arXiv:2303.03074v2 [math.NA] 9 May 2023

大规模偏微分方程约束优化的自适应局部化降阶基方法

Tim Keil、Mario Ohlberger 和 Felix Schindler

分析与数值研究所，明斯特大学，爱因斯坦街62号，48149 明斯特，德国。
https://www.wwu.de/AMM/ohlberger
{tim.keil,mario.ohlberger,felix.schindler}@uni-muenster.de

摘要。 本文介绍并通过数值计算评估一种经过认证的自适应局部化降阶基方法，将其作为信赖域优化方法中的局部模型，用于受偏微分方程约束的参数优化。

关键词： 局部化降阶基方法 · 信赖域优化 · 在线增广。

1 引言

我们关注多尺度或大规模偏微分方程约束参数优化问题的高效且有认证的近似。具体而言，对于参数空间 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^P$, $P \in \mathbb{N}$，我们寻求 **(P)** 的一个局部解，即

$$\min_{\mu \in \mathcal{P}} \mathcal{J}(u_\mu, \mu), \qquad \text{with } \mathcal{J} : V \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}, \tag{P.a}$$

其中 $u_\mu \in V$ 满足参数 $\mu \in \mathcal{P}$ 对应的参数化状态方程：

$$a(u_\mu, v; \mu) = l(v; \mu) \qquad \text{for all } v \in V. \tag{P.b}$$

这里，V 是一个希尔伯特空间；对于每个可容许参数 $\mu \in \mathcal{P}$，$a(\cdot, \cdot; \mu) : V \times V \to \mathbb{R}$ 表示一个连续强制双线性型，且 $l(\cdot; \mu) \in V'$。

特别是，我们关注多尺度或大规模应用，具体而言，状态方程 **(P.b)** 是如下形式偏微分方程的弱形式

$$-\nabla \cdot \big(A(\mu) \nabla u_\mu\big) = f(\mu) \ \text{ in } \Omega, \qquad u_\mu = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界区域，A 表示具有丰富结构的扩散张量；若采用经典有限元类方法对其进行近似，将导致状态空间需要极高维的近似空间。另一方面，对于高维参数空间 $\mathcal{P}$，由于离线计算时间过长，对相关方程采用模型降阶也存在困难。

近期已有研究探讨了在此背景下将高效自适应模型降阶与信赖域优化方法相结合：[5,10,12]采用全局降阶基模型，[6]则采用降阶基局部正交分解。后者是首项基于空间局部化的研究，旨在解决经典全局方法的计算成本

过高、难以承受的问题。在本文中，我们提出一种基于局部化降阶基方法（LRBM） [8,9]的信赖域（TR）方法新变体。关于局部化模型降阶方法的综述，请参阅 [3] ； 关于非线性问题的最新进展，请参阅 [11] 。

下面我们首先回顾椭圆多尺度问题的 LRBM。随后，我们为模型问题 (P) 提出一种新的、具有认证和自适应在线增广功能的 TR-LRBM 方法。最后，在第 5 节中，我们通过数值实验展示所提出方法的全部优势。

2 最优性系统：原问题和对偶方程

(P.b) 的原残差对于优化和后验误差估计都至关重要。给定 $u \in V$、 $\mu \in \mathcal{P}$，我们将与 (P.b) 相关联的原残差 $r_\mu^{\mathrm{pr}}(u) \in V'$ 定义为

$$r_\mu^{\mathrm{pr}}(u)[v] := l(v;\mu) - a(u,v;\mu) \qquad \text{for all } v \in V. \tag{2}$$

遵循先优化后离散的方法，我们基于一阶必要最优性系统来构建离散化和模型降阶方法，即（详情及更多参考文献请参见 [1] ）

$$r_{\bar\mu}^{\mathrm{pr}}(\bar u)[v] = 0 \qquad \text{对于所有 } v \in V, \tag{3a}$$
$$\partial_u \mathcal{J}(\bar u,\bar\mu)[v] - a(v,\bar p;\bar\mu) = 0 \qquad \text{对所有 } v \in V, \tag{3b}$$
$$(\partial_\mu \mathcal{J}(\bar u,\bar\mu) + \nabla_\mu r_{\bar\mu}^{\mathrm{pr}}(\bar u)[\bar p]) \cdot (\nu - \bar\mu) \geq 0 \qquad \text{对所有 } \nu \in \mathcal{P}, \tag{3c}$$

其中我们采用适当的可微性假设。由 (3b) 可推得所谓的伴随方程 及其相应残差

$$r_\mu^{\mathrm{du}}(u_\mu,p_\mu)[q] := \partial_u \mathcal{J}(u_\mu,\mu)[q] - a(q,p_\mu;\mu) = 0 \qquad \text{for all } q \in V, \tag{4}$$

其解为 $p_\mu \in V$，其中 $\mu \in \mathcal{P}$ 固定，且 $u_\mu \in V$ 是 (P.b) 的解。

由于 (P.b) 存在唯一解，我们使用所谓的约化成本泛函 $\hat{\mathcal{J}}\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ \mu \mapsto \hat{\mathcal{J}}(\mu) := \mathcal{J}(u_\mu,\ \mu)$。需要指出的是，此处的“约化”一词与下文介绍的模型降阶无关。对于给定的 $\mu \in \mathcal{P}$，利用伴随方法可以计算 $\mathcal{J}$ 的一阶导数，即梯度 $\nabla_\mu \hat{\mathcal{J}}\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}^P$ 由 $\nabla_\mu \hat{\mathcal{J}}(\mu) = \nabla_\mu \mathcal{J}(u_\mu,\ \mu) + \nabla_\mu r_\mu^{\mathrm{pr}}(u_\mu)[p_\mu].$ 给出

3 DG-MsFEM 与局部化降阶基方法

下面我们介绍一种适用于原问题和对偶问题的局部离散格式，该格式基于非重叠、非协调的区域分解，并采用粗网格上的间断伽辽金方法。我们仅演示原方程，因为对偶方程的类似方法很容易推广。

为了为我们的模型降阶方法推导全阶模型（FOM），我们假设底层区域 Ω 由一个包含子区域 $T_j \in \mathcal{T}_H$的粗网格 $\mathcal{T}_H$ 非重叠地划分而成，$j = 1,\ \ldots N_H$。

此外，每个单元 T_j 还通过局部三角剖分 $\tau_h(T_j)$进一步划分，以解析多尺度问题 (1) 的所有细尺度特征。然后，我们将全局细尺度划分 τ_h 定义为其所有局部贡献的并集，即 $\tau_h = \bigcup_{j=1}^{N_H} \tau_h(T_j)$。对于某个 $\omega \subseteq \Omega$上的三角剖分 $\tau_h(\omega)$，令 $H^p\big(\tau_h(\omega)\big) := \big\{v \in L^2(\omega) \;\big|\; v|_t \in H^p(t) \quad \forall t \in \tau_h(\omega)\big\}$ 表示 $\tau_h(\omega)$上阶数为 $p \in \mathbb{N}$ 的分片 Sobolev 空间。于是， $H^p(\tau_h)$自然继承分解 $H^p(\tau_h) = \bigoplus_{j=1}^{N_H} H^p(\tau_h(T_j))$。我们进一步定义粗尺度近似空间 $V^c := Q^1(\mathcal{T}_H) \subset H^2(\mathcal{T}_H)$，并在每个粗单元 T 上定义细尺度校正空间 $V^f(T) := S^1(\tau_h(T)) \subset H^1(T)$，其中 $Q^1(\mathcal{T}_H)$表示标准非协调有限元空间， $S^1(\tau_h(T))$表示 $\mathcal{T}_H$ 和 $\tau_h(T)$上标准协调分片线性（不连续） Galerkin 有限元空间。最后，我们定义非协调解空间

$$V(\tau_h) := \bigoplus_{j=1}^{N_H} V^j \subset H^2(\tau_h) \quad \text{with} \quad V^j := V^c|_{T_j} \oplus V^f(T_j).$$

定义 1（间断 Galerkin 多尺度有限元法（DG-MsFEM））。若称 $u_{h,\mu} \in V(\tau_h)$ 为（*1*）的 *DG-MsFEM* 近似参考解，则

$$a_{\mathrm{DG}}\big(u_{h,\mu}, v; \mu\big) = l_{\mathrm{DG}}(v; \mu) \qquad \textit{for all } v \in V(\tau_h). \tag{5}$$

这里，DG 双线性型 a_{DG} 和右端项 l_{DG} 定义为

$$a_{\mathrm{DG}}(v, w; \mu) := \sum_{t \in \tau_h} \int_t A(\mu) \nabla v \cdot \nabla w + \sum_{e \in \mathcal{F}(\tau_h)} a_{\mathrm{DG}}^e(v, w; \mu), \quad l_{\mathrm{DG}}(v; \mu) := \sum_{t \in \tau_h} \int_t f(\mu) v,$$

其中， $\mathcal{F}(\cdot)$表示三角剖分的所有面的集合，而面 e 上的 DG 耦合双线性型 a_{DG}^e 定义为

$$a_{\mathrm{DG}}^e(v, w; \mu) := \int_e \big\langle A(\mu) \nabla v \cdot n_e \big\rangle [w] + \big\langle A(\mu) \nabla w \cdot n_e \big\rangle [v] + \frac{\sigma_e(\mu)}{|e|^\beta} [v][w].$$

对于某个 $\omega \subseteq \Omega$的任意三角剖分 $\tau_h(\omega)$，我们为每个面 $e \in \mathcal{F}\big(\tau_h(\omega)\big)$ 指定一个唯一的法向量 n_e，使其指向相邻单元 t^-的外侧；其中，内面表示为 $e = t^- \cap t^+$，边界面表示为 $e = t^- \cap \partial\omega$，相应的单元为 $t^\pm \in \tau_h(\omega)$。双值函数 $v \in H^2\big(\tau_h(\omega)\big)$的平均值和跳跃分别表示为 $\langle v \rangle := \frac{1}{2}(v|_{t^-} + v|_{t^+})$ 和 $[v] := v|_{t^-} - v|_{t^+}$（内面情形），以及 $\langle v \rangle := [v] := v$（边界面情形）。参数化罚函数 $\sigma_e(\mu)$ 和参数 β 必须适当选取，以确保 a_{DG} 的强制性，且可能涉及 A。为简便起见，我们仅考虑对称内罚 DG 格式。关于其他变体，请参阅 [8] 及其中的参考文献。

基于上述 DG-MsFEM 的定义，局部化降阶基方法通过迭代在线富集过程构造适当的低维局部逼近空间 $V_N^j \subset V^j$，其维数为 N^j，这些空间共同构成

全局降阶解空间，具体如下：

$$V_N = \bigoplus_{j=1}^{N_H} V_N^j, \qquad N := \dim(V_N) = \sum_{j=1}^{N_H} N^j. \tag{6}$$

一旦构造出这样的降阶近似空间，LRBM 近似定义如下。

定义 2（局部化降阶基方法（LRBM））。如果满足以下条件，则称$u_{N,\,\mu} \in V_N$ 为式（*5*）的局部化降阶基多尺度近似

$$a_{\mathrm{DG}}(u_{N,\mu}, v_N; \mu) = l_{\mathrm{DG}}(v_N; \mu) \qquad \textit{for all } v_N \in V_N. \tag{7}$$

注意，$u_{N,\,\mu}$ 求解的是一个全局耦合的降阶问题，但其中所有出现的量仍可相对于局部降阶空间 V_N^j 在局部进行计算。关于局部近似空间的构造细节，例如采用基于贪心的过程，我们参考文献 [8]。

局部空间可以通过在线自适应过程 [9],构造，在此过程中只需求解局部补丁问题，而不需要对 DG-MsFEM 方法进行全局求解。更准确地说，设降阶空间 V_N 及其对应的、针对参数 $\mu \in \mathcal{P}$ 的式（7）的降阶近似 $u_{N,\,\mu} \in V_N$ 已给定。为了丰富与 μ处的 $T \in \mathcal{T}_H$ 相关联的局部空间 V_N^j，我们考虑局部过采样区域 O_T：$= U$（T），其中 U（T）表示 T 的邻域，¯由 T 的额外一层粗网格相邻单元 $T \in \mathcal{T}_H$ 组成。我们进一步将 V（O_T）定义为 V（τ_h）限制在 O（T）上的结果，并求解局部修正 $\varphi_T \in V$（O_T），使得

$$a_{\mathrm{DG}}\big|_{O_T}(u_{N,\mu} + \varphi_T, v; \mu) = l_{\mathrm{DG}}\big|_{O_T}(v; \mu) \qquad \text{for all } v \in V(O_T), \tag{8}$$

其边界数据来自前一个降阶全局解。随后，将 φ_T 在 T 上的限制扩充到局部降阶空间 V_N^j 中。

在下文中，我们不预先计算局部近似空间，而是在优化程序中对其进行迭代构造，以求解 (P)。

4 采用降阶模型的松弛信赖域优化

近期，有人提出了一种采用局部化正交分解数值多尺度方法的自适应松弛信赖域（TR）方法，并在 [6] 中对其进行了广泛研究。后文提出的算法沿用了这一思路，将 [6] 中的全阶模型和降阶模型（ROM）替换为第 3 节介绍的 DG-MsFEM 和 LRBM。

整体 TR-LRBM 算法通过迭代计算问题 (P) 的一个一阶临界点。下文中，我们用 $\mathcal{J}_N(\mu) := \mathcal{J}(u_{N,\,\mu},\ \mu)$ 表示通过 LRBM 得到的约化目标泛函，而 $\mathcal{J}_h(\mu) := \mathcal{J}(u_{h,\,\mu},\ \mu)$ 表示通过 DG-MsFEM 得到的约化泛函。我们假设 $\hat{}\mathcal{J}_N$ 满足如下形式的后验误差估计

$$|\hat{\mathcal{J}}_h(\mu) - \hat{\mathcal{J}}_N(\mu)| \le \Delta_{\hat{\mathcal{J}}_N}(\mu).$$

推导适用于 LRBM 的、具有这种形式且可局部化的后验误差估计，超出了本文的范围，相关内容将留待后续文章讨论。

对于松弛TR方法的每次外层迭代 $k \geq 0$，我们将模型函数 $m^{(k)}$ 视为代价泛函 $\hat{\mathcal{J}}$ 在松弛信赖域内的低成本局部近似，该信赖域的半径为 $\delta^{(k)}+\varepsilon^{(k)}$。其中，$\delta^{(k)}$ 可由后验误差估计器表征，$\varepsilon^{(k)}$ 表示取自预先选定的零序列的松弛参数。我们假设存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对所有 $k > K$，均有 $\varepsilon^{(k)} = 0$。在我们的方法中，对于 $k \geq 0$，我们选择 $m^{(k)}(\cdot) := \hat{\mathcal{J}}_{N}^{(k)}(\mu^{(k)} + \cdot)$。上标 (k) 表示我们在每次迭代中使用不同的局部化降阶基空间V_{N_k}。因此，我们可以使用 $\Delta_{\hat{\mathcal{J}}_N^{(k)}}(\mu)$ 来刻画信赖域。在每次外层迭代中，我们求解以下内层误差感知约束优化子问题，以获得局部解 $\bar{s} \in \mathcal{P}$：

$$\min_{s \in \mathcal{P}} \hat{\mathcal{J}}_N^{(k)}(\widetilde{\mu}) \quad \text{s.t.} \quad \frac{\Delta_{\hat{\mathcal{J}}_N^{(k)}}(\widetilde{\mu})}{\hat{\mathcal{J}}_N^{(k)}(\widetilde{\mu})} \leq \delta^{(k)} + \varepsilon^{(k)}, \quad \widetilde{\mu} := \mu^{(k)} + s \in \mathcal{P} \\ \text{and } r_{\tilde{\mu}}^{\mathrm{pr}}(u_{\tilde{\mu}})[v] = 0 \text{ for all } v \in V. \tag{9}$$

并令 $\mu^{(k+1)} := \mu^{(k)} + \bar{s}$ 作为下一个外层迭代点。

在我们的TR算法中，我们以 [5]中的算法为基础。然而，我们采用协调方法，其中降阶原始空间和对偶空间相同，且仅由原方程的快照构造而成。下文中，我们仅概述该算法的主要特征，更多细节请参见 [5] 。对合适的局部化后验误差估计以及更复杂的构造原则的深入讨论将留待未来工作。

与LRBM情形下的通常做法一样，我们使用关于 $\mathcal{T}_H$的拉格朗日单位分解（在局部网格上插值），以 V_N^j 初始化局部降阶基空间。作为自适应信赖域方法的典型做法，随后我们利用式(8)中的局部校正，以初始参数 $\mu^{(0)}$ 初始化这些空间。

对于每个迭代点 $\mu^{(k)}$，我们采用结合Armijo型条件的拟牛顿投影BFGS算法求解式(9)，并以标准的降阶一阶临界点（FOC）判据终止；该判据经参数空间 $\mathrm{P}_{\mathcal{P}}$ 上的投影修正，以考虑参数空间上的约束。此外，我们还采用第二个边界终止判据，以防止子问题在信赖域边界上进行过多迭代。

计算出下一个迭代点 $\mu^{(k+1)}$ 后，我们使用充分下降条件来决定是否接受该迭代点：

$$\hat{\mathcal{J}}_N^{(k+1)}(\mu^{(k+1)}) \leq \hat{\mathcal{J}}_N^{(k)}(\mu_{\mathrm{AGC}}^{(k)}) + \varepsilon^{(k)} \qquad \text{for all } k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

其中 $\mu^{(k)}{}_{\mathrm{AGC}}$ 表示通过对式（9）执行一次梯度下降步计算得到的近似广义柯西点。借助一个充分必要条件，可以低成本地检验条件（10）。若 $\mu^{(k+1)}$ 被接受，我们便针对每个过采样区域 $O(T_j)$再次求解式（8），以此加富局部降阶基空间 $V_{N_k}^j$ （仅针对原始空间），并设定 $V_{N_{k+1}}^j := \mathrm{span}\ \{V_{N_k}^j, \varphi_{T_j}|_{T_j}\}$. 我们还可参考 [1], ，其中提出了一种跳过加富的策略。

与以往工作不同，我们无法直接获得 FOM 梯度，因为我们不依赖耗费巨大的全局 DG-MsFEM 求解来进行加富。因此，加富后，我们评估 ROM 型 FOC 条件

$$\|\mu^{(k+1)} - \mathrm{P}_{\mathcal{P}}(\mu^{(k+1)} - \nabla_\mu \hat{\mathcal{J}}_N(\mu^{(k+1)}))\|_2 \leq \tau_{\mathrm{FOC}}. \tag{11}$$

如果当前外层迭代点不满足此条件，我们将继续执行算法，而不进行 FOM 计算。如果满足此条件，我们仍无法可靠地终止算法。相反，我们使用通常的 FOM 型 FOC 条件检查算法的整体收敛性

$$\|\mu^{(k+1)} - \mathrm{P}_{\mathcal{P}}(\mu^{(k+1)} - \nabla_\mu \hat{\mathcal{J}}_h(\mu^{(k+1)}))\|_2 \leq \tau_{\mathrm{FOC}}. \tag{12}$$

如果满足条件，我们就终止算法。如果不满足，则使用原始与对偶 DG-MsFEM 近似来扩充空间（这些近似可通过计算 $\nabla_\mu \hat{\mathcal{J}}_h(\mu^{(k+1)})$ 获得），即 $V^j_{N_{k+1}} := \mathrm{span}\{V^j_{N_k}, u_{h,\mu^{(k+1)}}|_{T_j}, p_{h,\mu^{(k+1)}}|_{T_j}\}$，for $j = 1, \ldots\ldots, N_H$. 然后，我们继续迭代，直至再次满足条件 (11)。

在适当假设下，可利用 [1] 中的定理 3.8 证明算法的收敛性；另请参见 [6]。最后，我们在算法 1 中概述基本的 TR-LRBM 算法。

算法 1： 基础 TR-LRBM 算法

数据： 初始数据 $\mu^{(0)}$，$\delta^{(0)}$，松弛参数 $(\varepsilon^{(k)})_k$，容差 β_2、τ_{sub}、τ_{FOC}。

使用单位分解初始化 LRBM 模型，并通过求解 (8) 得到 $\mu^{(0)}$，然后设置 $k = 0$;
当 不满足基于 *ROM* 的判据 (11)**时执行**
  内层迭代：利用 (9) 的 $s^{(k)}$ 解计算 $\mu^{(k+1)} := \mu^{(k)} + s^{(k)}$；
  如果 满足充分下降条件 (10)，且松弛参数为 $\varepsilon^{(k)}$，**则**
    接受 $\mu^{(k+1)}$ 并在 $\mu^{(k+1)}$处求解 (8)，以丰富 LRBM 模型;
    可能增大信赖域半径;
  else
    拒绝 $\mu^{(k+1)}$，缩小信赖域半径 $\delta^{(k)}$ 并转到第 3 行;
  end
  设置 $k = k + 1$;
结束
如果不满足基于全阶模型的判据 (12)**则**
  使用全局解丰富 LRBM，来源于 $\hat{\mathcal{J}}_h$ 见式 (12)，并返回第 3 行;
结束

5 数值实验

我们使用 [6] 中采用的多尺度基准问题来演示该算法。实验使用 PyMOR[1] [7] 进行模型降阶，并使用 dune-gdt[2] 和 DUNE 框架 [2]进行 DG-MsFEM 离散化。我们使用 $\Omega = [0, 1]^2$，并定义了一个 L^2-失配目标泛函，其中包含

[1] 参见 https://pymor.org[2] 参见
https://github.com/dune-community/dune-gdt

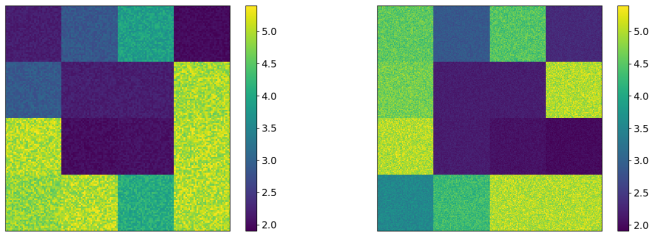

图 1：期望状态对应的系数 A^1 （左）和 A^2 （右），其中 $\mu^{\mathrm{d}} \in \mathcal{P}$。

Tikhonov正则化项，其形式为 $\mathcal{J}(v,\ \mu)$: $= \frac{\sigma_d}{2}\int_\Omega (v-u^{\mathrm{d}})^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P}\sigma_i(\mu_i - \mu_i^{\mathrm{d}})^2 + 1$，其中，$\mu^{\mathrm{d}} \in \mathcal{P}$ 表示期望参数，其权重为 $\sigma_d \in \mathbb{R}$，而$\bar{u^{\mathrm{d}}} = u_h(\mu^{\mathrm{d}})$表示预先计算的期望 DG-MsFEM-FOM解。请注意，我们没有像 [6] 中那样进行粗化。

对于式 (1) 中的扩散系数 A，我们考虑一个 4×4 热块问题，其中包含两种不同的热块多尺度系数 A^1 和 A^2，即

$$A(\mu) := A^1(\mu) + A^2(\mu) = \sum_{\xi=1}^{16}\mu_\xi A_\xi^1 + \sum_{\xi=17}^{32}\mu_\xi A_{\xi-16}^2.$$

我们考虑 $\mathcal{P} = [1,4]^{24}\times[1,1.2]^8 \subseteq \mathbb{R}^{32}$，参数化多尺度块由 $A_\xi^1 = A^1\big|_{\Omega_{i,\ j}}$ 和 $A_\xi^2 = A^2\big|_{\Omega_{i,\ j}}$ 给出，其中 $\Omega_{i,\ j}$ 表示由 ξ 编号的 i、$j = 1$、.....、4 中的第 $(i,\ j)$ 个热块。多尺度特征是在 $[0.9, 1.1]$ 中均匀分布的非周期值，分别位于 $N_1 \times N_1$ （针对 A^1）和 $N_2 \times N_2$ （针对 A^2）四边形网格上；可视化见图 1。我们设定 $N_1 = 150$ 和 $N_2 = 300$。因此，对于 τ_h（Ω），只需使用 $n_h \times n_h$、$n_h = 600$ 个细网格单元；对于 $\mathcal{T}_H$，则使用 $n_H \times n_H$、$n_H = 10$ 个粗网格单元即可。这两个系数 A^1 和 A^2 在区域中部都包含低导热率块，即 $\Omega_{i,\ j}$、i、$j = 2$、3；这是通过对参数空间施加限制来保证的。此外，我们使用常值源项 $f \equiv 10$。其他参数详见 [5] 及其配套代码 [4], ，实验中使用了相同的超参数。

我们比较了两种优化算法：一种完全基于FOM的BFGS算法，其中仅使用DG-MsFEM评估；另一种是第4节所述的松弛TR方法，并使用BFGS求解子问题。为实现终止，我们使用 $\tau_{\mathrm{FOC}} = 3\cdot 10^{-6}$，以确保FOM和ROM算法在参数上达到相同的优化误差后停止。

图2展示了这些算法的迭代次数。全局问题、降阶问题和局部问题的评估详情见表1。两种算法均收敛到同一点。TR算法几乎完全避免了FOM评估；FOM评估仅在基于FOM的终止条件（12）中需要，而该条件只评估一次（对应于原问题和对偶问题各进行2次FOM评估）。

对于大规模问题，有限元法计算乃至 DG-MsFEM 计算的成本都越来越高，我们认为所提出的信赖域方法

	评估			迭代	μ-误差	
	DG-MsFEM (5)	LRBM (7)	局部 (8)	外层	内层	
成本因子	h	N_{RB}	O_T			
采用 DG-MsFEM 的 BFGS	259	-	-	85	-	2.89e-3
松弛 TR-LRBM	2	506	294	2	140	2.38e-3

表 1：全阶模型和降阶模型的评估次数与精度。

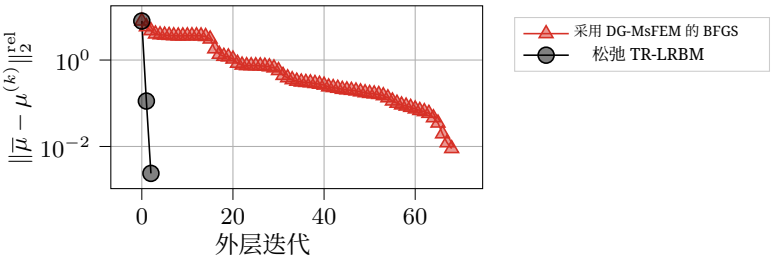

图 2: 同一优化运行中，使用相同随机初始猜测 $\mu^{(0)}$ 和 $\tau_{\mathrm{FOC}} = 3 \cdot 10^{-6}$的选定算法相对于最优参数的相对误差衰减。

将具有显著优势。更复杂的数值算例和其他模型问题有待进一步研究。

致谢 作者感谢德国联邦教育与研究部通过合同 05M20PMA 提供的资助，以及德国研究联合会通过合同 OH 98/11-1 提供的资助；此外，还感谢德国卓越战略 EXC 2044 390685587 项目 MathematicsMünster:Dynamics–Geometry –Structure 提供的资助。

参考文献

1. Banholzer, S., Keil, T., Ohlberger, M., Mechelli, L., Schindler, F., Volkwein, S.: 一种用于偏微分方程约束参数优化的信赖域降阶基近似的自适应投影牛顿非协调对偶方法。纯粹与应用泛函分析 **7**(5), 1561–1596 (2022) 2. Bastian, P., Blatt, M., Dedner, A., Dreier, N.A., Engwer, C., Fritz, R., Grüninger, C., Kempf, D., Klöfkorn, R., Ohlberger, M., Sander, O.: DUNE 框架：基本概念与最新进展。计算数学与应用 **81**, 75–112 (2021) 3. Buhr, A., Iapichino, L., Ohlberger, M., Rave, S., Schindler, F., Smetana, K.: 参数化问题的局部化模型降阶。载于：模型降阶。第 2 卷：基于快照的方法与算法，第 245–305 页。柏林：德·格鲁伊特出版社 (2021) 4. Keil, T.: 软件：用于《多尺度问题优化的松弛局部化信赖域降阶基方法》 https://doi.org/10.5281/zenodo.7821980 7821980 5 2023 10 5281 ( ). https://doi.org/ . /zenodo. . Keil, T., Mechelli, L., Ohlberger, M., Schindler, F., Volkwein, S.: 一种用于偏微分方程约束

参数优化的自适应信赖域降阶基近似的非协调对偶方法。ESAIM 数学建模与数值分析 **55**(3), 1239–1269 (2021) 6. Keil, T., Ohlberger, M.：一种用于多尺度问题优化的松弛局部化信赖域降阶基方法 (2022)。https://doi.org/10 09964 7 48550 2203 . /ARXIV. . . Milk, R., Rave, S., Schindler, F.：pyMOR—— 用于模型降阶的通用算法与接口。SIAM 科学计算杂志 **38**(5), S194–S216 (2016) 8. Ohlberger, M., Schindler, F.：具有自适应在线加富的局部化降阶基多尺度方法的误差控制。SIAM 科学计算杂志 **37**(6), A2865– A2895 (2015) 9. Ohlberger, M., Schaefer, M., Schindler, F.：偏微分方程约束优化中的局部化模型降阶。载于：形状优化、均匀化与最优控制，国际数值数学丛书，第 169 卷，第 143–163 页。Birkhäuser/Springer，Cham (2018) 10. Qian, E., Grepl, M., Veroy, K., Willcox, K.：用于偏微分方程约束优化的经认证信赖域降阶基方法。SIAM 科学计算杂志 **39**(5), S434– S460 (2017) 11. Smetana, K., Taddei, T.：非线性椭圆偏微分方程的局部化模型降阶：局部化训练、单位分解与自适应加富 (2022 09872 12 10 48550 2202)。https://doi.org/ . /ARXIV. . . Wen, T., Zahr, M.J.：一种通过即时模型超降阶加速大规模优化的全局收敛方法：形状优化应用。计算物理学杂志 **484** (2023)