J. Sci. Comput. 稿件编号（将由
编辑插入）

用于轴对称两相流的非拟合有限元方法

Harald Garcke · Robert N¨urnberg · Quan Zhao

arXiv:2303.03085v2 [math.NA] 1 Jul 2023

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要 我们提出并分析了轴对称情形下两相不可压缩纳维–斯托克斯流的非拟合有限元近似。离散格式基于二维子午半平面上的纳维–斯托克斯方程的欧拉弱形式，并结合演化界面母线的参数化形式。我们采用最低阶 Taylor–Hood 元和分片线性元，分别对体相中的纳维–斯托克斯方程以及运动界面进行离散。我们讨论了多种格式，其中一种线性格式在离散界面上具有均匀分布性质，并能良好地保持体积。另一种格式可证明是无条件稳定的，并能精确保持两相的体积。我们给出数值结果，展示所提出方法在模拟上升气泡和振荡液滴实验时的稳健性和准确性。

关键词 两相流 · 轴对称性 · 有限元方法 · 稳定性 · 体积保持 · 扩展有限元法

数学主题分类（2020）76T06 · 76M10 · 35R35

1 引言

两相流是自然界中广泛存在的现象，在工业工程和科学实验中也有重要应用。这些流动的数值近似——

Harald Garcke 雷根斯堡大学数学系，德国雷根斯堡 93040。电子邮箱：harald.garcke@ur.de Robert N¨urnberg 特伦托大学数学系，意大利特伦托 38123。电子邮箱：robert.nurnberg@unitn.it Quan Zhao 雷根斯堡大学数学系，德国雷根斯堡 93040。电子邮箱：quan.zhao@ur.de

近年来，这些流动的数值近似受到广泛关注，并涌现出大量数值方法，参见例如 [2, 3, 5, 10, 11, 18, 19, 21– 23, 25, 26, 29, 31, 32, 35, 42–45, 48, 50, 51, 53–55, 57]。然而，对于完全三维流动，如何实现准确而高效的数值近似仍是一项重大挑战，尽管文献中已有多种处理运动界面的方法。其中一种重要方法是所谓的水平集方法 [29, 42, 43, 50, 53], ，该方法将界面表示为水平集函数。这种方法的主要缺点是，水平集函数需要不断重新初始化，以使其接近符号距离函数。这通常会导致界面出现非物理偏移，从而造成显著的体积损失 [27]。另一方面，前沿追踪方法通过一组标记点或低维网格显式追踪界面，能够对界面进行非常准确的近似，尤其是在体积保持方面，参见 [10, 11, 26]。然而，前沿追踪方法可能难以处理复杂的网格操作；例如，在非拟合网格方法中计算界面-体相交叉项 [9, 11]，或在运动拟合网格方法中动态控制体相与界面网格 [4, 46] 时，往往都需要进行这类操作。

全三维两相流在计算上的挑战不仅来自问题本身的规模庞大，也涉及数值方法本身可能存在的困难，参见例如 [27, 30, 41]。幸运的是，在许多情况下，两相流具有旋转对称性，这意味着复杂的三维问题可以简化为子午半平面内一个简单得多的二维问题。此外，演化的流体界面可以用一维母线建模，从而大幅降低计算复杂度。尤其对于前沿追踪方法，处理离散曲线可以避免不理想的网格畸变，以及网格质量控制等相应的补救措施。目前已有若干种针对轴对称两相不可压流的数值近似方法，包括水平集方法 [17, 52], 、弥散界面方法 [34, 38] 和运动网格界面追踪方法[24, 28]。本文的主要目标是研究轴对称两相不可压流的非拟合有限元近似，并特别关注能量稳定性和体积保持问题。我们考虑的数值方法属于参数化方法的框架；该方法由 Barrett、Garcke 和 N¨urnberg 在[10, 11] 中提出，见 (2.6c)–(2.6d)。在这种“BGN”方法中，借助曲率恒等式可以准确计算表面张力，参见 [20]。对于演化界面，其法向速度由流体速度的法向分量给定，这使得切向自由度能够用于改善界面网格的质量。特别是，对于演化曲线，离散格式的半离散版本可产生均匀分布的网格点 [8]。有兴趣的读者可参阅近期的综述论文 [14]，其中详细讨论了这种切向速度。我们还指出，在几何流的研究中，也有人考虑了引入良性切向速度的其他方法，见 [33, 40]。

本文引入的非拟合有限元近似，关键在于对轴对称

情形下的表面张力进行恰当的公式化处理。这里，我们采用 [12, 13] 中提出的两种界面平均曲率公式。第一种公式对母线曲率进行离散化，从而获得与二维情形相同的均匀分布性质，见 [8, 11]。另一种方法则近似三维界面的平均曲率，其优点是可以证明无条件稳定性估计。随后，通过将界面演化与体相中的流体流动耦合，得到整体数值方法。我们沿用 [11] 中提出的欧拉弱形式非拟合二维/三维近似方法。具体而言，通过对压力空间采用特殊的 XFEM 富集过程，可以在半离散层面证明体积守恒性质。

通过将扩展有限元技术与 [6] 中推导的离散时间加权界面法向相结合，还可以将体积守恒性质强化至全离散层面。这些时间加权界面近似最初是在表面扩散流 [7, 37] 的背景下进行研究的，随后在 [6] 中扩展至轴对称几何流。在二维/三维情形下，作者最近在 [26] 中提出了一种能够精确保持体积的两相不可压流有限元方法。

本文其余部分的组织结构如下。第 2 节回顾三维两相不可压流尖锐界面模型的一个欧拉弱形式。接着，在第 3 节中，我们在适当的轴对称情形下，为所考虑的流动引入两种轴对称弱形式。随后，在第 4 节中，我们基于这些轴对称弱形式提出四种离散格式，并分析其均匀分布、能量稳定性和体积保持性质。第 5 节给出了上升气泡和振荡液滴实验的数值结果，以展示所引入格式的稳健性和准确性。最后，我们在第 6 节中给出一些结论。

2 三维中的数学表述

我们考虑固定有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中两相流体的动力学，其中 $\Omega = \Omega_+(t) \cup \Omega_-(t) \cup S(t)$，$\Omega_\pm(t) \subset \mathbb{R}^3$ 表示两种流体所占据的区域，t 为时间变量，S(t) 是表示流体界面并将两个区域分隔开的闭曲面。下文的表述与 [11], 中的内容基本一致，另见 [30]。我们假设 S(t) 的参数化为：$\vec{\Upsilon}(\cdot, t) : O \to \mathbb{R}^3$，其中 O 为参考曲面。由此定义界面速度：

$$\vec{\mathcal{V}}(\vec{\Upsilon}(\vec{q}, t), t) = \partial_t \vec{\Upsilon}(\vec{q}, t) \quad \forall \vec{q} \in O.$$

此外，我们将界面的平均曲率定义为

$$\mathcal{H}\,\vec{n}_s = \Delta_s \vec{\mathrm{id}}, \tag{2.1}$$

其中，$\vec{n}_s$ 是 S(t) 的单位法向量，指向区域 $\Omega_+(t)$；$\Delta_s = \nabla_s \cdot \nabla_s$ 是曲面上的曲面拉普拉斯算子，其中 ∇_s 为曲面梯度；$\vec{\mathrm{id}}$ 是 S(t) 上的恒等函数。

设 $\breve{\vec{u}}(\cdot,t)\colon \Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ 为流体速度，$\breve{p}(\cdot,t)\colon \Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 为压力。此外，我们分别用 $\rho_\pm$ 和 $\mu_\pm$ 表示 $\Omega_\pm(t)$ 中流体的密度和黏度。于是，两相纳维–斯托克斯流的控制方程为

$$\rho_\pm(\partial_t\breve{\vec{u}}+\breve{\vec{u}}\cdot\nabla\breve{\vec{u}})=\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}+\rho_\pm\breve{\vec{g}} \qquad \text{在 } \Omega_\pm(t) \text{ 中,} \tag{2.2a}$$

$$\nabla\cdot\breve{\vec{u}}=0 \qquad \text{in } \Omega_\pm(t), \tag{2.2b}$$

$$[\breve{\vec{u}}]_-^+=0 \qquad \text{在 } S(t) \text{ 上,} \tag{2.2c}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}_S]_-^+=-\gamma\mathcal{H}\vec{n}_S \qquad \text{on } S(t), \tag{2.2d}$$

$$\vec{\mathcal{V}}\cdot\vec{n}_S=\breve{\vec{u}}\cdot\vec{n}_S \qquad \text{在 } S(t) \text{ 上,} \tag{2.2e}$$

$$\breve{\vec{u}}=\vec{0} \qquad \text{on } \partial_1\Omega, \tag{2.2f}$$

$$\breve{\vec{u}}\cdot\vec{n}_b=0,\quad (\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}_b)\cdot\vec{t}=0\quad\forall\vec{t}\in\{\vec{n}_b\}^\perp \qquad \text{on } \partial_2\Omega. \tag{2.2g}$$

这里，(2.2a)-(2.2b) 是两相纳维–斯托克斯方程，$\vec{g}$ 是体加速度，$\underline{\underline{\sigma}}$ 是应力张量，其定义为

$$\underline{\underline{\sigma}}=\mu_\pm[\nabla\breve{\vec{u}}+(\nabla\breve{\vec{u}})^T]-\breve{p}\,\underline{\underline{I_3}}=2\mu_\pm\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{u}})-\breve{p}\,\underline{\underline{I_3}} \quad \text{in} \quad \Omega_\pm(t),$$

其中 $\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{u}})=\frac{1}{2}[\nabla\breve{\vec{u}}+(\nabla\breve{\vec{u}})^T]$ 为应变率，$\underline{\underline{I_3}}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 是单位矩阵。方程 (2.2c)–(2.2e) 是经典界面条件，其中 $[\cdot]_-^+$ 表示从 $\Omega_-(t)$ 到 $\Omega_+(t)$ 的跳跃值，γ 是 $S(t)$ 的表面张力。此外，我们在 $\partial_1\Omega$ 上规定无滑移条件 (2.2f)，并在 $\partial_2\Omega$ 上规定自由滑移条件 (2.2g)，其中 $\vec{n}_b$ 是 $\partial\Omega$ 的外单位法向量，且 $\{\vec{n}_b\}^\perp:=\{\vec{t}\in\mathbb{R}^3:\ \vec{t}\cdot\vec{n}_b=0\}$。

我们将系统的总能量定义为

$$\mathcal{E}(t)=\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_+(t)}\rho_+|\breve{\vec{u}}|^2\,\mathrm{d}V+\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_-(t)}\rho_-|\breve{\vec{u}}|^2\,\mathrm{d}V+\gamma|S(t)|, \tag{2.3}$$

其中 $|S(t)|=\int_{S(t)}1\,\mathrm{d}S$。于是，该动力系统满足如下体积守恒和能量定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{vol}(\Omega_-(t))=\int_{S(t)}\vec{\mathcal{V}}\cdot\vec{n}_S\,\mathrm{d}S=\int_{\Omega_-(t)}\nabla\cdot\breve{\vec{u}}\,\mathrm{d}V=0, \tag{2.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t)=-2\int_\Omega\mu\,\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{u}}):\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{u}})\,\mathrm{d}V+\int_\Omega\rho\,\breve{\vec{g}}\cdot\breve{\vec{u}}\,\mathrm{d}V, \tag{2.4b}$$

其中我们引入了 $\rho(\cdot,t)=\rho_+\mathscr{X}_{\Omega_+(t)}+\rho_-\mathscr{X}_{\Omega_-(t)}$ 和 $\mu(\cdot,t)=\mu_+\mathscr{X}_{\Omega_+(t)}+\mu_-\mathscr{X}_{\Omega_-(t)}$，其中 $\mathscr{X}_E$ 是集合 E 的示性函数。

我们分别用 $(\cdot,\cdot)_\Omega$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{S(t)}$ 表示 Ω 和 $S(t)$ 上的 L^2 内积。定义函数空间

$$\breve{\mathbb{U}}=\left\{\vec{\chi}\in[H^1(\Omega)]^3:\ \vec{\chi}=0 \text{ on } \partial_1\Omega,\quad \vec{\chi}\cdot\vec{n}_b=0 \text{ on } \partial_2\Omega\right\},$$
$$\breve{\mathbb{P}}=\{\eta\in L^2(\Omega):\ (\eta,1)_\Omega=0\},\quad \breve{\mathbb{V}}:=H^1(0,T;[L^2(\Omega)]^3)\cap L^2(0,T;\breve{\mathbb{U}}),$$

随后，我们回顾文献 [11, (3.9)] 中给出的两相不可压缩流动的欧拉弱形式。给定初始速度 $\vec{u}_0 = \vec{u}(\cdot, 0)$ 和流体界面 S (0)，求 S (t) $= \vec{\gamma}(O, t)$，其中 $\vec{\mathcal{V}}(\cdot, t) \in [L^2(S(t))]^3$、$\check{u} \in \check{\mathbb{V}}$、$\check{p} \in L^2(0, T; \check{\mathbb{P}})$，且 $\mathcal{H}(\cdot, t) \in L^2(S(t))$，使得对所有 $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(\rho\check{\vec{u}}, \check{\vec{\chi}})_\Omega + (\rho\partial_t\check{\vec{u}}, \check{\vec{\chi}})_\Omega - (\rho\check{\vec{u}}, \partial_t\check{\vec{\chi}})_\Omega\right] + 2(\mu\,\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\check{\vec{u}}), \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\check{\vec{\chi}}))_\Omega \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left[(\rho[\check{\vec{u}}\cdot\nabla]\check{\vec{u}}, \check{\vec{\chi}})_\Omega - (\rho[\check{\vec{u}}\cdot\nabla]\check{\vec{\chi}}, \check{\vec{u}})_\Omega\right] - (\check{p}, \nabla\cdot\check{\vec{\chi}})_\Omega \\
&\quad - \gamma\langle\mathcal{H}\vec{n}_s, \check{\vec{\chi}}\rangle_{S(t)} = (\rho\check{\vec{g}}, \check{\vec{\chi}})_\Omega \qquad \forall\check{\vec{\chi}} \in \check{\mathbb{V}}, \qquad (2.6a)
\end{aligned}$$

$$(\nabla\cdot\check{\vec{u}}, \check{q})_\Omega = 0 \qquad \forall\check{q} \in \check{\mathbb{P}}, \qquad (2.6b)$$

$$\langle\vec{\mathcal{V}} - \check{\vec{u}}, \check{\zeta}\vec{n}_s\rangle_{S(t)} = 0 \qquad \forall\check{\zeta} \in L^2(S(t)), \qquad (2.6c)$$

$$\langle\mathcal{H}\vec{n}_s, \check{\vec{\eta}}\rangle_{S(t)} + \langle\nabla_s\vec{\mathrm{id}}, \nabla_s\check{\vec{\eta}}\rangle_{S(t)} = 0 \qquad \forall\check{\vec{\eta}} \in [H^1(S(t))]^3. \qquad (2.6d)$$

3 轴对称形式

3.1 轴对称情形

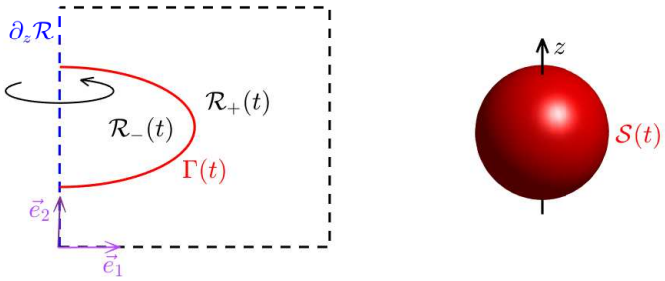


图1 左图：子午半平面 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_-(t)\cup\mathcal{R}_+(t)\cup\Gamma(t)$ 的示意图。右图：轴对称曲面 S(t)。

我们假设所考虑的流动关于 z轴 呈旋转对称，如图1所示。接下来，我们从三维形式(2.6)出发，在柱坐标下推导轴对称弱形式。在这种情形下，我们有以下三个假设。

A1 有界区域 Ω 可通过将子午半平面中关于 z轴旋转的子集 $\mathcal{R}$ 得到。这里，$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+(t)$、$\cup\mathcal{R}_-(t)$ 和 $\cup\Gamma(t)$；其中 $\mathcal{R}_\pm(t)$ 是 $\Omega_\pm(t)$ 对应的旋转集合，而 $\Gamma(t)$ 是轴对称界面 S(t) 的母线。A2 边界 $\mathcal{R}$ 可自然分解为 $\partial\mathcal{R} = \partial_1\mathcal{R}\cup\partial_2\mathcal{R}\cup\partial_z\mathcal{R}$，其中 $\partial_i\mathcal{R}$ 对应于 $i = 1$、2 时的 $\partial_i\Omega$，而 $\partial_z\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{R}$ 的人工边界

位于 z轴上。此外，假设 $\Gamma(t)$ 是一条光滑开曲线，其两个端点以 90° 接触角条件附着于 $\partial_z\mathcal{R}$，这意味着 S(t) 是一个无边界的光滑的零亏格曲面。

A3 不存在旋转流体速度，且 r、z 方向的速度分量与方位角 φ 无关。此外，压力与 φ 无关。

根据 A1 并采用柱坐标，自然可以考虑界面 S(t) 的如下参数化

$$\vec{\Upsilon} : (\alpha, \varphi, t) \mapsto \left(x^r(\alpha,t)\cos\varphi, x^z(\alpha,t), x^r(\alpha,t)\sin\varphi\right)^T, \quad \alpha \in \mathbb{I}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3.1)$$

对于 $t \in [0, T]$,，其中 $\mathbb{I} = (0, 1)$，且满足 $\partial\mathbb{I} = \{0, 1\}$。然后，我们可以提取 r、z 分量，构成母线 $\Gamma(t)$ 的参数化：

$$\vec{x}(\alpha, t) = \left(x^r(\alpha,t), x^z(\alpha,t)\right)^T : \bar{\mathbb{I}} \times [0, T] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

根据 A2，两个端点附着在 z轴上意味着

$$\vec{x}(\alpha, t) \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \forall \alpha \in \partial\mathbb{I}. \quad (3.3)$$

我们进一步假设 $|\vec{x}_\alpha(\cdot, t)| > 0$，且 $\vec{x}(\cdot, t) \cdot \vec{e}_1 > 0$ 属于 $\mathbb{I}$。引入曲线 $\Gamma(t)$ 的弧长 s，即 $\partial_s = |\vec{x}_\alpha|^{-1}\partial_\alpha$，曲线 $\Gamma(t)$ 的单位切向量和单位法向量定义如下：

$$\vec{\tau} = \vec{x}_s, \qquad \vec{\nu} = -\vec{\tau}^\perp,$$

其中，$\cdot^\perp$ 表示旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的顺时针旋转，$\vec{\nu}$ 是 Γ 的单位法向量，并指向 $\mathcal{R}_+(t)$。我们引入 S (t) 的平均曲率，

$$\varkappa = \kappa - \frac{\vec{\nu} \cdot \vec{e}_1}{\vec{x} \cdot \vec{e}_1} \quad \text{with} \quad \kappa\vec{\nu} = \vec{x}_{ss}, \quad (3.4)$$

其中，κ 是母线 $\Gamma(t)$的曲率。显然，为了使 $\varkappa$ 保持有界，我们需要 $\vec{\nu} \cdot \vec{e}_1 = 0$ 在 $\partial\mathbb{I}$ 上成立，这等价于

$$\vec{\tau} \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad \text{on } \partial\mathbb{I}, \quad (3.5)$$

即 A2 中的 90° 接触角条件。

此外，根据 A3，我们可以用柱坐标表示流体速度：

$$\breve{\vec{u}}(\vec{x}, t) = \left(u^r(r,z,t)\cos\varphi, u^z(r,z,t), u^r(r,z,t)\sin\varphi\right)^T. \quad (3.6)$$

然后，我们可以提取 r、z 分量，在 $\mathcal{R}$ 中构成一个向量场：

$$\vec{u}(r, z, t) = \left(u^r(r,z,t), u^z(r,z,t)\right)^T : \mathcal{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}^2. \quad (3.7)$$

我们进一步介绍

$$\nabla_c = \vec{e}_1\partial_r + \vec{e}_2\partial_z, \qquad \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{u}) = \tfrac{1}{2}[\nabla_c\vec{u} + (\nabla_c\vec{u})^T]. \quad (3.8)$$

3.2 轴对称弱形式

根据 (3.3)，我们引入函数空间，用于 $\vec{x}(\cdot, t)$：

$$V_\partial = \left\{ \vec{\eta} \in [H^1(\mathbb{I})]^2 : \ \vec{\eta}(\alpha) \cdot \vec{e}_1 = 0 \ \ \forall\, \alpha \in \partial\mathbb{I} \right\}. \tag{3.9}$$

此外，我们定义加权Sobolev空间

$$L^2_a(\mathcal{R}) := \left\{ \chi : \int_{\mathcal{R}} r^a \chi^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}z < +\infty \right\}, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$H^1_a(\mathcal{R}) := \left\{ \chi \in L^2_a(\mathcal{R}) : \partial_r \chi \in L^2_a(\mathcal{R}),\ \partial_z \chi \in L^2_a(\mathcal{R}) \right\},$$

然后引入速度和压力的函数空间（见 [15, 16]）

$$\mathbb{U} := \left\{ \vec{\chi} \in [H^1_1(\mathcal{R})]^2 : \ (\vec{\chi} \cdot \vec{e}_1) \in L^2_{-1}(\mathcal{R}),\ \vec{\chi} = \vec{0} \ \text{ on } \ \partial_1\mathcal{R},\ \ \vec{\chi} \cdot \vec{n} = 0 \ \text{ on } \ \partial_2\mathcal{R} \right\},$$
$$\mathbb{V} := H^1(0, T; [L^2_1(\mathcal{R})]^2) \cap L^2(0, T; \mathbb{U}), \quad \mathbb{P} := \left\{ \chi \in L^2_1(\mathcal{R}) : \int_{\mathcal{R}} r\chi \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z = 0 \right\},$$

其中，$\vec{n}$ 是 $\partial\mathcal{R}$ 的外单位法向量。令 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 $\mathcal{R}$ 和 $\mathbb{I}$ 上的 L^2 内积。接着，通过施加轴对称条件，我们可以将三维形式 (2.6) 转化为二维子午半平面子集 $\mathcal{R}$ 上以及 $\mathbb{I}$ 中的一组方程，如下所示。给定初始速度 $\vec{u}_0 \in \mathbb{U}$ 和 $\vec{x}(\cdot, 0) \in V_\partial$，求 $\vec{u} \in \mathbb{V}$、$p \in L^2(0, T; \mathbb{P})$、$\vec{x} \in H^1(0, T; V_\partial)$ 和 $\varkappa \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{I}))$，使得对所有 $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_c \vec{u},\ \vec{\chi}\, r) + (\rho_c \partial_t \vec{u},\ \vec{\chi}\, r) - (\rho_c \vec{u},\ \partial_t \vec{\chi}\, r) \right] + \mathscr{A}(\rho_c, \vec{u}; \vec{u}, \vec{\chi}) \\
&\qquad + 2(\mu_c\, r^{-1}\, [\vec{u} \cdot \vec{e}_1],\ \vec{\chi} \cdot \vec{e}_1) + 2(\mu_c\, r\, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{u}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi})) - (p,\ \nabla_c \cdot [r\vec{\chi}]) \\
&\qquad - \gamma \langle\, [\vec{x} \cdot \vec{e}_1]\, \varkappa\, \vec{v},\ \vec{\chi}\, |\vec{x}_\alpha| \,\rangle = (\rho_c\, r\, \vec{g},\ \vec{\chi}) \qquad \forall \vec{\chi} \in \mathbb{V},
\end{aligned} \tag{3.11a}$$

$$(\nabla_c \cdot [r\vec{u}],\ q) = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{P}, \tag{3.11b}$$

$$\langle (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\, [\partial_t \vec{x} - \vec{u}],\ \zeta\, \vec{\nu} |\vec{x}_\alpha| \rangle = 0 \qquad \forall \zeta \in L^2(\mathbb{I}), \tag{3.11c}$$

$$\langle (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\, \varkappa\, \vec{\nu},\ \vec{\eta} |\vec{x}_\alpha| \rangle + \langle \vec{e}_1 \cdot \vec{\eta},\ |\vec{x}_\alpha| \rangle + \left\langle \frac{(\vec{x} \cdot \vec{e}_1)}{|\vec{x}_\alpha|}\, \vec{x}_\alpha,\ \vec{\eta}_\alpha \right\rangle = 0 \qquad \forall \vec{\eta} \in V_\partial, \tag{3.11d}$$

其中，在这些表达式中我们引入了

$$\rho_c(\cdot, t) = \rho_+ \mathscr{X}_{\mathcal{R}_+(t)} + \rho_- \mathscr{X}_{\mathcal{R}_-(t)}, \quad \mu_c(\cdot, t) = \mu_+ \mathscr{X}_{\mathcal{R}_+(t)} + \mu_- \mathscr{X}_{\mathcal{R}_-(t)}, \tag{3.12a}$$
$$\mathscr{A}(\rho_c, \vec{v}; \vec{u}, \vec{\chi}) = \tfrac{1}{2}(\rho_c\, r,\ [\vec{v} \cdot \nabla_c]\vec{u} \cdot \vec{\chi} - [\vec{v} \cdot \nabla_c]\vec{\chi} \cdot \vec{u}). \tag{3.12b}$$

与 (2.6) 相比，我们注意到，在 (3.11) 中引入了额外的权重 r 或 $\vec{x} \cdot \vec{e}_1$，这是因为体积分和面积分被转换为面积分和线积分。(3.11) 的详细推导见附录 A。轴对称降维的主要优点是，人工边界处的边界条件自然地出现在公式中，见 [24]。例如，我们实际上在 $\partial_z\mathcal{R}$ 上对速度施加了自由滑移边界条件，这由 $\vec{u} \in \mathbb{V}$ 推得。此外，

可以证明，(3.11d) 蕴含了 90° 接触角条件 (3.5)，详情见 [13,附录A] 。

在这一轴对称情形下，我们分别用 $E(\rho_c, \vec{u}(t), \vec{x}(t))$ 和 $M(\vec{x}(t))$ 表示系统的能量以及轴对称曲面 S(t) 所包围的体积。回顾 (2.3)，并利用 (3.1) 和 (3.6)，可得

$$E(\rho_c, \vec{u}(t), \vec{x}(t)) = \pi\left(\rho_c |\vec{u}|^2,\ r\right) + 2\pi\gamma\left\langle \vec{x}\cdot\vec{e}_1, |\vec{x}_\alpha|\right\rangle, \tag{3.13a}$$

$$M(\vec{x}(t)) = \pi\left\langle (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)^2\,\vec{\nu}, \vec{e}_1\,|\vec{x}_\alpha|\right\rangle, \tag{3.13b}$$

关于 (3.13b)，读者可参见 [12, (3.10)]。回顾 (2.4) 并直接计算，不难证明 (3.11) 的解满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\vec{u}(t), \vec{x}(t)) &= \pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_c|\vec{u}|^2,\ r\right) + 2\pi\gamma\left\langle \vec{x}_t\cdot\vec{e}_1,\ |\vec{x}_\alpha|\right\rangle \\ &\quad + 2\pi\gamma\left\langle \vec{x}\cdot\vec{e}_1,\ (\vec{x}_t)_\alpha\cdot\vec{x}_\alpha\,|\vec{x}_\alpha|^{-1}\right\rangle, \end{aligned}\tag{3.14a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(\vec{x}(t)) = 2\pi\left\langle \vec{x}\cdot\vec{e}_1,\ \vec{x}_t\cdot\vec{\nu}|\vec{x}_\alpha|\right\rangle. \tag{3.14b}$$

现在记

$$\omega(t) = \frac{\int_{\mathcal{R}_-(t)} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{\int_{\mathcal{R}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}, \quad t\in[0,T]. \tag{3.15}$$

那么容易验证 $\mathscr{X}_{\mathcal{R}_-(t)} - \omega(t) \in \mathbb{P}$。在 (3.11b) 中取 $q = \mathscr{X}_{\mathcal{R}_-(t)} - \omega(t)$，在 (3.11c) 中取 $\zeta = 1$，并利用 (3.14b)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(\vec{x}(t)) &= 2\pi\left\langle \vec{x}\cdot\vec{e}_1,\ \vec{x}_t\cdot\vec{\nu}|\vec{x}_\alpha|\right\rangle \\ &= 2\pi\left\langle (\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{u}\cdot\vec{\nu},\ |\vec{x}_\alpha|\right\rangle = 2\pi(\nabla_c\cdot[r\,\vec{u}],\ 1) = 0. \end{aligned}\tag{3.16}$$

此外，在（3.11a）中取 $\vec{\chi} = \vec{u}$，在（3.11b）中取 $q = p$，在（3.11c）中取 $\zeta = \gamma\varkappa$，并在（3.11d）中取 $\vec{\eta} = \vec{x}_t$，将这些方程联立并回顾（3.14a），可得

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\rho_c, \vec{u}(t), \vec{x}(t)) = -2\left(\mu_c\, r^{-1}\,[\vec{u}\cdot\vec{e}_1],\ [\vec{u}\cdot\vec{e}_1]\right) - 2\left(\mu_c\, r\,\underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{u}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{u})\right) + \left(\rho_c r\vec{g},\ \vec{u}\right). \tag{3.17}$$

因此，我们得到弱解的体积守恒定律（3.16）和能量定律（3.17）。

回顾 (3.4)，还可以考虑另一种弱形式，将曲线 $\Gamma(t)$ 的曲率视为未知量。为此，给定初始速度 $\vec{u}_0 \in \mathbb{U}$ 和初始生成曲线 $\vec{x}(\cdot,0) \in \mathrm{V}_\partial$。于是我们求得 $\vec{u} \in \mathbb{V}$, $p \in L^2(0,T;\mathbb{P})$, $\vec{x} \in H^1(0,T;\mathrm{V}_\partial)$ 和 $\kappa \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{I}))$，使得对于

t ∈(0, T]

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_c\vec{u},\,\vec{\chi}\,r)+(\rho_c\partial_t\vec{u},\,\vec{\chi}\,r)-(\rho_c\vec{u},\,\partial_t\vec{\chi}\,r)\right]+\mathscr{A}(\rho_c,\vec{u};\vec{u},\vec{\chi})$$
$$+2(\mu_c\,r^{-1}\,[\vec{u}\cdot\vec{e}_1],\,[\vec{\chi}\cdot\vec{e}_1])+2(\mu_c\,r\,\underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{u}),\,\underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi}))-(p,\,\nabla_c\cdot[r\vec{\chi}])$$
$$-\gamma\langle(\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\,\kappa-\vec{v}\cdot\vec{e}_1,\,\vec{v}\cdot\vec{\chi}\,|\vec{x}_\alpha|\rangle=(\rho_c\,r\,\vec{g},\,\vec{\chi})\qquad\forall\vec{\chi}\in\mathbb{V},\tag{3.18a}$$

$$(\nabla_c\cdot[r\vec{u}],\,q)=0\qquad\forall q\in\mathbb{P},\tag{3.18b}$$

$$\langle(\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\,[\partial_t\vec{x}-\vec{u}],\,\zeta\,\vec{v}\,|\vec{x}_\alpha|\rangle=0\qquad\forall\zeta\in L^2(\mathbb{I}),\tag{3.18c}$$

$$\langle\kappa\vec{v},\,\vec{\eta}\,|\vec{x}_\alpha|\rangle+\langle\vec{x}_\alpha,\,\vec{\eta}_\alpha\,|\vec{x}_\alpha|^{-1}\rangle=0\qquad\forall\vec{\eta}\in V_\partial.\tag{3.18d}$$

同样，在 (3.18b) 中取 q = $\mathscr{X}_{\mathcal{R}_{-(t)}}-\omega$(t)，并在 (3.18c) 中取 $\zeta=1$，即可得到 (3.16) 成立。此外，在 (3.18a) 中取 $\vec{\chi}=\vec{u}$，在 (3.18b) 中取 q = p，在 (3.18c) 中取 $\zeta=\gamma(\kappa-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{\vec{x}\cdot\vec{e}_1})$，并在 (3.18d) 中取 $\vec{\eta}=(\vec{x}\cdot\vec{e}_1)\vec{x}_t$，同样可得 (3.17)。(3.18) 的弱形式的优点是，它与 [11, (3.9)], 非常接近，也就是与 (2.6) 的二维类比非常接近。此外，得益于 (3.18d)，对该形式进行离散化后将具有均匀分布性质。然而，我们只能证明基于弱形式 (3.11) 的离散化的稳定性估计，并将采用 [12, 13] 中发展的技术。

4 非拟合有限元近似

我们使用有限元方法，对区域 $\mathcal{R}$ 上速度 $\vec{u}$ 和压力 p 的弱形式 (3.11) 和 (3.18)，以及参考区域 $\mathbb{I}$ 上参数化 $\vec{x}$ 与界面平均曲率$\varkappa$（或曲线曲率 κ）进行近似。令 $[0,T]=\mathrm{S}_{m=0}^{M}[t_m,\,t_{m+1}]$ 为时间区域的均匀剖分，其中$\Delta t=T/M$，且 $t_m=m\Delta t$ 对 m = 0, m = 1, . . . , M 成立。

参考区域 $\mathbb{I}$被均匀剖分为 $\mathbb{I}=\cup_{j=1}^{J_\Gamma}\mathbb{I}_j$，其中 $\mathbb{I}_j=[\alpha_{j-1},\alpha]$ $\alpha_j=$ $=1$ Γ =

$_j$，jh 和 h /J。接下来，我们引入有限元空间

$$V^h:=\left\{\zeta\in C(\bar{\mathbb{I}}):\zeta|_{\mathbb{I}_j}\ \text{is affine}\ \forall\ j=1,\ldots,J_\Gamma\right\},\qquad V_\partial^h:=[V^h]^2\cap V_\partial.$$

令 $\{\vec{X}^m\}_{0\le m\le M}$ 为 $\{\vec{x}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的一个近似，其中 $\vec{X}^m\in V_\partial^h$。我们定义 $\Gamma^m=\vec{X}^m\left(\bar{\mathbb{I}}\right)$，并假设

$$\vec{X}^m\cdot\vec{e}_1>0\quad\text{in}\ \bar{\mathbb{I}}\setminus\partial\mathbb{I}\quad\text{and}\quad|\vec{X}_\alpha^m|>0\quad\text{in}\quad\mathbb{I},\qquad 0\le m\le M,$$

从而得到离散的单位切向量和法向量

$$\vec{\tau}^m=\vec{X}_s^m=\frac{\vec{X}_\alpha^m}{|\vec{X}_\alpha^m|}\qquad\text{and}\qquad\vec{\nu}^m=-(\vec{\tau}^m)^\perp.$$

此外，设 $\mathcal{R} = \bigcup_{o\in\mathcal{T}^m} o$ 为一个正则剖分，其中 $\mathcal{T}_m := \{o_j^m : j = 1, \dots, J_{\mathcal{R}}^m\}$ 是互不相交的非退化三角形。我们引入与网格 $\mathcal{T}_m$ 相关联的有限元空间如下：

$$S_k^m := \left\{\varphi \in C(\overline{\mathcal{R}}) : \varphi|_o \in \mathcal{P}_k(o),\ \forall\, o \in \mathcal{T}^m\right\}, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$
$$S_0^m := \left\{\varphi \in L^2(\mathcal{R}) : \varphi|_o \text{ is constant},\ \forall\, o \in \mathcal{T}^m\right\},$$

其中，$\mathcal{P}_k(o)$ 表示 o 上次数为 k 的多项式空间。令 $\mathbb{U}^m$ 和 $\mathbb{P}^m$ 分别表示速度和压力数值解的有限元空间。自然可以考虑 Taylor–Hood 配对元，

$$(\mathbb{U}^m,\ \mathbb{P}^m) = \left([S_2^m]^2 \cap \mathbb{U},\ S_1^m \cap \mathbb{P}\right), \tag{4.1}$$

这保证了轴对称问题 [15, 16] 满足以下 inf-sup 稳定性条件：

$$\inf_{q\in\mathbb{P}^m} \sup_{\vec{0}\neq\vec{\chi}\in\mathbb{U}^m} \frac{(q, \nabla_c \cdot [r\vec{\chi}])}{\|r^{\frac{1}{2}} q\|\, \|\vec{\chi}\|_*} \geq c > 0. \tag{4.2}$$

这里，$\|\cdot\|$ 表示 $\mathcal{R}$ 上通常的 L^2-范数，c 为常数，而 $\|\cdot\|_*$ 定义为

$$\|\vec{\chi}\|_* = \left(\|r^{\frac{1}{2}}\nabla_c\chi^r\|^2 + \|r^{-\frac{1}{2}}\chi^r\|^2 + \|r^{\frac{1}{2}}\nabla_c\chi^z\|^2 + \|r^{\frac{1}{2}}\chi^z\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

对于 $\vec{\chi} = (\chi^r, \chi^z)^T$。

我们考虑非拟合网格方法，这意味着 $\mathcal{T}_m$ 可能无法拟合界面，即，构成 Γ^m 的线段通常不是 $\mathcal{T}^m$ 中单元的边界。在 $t = t^m$ 时，界面 Γ^m 将 $\mathcal{R}$ 划分为两个子区域 $\mathcal{R}_-^m$ 和 $\mathcal{R}_+^m$，其中 $\mathcal{R}_-^m$ 是由 Γ^m 和 $\partial_z\mathcal{R}$ 围成的区域。我们将 $\mathcal{T}_m$ 分成三个互不相交的子集 $\mathcal{T}_{m-}$、$\mathcal{T}_{m+}$ 和 $\mathcal{T}_{m\Gamma}$：

$$\mathcal{T}_\pm^m = \{o \in \mathcal{T}^m : o \subset \mathcal{R}_\pm^m\}, \quad \mathcal{T}_\Gamma^m = \{o \in \mathcal{T}^m : o \cap \Gamma^m \neq \emptyset\}.$$

令 ρ^m 和 μ^m 分别为密度 $\rho_c(\cdot, t)$ 和黏度 $\mu_c(\cdot, t)$ 在 $t = t_m$ 时的数值近似。我们定义 $\rho^m \in S_m^0$ 和 $\mu^m \in S_m^0$，使得

$$\rho^m|_o := \begin{cases} \rho_-, & \text{if } o \in \mathcal{T}_-^m, \\ \rho_+, & \text{if } o \in \mathcal{T}_+^m, \\ \frac{1}{2}(\rho_- + \rho_+), & \text{if } o \in \mathcal{T}_\Gamma^m, \end{cases} \qquad \mu^m|_o := \begin{cases} \mu_-, & \text{if } o \in \mathcal{T}_-^m, \\ \mu_+, & \text{if } o \in \mathcal{T}_+^m, \\ \frac{1}{2}(\mu_- + \mu_+), & \text{if } o \in \mathcal{T}_\Gamma^m. \end{cases}$$

下文中，我们分别用 $\vec{U}^m$、P^m、$\varkappa^m$、κ^m 表示时刻 t_m 处 $\vec{u}(\cdot, t)$、$p(\cdot, t)$、$\varkappa(\cdot, t)$ 和 $\kappa(\cdot, t)$ 的数值近似。此外，我们引入标准插值算子 $I_k^m : C(\mathcal{R}) \to [S_k^m]^2$（对 $k \geq 1$），以及标准投影算子 $I_0^m : L^1(\mathcal{R}) \to S_0^m$，满足 $(I_0^m\eta)|_o = \frac{1}{|o|}\int_o \eta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z$（对 $o \in \mathcal{T}_m$）。基于弱形式 (3.11) 和 (3.18) 的适当离散化，接下来我们将介绍几种数值方法并探讨其性质。

4.1 线性近似

我们首先考虑 (3.18) 的线性近似。设 $\vec{\mathrm{U}}^0 \in \mathbb{U}^0$ 为初始速度 $\vec{\mathrm{u}}_0$的一个近似。此外，初始界面 $\Gamma(0)$ 的母线由多边形曲线 $\Gamma^0 := \vec{\mathrm{X}}^0(\mathbb{I})$ 近似，其中 $\vec{\mathrm{X}}^0 \in \mathrm{V}_\partial$。令 $\rho^{-1} = \rho^0$。那么，对于 $\mathrm{m} \geq 0$，我们求 $\vec{\mathrm{U}}^{m+1} \in \mathbb{U}^m$、$\mathrm{P}^{m+1} \in \mathbb{P}^m$、$\vec{\mathrm{X}}^{m+1} \in \mathrm{V}_\partial^h$ 和 $\kappa^{m+1} \in \mathrm{V}^h$，使得

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\rho^m \vec{U}^{m+1} - I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi}\, r\Big) + \Big(I_0^m \rho^{m-1} \frac{\vec{U}^{m+1} - I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi}\, r\Big)\Big] \\
&\qquad + \mathscr{A}(\rho^m, I_2^m \vec{U}^m; \vec{U}^{m+1}, \vec{\chi}) + 2(\mu^m \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi})\, r) \\
&\qquad + 2(\mu^m r^{-1}[\vec{U}^{m+1} \cdot \vec{e}_1],\ [\vec{\chi} \cdot \vec{e}_1])^\circ - (P^{m+1},\ \nabla_c \cdot [r\vec{\chi}]) \\
&\qquad - \gamma \left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, \kappa^{m+1} - \vec{\nu}^m \cdot \vec{e}_1,\ \vec{\nu}^m \cdot \vec{\chi}\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle = (\rho^m \vec{g},\ \vec{\chi}\, r), \qquad (4.3a)
\end{aligned}
$$

$$
\Big(\nabla_c \cdot [r\vec{U}^{m+1}],\ q\Big) = 0, \qquad (4.3b)
$$

$$
\frac{1}{\Delta t} \left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, (\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m),\ \zeta\, \vec{\nu}^m\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle - \left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, \vec{U}^{m+1},\ \zeta\, \vec{\nu}^m\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle = 0, \qquad (4.3c)
$$

$$
\left\langle \kappa^{m+1}\, \vec{\nu}^m,\ \vec{\eta}\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle^h + \left\langle \vec{X}_\alpha^{m+1},\ \vec{\eta}_\alpha\, |\vec{X}_\alpha^m|^{-1} \right\rangle = 0, \qquad (4.3d)
$$

对于所有 $(\vec{\chi}、\mathrm{q}、\zeta、\vec{\eta}) \in \mathbb{U}^m \times \mathbb{P}^m \times \mathrm{V}^h \times \mathrm{V}_\partial^h$，其中 $(\cdot、\cdot)^\circ$ 表示内积 $(\cdot、\cdot)$ 的一个近似，从而确保（4.3a）中的相应项对所有 $\vec{\mathrm{U}}^{m+1} \in \mathbb{U}^m$ 和 $\vec{\chi} \in \mathbb{U}^m$ 都有定义。通过采用仅含内部采样点的求积公式（例如高斯–洛巴托求积公式），即可保证这一点。我们还引入了 $\langle \cdot、\cdot \rangle^h$，作为 $\mathbb{I}$ 上质量集中的 L^2–内积。具体而言，对于两个分片连续函数 $\vec{\mathrm{v}}$、$\vec{\mathrm{w}}$，它们可在节点 $\{\alpha_j\}_{j=1}^{J_\Gamma}$ 处发生跳跃，该内积定义为

$$
\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^h = \tfrac{1}{2}\, h \sum_{j=1}^{J_\Gamma} \Big[(\vec{v} \cdot \vec{u})(\alpha_j^-) + (\vec{v} \cdot \vec{u})(\alpha_{j-1}^+) \Big] \quad \text{with} \quad g(\alpha_j^\pm) = \lim_{\delta \searrow 0} g(\alpha_j \pm \delta).
$$

（4.3d）中的近似导致了均匀分布性质。对于半离散变体，可以对此给出严格证明；而对于全离散近似（4.3），多边形曲线 Γ^m 上的网格点会沿切向扩散，趋向于等距分布 [12]。关于这一均匀分布性质的详细讨论，请参阅 [8, 14]。

4.2 无条件稳定近似

接下来，我们将介绍（3.11）的一种合适离散化，由此得到一种无条件稳定的有限元方法。与前面一样，给定离散初始数据，对于 $\mathrm{m} \geq 0$，

我们求得 $\vec{\mathrm{U}}^{m+1} \in \mathbb{U}^m$、$\mathrm{P}^{m+1} \in \mathbb{P}^m$, $\vec{\mathrm{X}}^{m+1} \in \mathrm{V}_\partial^h$ 和 $\varkappa^{m+1} \in \mathrm{V}^h$，使得以下关系成立

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\rho^m \vec{U}^{m+1} - I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi}\, r\Big) + \Big(I_0^m \rho^{m-1} \frac{\vec{U}^{m+1} - I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi}\, r\Big)\Big] \\
&\qquad + \mathscr{A}(\rho^m, I_2^m \vec{U}^m; \vec{U}^{m+1}, \vec{\chi}) + 2(\mu^m \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi})\, r) \\
&\qquad + 2(\mu^m\, r^{-1}[\vec{U}^{m+1} \cdot \vec{e}_1],\ [\vec{\chi} \cdot \vec{e}_1])^\circ - (P^{m+1},\ \nabla_c \cdot [r\vec{\chi}]) \\
&\qquad - \gamma \left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, \varkappa^{m+1}\, \vec{\nu}^m, \vec{\chi}\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle = (\rho^m \vec{g},\ \vec{\chi}\, r),
\end{aligned} \tag{4.4a}$$

$$\big(\nabla_c \cdot [r\vec{U}^{m+1}],\ q\big) = 0, \tag{4.4b}$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, (\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m),\ \zeta\, \vec{\nu}^m\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle - \left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, \vec{U}^{m+1},\ \zeta\, \vec{\nu}^m\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle = 0, \tag{4.4c}$$

$$\left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1) \varkappa^{m+1}\, \vec{\nu}^m,\ \vec{\eta}\, |\vec{X}_\alpha^m| \right\rangle + \left\langle \vec{\eta} \cdot \vec{e}_1,\ |\vec{X}_\alpha^{m+1}| \right\rangle + \left\langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, \vec{X}_\alpha^{m+1},\ \vec{\eta}_\alpha\, |\vec{X}_\alpha^m|^{-1} \right\rangle = 0, \tag{4.4d}$$

对于所有 $(\vec{\chi}, \mathrm{q}, \zeta, \vec{\eta}) \in \mathbb{U}^m \times \mathbb{P}^m \times \mathrm{V}^h \times \mathrm{V}_\partial^h$。注意，与 (4.3) 相比，唯一的差异是 (4.4d) 以及 (4.4a) 左端的最后一项。此外，我们注意到，由于 (4.4d) 第二项中存在 $|\vec{\mathrm{X}}_\alpha^{m+1}|$，(4.4) 导致了一个非线性方程组。这种特殊的非线性近似有助于界面能量的稳定性，见 [12]。对于所提出的方法 (4.4)，我们有如下定理；该方法在离散层面上模拟了 (3.17)。

定理 4.1 设 $(\vec{\mathrm{U}}^{m+1}, \mathrm{P}^{m+1}, \vec{\mathrm{X}}^{m+1}, \varkappa^{m+1})$ 是 (4.4) 的一个解。则有

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\pi} E(\rho^m, \vec{U}^{m+1}, \vec{X}^{m+1}) + 2\Delta t \Big(\| \sqrt{\mu^m\, r}\, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1}) \|^2 + \| \sqrt{\mu^m\, r^{-1}}\, [\vec{U}^{m+1} \cdot \vec{e}_1] \|_\diamond^2 \Big) \\
&\qquad \le \tfrac{1}{2\pi} E(I_0^m \rho^{m-1}, I_2^m \vec{U}^m, \vec{X}^m) + \Delta t (\rho^m\, r\vec{g},\ \vec{U}^{m+1}), \quad m = 0, \ldots, M-1,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，$\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_\diamond$ 分别是内积 $(\cdot,\ \cdot)$ 和 $(\cdot,\ \cdot)$ 的诱导范数$^\diamond$。此外，假设

$$E(I_0^m \rho^{m-1}, I_2^m \vec{U}^m, \vec{X}^m) \le E(\rho^{m-1}, \vec{U}^m, \vec{X}^m), \quad for \quad m = 0, \ldots, M-1, \tag{4.6}$$

对于 $\mathrm{k} = 0, \ldots, \mathrm{M} - 1$，结论成立。

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\pi} E(\rho^k, \vec{U}^{k+1}, \vec{X}^{k+1}) + 2\Delta t \sum_{m=0}^{k} \Big\{ \| \sqrt{\mu^m\, r}\, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1}) \|^2 + \| \sqrt{\mu^m\, r^{-1}}\, [\vec{U}^{m+1} \cdot \vec{e}_1] \|_\diamond^2 \Big\} \\
&\qquad \le \tfrac{1}{2\pi} E(\rho^0, \vec{U}^0, \vec{X}^0) + \Delta t \sum_{m=0}^{k} (\rho^m\, r\vec{g},\ \vec{U}^{m+1}).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

证明：在 (4.4a) 中令 $\vec{\chi} = \Delta t\ \vec{\mathrm{U}}^{m+1}$，在 (4.4b) 中令 $\mathrm{q} = \mathrm{P}^{m+1}$，在 (4.4c) 中令 $\zeta = \Delta t\, \gamma\, \varkappa^{m+1}$，在 (4.4d) 中令 $\vec{\eta} = \vec{\mathrm{X}}^{m+1} - \vec{\mathrm{X}}^{m}$，并将这些方程合并，可得

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\Big(\rho^m \vec{U}^{m+1} - I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m + I_0^m \rho^{m-1}[\vec{U}^{m+1} - I_2^m \vec{U}^m],\ \vec{U}^{m+1}\, r\Big) \\
&\qquad + 2\Delta t(\mu^m\, r\, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1})) + 2\Delta t(\mu^m\, r^{-1}[\vec{U}^{m+1}\cdot\vec{e}_1],\ [\vec{U}^{m+1}\cdot\vec{e}_1])^{\circ} \\
&\qquad + \gamma\langle(\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m)\cdot\vec{e}_1,\ |\vec{X}_\alpha^{m+1}|\rangle + \gamma\langle(\vec{X}^m\cdot\vec{e}_1)\,\vec{X}_\alpha^{m+1},\ (\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m)_\alpha\, |\vec{X}_\alpha^m|^{-1}\rangle \\
&\quad = (\rho^m\, r\, \vec{g},\ \vec{U}^{m+1}).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

不难证明，下式成立

$$\begin{aligned}
&(\rho^m \vec{U}^{m+1} - I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m + I_0^m \rho^{m-1}[\vec{U}^{m+1} - I_2^m \vec{U}^m],\ \vec{U}^{m+1}\, r) \\
&\quad = (\rho^m \vec{U}^{m+1}, \vec{U}^{m+1} r) - (I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m, I_2^m \vec{U}^m\, r) \\
&\qquad\qquad + (I_0^m \rho^{m-1}[\vec{U}^{m+1} - I_2^m \vec{U}^m], [\vec{U}^{m+1} - I_2^m \vec{U}^m]\, r) \\
&\quad \geq (\rho^m \vec{U}^{m+1}, \vec{U}^{m+1} r) - (I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m, I_2^m \vec{U}^m\, r).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

此外，利用不等式 $\vec{\mathrm{a}}\cdot(\vec{\mathrm{a}} - \vec{\mathrm{b}}) \geq |\vec{\mathrm{b}}|(|\vec{\mathrm{a}}| - |\vec{\mathrm{b}}|)$（其中 $\vec{\mathrm{a}}, \vec{\mathrm{b}} \in \mathbb{R}^2$），可得

$$\begin{aligned}
&\Big\langle(\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m)\cdot\vec{e}_1,\ |\vec{X}_\alpha^{m+1}|\Big\rangle + \Big\langle(\vec{X}^m\cdot\vec{e}_1)\,\vec{X}_\alpha^{m+1},\ (\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m)_\alpha\, |\vec{X}_\alpha^m|^{-1}\Big\rangle \\
&\qquad \geq \Big\langle(\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m)\cdot\vec{e}_1,\ |\vec{X}_\alpha^{m+1}|\Big\rangle + \Big\langle\vec{X}^m\cdot\vec{e}_1,\ |\vec{X}_\alpha^{m+1}| - |\vec{X}_\alpha^m|\Big\rangle \\
&\qquad = \langle\vec{X}^{m+1}\cdot\vec{e}_1,\ |\vec{X}_\alpha^{m+1}|\rangle - \langle\vec{X}^m\cdot\vec{e}_1,\ |\vec{X}_\alpha^m|\rangle.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

将 (4.9) 和 (4.10) 代入 (4.8)，并利用 (3.13a)，即可得到所述的 (4.5)。将 (4.5) 对 $\mathrm{m} = 0, \ldots, \mathrm{k}$ 求和，并结合 (4.6)，得到 (4.7)。

4.3 保体积近似

回顾第 §3 节可知，在连续层面上，两个轴对称弱形式 (3.11) 和 (3.18) 均满足体积守恒性质 (3.16)。然而，格式 (4.3) 和 (4.4) 通常无法保持两相的体积。为说明一种补救方法，我们首先考虑半离散情形，并参照 [10, 11] 中的类似讨论。具体而言，(3.11b) 和 (3.11c) 的半离散变体为

$$(\nabla_c\cdot[r\,\vec{u}^h],\ q^h) = 0 \qquad \forall q^h \in \mathbb{P}^h, \tag{4.11a}$$

$$\langle(\vec{\mathrm{x}}^h\cdot\vec{e}_1)\,[\partial_t\vec{\mathrm{x}}^h - \vec{u}^h],\ \zeta^h\,\vec{\mathrm{v}}^h\,|\vec{\mathrm{x}}_\alpha|\rangle = 0 \qquad \forall\zeta \in V^h, \tag{4.11b}$$

其中，我们用上标 h 表示半离散层面上的相应量。类似于式 (3.16)，通过选取合适的检验函数，不难证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(\mathrm{x}^h(t)) = 2\pi\langle\vec{\mathrm{x}}^h\cdot\vec{e}_1,\ \vec{\mathrm{x}}_t^h\cdot\vec{\mathrm{v}}^h\,|\vec{\mathrm{x}}_\alpha|\rangle = 0 \tag{4.12}$$

如果满足以下条件

$$\mathscr{X}_{\mathcal{R}^h_-(t)} - \omega^h(t) \in \mathbb{P}^h \quad \text{with} \quad \omega^h(t) = \frac{\int_{\mathcal{R}^h_-(t)} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{\int_{\mathcal{R}} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}, \quad t \in [0,T]. \tag{4.13}$$

这表明，应使用（4.13）中的单个额外函数 $\mathbb{P}^h$ 来丰富离散压力空间。在全离散层面上，这相当于确保

$$\mathscr{X}_{\mathcal{R}^m_-} - \omega^m \in \mathbb{P}^m \quad \text{with} \quad \omega^m = \frac{\int_{\mathcal{R}^m_-} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{\int_{\mathcal{R}} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}, \quad m = 0,\dots,M-1. \tag{4.14}$$

因此，我们将单个基函数 $\mathscr{X}_{\mathcal{R}^m_-} - \omega^m$ 添加到离散压力空间 $\mathbb{P}^m$中，以此实现上述要求；这一过程称为扩展有限元法（XFEM）。注意到，该新基函数对（4.3a）、（4.3b）、（4.4a）和（4.4b）的贡献可以改写为关于 $\mathbb{I}$的积分形式，其中

$$(\nabla_c \cdot [r\vec{\chi}],\ \mathscr{X}_{\mathcal{R}^m_-}) = \int_{\mathcal{R}^m_-} \nabla_c \cdot [r\vec{\chi}] \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\vec{\chi},\ \vec{\nu}^m \rangle \qquad \forall \vec{\chi} \in \mathbb{U}^m. \tag{4.15}$$

我们注意到，这种扩展有限元技术最初是在 [11], 中针对（2.6）的离散化提出的，并在实践中实现了良好的体积守恒。然而，为了在全离散层面上也满足精确体积保持，事实证明需要采用界面法向量的适当时间加权近似，参见 [6, 7]。

我们遵循 [6] 中的思想，引入 $\vec{\mathrm{f}}_{m^{+\frac{1}{2}}}$作为量 $\vec{\mathrm{f}} = \vec{\mathrm{x}} \cdot \vec{\mathrm{e}}_1 |\vec{\mathrm{x}}_\alpha| \vec{\nu}$的适当近似。具体而言，我们将 $\vec{\mathrm{f}}_{m^{+\frac{1}{2}}} \in [\mathrm{L}^\infty(\mathbb{I})]^2$定义为

$$\vec{f}^{m+\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{6}[(\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\,\vec{X}^m_\alpha + 4(\vec{X}^{m+\frac{1}{2}} \cdot \vec{e}_1)\vec{X}^{m+\frac{1}{2}}_\alpha + (\vec{X}^{m+1} \cdot \vec{e}_1)\,\vec{X}^{m+1}_\alpha]^\perp, \tag{4.16}$$

其中 $\vec{\mathrm{X}}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathrm{X}}^m + \vec{\mathrm{X}}^{m+1})$。于是，由 [6,引理 3.1] 可得如下结果。为完整起见，我们在此也给出证明。

引理 4.1 设 $\vec{\mathrm{X}}^m \in \mathrm{V}^h_\partial$ 且 $\vec{\mathrm{X}}^{m+1} \in \mathrm{V}^h_\partial$。则有

$$M(\vec{X}^{m+1}) - M(\vec{X}^m) = 2\pi \langle \vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m,\ \vec{f}^{m+\frac{1}{2}} \rangle. \tag{4.17}$$

证明 我们首先在 $\vec{\mathrm{X}}^m$ 和 $\vec{\mathrm{X}}^{m+1}$ 之间引入一个时间上的线性近似，定义为

$$\vec{X}^h(t) := \frac{t_{m+1}-t}{\Delta t}\vec{X}^{m+1} + \frac{t-t_m}{\Delta t}\vec{X}^m \in V^h_\partial, \quad t \in [t_m, t_{m+1}]. \tag{4.18}$$

然后将 (3.14b) 应用于 $\vec{\mathrm{X}}^h(\mathrm{t})$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(\vec{X}^h(t)) = 2\pi \left\langle \vec{X}^h \cdot \vec{e}_1,\ \vec{X}^h_t \cdot \vec{\nu}^h |\vec{X}^h_\alpha| \right\rangle \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}). \tag{4.19}$$

将$_{\perp}$(4.19) 从 t_m 积分至 t_{m+1}，并注意到 $\vec{X}_t^h = \vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m$ 和 $\vec{\nu}^h = -\frac{(\vec{X}_\alpha^h)^\perp}{|\vec{X}_\alpha^h|}$，可得

$$\begin{aligned} M(\vec{X}^{m+1}) - M(\vec{X}^m) &= 2\pi \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{\mathbb{I}} (\vec{X}^h \cdot \vec{e}_1) \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m}{\Delta t} \cdot (-\vec{X}_\alpha^h)^\perp \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{I}} \frac{\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m}{\Delta t} \cdot \int_{t_m}^{t_{m+1}} (\vec{X}^h \cdot \vec{e}_1)(-\vec{X}_\alpha^h)^\perp \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\alpha \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{I}} (\vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m) \cdot \vec{f}^{m+\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\alpha, \end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们注意到被积函数 $(\vec{X}^h \cdot \vec{e}_1)(-\vec{X}_\alpha^h)^\perp$ 是关于 t 的二次函数，因而采用了辛普森法则。

现在，我们可以将数值方法 (4.4) 加以调整，从而得到如下精确体积守恒格式。对于 $m \geq 0$，我们求得 $\vec{U}^{m+1} \in \mathbb{U}^m$、$P^{m+1} \in \mathbb{P}^m$，$\vec{X}^{m+1} \in \mathrm{V}_\partial^h$ 和 $\varkappa^{m+1} \in \mathrm{V}^h$，使得

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\rho^m \vec{U}^{m+1} - I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi} \, r\Big) + \Big(I_0^m \rho^{m-1} \frac{\vec{U}^{m+1} - I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi} \, r\Big)\Big] \\ &\quad + \mathscr{A}(\rho^m, I_2^m \vec{U}^m; \vec{U}^{m+1}, \vec{\chi}) + 2(\mu^m \, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1}), \, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi}) \, r) \\ &\quad + 2(\mu^m \, r^{-1} [\vec{U}^{m+1} \cdot \vec{e}_1], \, [\vec{\chi} \cdot \vec{e}_1])^\diamond - (P^{m+1}, \, \nabla_c \cdot [r\vec{\chi}]) \\ &\quad - \gamma \, \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1) \varkappa^{m+1}, \, \vec{\nu}^m \cdot \vec{\chi} \, |\vec{X}_\alpha^m| \rangle = (\rho^m \vec{g}, \, \vec{\chi} \, r), \end{aligned} \tag{4.20a}$$

$$(\nabla_c \cdot [r\vec{U}^{m+1}], \, q) = 0, \tag{4.20b}$$

$$\frac{1}{\Delta t} \langle \vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m, \, \zeta \, \vec{f}^{m+\frac{1}{2}} \rangle - \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1) \, \vec{U}^{m+1}, \, \zeta \, \vec{\nu}^m \, |\vec{X}_\alpha^m| \rangle = 0, \tag{4.20c}$$

$$\langle \varkappa^{m+1} \, \vec{f}^{m+\frac{1}{2}}, \, \vec{\eta} \rangle + \langle \vec{\eta} \cdot \vec{e}_1, \, |\vec{X}_\alpha^{m+1}| \rangle + \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1) \, \vec{X}_\alpha^{m+1}, \, \vec{\eta}_\alpha \, |\vec{X}_\alpha^m|^{-1} \rangle = 0, \tag{4.20d}$$

对所有 $(\vec{\chi}、q、\zeta\vec{\eta}) \in \mathbb{U}^m \times \mathbb{P}^m \times \mathrm{V}^h \times \mathrm{V}_\partial^h$ 均成立。在 (4.20c) 中，我们采用半隐式处理 $\vec{f}^{m+\frac{1}{2}}$ 来近似 $(\vec{x} \cdot \vec{e}_1)|\vec{x}_\alpha| \vec{\nu}$，而非像 (4.4c) 中那样显式处理。由此实现了精确体积保持。此外，我们还在 (4.20d) 中采用 $\vec{f}^{m+\frac{1}{2}}$，以维持稳定性界。接下来，我们给出格式 (4.20) 的以下定理，它在离散层面上对应于 (3.16) 和 (3.17)。

定理 4.2 设 $(\vec{U}^{m+1}, P^{m+1}, \vec{X}^{m+1}, \varkappa^{m+1})$ 是 (4.20) 的一个解。则 (4.5) 成立。若条件 (4.6) 满足，则对于 $k = 0, \ldots, M-1$，(4.7) 成立。此外，若 (4.14) 成立，则

$$M(\vec{X}^{m+1}) = M(\vec{X}^m), \quad m = 0, \ldots, M-1. \tag{4.21}$$

证明 稳定性结果可按照定理 4.1 的证明得出。对于体积保持，我们在 (4.20b) 中取 $q = (\mathscr{K}_{\vec{X}^m} - \omega^m) \in \mathbb{P}^m$，得到

$$(\nabla_c \cdot [r\,\vec{U}^{m+1}], \mathscr{K}_{\vec{X}^m}) - \omega^m (\nabla_c \cdot [r\,\vec{U}^{m+1}], 1) = 0. \tag{4.22}$$

利用分部积分，可将 (4.22) 改写为

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_c \cdot [r\,\vec{U}^{m+1}), \mathscr{X}_{\underline{\kappa}^m}) - \omega^m (\nabla_c \cdot [r\,\vec{U}^{m+1}], 1) \\ &= \int_{\Gamma^m} (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\,\vec{U}^{m+1} \cdot \vec{\nu}^m \;\mathrm{d}s = \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\,\vec{U}^{m+1},\ \vec{\nu}^m |\vec{X}^m_\alpha|\rangle. \end{aligned} \tag{4.23}$$

另一方面，在 (4.20c) 中令 $\zeta = \Delta t$，并利用 (4.23)，可得

$$\langle \vec{X}^{m+1} - \vec{X}^m,\ \vec{f}^{m+\frac{1}{2}} \rangle = \Delta t \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\,\vec{U}^{m+1},\ \vec{\nu}^m |\vec{X}^m_\alpha|\rangle = 0, \tag{4.24}$$

回顾引理 4.1，即可推出所需的体积保持性质 (4.21)。

将线性格式 (4.3) 改进为精确体积守恒方法也并不困难。事实上，新格式现为非线性格式，它由 (4.3) 给出，其中以 (4.20c) 替换 (4.3c)。

定理 4.3 设 $(\vec{\mathrm{U}}^{m+1}, \mathrm{P}^{m+1},\ \vec{\mathrm{X}}^{m+1},\ \kappa^{m+1})$ 是改进格式 (4.3)（其中以 (4.20c) 替换 (4.3c)）的一个解。假设 (4.14) 成立，则有

$$M(\vec{X}^{m+1}) = M(\vec{X}^m), \quad m = 0, \ldots, M-1. \tag{4.25}$$

证明 证明与 (4.21) 的证明完全相同。

4.4 非线性求解器

我们注意到，除了 (4.3) 之外，本文介绍的所有格式都会在每个时间步产生非线性方程组。由 (4.3) 导出的线性方程组可以借助 [11] 中所述的舒尔补方法和预条件 Krylov 迭代求解器求解。对于其他格式产生的非线性方程组，我们采用 Picard 型迭代。例如，为求解 (4.20)，我们首先设定初始猜测 $\vec{\mathrm{X}}^{m+1,0} = \vec{\mathrm{X}}^m$。然后，对于每个 $l \geq 0$，求得 $(\vec{\mathrm{U}}^{m+1,l+1}, \mathrm{P}^{m+1,l+1}, \vec{\mathrm{X}}^{m+1,l+1}, \varkappa^{m+1,l+1}) \in \mathbb{U}^m \times \mathbb{P}^m \times \mathrm{V}^h_\partial \times \mathrm{V}^h$，使得

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\rho^m \vec{U}^{m+1,l+1} - I_0^m \rho^{m-1} I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi}\, r\Big) + \Big(I_0^m \rho^{m-1} \frac{\vec{U}^{m+1,l+1} - I_2^m \vec{U}^m}{\Delta t}, \vec{\chi}\, r\Big)\Big] \\ &\quad + \mathscr{A}(\rho^m, I_2^m \vec{U}^m; \vec{U}^{m+1,l+1}, \vec{\chi}) + 2(\mu^m\, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{U}^{m+1,l+1}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi})\, r) \\ &\quad + 2(\mu^m\, r^{-1} [\vec{U}^{m+1,l+1} \cdot \vec{e}_1],\ [\vec{\chi} \cdot \vec{e}_1])^\diamond - (P^{m+1,l+1},\ \nabla_c \cdot [r\vec{\chi}]) \\ &\quad - \gamma \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, \varkappa^{m+1,l+1}\, \vec{\nu}^m, \vec{\chi} |\vec{X}^m_\alpha|\rangle = (\rho^m \vec{g}, \vec{\chi}\, r), \end{aligned} \tag{4.26a}$$

$$(\nabla_c \cdot [r\vec{U}^{m+1,l+1}],\ q\Big) = 0, \tag{4.26b}$$

$$\frac{1}{\Delta t} \langle \vec{X}^{m+1,l+1} - \vec{X}^m,\ \zeta \vec{f}^{m+\frac{1}{2},l} \rangle - \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\,\vec{U}^{m+1,l+1},\ \zeta\, \vec{\nu}^m\, |\vec{X}^m_\alpha|\rangle = 0, \tag{4.26c}$$

$$\langle \varkappa^{m+1,l+1}\, \vec{f}^{m+\frac{1}{2},l},\ \vec{\eta} \rangle + \langle \vec{\eta} \cdot \vec{e}_1,\ |\vec{X}^{m+1,l}_\alpha|\rangle + \langle (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)\, \vec{X}^{m+1,l+1}_\alpha,\ \vec{\eta}_\alpha\, |\vec{X}^m_\alpha|^{-1} \rangle = 0, \tag{4.26d}$$

对所有 $(\vec{\chi}、\mathrm{q}、\zeta,\vec{\eta}) \in \mathbb{U}^m \times \mathbb{P}^m \times \mathrm{V}^h \times \mathrm{V}_\partial^h$，其中 $\vec{\mathrm{f}}_{m+\frac{1}{2},l}$ 是一个滞后近似，它直接沿用 (4.16)，唯一的区别是将 $\vec{\mathrm{X}}^{m+1}$ 替换为 $\vec{\mathrm{X}}^{m+1,l}$。系统 (4.26) 是线性的，且具有与 (4.3) 相同的一般结构。因此，可以使用上述求解技术高效求解。我们重复上述迭代，直到

$$\max_{0\le j\le J_\Gamma} \left|\vec{X}^{m+1,l+1}(\alpha_j) - \vec{X}^{m+1,l}(\alpha_j)\right| \le \mathrm{tol}, \tag{4.27}$$

其中 tol 为选定的容差。

5 数值结果

我们使用有限元工具箱 Alberta 实现了非拟合有限元近似，[49]。对于求积 $(\cdot,\cdot)_\diamond$，我们采用对最高 17 次多项式精确的高斯–洛巴托公式。对于体相中的速度和压力近似，我们始终使用最低阶 Taylor–Hood 元，并结合压力空间的 XFEM 扩展，参见（4.1）和 §4.3。

正如 [24, 第 125] 页所指出的，将现有的二维有限元代码扩展到轴对称情形通常相当直接。例如，我们采用与 [11] 中相同的自适应网格策略，从而在界面附近生成局部细化的主体网格。对于网格参数的定义，我们沿用该文中的记号：$\mathrm{nadapt}_{k,\,l}$ 表示将时间步长设为 $\Delta\mathrm{t} = 10^{-3}/\mathrm{n}$，将离散界面划分为 $\mathrm{J}_\Gamma = 2^k$ 个单元；两个主体网格细化参数 $\mathrm{N}_f = 2^k$ 和 $\mathrm{N}_c = 2^l$ 分别表示界面附近和远离界面处所采用的网格尺寸。有关自适应网格细化策略的详细说明，请参见 [11]。为简单起见，我们分别用 Stab^h 和 StabV^h 表示所引入的方法（4.4）和（4.20）。此外，我们用 Equid^h 表示方法（4.3），用 EquidV^h 表示将（4.3c）替换为（4.20c）后的格式（4.3）。

5.1 上升气泡

受 [36], 中提出的二维基准计算启发（其推广至三维的内容见 [11]），我们研究直径为 1、高为 2 的有界圆柱中上升气泡的动力学。气泡的初始界面为半径 $\frac{1}{4}$、球心位于 $(0, 0, \frac{1}{2})^T$ 的球体。这意味着，在柱坐标中，我们有 $\mathcal{R} = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2]$ 和 $\Gamma(0) = \{\mathrm{x} \in \mathcal{R} : |\mathrm{x} - (0, \frac{1}{2})^T| = \frac{1}{4}\}$。为监测上升气泡的运动过程，我们引入以下离散基准量

$$\mathfrak{s}|_{t_m} := \left(\frac{9}{2\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{[M(\vec{X}^m)]^{\frac{2}{3}}}{\int_0^1 (\vec{X}^m \cdot \vec{e}_1)|\vec{X}_\alpha^m|\,\mathrm{d}\alpha}, \qquad V_c|_{t_m} := \frac{2\pi \int_{R^m} (\vec{U}^m \cdot \vec{e}_2) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{M(\vec{X}^m)},$$

$$z_c|_{t_m} := \frac{2\pi \int_{R^m} (\mathrm{id} \cdot \vec{e}_2) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{M(\vec{X}^m)}, \qquad v_\Delta|_{t_m} := \frac{M(\vec{X}^m) - M(\vec{X}^0)}{M(\vec{X}^0)},$$

表 1 情形 I 中上升气泡的基准量。

	Stab^h			StabV^h		
	adapt$_{5,3}$	adapt$_{7,3}$	2自适应$_{9,4}$	自适应$_{5,3}$	自适应$_{7,3}$	2自适应$_{9,4}$
$s/_{min}$	0.9630	0.9536	0.9501	0.9630	0.9536	0.9501
$ts/_{-s/min}$	3.000	2.9960	3.0000	3.000	3.0000	3.0000
$V_{c,\max}$	0.3687	0.3637	0.3642	0.3686	0.3640	0.3643
$t_{Vc=Vc,\max}$	1.233	0.8950	0.9255	1.233	0.8980	0.9255
$z_c(t = 3)$	1.4834	1.4848	1.4897	1.4835	1.4848	1.4897
$v_{\Delta}(t = 3)$	8.50E-5	-8.27E-5	-2.83E-5	0	0	0

	等距^h			等距V^h		
	适应$_{5,2}$	适应$_{7,3}$	2适应$_{9,4}$	适应$_{5,2}$	适配$_{7,3}$	2适配$_{9,4}$
$s/_{min}$	0.9603	0.9534	0.9501	0.9603	0.9534	0.9501
$ts/_{-s/min}$	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000
$V_{c,\max}$	0.3681	0.3637	0.3642	0.3683	0.3637	0.3642
$t_{Vc=Vc,\max}$	1.236	0.8980	0.9260	1.236	0.8980	0.9260
$z_c(t = 3)$	1.4815	1.4846	1.4896	1.4815	1.4846	1.4896
$v_{\Delta}(t = 3)$	-4.39E-5	-4.58E-5	-2.54E-5	0	0	0

其中，$s/$ 表示气泡的球形度，V_c 表示气泡的上升速度，z_c 表示气泡在竖直方向上的质心，v_{Δ} 表示相对体积损失。

我们考虑两种不同的情形，物理参数如[36],所示，另见 [11]。

– 情形 I:

$$\rho_+ = 1000, \quad \rho_- = 100, \quad \mu_+ = 10, \quad \mu_- = 1, \quad \gamma = 24.5, \quad \vec{g} = (0, -0.98)^T.$$

– 情形 II:

$$\rho_+ = 1000, \quad \rho_- = 1, \quad \mu_+ = 10, \quad \mu_- = 0.1, \quad \gamma = 1.96, \quad \vec{g} = (0, -0.98)^T.$$

我们首先考虑情形 I，并采用 (4.1) 中的 P2-P1对元素，结合 §4.3 中讨论的扩展有限元法，以改善体积保持效果。表 1 给出了采用所介绍的四种方法计算得到的基准结果。可以看出，这些方法得出的结果十分相近，且气泡的体积得到了良好保持。特别是，对于 StabV^h 和 EquidV^h，我们观察到了精确体积保持，这从数值上验证了 (4.21) 和 (4.25)。为考察界面网格的质量，我们引入网格比函数

$$r_h|_{t_m} = \frac{\max_{1\le j\le J_\Gamma} |\vec{X}^m(\alpha_j) - \vec{X}^m(\alpha_{j-1}|}{\min_{1\le j\le J_\Gamma} |\vec{X}^m(\alpha_j) - \vec{X}^m(\alpha_{j-1}|}, \tag{5.2}$$

并在图 2 中绘制 r_h 随时间的变化曲线。我们发现，对于方法 StabV^h 和 EquidV^h，网格比函数的值通常不会超过 2.0（$t \le 3$）。这表明网格质量良好。对于采用方法 EquidV^h 和 2adapt$_{9,4}$，的实验，图 3 展示了母线的若干时刻快照。此外，图 3 还展示了终止时刻 $t = 3$ 的计算网格和气泡，并给出了基准量随时间变化的曲线。

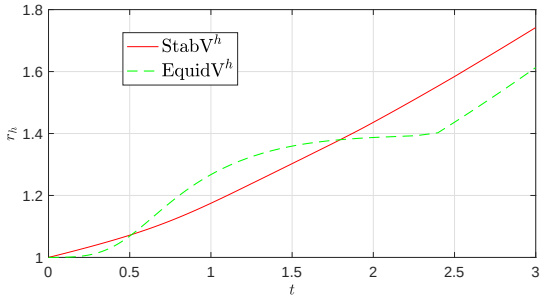


图 2 使用带有 2adapt^{9,4} 的方法 StabV^h 和 EquidV^h 时，式 (5.2) 中定义的网格比函数 r_h 的时间演化。

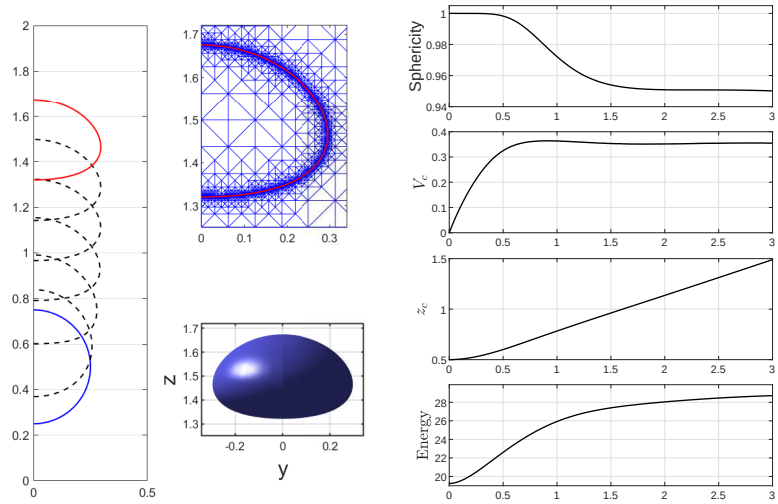


图 3 使用带有 2adapt^{9,4} 的方法 EquidV^h 时，情形 I 中上升气泡的演化。左图展示了 t = 0、0.5、.....、3 时界面的母线，并在终止时刻 t = 3 展示计算网格和轴对称曲面 S (t)。右图展示了离散基准量随时间的变化曲线。

接下来，我们考虑情形 II 中的上升气泡问题。在这种情形下，由于密度比和黏度比很高，上升气泡会发生强烈变形。基准结果列于表2。对于采用方法 StabV^h 和 2adapt^{9,4}，的实验，图 4 和图5 分别展示了演化界面和基准结果曲线。

5.2 振荡液滴

在本实验中，我们通过数值方法研究悬浮液滴的振荡，该液滴被低密度流体包围。这是一个经典问题，文献中已有详细研究，参见 [1, 39, 47, 56]。在此，我们考虑一个三维

表2 情形 II 中上升气泡的基准量。

	Stab^h			StabV^h		
	adapt^{5} ,2	adapt^{7} ,3	2适应$_{9}$,4	适应$_{5}$,2	适应$_{7}$,3	2适应$_{9}$,4
$s/_{min}$	0.8117	0.7872	0.7682	0.8108	0.7873	0.7683
$ts/_{min}$	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000
$V_{c,\max}$	0.3621	0.3693	0.3717	0.3633	0.3693	0.3717
$t_{Vc=Vc,\max}$	0.6970	0.5640	0.5440	0.6180	0.5650	0.5440
$z_c(t = 1.5)$	0.9833	0.9901	0.9972	0.9831	0.9900	0.9972
$v_d(t = 1.5)$	7.94E-7	-2.68E-4	-1.17E-4	0	0	0

	等距^h			等距V^h		
	自适应$_{5}$,2	自适应$_{7}$,3	2自适应$_{9}$,4	自适应$_{5}$,2	自适应$_{7}$,3	2自适应$_{9}$,4
$s/_{min}$	0.8014	0.7865	0.7682	0.8013	0.7866	0.7682
$ts/_{min}$	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000	1.5000
$V_{c,\max}$	0.3630	0.3694	0.3717	0.3629	0.3693	0.3717
$t_{Vc=Vc,\max}$	0.6190	0.5640	0.5440	0.6190	0.5640	0.5440
$z_c(t = 1.5)$	0.9817	0.9901	0.9972	0.9817	0.9901	0.9972
$v_d(t = 1.5)$	1.25E-5	-1.15E-4	-9.95E-5	0	0	0

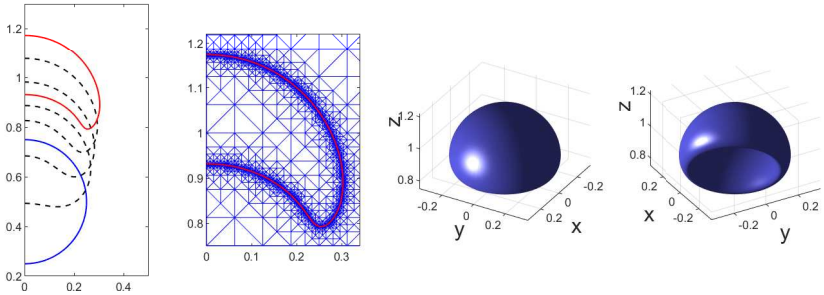


图 4 使用 StabV^h with 2adapt^{9,4}, 方法模拟情形 II 中上升气泡的演化。图中展示了 t = 0、0.3、0.6、1.2、1.5 时界面的母线，终止时刻的计算网格可视化，以及终止时刻 t = 1.5 时从不同方向观察到的轴对称曲面 S (t)。

轴对称液滴的振荡，其初始界面的母线由以下公式给出

$$\begin{cases} r(\theta,0) = R_0\left[1+\frac{\varepsilon_0}{2}(3\sin^2\theta-1)-\frac{1}{5}\varepsilon_0^2\right]\cos(\theta), \\ z(\theta,0) = R_0\left[1+\frac{\varepsilon_0}{2}(3\sin^2\theta-1)-\frac{1}{5}\varepsilon_0^2\right]\sin(\theta)+1.0, \end{cases} \qquad \theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}],$$

其中 $R_0 = 0.3$ 且 $\varepsilon_0 = 0.08$。为简单起见，我们选择的物理参数如下：

$$\rho_+ = 1, \quad \rho_- = 1000, \quad \mu_+ = 0.01, \quad \mu_- = 2, \quad \gamma = 40, \quad \vec{g} = \vec{0}.$$

计算域为 $\mathcal{R} = [0,0.5]\times[0,2]$ 含有 $\partial_1\mathcal{R} = [0,0.5]\times\{0,2\}$ 和$\partial_2\mathcal{R} = \{0.5\}\times[0,2]$。然后，回顾 [1, (15b) 和 (38)], , 我们注意到动态

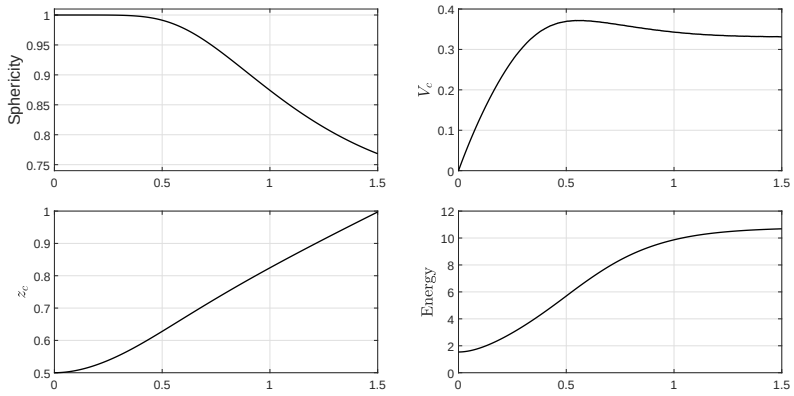


图 5 图 4 中离散基准量随时间的演变。

液滴的界面可近似为

$$\begin{cases} r(\theta,t) = R_0\left[1+\frac{\varepsilon(t)}{2}(3\sin^2\theta-1)-\frac{1}{5}\varepsilon(t)^2\right]\cos(\theta), \\ z(\theta,t) = R_0\left[1+\frac{\varepsilon(t)}{2}(3\sin^2\theta-1)-\frac{1}{5}\varepsilon(t)^2\right]\sin(\theta)+1.0, \end{cases} \quad \theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}], \qquad (5.3)$$

且 ε(t) 由下式给出

$$\varepsilon(t) \approx \varepsilon_0 \exp(-\lambda_2 t)\cos(\omega_2 t) \quad \text{with} \quad \lambda_2 = \frac{5\mu_-}{\rho_- R_0^2} = \tfrac{1}{9}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8\gamma}{\rho_- R_0^3}} = \tfrac{8}{9}\sqrt{15}.$$

图 6 中，我们将所得数值结果与式 (5.3) 中关于母线上端点位移的近似解进行了比较。可以观察到二者高度吻合，这证明了我们所提出方法的准确性。最后，我们在图 7 中展示了界面和速度场。

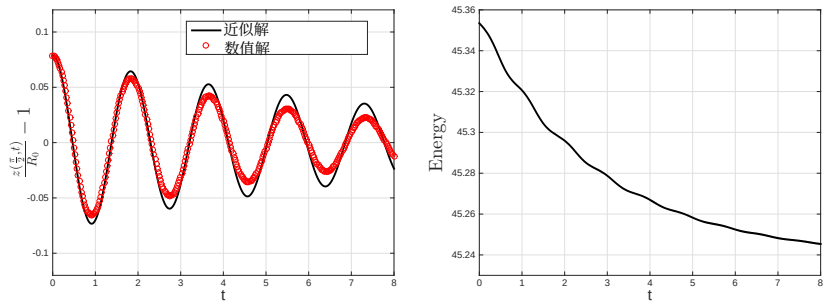


图 6 母线在 z轴 上端点的位移（左图）和总能量（右图）随时间的演变，其中我们使用 Equid^h with 2adapt^{9,4}。

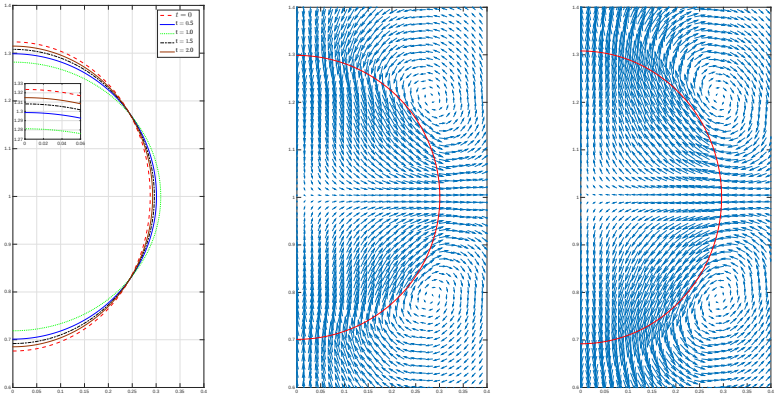


图 7 图 6 中实验在多个时刻的流体界面母线快照（左图）、t = 0.5 时的速度场（中图）以及 t = 1.5 时的速度场（右图）。

6 结论

我们针对轴对称情形下的两相不可压流提出了四种非拟合有限元方法。所提出的方法将二维子午半平面上求解纳维–斯托克斯方程的非拟合有限元方法，与基于轴对称界面母线的参数有限元方法相结合。我们考虑了两种不同的弱形式，并对表面张力采用了两种可能的近似。通过采用适当的离散化，我们得到了一个无条件稳定方法，以及一个具有均匀分布性质的线性离散方法。此外，利用适当的时间加权离散法向量，我们对所提出的两种方法进行了调整，从而实现两相的精确体积保持。我们给出了数值结果，以展示所提出方法的稳健性并验证其良好性质。

资金支持

赵的工作得到了亚历山大·冯·洪堡基金会的支持。

数据可用性

本研究期间生成和/或分析的数据集，可在合理请求后向通讯作者获取。

声明

作者声明，他们与任何在本文讨论的主题或材料方面具有经济或非经济利益的组织或实体均无关联，也未参与其中。

（3.11）的推导

设 $\vec{x} = (x, y, z)$ 为笛卡尔坐标，(r, z, φ) 为柱坐标，使得

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为径向距离，φ 为方位角。这给出了基向量$\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$

$$\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T, \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^T, \qquad \vec{e}_z = (0, 0, 1)^T, \tag{A.1}$$

它们满足

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r, \qquad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = \vec{0}, \qquad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = \vec{0}. \tag{A.2}$$

对于任意标量函数 $\check{b}(\vec{x})$，用柱坐标表示为 $b(r, \varphi, z) = \check{b}(\vec{x})$。于是有

$$\nabla \check{b}(\vec{x}) = \frac{\partial b}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial b}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{A.3}$$

对于任意向量值函数 $\check{b}(\vec{x}, t)$，类似地，记 $\check{b}(\vec{x}) = \vec{b}(r, \varphi, z) = b^r\vec{e}_r + b^\varphi\vec{e}_\varphi + b^z\vec{e}_z$。然后利用 (A.2) 中的关系可得

$$\nabla \check{\vec{b}} = [\vec{e}_r \quad \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_z] \begin{bmatrix} \frac{\partial b^r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial b^r}{\partial \varphi} - \frac{b^\varphi}{r} & \frac{\partial b^r}{\partial z} \\ \frac{\partial b^\varphi}{\partial r} & \frac{b^r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b^\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial b^\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial b^z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial b^z}{\partial \varphi} & \frac{\partial b^z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{e}_r)^T \\ (\vec{e}_\varphi)^T \\ (\vec{e}_z)^T \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

此外，对于 $\vec{b}$ 的散度，有

$$\nabla \cdot \check{b} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial r}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{b}}{\partial \varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}\cdot\vec{e}_z = \frac{\partial b^r}{\partial r} + \frac{b^r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial b^z}{\partial z}. \tag{A.5}$$

现在遵循 §3.1 中的轴对称情形，并记

$$\check{\vec{u}}(\vec{x}, t) = u^r(r, z, t)\vec{e}_r + u^z(r, z, t)\vec{e}_z, \qquad \check{\vec{\chi}}(\vec{x}, t) = \chi^r(r, z, t)\vec{e}_r + \chi^z(r, z, t)\vec{e}_z.$$

于是由 (3.12a) 可得

$$\begin{aligned} \left(\rho\check{\vec{u}}, \check{\vec{\chi}}\right)_\Omega &= 2\pi\int_{\mathcal{R}_-(t)} \rho_-(u^r\chi^r + u^z\chi^z) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z + 2\pi\int_{\mathcal{R}_+(t)} \rho_+(u^r\chi^r + u^z\chi^z) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\int_{\mathcal{R}} \rho_c(u^r\chi^r + u^z\chi^z) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z = 2\pi\left(\rho_c\vec{u}, \vec{\chi}\, r\right), \end{aligned} \tag{A.6}$$

其中 $\vec{u} = (u^r, u^z)^T$ 和 $\vec{\chi} = (\chi^r, \chi^z)^T$ 是二维子午半平面 $\mathcal{R}$中的向量。类似地，有

$$\left(\rho\partial_t\check{\vec{u}}, \check{\vec{\chi}}\right)_\Omega = 2\pi\left(\rho_c\partial_t\vec{u}, \vec{\chi}\, r\right), \qquad \left(\rho\check{\vec{u}}, \partial_t\check{\vec{\chi}}\right)_\Omega = 2\pi\left(\rho_c\vec{u}, \partial_t\vec{\chi}\, r\right). \tag{A.7}$$

回顾式 (A.5) 和式 (3.8)，可得

$$\left(\check{q}, \nabla\cdot\check{\vec{u}}\right) = 2\pi\int_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{u^r}{r} + \frac{\partial u^z}{\partial z}\right) q\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = 2\pi\left(\nabla_c\cdot([r\vec{u}], q\right). \tag{A.8}$$

对 $\breve{\vec{u}}$ 和 $\breve{\vec{\chi}}$ 使用式 (A.4)，不难证明

$$\int_{\Omega_\pm(t)} \left([\breve{\vec{u}} \cdot \nabla] \breve{\vec{u}} \cdot \breve{\vec{\chi}} - [\breve{\vec{u}} \cdot \nabla] \breve{\vec{\chi}} \cdot \breve{\vec{u}} \right) \mathrm{d}V = 2\pi \int_{\mathcal{R}_\pm(t)} ([\vec{u} \cdot \nabla_c] \vec{u} \cdot \vec{\chi} - [\vec{u} \cdot \nabla_c] \vec{\chi} \cdot \vec{u})\, r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z. \tag{A.9}$$

将 (A.9) 乘以 $\rho_\pm$，并将这两个方程合并，可得

$$\left(\rho,\ [\breve{\vec{u}} \cdot \nabla] \breve{\vec{u}} \cdot \breve{\vec{\chi}} - [\breve{\vec{u}} \cdot \nabla] \breve{\vec{\chi}} \cdot \breve{\vec{u}} \right)_\Omega = 2\pi \left(\rho_c r,\ [\vec{u} \cdot \nabla_c] \vec{u} \cdot \vec{\chi} - [\vec{u} \cdot \nabla_c] \vec{\chi} \cdot \vec{u} \right). \tag{A.10}$$

类似地，我们可以计算

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{u}}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \breve{\vec{u}} + (\nabla \breve{\vec{u}})^T \right) = [\vec{e}_r \quad \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_z] \begin{bmatrix} \frac{\partial u^r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^r}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u^r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^r}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial u^z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{e}_r)^T \\ (\vec{e}_\varphi)^T \\ (\vec{e}_z)^T \end{bmatrix}.$$

这意味着

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\pm(t)} \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{u}}) : \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{\chi}})\, \mathrm{d}V \\ &= 2\pi \int_{\mathcal{R}_\pm(t)} \left\{ \frac{\partial u^r}{\partial r} \frac{\partial \chi^r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^r}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial r} \right] \left[\frac{\partial \chi^r}{\partial z} + \frac{\partial \chi^z}{\partial r} \right] + \frac{\partial u^z}{\partial z} \frac{\partial \chi^z}{\partial z} + \frac{u^r \chi^r}{r^2} \right\} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_{\mathcal{R}_\pm(t)} \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{u}) : \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi})\, r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z + 2\pi \int_{\mathcal{R}_\pm(t)} (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)(\vec{\chi} \cdot \vec{e}_1)\, r^{-1} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{A.11}$$

将 (A.11) 乘以 $\mu_\pm$，并将这两个方程合并，可得

$$\left(\mu\, \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{u}}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\breve{\vec{\chi}}) \right)_\Omega = 2\pi \left(\mu_c r\, \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{u}),\ \underline{\underline{\mathbb{D}_c}}(\vec{\chi}) \right) + 2\pi \left(\mu_c r^{-1} (\vec{u} \cdot \vec{e}_1),\ (\vec{\chi} \cdot \vec{e}_1) \right). \tag{A.12}$$

在轴对称曲面 S(t) 上，根据 (3.1)，我们可设

$$\vec{\mathcal{V}}(\vec{}\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{x}_t^r \vec{}\mathrm{e}_r + \mathrm{x}_t^z \vec{}\mathrm{e}_z, \qquad \vec{}\mathrm{n}_s(\vec{}\mathrm{x},\mathrm{t}) = -\mathrm{x}_s^z \vec{}\mathrm{e}_r + \mathrm{x}_s^r \vec{}\mathrm{e}_z, \qquad \breve{\vec{\eta}}(\vec{}\mathrm{x}) = \eta^r \vec{}\mathrm{e}_r + \eta^z \vec{} \tag{A.13}$$

e_z 对于 $\vec{}\mathrm{x} \in \mathrm{S}(\mathrm{t})$。记 $\zeta(\alpha,\mathrm{t}) = \breve{\zeta}(\vec{}\mathrm{x},\mathrm{t})$，其中 $\vec{}\mathrm{x} \in \mathrm{S}(\mathrm{t})$，$\alpha \in \mathbb{I}$。那么不难得到

$$\int_{S(t)} (\vec{\mathcal{V}} - \breve{\vec{u}}) \cdot \vec{n}_S\, \breve{\zeta}\ \mathrm{d}S = 2\pi \int_{\Gamma(t)} (\vec{x}_t - \vec{u}) \cdot \vec{\nu}\, \zeta\, (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\ \mathrm{d}s = 2\pi \left\langle (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)(\vec{x}_t - \vec{u}) \cdot \vec{\nu},\ \zeta\, |\vec{x}_\alpha| \right\rangle. \tag{A.14}$$

同理，不难得到

$$\int_{S(t)} \mathcal{H}\, \vec{n}_S \cdot \breve{\vec{\eta}}\ \mathrm{d}S = 2\pi \int_{\Gamma(t)} \varkappa\, \vec{\nu} \cdot \vec{\eta}\, (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\ \mathrm{d}s = 2\pi \left\langle (\vec{x} \cdot \vec{e}_1)\, \varkappa\, \vec{\nu},\ \vec{\eta} |\vec{x}_\alpha| \right\rangle, \tag{A.15}$$

其中，$\vec{\eta} = (\eta^r,\ \eta^z)^T$ 是二维子午面中的向量。最后，我们有

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} \nabla_s \vec{\mathrm{id}} : \nabla_s \breve{\vec{\eta}}\ \mathrm{d}S &= \int_{S(t)} \nabla_s \cdot \breve{\vec{\eta}}\ \mathrm{d}S = 2\pi \int_{\Gamma(t)} (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \left(\vec{x}_s \cdot \vec{\eta}_s + \frac{\vec{\eta} \cdot \vec{e}_1}{\vec{x} \cdot \vec{e}_1} \right) \mathrm{d}s \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{I}} (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \vec{x}_s \cdot \vec{\eta}_s\, |\vec{x}_\alpha| + (\vec{\eta} \cdot \vec{e}_1)\, |\vec{x}_\alpha|\ \mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \tag{A.16}$$

这里用到了以下事实

$$\nabla_s \cdot \breve{\vec{\eta}} = \mathrm{x}_s^r \eta_s^r + \mathrm{x}_s^z \eta_s^z + \frac{\eta^r}{\vec{x} \cdot \vec{e}_1}. \tag{A.17}$$

综合以上结果，可由 (2.6) 得到 (3.11)。

参考文献

1. A. Aalilija, C.A. Gandin, E. Hachem，零重力下振荡液滴的解析与数值模拟，《计算流体力学》197 (2020) 104362。2. M. Agnese, R. N¨urnberg，适用于两相不可压缩纳维–斯托克斯流的拟合前沿追踪方法：欧拉与任意拉格朗日–欧拉有限元离散，《国际数值分析与建模杂志》17 (2020) 613–642。3. D.M. Anderson, G.B. McFadden, A.A. Wheeler，流体力学中的弥散界面方法，《流体力学年度评论》30 (1998) 139–165。4. G. Anjos, N. Mangiavacchi, N. Borhani, J.R. Thome，用于含相变两相流的三维任意拉格朗日–欧拉有限元方法，《传热工程》35 (2014) 537–547。5. E. B¨ansch，具有自由毛细表面的纳维–斯托克斯方程有限元离散，《数值数学》88 (2001) 203–235。6. W. Bao, H. Garcke, R. N¨urnberg, Q. Zhao，轴对称几何演化方程的保体积参数有限元方法，计算物理学杂志 460 (2022) 111180。7. W. Bao, Q. Zhao，表面扩散的保结构参数有限元方法，《SIAM 数值分析杂志》59 (2021) 2775–2799。8. J.W. Barrett, H. Garcke, R. N¨urnberg，四阶几何演化方程的参数有限元方法，计算物理学杂志 222 (2007) 441–467。9. J.W. Barrett, H. Garcke, R. N¨urnberg，适用于斯特藩问题和穆林斯–塞克卡问题的稳定参数有限元方法及其在枝晶生长中的应用，计算物理学杂志 229 (2010) 6270–6299。10. J.W. Barrett, H. Garcke, R. N¨urnberg，通过对黏性不可压缩两相斯托克斯流进行稳定近似来消除伪速度，《计算方法与应用力学和工程》267 (2013) 511–530。11. J.W. Barrett, H. Garcke, R. N¨urnberg，两相纳维–斯托克斯流的稳定参数有限元离散，J. Sci. Comput. 63 (2015) 78–117。12. J.W. Barrett, H. Garcke, R. N¨urnberg，四阶轴对称几何演化方程的有限元方法，计算物理学杂志 376 (2019) 733–766。13. J.W. Barrett, H. Garcke, R. N¨urnberg，轴对称曲率流的变分离散，《数值数学》141 (2019) 791–837。14. J.W. Barrett, H. Garcke, R. N¨urnberg，曲率驱动界面演化的参数有限元近似，载于《数值分析手册》（Andrea Bonito 和 Ricardo H. Nochetto 编） 21 (2020) 275–423。15. Z. Belhachmi, C. Bernardi, S. Deparis，加权 Cl´ement 算子及其在轴对称斯托克斯问题有限元离散中的应用，《数值数学》105 (2006) 217–247。16. C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday，《轴对称区域的谱方法》，第 3 卷，Gauthier-Villars，´科学与医学版 Elsevier，巴黎，1999。17. J. Chessa, T. Belytschko，一种用于具有表面张力的轴对称两相流的富集有限元方法与水平集，《国际数值方法：工程》58 (2003) 2041–2064。18. S.W. Cheung, E. Chung, H.H. Kim，一种基于交错间断伽辽金方法的流固耦合问题质量守恒格式，J. Sci. Comput. 74 (2018) 1423–1456。19. B. Duan, B. Li, Z. Yang，一种用于两相纳维–斯托克斯流的能量衰减任意拉格朗日–欧拉有限元方法，计算物理学杂志 461 (2022) 111215。20. G. Dziuk，一种用于演化曲面的算法，《数值数学》58 (1990) 603–611。21. X. Feng，用于两相流的纳维–斯托克斯–卡恩–希利亚德弥散界面模型的全离散有限元近似，《SIAM 数值分析杂志》44 (2006) 1049–1072。22. T. Frachon, S. Zahedi，一种用于不可压缩两相纳维–斯托克斯流的切割有限元方法，计算物理学杂志 384 (2019) 77–98。23. S. Ganesan，用于自由表面流与界面流的动网格有限元方法，博士论文，马格德堡大学，德国马格德堡，2006。24. S. Ganesan, L. Tobiska，一种用于计算三维轴对称界面流的动网格高精度有限元格式，《国际数值方法：流体》57 (2008) 119–138。25. H. Garcke, M. Hinze, C. Kahle，一种用于热力学一致两相不可压流模型的稳定线性时间离散格式，《应用数值数学》99 (2016) 151–171。26. H. Garcke, R. N¨urnberg, Q. Zhao，采用拟合与非拟合方法的两相纳维–斯托克斯流保结构离散，计算物理学杂志 489 (2023) 112276。

27. F. Gibou, R. Fedkiw, S. Osher，水平集方法综述及其近期应用，《计算物理学杂志》353 (2018) 82–109。28. E. Gros, G.R. Anjos, J.R. Thome，微通道中轴对称两相流的界面拟合移动网格方法，《国际数值方法：流体》86 (2018) 201–217。29. S. Groß, A. Reusken，具有表面张力的不可压缩两相流的扩展压力有限元空间，《计算物理学杂志》224 (2007) 40–58。30. S. Groß, A. Reusken，不可压缩两相流的数值方法，施普林格计算数学丛书第40卷，施普林格出版社，柏林，2011。31. G. Gr¨un, F. Klingbeil，具有质量密度差异的两相流：适用于热力学一致且框架无关的弥散界面模型的稳定格式，《计算物理学杂志》257 (2014) 708–725。32. C.W. Hirt, B.D. Nichols，自由边界动力学的流体体积（VOF）方法，《计算物理学杂志》39 (1981) 201–225。33. J. Hu, B. Li，采用人工切向速度的演化有限元方法：用于平均曲率流和Willmore流，《数值数学》152 (2022) 127–181。34. F. Huang, W. Bao, T. Qian，断裂动力学中黏性流与扩散竞争的弥散界面方法，《物理评论：流体》7 (2022) 094004。35. T.J. Hughes, W.K. Liu, T.K. Zimmermann，不可压缩黏性流的拉格朗日-欧拉有限元格式，《计算方法与应用力学和工程》29 (1981) 329–349。36. S.R. Hysing, S. Turek, D. Kuzmin, N. Parolini, E. Burman, S. Ganesan, L. Tobiska，二维气泡动力学的定量基准计算，《国际数值方法：流体》60 (2009) 1259–1288。37. W. Jiang, B. Li，曲线表面扩散流的周长递减且面积守恒算法，《计算物理学杂志》443 (2021) 110531。38. J. Kim，轴对称不混溶两相流的弥散界面模型，《应用数学与计算》160 (2005) 589–606。39. H. Lamb，关于黏性椭球体的振荡，《伦敦数学会会刊》1 (1881) 51–70。40. C. M. Elliott, H. Fritz，基于DeTurck技巧的曲线缩短流与平均曲率流近似，《IMA数值分析杂志》37 (2017) 543–603。41. S. Mirjalili, S.S. Jain, M. Dodd，两相流的界面捕捉方法：概述与最新进展，CTR年度研究简报2017 (2017) 13。42. E. Olsson, G. Kreiss, S. Zahedi，两相流的守恒水平集方法 II，《计算物理学杂志》225 (2007) 785–807。43. S. Osher, R. Fedkiw，《水平集方法与动态隐式曲面》，第153卷，Springer Science & Business Media，2002。44. B. Perot, R. Nallapati，用于模拟不可压缩自由表面流的移动非结构交错网格方法，《计算物理学杂志》184 (2003) 192–214。45. S. Popinet，表面张力驱动界面流的精确自适应求解器，《计算物理学杂志》228 (2009) 5838–5866。46. S. Quan, D.P. Schmidt，三维不可压缩两相流的移动网格界面追踪方法，《计算物理学杂志》221 (2007) 761–780。47. L. Rayleigh等，关于射流的毛细现象，《伦敦皇家学会会刊》29 (1879) 71–97。48. Y. Renardy, M. Renardy，PROST：用于流体体积法的表面张力抛物重构，《计算物理学杂志》183 (2002) 400–421。49. A. Schmidt, K.G. Siebert，《自适应有限元软件设计：ALBERTA有限元工具箱》，计算科学与工程讲义第42卷，施普林格出版社，柏林，2005。50. J.A. Sethian，《水平集方法与快速行进方法：计算几何、流体力学、计算机视觉和材料科学中的演化界面》，第3卷，剑桥大学出版社，1999。51. V. Styles, D. Kay, R. Welford，Cahn–Hilliard–Navier–Stokes系统的有限元近似，《界面与自由边界》10 (2008) 15–43。52. M. Sussman, E.G. Puckett，用于计算三维及轴对称不可压缩两相流的耦合水平集与流体体积方法，《计算物理学杂志》162 (2000) 301–337。53. M. Sussman, P. Smereka, S. Osher，一种用于求解不可压缩两相流的水平集方法，《计算物理学杂志》114 (1994) 146–159。

54. G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, Y.J. Jan，多相流计算的前沿追踪方法，《计算物理学杂志》169 (2001) 708–759。55. S.O.Unverdi, G. Tryggvason，黏性不可压缩多流体流动的前沿追踪方法，《计算物理学杂志》100 (1992) 25–37。56. R. Velentine, N. Sather, W. Heideger，黏性介质中液滴的运动，《化学工程科学》20 (1965) 719–728。57. Q. Zhao, W. Ren，用于模拟两相流中移动接触线的能量稳定有限元方法，《计算物理学杂志》417 (2020) 109582。