braunii*中的原生质流的流体力学方面”，《原生质》82，321–339（1974）。[22] R. J. Ellis，“大分子拥挤：显而易见却未受重视”，Trends Biochem. Sci. 26，597–604（2001）。[23]P. Hochachka，“细胞内循环的代谢影响”，《美国国家科学院院刊》96，12233–12239（1999）。[24]R. E. Goldstein、I. Tuval 和 J.-W. van de Meent，“细胞质流的微流体学及其对细胞内输运的影响”，《美国国家科学院院刊》105，3663–3667（2008）。[25] J.-W. van de Meent、I. Tuval 和 R. E. Goldstein，“自然界的微流体输运器：高 P´eclet 数下的旋转性细胞质流动”，Phys. Rev. Lett. 101，178102（2008）。[26] T. Shinar、M. Mana、F. Piano 和 M. J. Shelley，“单细胞 *Caenorhabditis elegans* 胚胎中由细胞质驱动的基于微管的运动模型”，《美国国家科学院院刊》108，10508–10513（2011）。[27] K. Yi、J. R. Unruh、M. Deng、B. D. Slaughter、B. Rubinstein 和 R. Li，“通过 Arp2/3 复合物驱动的细胞质流，在小鼠卵母细胞中动态维持减数分裂纺锤体的不对称位置”，Nat. Cell Biol. 13，1252–1258（2011）。[28] M. Mittasch、P. Gross、M. Nestler、A. W. Fritsch、C. Iserman、M. Kar、M. Munder、A. Voigt、S. Alberti、S. W. Grill 和 M. Kreysing，“对细胞内流动的非侵入性扰动揭示细胞组织的物理原理”，Nat. Cell Biol. 20，344–351（2018）。[29] F. M. Weinert、J. A. Kraus、T. Franosch 和 D. Braun，“沿行波由热黏性膨胀诱导的微尺度流体流动”，Phys. Rev. Lett. 100，164501（2008）。[30] F. M. Weinert 和 D. Braun，“利用热黏性膨胀沿任意微尺度图案光学驱动流体流动……”

移流”，《应用物理学杂志》**104**, 104701 (2008).[31] M. Kreysing, “探究物理运动在发育中的功能作用”，《发育细胞》**51**, 135–144 (2019).[32] N. T. Chartier, A. Mukherjee, J. Pfanzelter, S.F¨urthauer, B. T. Larson, A. W. Fritsch, R. Amini, M. Kreysing, F. J¨ulicher, and S. W. Grill, “水力学不稳定性驱动线虫生殖系中的细胞死亡决策”，《自然·物理》**17**, 920–925 (2021).[33] M. Mittasch, V. M. Tran, M. U. Rios, A. W. Fritsch, S. J. Enos, B. Ferreira Gomes, A. Bond, M. Kreysing, and J. B. Woodruff, “材料性质的调控变化是有丝分裂退出期间中心体解体的基础”，《细胞生物学杂志》**219** (2020).[34] E. Erben, B. Seelbinder, I. D. Stoev, S. Klykov, N. Maghelli, and M. Kreysing, “通过光学控制热黏性流动实现颗粒的基于反馈的定位与扩散抑制”，《光学快报》**29**, 30272–30283 (2021).[35] I. D. Stoev, B. Seelbinder, E. Erben, N. Maghelli, and M. Kreysing, “光学生成的谐波流体动力学陷阱中的高灵敏度力测量”，eLight **1**, 1–9 (2021).[36] E. Yariv and H. Brenner, “利用非定常温度场实现流动可视化”，《流体物理学》**16**, L95–L98 (2004).[37] Y. Hayashi, “植物细胞原生质流的流体动力学研究”，《理论生物学杂志》**85**, 451–467 (1980).[38] I. G. Donaldson, “原生质流驱动力的估算 *Nitella*”，《原生质》**74**, 329–344 (1972).[39] J. Rumble, *CRC Handbook of Chemistry and Physics* (CRC出版社有限公司 博卡拉顿，佛罗里达州，2017).[40] J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics* (普伦蒂斯霍尔，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1965).[41] W. M. Slie, A. R. Donfor Jr., and T. A. Litovitz, “甘油水溶液中的超声剪切与纵向测量”，《化学物理学杂志》**44**, 3712–3718 (1966).[42] L. G. Leal, *Advanced Transport Phenomena: Fluid Mechanics and Convective Transport Processes* (剑桥大学出版社，2007).[43] J. Simpson, “实验室、大气和海洋中的重力流”，《流体力学年度评论》**14**, 213–234 (1982).[44] C. B. Mast, S. Schink, U. Gerland, and D. Braun, “热梯度中的聚合增强”，《美国国家科学院院刊》**110**, 8030–8035 (2013).[45] N. Osterman and D. Braun, “微尺度热光分子筛”，《应用物理快报》**106**, 073508 (2015).[46]M. Morasch, D. Braun, and C. B. Mast, “热流驱动的寡核苷酸凝胶化可分离单碱基差异”，《应用化学国际版》**128**, 6788–6791 (2016).[47] A. R. Bausch, W. M¨oller, and E. Sackmann, “利用磁镊测量活细胞中的局部黏弹性与力”，《生物物理学杂志》**76**, 573–579 (1999).