基于运动的传感器间外参标定：新方法和现有方法中参考坐标系选择的影响

Tuomas V¨alim¨aki [1,*]、Bharath Garigipati [1] 和 Reza Ghabcheloo [1]

arXiv:2303.03129v1 [cs.RO] 6 Mar 2023

摘要——**本文研究了在将传感器间外参标定表述为基于运动的手眼标定问题时，参考坐标系选择所产生的影响。我们在仿真中针对不同噪声条件测试了不同的参考坐标系选择方案，并使用 KITTI 数据集中的真实数据对研究结果进行了验证。我们提出了两个用于优化的非线性代价函数，并将其与四种最先进的方法进行了比较。其中一个所提出的代价函数采用了离群值剔除，以提升标定性能。结果表明，在存在离群值时，该方法能够显著提升性能；在其他噪声条件下，其性能也能达到或超过其他算法。然而，参考坐标系选择带来的性能提升被认为大于算法选择带来的提升。此外，我们还表明，在现实噪声条件下，文献中通常采用的参考坐标系选择方法劣于其他受测方案；相对误差指标也无法可靠地判断哪种方法能够实现最佳标定性能。**

索引词—**参考坐标系选择；传感器间标定；外参标定；手眼标定；基于运动的标定**

I. 引言

随着业界对自动化移动作业机械（如叉车、挖掘机或收割机）所执行的多种任务日益关注，易于使用的传感器间标定对于实现所需算法和功能的传感器融合至关重要。传统的传感器标定方法依赖于结构化环境和/或标定靶标，这意味着标定数据采集需要繁琐的准备工作。为避免这些问题，人们提出了多种无需靶标的传感器间标定方法，但大多数方法仍要求传感器具有共同视场，这并非总是可行或可取的，也限制了可用传感器的类型。

近年来，人们提出了许多基于运动的外参标定方法，将这一过程视为手眼标定问题。采用这种形式，标定 i）无需经过标定的靶标，ii）无需共同视场，且 iii）能够适用于多模态
传感器，只需要传感器轨迹。这些特性使手眼标定方法特别适用于移动作业机械，因为这类机械通常配备视场不重叠的多模态传感器阵列。无需标定靶标时，也可以在现场条件下重新标定传感器阵列，这对于

[1] 自动化技术与机械工程，坦佩雷大学，坦佩雷，芬兰 * 通信作者：tuomas.valimaki@tuni.fi

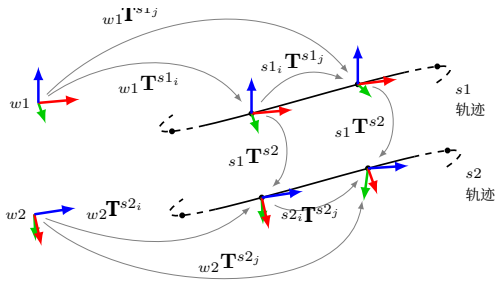

图 1. 基于运动的传感器间标定概念示意图，其中位姿 i 用作位姿 j 的参考坐标系。

无法轻易送回车间维修的大型机械而言非常重要。

在传统的手眼标定问题中，相较于使用同步定位与建图（SLAM）算法生成的传感器轨迹，安装在机械臂上的相机产生的噪声非常小。这类噪声最适合建模为加性高斯噪声。然而，SLAM 轨迹除了包含一般噪声外，还可能存在明显的漂移和离群值。据作者所知，现有文献尚未研究如何通过选择参考坐标系来减轻这些不同类型的噪声对标定性能的影响。

本文比较了多种先进的基于运动的外参标定算法，以及在不同噪声条件下的数据预处理方法。本文的首个创新之处在于考察了参考坐标系选择对标定性能的影响。此外，我们提出了一种带离群值剔除的非线性优化方法，并证明该方法在某些条件下能够提升性能。我们表明，文献中常用的参考坐标系选择方法，在存在同步定位与建图（SLAM）生成的轨迹中典型噪声时表现较差。实践中，由于真实值未知，比较两种方法的唯一办法就是比较哪种方法能最大程度地降低相对误差。然而，通过使用真实值已知的模拟数据，我们表明相对误差指标并不能可靠地判断哪种方法更优。我们使用大量模拟数据和公开可用的 KITTI 数据集 [1] 展示了这些发现。我们还为数据预处理中的参考坐标系选择提供了一般性指导，并提出了未来研究方向。

II. 相关工作

基于运动的传感器间外参标定与机械臂领域文献中的手眼标定密切相关，许多相同的算法都适用。解决手眼标定问题的算法主要有两类：可分离算法，将方向和*平移部分分开，通过线性阶段分别求解；以及同时算法，在单个阶段求解完整的非线性问题。可分离方法通常较为简单，但更容易产生误差，因为旋转估计的误差会传播至平移部分。近年来，人们还提出了其他解决手眼标定问题的方法，例如因子图优化 [2] ，甚至神经网络 [3]。

在 [4] 中，作者提出了一种适用于多模态传感器的可分离式运动标定方法。该方法基于改进的Kabsch算法进行粗对准，随后针对视场重叠的传感器，使用各传感器专属的度量进行优化。该方法后来在 [5]中得到改进。类似地， [6]提出了一种激光雷达到相机的标定方法，先通过轨迹匹配进行粗对准，再基于图像特征进行优化。可分离式粗对准适用于各种传感器类型，但微调仅适用于相机。

在 [7], 中，一项早期研究提出了同步求解方案，并使用四元数对问题进行建模，同时基于一种新的辨识雅可比矩阵给出了可观测性条件。近期， [8] 提出了一种同步通用方法，用于多台相机的手眼标定，该方法基于对原子变换的优化，并将其称为 ATOM。在 [9], 中，作者在 ATOM 的基础上加以扩展，使其适用于多模态传感器；但由于采用重投影误差作为优化度量，该方法仍需要相机。两种标定方法均为基于靶标的方法，且传感器必须具有重叠的视场。

文献 [10]综述了传统机械臂应用场景下最先进的手眼标定方法。作者还提出了自己的同步优化方法，并给出了多个可能的代价函数。本文提出的同步 非线性优化方法与文献 [10], 中 Xc1 的公式相似，但采用旋转向量而非四元数。可是，文献 [10],作者提供的 MATLAB 实现并未在代价函数中有效纳入旋转误差；相反，旋转误差的代价被定义为单位四元数的范数。我们的重新实现复现了原作者实现的行为。本文还提出了对代价函数的一种新颖改进，可在无需采用计算量较大的 RANSAC [11] 框架的情况下剔除离群值。

研究表明，在传统机械臂应用场景中，迭代式同步优化方法的表现优于闭式解；后者难以处理含噪或不一致数据 [8, 10, 12]。然而，据作者所知，此前尚无研究讨论数据预处理的选择，尤其是参考选择，以及其在不同噪声条件下对标定性能的影响。

III. 方法

A. 标定

我们引入一种记法，将齐次变换表示为$\mathbf{T}$，并分别使用下标和上标表示源帧和目标帧，例如 ${}_{w1}\mathbf{T}^{s1_i}$ 表示从与传感器 1 关联的世界坐标系到时刻 i传感器位姿的变换。相应的旋转和平移部分分别记为 $\{\mathbf{R}\ t\}$，并采用相同的下标和上标表示方式。

考虑安装在同一刚体上的两个传感器， $s1$ 和 $s2$。物体运动时，可使用合适的 SLAM 算法等方法记录传感器轨迹。如图1所示，我们现在可以建立如下关系

$$({}_{w1}\mathbf{T}^{s1_i})^{-1}\,{}_{w1}\mathbf{T}^{s1_j}\,{}_{s1}\mathbf{T}^{s2} = {}_{s1}\mathbf{T}^{s2}({}_{w2}\mathbf{T}^{s2_i})^{-1}\,{}_{w2}\mathbf{T}^{s2_j}, \quad (1)$$

或者等价地

$${}_{s1_i}\mathbf{T}^{s1_j}\,{}_{s1}\mathbf{T}^{s2} = {}_{s1}\mathbf{T}^{s2}\,{}_{s2_i}\mathbf{T}^{s2_j}, \quad (2)$$

这就是众所周知的手眼标定公式$\mathbf{AX}$ =$\mathbf{XB}$。这里，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 由相应传感器轨迹中两个坐标系之间的相对变换组成，而$\mathbf{X}$ 是未知的传感器间变换 ${}_{s1}\mathbf{T}^{s2}$。注意，对于数据中的任意一对(i, j)，该等式都成立；我们可以求解由所有选定配对 $S = \{(i, j)\ \ldots\}$构成的方程组。相对变换通常在两个连续位姿之间计算，即 $i = j - 1$，但不必局限于此，III-D节将对此进行说明。我们还将展示，不同的选择方法能够实现更准确的标定。

我们分析了几种先进标定方法，具体包括Ali等 [10], 、Park等 [6],、Taylor和Nieto [4],以及Zhuang和Qu [7]提出的方法。对于 [6] 和[4],，只有粗对准适用；对于 [10] ，我们使用代价Xc1。下文提及这些算法时仅使用第一作者的姓氏。此外，我们还提出了自己的非线性优化方法，详见下一节。

B. 所提优化方法

我们直接最小化式（2）中的非线性关系。优化的未知量为 $\{\theta, t\}$，其中 θ 是与 ${}_{s1}\mathbf{R}^{s2}$ 的轴角表示相对应的旋转向量，为简洁起见，省略了 ${}_{s1}t^{s2}$ 中的下标。

我们使用两个代价函数，其中

$$\mathbf{M}_{i,j} \coloneqq {}_{s1_i}\mathbf{T}^{s1_j}[\theta, t]_T - [\theta, t]_T\,{}_{s2_i}\mathbf{T}^{s2_j}, \quad (3)$$

其中， $[\,]_T$ 符号表示由参数构成的齐次变换。第一个代价为

$$\{\theta, t\} = \arg\min_{\theta,t} \sum_{(i,j)\in S} \|\mathbf{M}_{i,j}\|_2^2, \quad (4)$$

后文将其称为直接非线性（DNL），第二个则为

$$\{\theta, t, \alpha\} = \underset{\theta,t,\alpha}{\arg\min} \sum_{(i,j)\in S} \left(\alpha_{i,j} \left\|\mathbf{M}_{i,j}\right\|_2^2 + (1-\alpha_{i,j})c\right)$$
$$\text{subject to:} \quad \begin{array}{c} 0 \le \alpha_{i,j} \le 1, \forall i, j \\ d \le \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \end{array}, \tag{5}$$

下文简称为带离群值剔除的直接非线性（DNLO）。DNLO 将加权向量 α 纳入决策变量，从而实现离群值剔除。通过适当选择参数 c 和 d，可以调整剔除效果。在优化过程中，如果误差项 $\|\mathbf{M}_{i,\ j}\|_2^2 > c$，相应的权重 $\alpha_{i,\ j}$ 将趋近于零，该误差因此被视为离群值。因此，c 定义了误差容忍阈值。同样，如果 $\|\mathbf{M}_{i,\ j}\|_2^2 < c$，则 $\alpha_{i,\ j}$ 将趋近于一。因此，α 的总和可视为内点所占的比例，而 d 定义了要保留的加权位姿的最小比例。我们的实现使用 CasADi [13]中的 Ipopt 进行最小化。

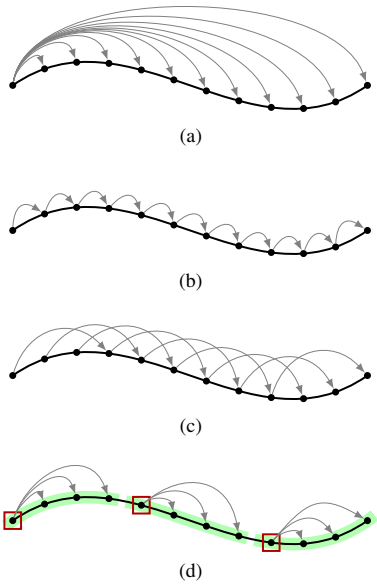

图2. 标定中用于相对坐标的参考坐标系的不同定义方式。（**a**）$i = 0$，（**b**）$i = j - 1$，（**c**）$i = j - n$，以及（**d**）$i = k_s$。

C. 误差度量

为进行评估，我们采用了 [10]中使用的四种误差度量。前两种根据关系式 (2) 得出，第一种是平均相对平移误差

$$e_{rt} = \frac{1}{|S|} \sum_{(i,j)\in S} \left\| {}_{s1_i}\mathbf{R}^{s1_j}\, {}_{s1}t^{s2} + {}_{s1_i}t^{s1_j} - {}_{s1}\mathbf{R}^{s2}\, {}_{s2_i}t^{s2_j} + {}_{s1}t^{s2} \right\|_2, \tag{6}$$

第二种是平均相对旋转误差

$$e_{rR} = \frac{1}{|S|} \sum_{(i,j)\in S} \left\| \left[({}_{s1}\mathbf{R}^{s2}\, {}_{s2_i}\mathbf{R}^{s2_j})^{-1}\, {}_{s1_i}\mathbf{R}^{s1_j}\, {}_{s1}\mathbf{R}^{s2} \right]_\theta \right\|_2, \tag{7}$$

其中，符号 $[\ ]_\theta$ 表示由旋转矩阵构成的旋转向量，$|S|$ 表示集合 S的基数。

其余两个定义为与已知真实值 $\{{}_{s1}\mathbf{R}_{gt}^{s2},\ {}_{s1}t_{gt}^{s2}\}$的差值，即绝对平移误差

$$e_{at} = \left\| {}_{s1}t_{gt}^{s2} - {}_{s1}t^{s2} \right\|_2, \tag{8}$$

以及绝对旋转误差

$$e_{aR} = \left\| \left[{}_{s1}\mathbf{R}^{s2^{-1}}\, {}_{s1}\mathbf{R}_{gt}^{s2} \right]_\theta \right\|_2. \tag{9}$$

D. 参考选择

除了多种标定算法外，我们还研究了如何选择手眼标定问题所需相对变换的配对（$i,\ j$）。该问题在第 III-A 节中介绍。图2展示了用于相对坐标的不同参考坐标系，具体如下：

- 情况 A：其中所有位姿均相对于轨迹的第一个位姿，即 $i = 0$。由于误差会不断增大，且当前位姿距离轨迹起点越远，误差越大，因此预计该方法尤其容易受到漂移的影响。
- 情况 $B1$：相对运动的参考位姿是轨迹中的前一位姿，即 $i = j - 1$。这是以往研究中事实上一直采用的参考位姿。保持变换较小可以降低对漂移的敏感性，但可能更容易受到噪声影响。如果位姿之间的变换相对于噪声过小，即信噪比变差，校准性能可能会受到影响。
- 情况 Bn：这是前一种情况的更广义定义，其中参考位姿是前 n个位姿，即 $i = j - n$。选择 n的自由度提供了一种在噪声敏感性与漂移之间权衡的方法。与直接从原始轨迹中每隔 n个位姿保留一个不同，这种做法并不会大幅减少位姿数量，而只会舍弃最初的 $n-1$ 个位姿。
- 情况 Cn：一种受 [14],启发的基于关键帧的方法，将轨迹划分为长度相等的分段 n。每个分段中的所有位姿均相对于该分段的第一帧，即所谓的关键帧 k_s，也就是 $i = k_s$。该方法结合了较小和较大的相对变换，在某些情况下可能会很有用。

请注意，生成的相对变换中至少需要包含 2 个位姿，才能求解式 (2) 中的未知量；此外，位姿对 (i, j) 之间必须有足够的旋转和平移。

IV. 仿真实验

A. 数据生成

为了进行仿真实验，首先为主传感器生成一条随机基础轨迹。然后，根据

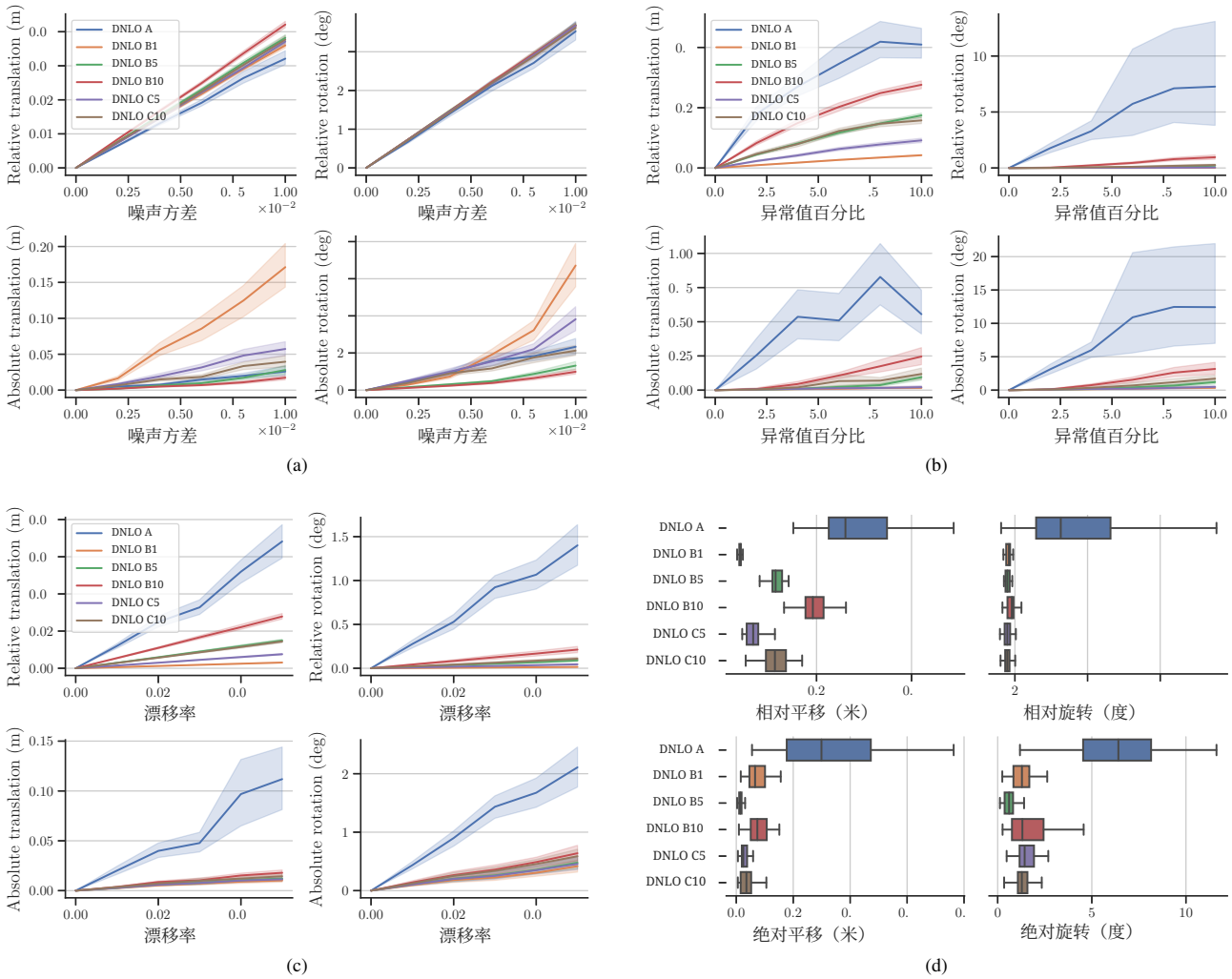

图 3. DNLO 上所有参考选择方法在仿真数据上的标定误差：（**a**）添加高斯噪声，（**b**）添加离群值，（**c**）添加漂移，以及（**d**）混合噪声。图（**a**）至（**c**）展示均值和 95% 置信区间，而箱线图（**d**）展示中位数和四分位数。

传感器间真实变换 ${}_{s1}\mathbf{T}_{gt}^{s2}$生成第二传感器的轨迹，随后对两条轨迹施加不同的噪声模式，以模拟使用 SLAM算法提取的轨迹中可能出现的噪声。仿真实验基于 38 条此类随机轨迹。

研究中使用的噪声模式为

- 具有不同 σ^2的高斯噪声，其中轨迹右乘 $[\tilde{\mathbf{R}}\ \tilde{t}]_T$。旋转矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$由从 $\mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$中抽取的欧拉角构成，$\tilde{t}$中的平移分量则从 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$中抽取。
- $[x, y, z]$ 坐标中的随机跳变，其中 $\tilde{t}$中的平移分量从 $\mathcal{N}(0, 0.02)$中抽取。选择方差0.02是因为它明显大于前一点中的噪声水平
- 在随机选定的主轴上发生漂移，其严重程度由漂移率决定，即误差每移动一米增加多少米。

将每种噪声模式的一个范围应用于生成的全部 38 条基础轨迹。

除分别采用上述噪声模式进行测试外，还使用三种噪声的混合进行算法测试，这可以说是最符合实际的情况。对于混合噪声，噪声成分采用测试范围的中位数，即 $\sigma^2 = 5 \times 10^{-3}$、5% 的离群值和 0.025 m/m 的漂移率。通常，同步定位与建图算法的性能会使用绝对轨迹误差（ATE） [15]进行报告。 [16] 中报告的各种视觉算法的平均均方根 ATE 范围为 0.035 m 至 0.601 m。混合噪声轨迹的平均均方根 ATE 为 0.364 m，因此可以认为所选参数是合理的。作者未能找到关于典型噪声构成的资料，预计其会因所涉及的环境和 Sensors 而有所不同。

B. 结果

我们使用对比中的全部六种标定方法，对生成的仿真数据进行了标定。每种标定方法都采用六种不同的参考坐标系

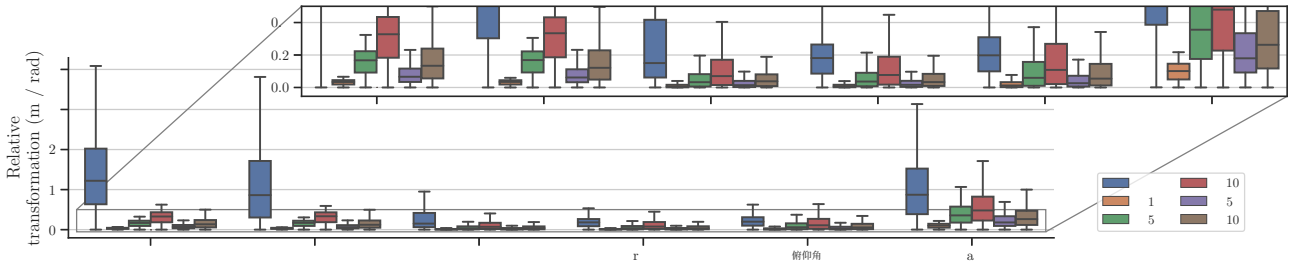

图 4。 中位数和四分位数（th）使用所研究的参考坐标系选择方法时在无噪声的仿真数据基础轨迹上 仿真数据。

选择方法 A、 $B1$、 $B5$、 $B10$、 $C5$ 和 $C10$ 进行测试，其中标签指的是 III-D节中介绍的方法。我们使用 III-C节中介绍的误差度量对标定结果进行比较。在整个实验过程中，DNLO 使用了参数 $c = 0.01$ 和 $d = \frac{|S|}{2}$ 。这些取值是根据仿真数据通过经验选定的。

1) 比较参考选择方法：由于篇幅有限，无法展示大量结果，因此我们仅在图 3 中针对我们的 DNLO 给出所有参考选择方法的比较，随后再比较每种算法中表现最佳的变体。所有方法和算法的完整结果作为补充材料提供。图中展示了 38 条轨迹的标定误差均值和 95% 置信区间；但对于混合噪声情况，我们展示的是中位数和四分位数。

首先可以确认，在无噪声的情况下，参考选择策略不会产生差异。此外，结果基本符合预期：加入噪声后，较长的参考距离表现更好；而加入离群值和漂移后，表现则更差。不过值得注意的是，能够提供最大变换的预处理选项A，即使对于高斯噪声也不是最佳选项，并且对于其他噪声类型明显更差。选项 A 可能使相对变换对于标定而言过于不平衡，如图 4 所示。数据生成时考虑的是地面车辆，因此这些变换明显偏向于 x、 y和 yaw分量。

对于增加离群值和漂移的情况，各选择策略的性能排序依据是其产生的变换从最小到最大。对于 DNLO，使用较短的参考坐标系 $B1$时，离群值也更加明显，因此更容易被剔除。对于增加漂移的情况，除选项 A外，不同策略之间的差异都很小。图 3d 中的混合噪声情况最值得关注：就相对误差而言， $B1$ 明显是最佳选择，但就绝对误差而言则并非如此，而绝对误差才是衡量标定性能的真正指标。在选择可能的参考坐标系时，这一点值得注意，因为在正常运行条件下， ${}_{s1}\mathbf{T}_{gt}^{s2}$ 是未知的，只能依据可用的相对误差指标进行判断。这意味着，在选择合适的参考坐标系时，不能将相对误差指标作为可靠的选择标准。

2) 比较表现最佳的算法：图 5 比较了每种算法中相对于 e_{at} (8) 表现最佳的变体，其结果呈现出与前文讨论相似的模式关于 DNLO。在加入高斯噪声的情况下，除 Zhuang [7] 外，预处理选项 $B10$ 在所有算法中表现最佳。其可能原因是，通常认为点之间较大的变换更不易受到噪声影响。

对于增加离群值的情况，事实上，预处理 $B1$ 再次为大多数算法提供了最佳结果。然而，很明显，DNLO额外采用的离群值剔除性能优于其他方法。Ali [10] 的表现不佳，很可能是因为旋转误差并未直接影响代价。在增加离群值和漂移的情况下，Park [6]和 Taylor [4]，这两种可分离算法的旋转误差都非常小，这是因为模拟噪声只影响笛卡尔坐标。由于可分离算法先求解旋转，因此不受该噪声影响。对于增加漂移的情况，除 A外，对于任一算法，所测试的参考选择方法之间仍几乎没有差异。在混合噪声条件下，$B5$ 对所有算法都表现最佳。这是预期结果，因为它在较短的参考距离（有利于应对增加的离群值和漂移）与较长的参考距离（有利于应对增加的高斯噪声）之间实现了平衡。与 DNLO 一样，在选择可能的参考坐标系时，根据可用的误差指标， $B1$ 似乎是更好的选择。

V. KITTI 数据实验

为使用真实数据验证仿真测试的结果，我们在广泛使用且公开可获取的KITTI 数据集上开展了实验 [1], 。该数据集通过在住宅区附近驾驶采集，包含来自两个双目相机、一台 Velodyne HDL-64E激光雷达以及一个GPS/INS系统的数据。我们从该数据集中选择了两个驾驶序列：`2011_10_03_驾驶_0027`，这是一个包含超过4000帧的较长序列；以及 `2011_09_30_驾驶_0027`，这是一个包含约1000帧的较短序列。选择前者是因为它也被用于 [4], ，而后者则是随机选取的，用于验证手眼标定方法在数据量不同时同样有效。

鉴于所展示的手眼标定方法的一大优势是能够对多模态传感器配置进行标定，我们测试了相机与激光雷达之间的标定以及相机间标定。数据集提供的标定值被用作真实值，以计算绝对误差指标。

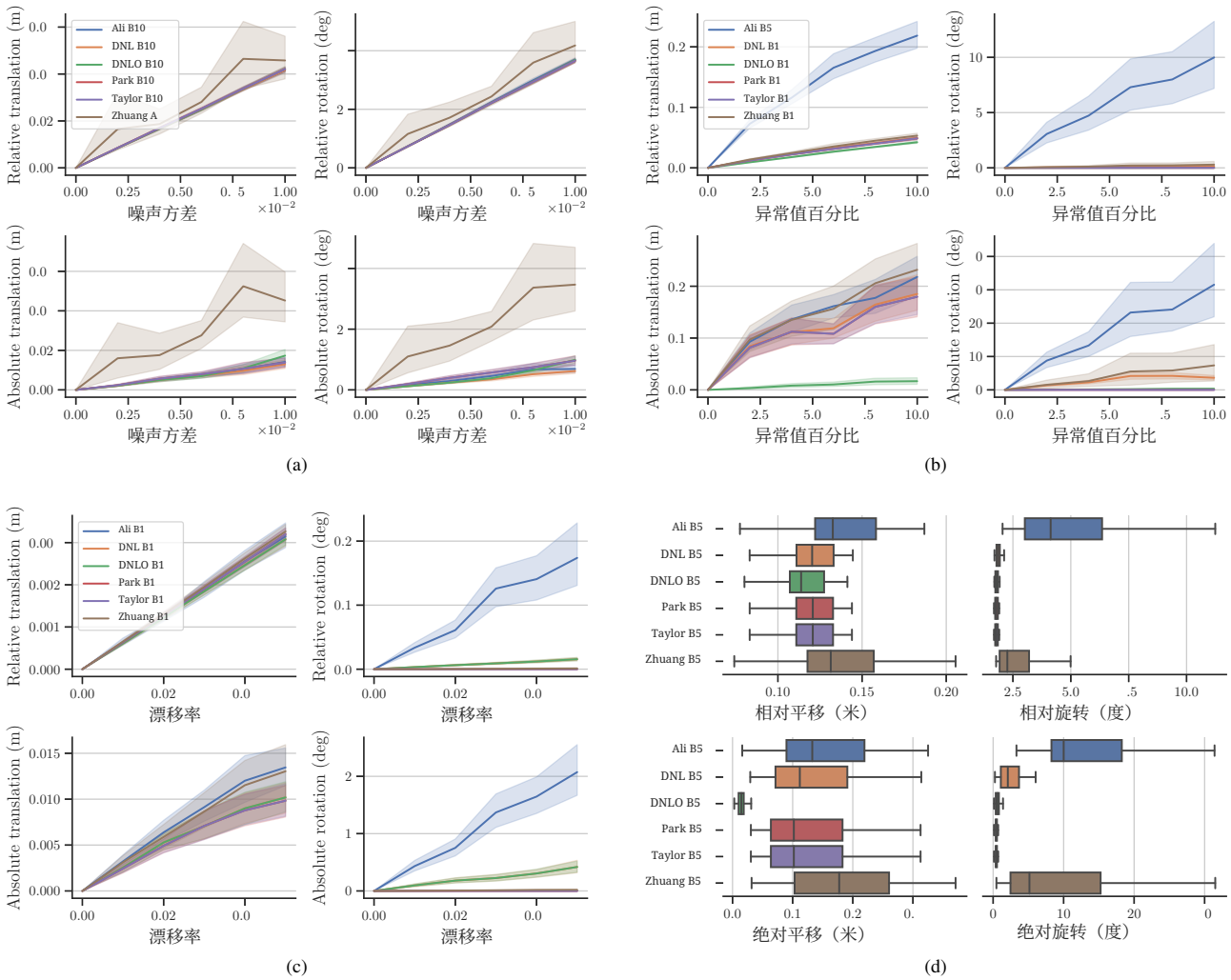

图 5. 各算法表现最佳变体在仿真数据上的标定误差：（**a**）添加高斯噪声，（**b**）添加离群值，（**c**）添加漂移，以及（**d**）混合噪声。图（**a**）至（**c**）显示均值和 95% 置信区间，而箱线图（**d**）显示中位数和四分位数。

表 I KITTI2011 09 30 行驶 0027 相机与激光雷达标定_ _ _ _

	相对误差		绝对误差		相较于 B1 的改进	
方法	e_{rt} (m)	e_{rR} (deg)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Ali B5	0.170	0.294	0.342	0.722	0.288	–0.056
DNL B5	0.170	0.293	0.342	0.721	0.288	–0.052
DNLO B10	0.271	0.488	0.202	**0.232**	0.128	0.209
Park B10	0.325	0.473	**0.183**	0.849	0.435	–0.102
Taylor B10	0.325	0.473	**0.183**	0.849	0.435	–0.102
Zhuang B1	**0.055**	**0.152**	1.063	2.899	-	-

A. 轨迹生成

为生成轨迹，首先将 KITTI 原始数据导出为 ROS bag 格式，以便使用所选 SLAM算法的现有 ROS 实现。对于数据集中的灰度和彩色立体相机，均使用 ORB SLAM3 [16] 进行双目视觉 SLAM；对于基于激光雷达的 SLAM，则使用 HDL graph SLAM [17]，并采用 Velodyne HDL-64E 生成的点云。轨迹基于两种算法中优化步骤后的关键帧位姿生成。

ORB SLAM3 目前被认为是面向双目相机的最先进视觉及视觉惯性 SLAM 系统。它是一种基于捆绑调整的 SLAM，采用 ORB 特征，并在视觉前端通过基于描述子匹配的方式进行跟踪。其多地图系统支持卓越的中期和长期数据关联，这对于在

表 II KITTI2011 10 03 行驶 0027 上的相机间标定

	相对误差		绝对误差		相较于 B1 的改进	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Ali B5	0.155	0.181	**0.074**	0.432	0.104	0.018
DNL B5	0.155	0.181	**0.074**	0.432	0.104	0.018
DNLO C5	**0.076**	**0.149**	0.159	**0.345**	0.034	0.071
Park B5	0.157	0.181	0.078	0.351	0.111	0.075
Taylor B5	0.157	0.181	0.078	0.351	0.111	0.075
Zhuang B5	0.155	0.181	**0.074**	0.400	0.106	−0.081

跟踪丢失时进行重定位以及回环检测是必需的。HDL 图优化 SLAM 是一种基于位姿图的方法，其中使用基于 GICP 的扫描匹配来生成里程计。它采用基于距离的回环检测，并再次使用 GICP 进行扫描匹配，将回环匹配作为位姿图约束。

B. 结果

与仿真数据一样，我们重点关注每种标定算法中表现最佳的变体。表 I 展示了短住宅区数据序列上的相机与激光雷达标定误差。Zhuang [7], 虽然相对误差最低，但却收敛到了错误的解。对于所有其他算法，采用更大的相对变换 $B5$ 或 $B10$时表现最佳。

同样，表 II 展示了长住宅区序列上相机间标定表现最佳的变体，这些变体在参考选择中采用了中等长度的步长。对于 DNLO，基于关键帧的选择 $C5$ 略优于 $B5$；而对于所有其他算法， $B5$表现最佳。

值得注意的是，在大多数情况下，选择合适的参考坐标系所带来的性能提升，超过了不同标定算法之间的性能差异。测试还表明，使用事实上的参考 $i = j - 1$ 并非最佳选择；但仍需在未来工作中研究如何确定与参考坐标系之间的最佳间隔。

VI. 结论

我们证明了传感器轨迹中存在的噪声类型会影响在基于运动的传感器外参手眼标定中哪种参考选择策略表现最佳。值得注意的是，在以往研究中通常采用的参考选择策略，在真实数据上的表现被认为不如其他策略。然而，只有在已知真值变换的情况下才能观察到这一点，而选择参考坐标系时可用的相对误差指标不能作为可靠的选择标准。还需要进一步研究，以确定如何根据给定轨迹最佳地选择参考坐标系。在大多数情况下，参考坐标系选择对标定性能的影响大于所测试的最先进标定算法的选择。

我们还提出了一种用于非线性优化的代价，以减轻离群值对标定的影响。该方法与当前最先进的方法进行了比较评估，在大多数噪声条件下，其性能均达到或超过了其他受测试算法。

作者贡献

概念构思与方法论：T.V. 和 R.G.；调查与数据整理：T.V. 和 B.G.；软件、验证、形式化分析、可视化以及论文初稿撰写：T.V.；论文审阅与编辑：T.V. 和 R.G.；监督、项目管理与经费筹措：R.G.。所有作者均已阅读并同意发表该版本的稿件。

资助

本研究获得坦佩雷人工智能中心的支持，该中心由欧洲区域发展基金（ERDF）、坦佩雷地区委员会（皮尔坎马联合会）、FIMA（智能机器论坛）、Business Tampere 和 Business Finland 资助。本研究还获得了 PEAMS（自主移动机器平台经济软件开发）项目的支持，该项目由 Business Finland 资助。

数据可用性

本研究所 प्रस्तुत的数据以及重现结果所需的全部软件，均可通过 GitHub 公开获取，网址为 https://github.com/tau-alma/trajectorycalibration experiments 和 https://github.com/tau̲-alma/traj̲ectory calibration。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。资助方未参与本研究的设计、数据收集、分析或解释、稿件撰写，也未参与是否发表结果的决策。

参考文献

[1] Geiger, A.; Lenz, P.; Stiller, C.; Urtasun, R. 视觉与机器人相遇：KITTI 数据集。《国际机器人研究杂志》**2013**，*32*，1231–1237。https://doi.org/10. 1177/0278364913491297。[2] Koide, K.; Menegatti, E. 基于重投影误差最小化的通用手眼标定。*IEEE*机器人与自动化快报**2019**，*4*，1021–1028。https://doi.org/10. 1109/LRA.2019.2893612。[3] Pachtrachai, K.; Vasconcelos, F.; Edwards, P.; Stoyanov, D. 学习标定——无需标定物体估计手眼变换。IEEE机器人与

自动化快报》**2021**，*6*，7309–7316。https://doi.org/10.1109/LRA.2021.3098942。[4] Taylor, Z.; Nieto, J. 多模态传感器阵列的基于运动的标定。载于《2015年IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA）论文集》，2015年，第4843–4850页。https://doi.org/10.1109/ICRA.2015.7139872。 [5] Taylor, Z.; Nieto, J. 多模态传感器外参与时间偏移估计的基于运动的标定。*IEEE*机器人学汇刊**2016**，*32*，1215–1229。https://doi.org/10. 1109/TRO.2016.2596771。[6] Park, C.; Moghadam, P.; Kim, S.; Sridharan, S.; Fookes, C. 时空相机-激光雷达标定：一种无目标、无结构方法。*IEEE*机器人与自动化快报**2020**，*5*，1556–1563。https://doi.org/10.1109/LRA.2020.2969164。[7] Zhuang, H.; Qu, Z. 用于机器人手眼标定的新型辨识雅可比矩阵。*IEEE*系统、人类与控制论汇刊**1994**，*24*，1284–1287。https://doi.org/10.1109/21. 299711。[8] Pedrosa, E.; Oliveira, M.; Lau, N.; Santos, V. 通过优化原子变换实现手眼标定的通用方法。*IEEE*机器人学汇刊**2021**，*37*，1619–1633。https://doi.org/10.1109/TRO. 2021.3062306。[9] Pinto de Aguiar, A.S.; Riem de Oliveira, M.A.; Pedrosa, E.F.; Neves dos Santos, F.B. 通过优化原子变换实现相机与激光雷达标定的方法。《专家系统与应用》**2021**，*176*，114894。https: //doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114894。 [10] Ali, I.; Suominen, O.; Gotchev, A.; Morales, E.R. 同步机器人-世界-手眼标定方法：比较研究。*Sensors* **2019**，*19*，2837。https://doi.org/10.3390/ s19122837。

[11] Fischler, M.A.; Bolles, R.C. 随机抽样一致性：用于模型拟合并应用于图像分析和自动制图的范式。《美国计算机学会通讯》**1981**，*24*，381–395。https://doi.org/10.1145/358669.358692。[12] Tabb, A.; Ahmad Yousef, K.M. 使用迭代方法解决机器人—世界手眼标定问题。《机器视觉与应用》**2017**，*28*，569–590。https://doi.org/10. 1007/s00138-017-0841-7。[13] Andersson, J.A.E.; Gillis, J.; Horn, G.; Rawlings, J.B.; Diehl, M. CasADi：用于非线性优化和最优控制的软件框架。《数学规划计算》**2019**，*11*，1–36。https://doi.org/10.1007/s12532-018-0139-4。[14] Schneider, T.; Li, M.; Cadena, C.; Nieto, J.; Siegwart, R. 面向可观测性的视觉与惯性传感器自标定：用于自运动估计。*IEEE Sensors Jour- nal*__2019__，*19*，3846–3860。https://doi.org/10.1109/JSEN.2019. 2893809。[15] Sturm, J.; Engelhard, N.; Endres, F.; Burgard, W.; Cremers, D. RGB-D SLAM系统评估基准测试。载于：2012年IEEE/RSJ国际智能机器人与系统会议论文集；IEEE：葡萄牙维拉莫拉-阿尔加维，2012年；第573–580页。https://doi.org/10.1109/IROS. 2012.6385773。[16] Campos, C.; Elvira, R.; Rodriguez, J.J.G.; M. Montiel, J.M.; D. Tardos, J. ORB-SLAM3：一种用于视觉、视觉—惯性及多地图SLAM的高精度开源库。*IEEE*机器人学汇刊**2021**，第1–17页。https://doi.org/10. 1109/TRO.2021.3075644。[17]Koide, K.; Miura, J.; Menegatti, E. 一种基于三维LIDAR的便携式系统，用于长期、大范围人员行为测量。《国际先进机器人系统期刊》**2019**，*16*。https://doi.org/10.1177/ 1729881419841532。

补充材料：基于运动的传感器间外参标定：新旧方法中参考坐标系选择的影响

Tuomas V¨alim¨aki、Bharath Garigipati 和 Reza Ghabcheloo

S-I. 仿真实验。图 S1 至 S5 展示了所有测试参考选择方法的标定误差。

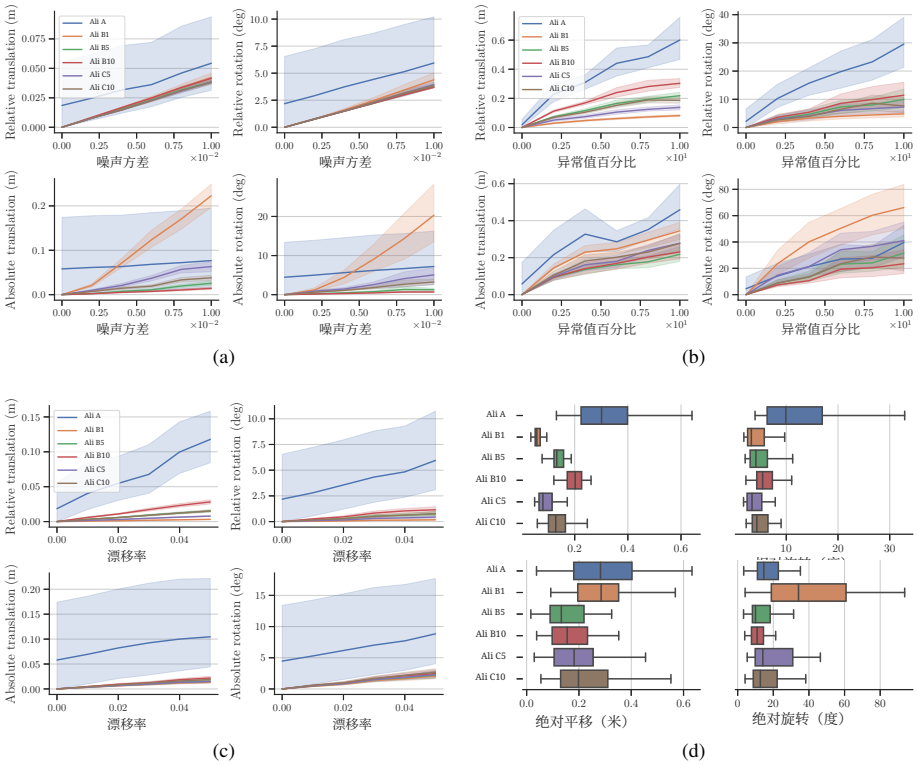

图 S1。Ali 的标定误差 [S1] 所有参考选择方法在仿真数据上的结果：（**a**）添加高斯噪声，（**b**）添加离群值，（**c**）添加漂移，以及（**d**）混合噪声。图（**a**）至（**c**）显示均值和 95% 置信区间，而箱线图（**d**）显示中位数和四分位数。

arXiv:2303.03129v1 [cs.RO] 6 Mar 2023

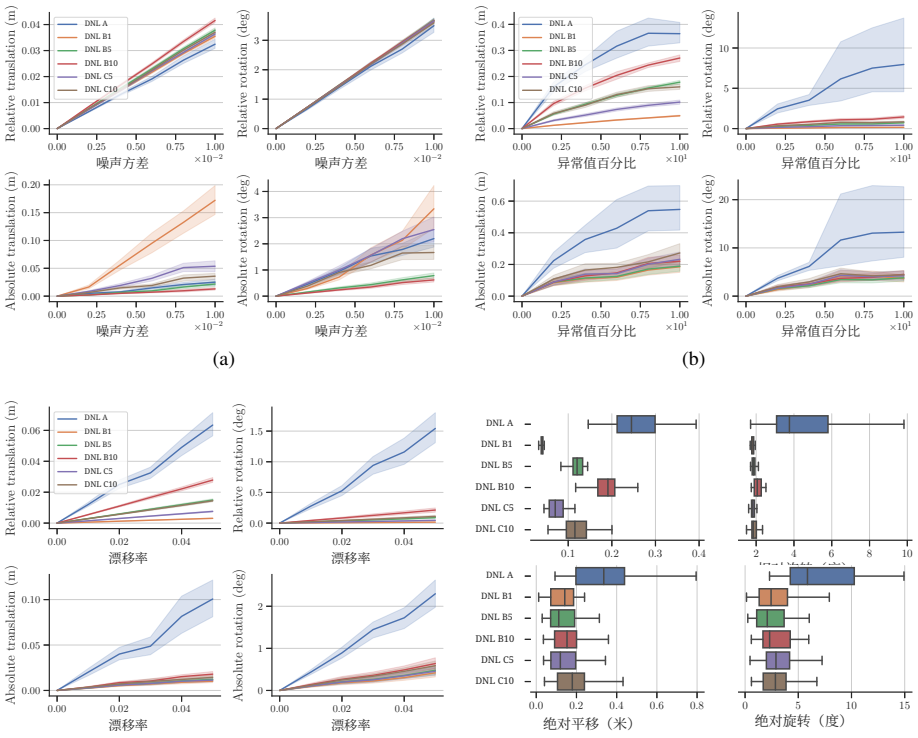

图 S2. DNL 在仿真数据上采用所有参考选择方法时的标定误差：（**a**）添加高斯噪声，（**b**）添加离群值，（**c**）添加漂移，以及（**d**）混合噪声。图（**a**）至（**c**）显示均值和 95% 置信区间，而箱线图（**d**）显示中位数和四分位数。

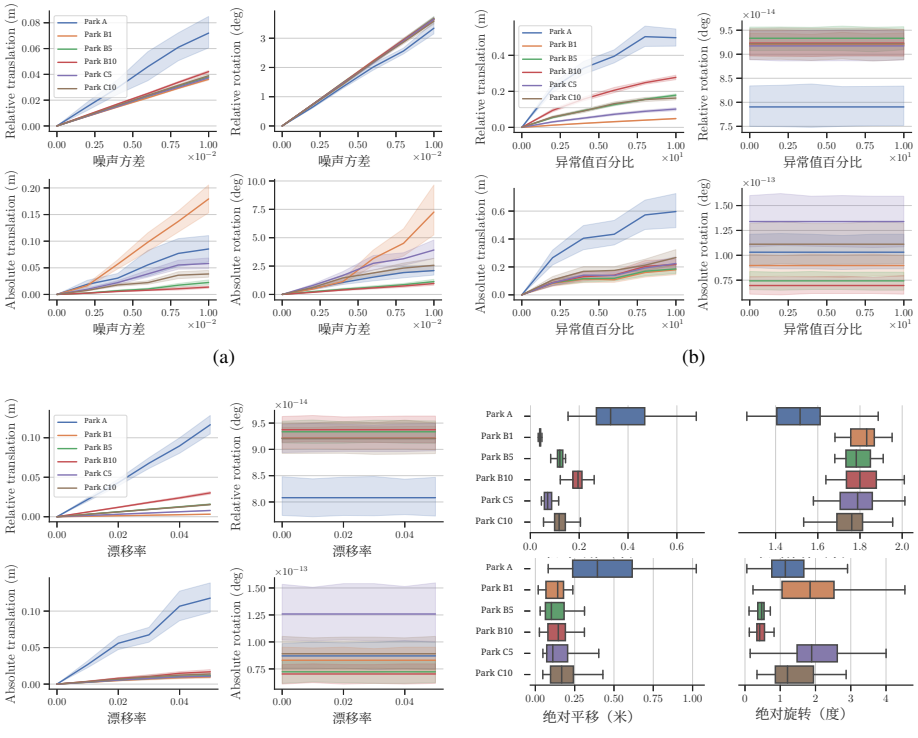

图 S3. Park 的标定误差 [S2] 在仿真数据上采用所有参考选择方法时的标定误差：（**a**）添加高斯噪声，（**b**）添加离群值，（**c**）添加漂移，以及（**d**）混合噪声。图（**a**）至 嗯（**c**）显示均值和 95% 置信区间，而箱线图（**d**）显示中位数和四分位数。

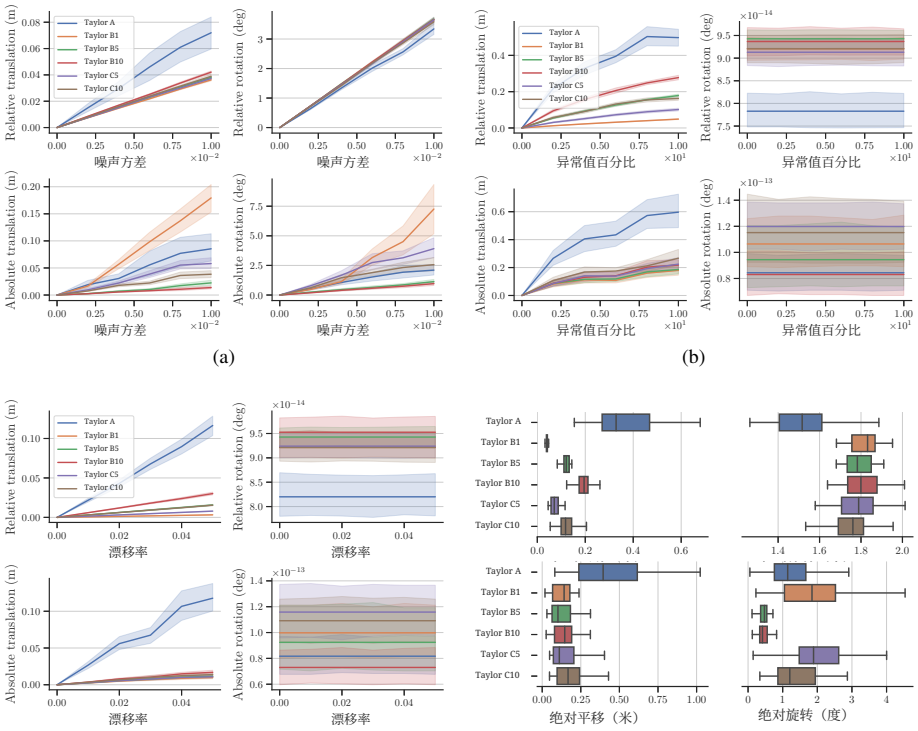

图 S4. Taylor [S3] 在仿真数据上采用所有参考选择方法时的标定误差：**(a)** 添加高斯噪声，**(b)** 添加离群值，**(c)** 添加漂移，以及 **(d)** 混合噪声。图 **(a)** 至 **(c)** 显示均值和 95% 置信区间，而箱线图 **(d)** 显示中位数和四分位数。

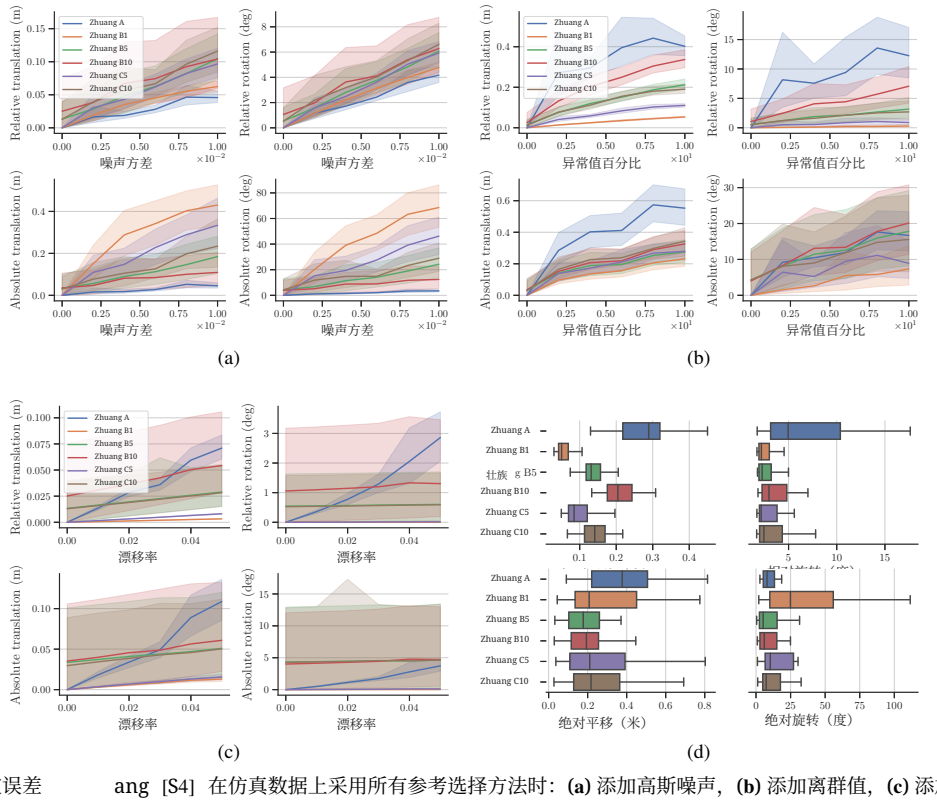

图 S5. Zhu 的标定误差 ang [S4] 在仿真数据上采用所有参考选择方法时：**(a)** 添加高斯噪声，**(b)** 添加离群值，**(c)** 添加漂移和（**d**）混合噪声。图（**a**） 至（**c**）显示均值和 95% 置信区间，而箱线图（**d**）显示中位数和四分位数。

S-II. KITTI 实验

表 S-I 至 S-VI 展示了所有测试的参考选择方法的相机-激光雷达标定误差，而表 S-VII 至 S-XII 展示了所有测试的参考选择方法的相机间标定误差。

表 S-I 使用 ALI [S1]对 2011_09_30_drive_0027进行相机与激光雷达标定

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (m)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Ali A	0.935	2.445	24.598	1.863
Ali B1	**0.042**	**0.111**	0.630	**0.666**
Ali B5	0.170	0.294	**0.342**	0.722
Ali B10	0.298	0.487	0.388	0.778
Ali C5	0.088	0.192	0.749	1.075
Ali C10	0.162	0.273	0.658	0.764

表 S-II 相机与激光雷达标定 2011_09_30_drive_0027使用 DNL

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (m)	e_{rR} (deg)	e_{at} (m)	e_{aR} (deg)
DNL A	0.935	2.445	24.598	1.863
DNL B1	**0.042**	**0.111**	0.629	**0.669**
DNL B5	0.170	0.293	**0.342**	0.721
DNL B10	0.298	0.487	0.388	0.777
DNL C5	0.088	0.188	0.750	0.996
DNL C10	0.162	0.273	0.658	0.764

表 S-III 相机与激光雷达标定，使用 DNLO 2011_09_30_drive_0027

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
DNLO A	0.926	2.355	8.299	1.755
DNLO B1	**0.038**	**0.112**	0.330	0.441
DNLO B5	0.151	0.290	0.837	0.233
DNLO B10	0.271	0.488	**0.202**	0.232
DNLO C5	0.079	0.187	0.486	0.757
DNLO C10	0.144	0.265	0.300	**0.219**

表 S-IV 相机与激光雷达标定（在drive上使用 Park 方法）

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (m)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Park A	17.068	1.939	30.581	16.190
Park B1	**0.043**	**0.110**	0.618	0.747
Park B5	0.160	0.286	0.368	**0.568**
Park B10	0.325	0.473	**0.183**	0.849
Park C5	0.087	0.165	0.903	0.623
Park C10	0.254	0.260	2.179	1.586

表 S-V 使用 Taylor [S3]方法进行相机与激光雷达标定，基于 2011_09_30_驾驶_0027

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Taylor A	17.068	1.939	30.581	16.190
Taylor B1	**0.043**	**0.110**	0.618	0.747
Taylor B5	0.160	0.286	0.368	**0.568**
Taylor B10	0.325	0.473	**0.183**	0.849
Taylor C5	0.087	0.165	0.903	0.623
Taylor C10	0.254	0.260	2.179	1.586

表 S-VI 使用 ZHUANG [S4]进行 2011_09_30_驾驶_0027相机与激光雷达标定

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Zhuang A	0.973	2.405	23.339	1.789
Zhuang B1	**0.055**	**0.152**	**1.063**	2.899
Zhuang B5	0.187	0.475	2.610	2.357
Zhuang B10	0.323	0.542	3.840	**1.026**
Zhuang C5	0.094	0.279	1.439	2.643
Zhuang C10	0.174	0.340	2.117	1.297

表 S-VII 相机间标定在 2011_10_03_驾驶_0027上使用 ALI [S1]

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Ali A	4.668	0.533	43.137	0.366
Ali B1	**0.034**	**0.139**	0.178	0.450
Ali B5	0.155	0.181	**0.074**	0.432
Ali B10	0.305	0.205	0.117	0.435
Ali C5	0.076	0.149	0.513	0.421
Ali C10	0.153	0.169	0.210	**0.342**

表 S-VIII 相机间标定（ 2011_10_03_drive_0027上使用 DNL）

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
DNL A	4.668	0.533	43.137	0.366
DNL B1	**0.034**	**0.139**	0.178	0.450
DNL B5	0.155	0.181	**0.074**	0.432
DNL B10	0.305	0.205	0.117	0.435
DNL C5	0.076	0.149	0.513	0.416
DNL C10	0.153	0.169	0.210	**0.343**

表 S-IX 相机间标定（在 2011_10_03_drive_0027上使用 DNLO）

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (m)	e_{rR} (deg)	e_{at} (m)	e_{aR} (度)
DNLO A	4.882	0.539	41.895	0.454
DNLO B1	**0.034**	**0.139**	0.194	0.416
DNLO B5	0.156	0.182	0.190	0.459
DNLO B10	0.306	0.205	0.381	0.434
DNLO C5	0.076	0.149	**0.159**	**0.345**
DNLO C10	0.152	0.168	0.203	0.407

表 S-X 使用 PARK [S2]进行 2011_10_03_drive_0027相机间标定

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Park A	11.369	0.497	101.102	3.123
Park B1	**0.034**	**0.139**	0.189	0.425
Park B5	0.157	0.181	**0.078**	0.351
Park B10	0.309	0.204	0.145	0.347
Park C5	0.076	0.149	0.515	0.399
Park C10	0.154	0.168	0.255	**0.342**

表 S-XI 相机间标定 2011_10_03_行驶_0027使用 Taylor [S3]

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (米)	e_{rR} (度)	e_{at} (米)	e_{aR} (度)
Taylor A	11.369	0.497	101.102	3.123
Taylor B1	**0.034**	**0.139**	0.189	0.425
Taylor B5	0.157	0.181	**0.078**	0.351
Taylor B10	0.309	0.204	0.145	0.347
Taylor C5	0.076	0.149	0.515	0.399
Taylor C10	0.154	0.168	0.255	**0.342**

表 S-XII 相机间标定 2011_10_03_行驶_0027使用 Zhuang [S4]

	相对误差		绝对误差	
方法	e_{rt} (m)	e_{rR} (deg)	e_{at} (m)	e_{aR} (deg)
Zhuang A	4.668	0.533	43.137	0.366
Zhuang B1	**0.034**	**0.139**	0.180	**0.319**
Zhuang B5	0.155	0.181	**0.074**	0.400
Zhuang B10	0.305	0.205	0.117	0.430
Zhuang C5	0.076	0.149	0.513	0.367
Zhuang C10	0.153	0.169	0.210	0.329

参考文献

[S1] Ali, I.; Suominen, O.; Gotchev, A.; Morales, E.R. 同步机器人-世界-手眼标定的方法：一项比较研究。*Sensors* **2019**，*19*，2837。https: //doi.org/10.3390/s19122837。 [S2] Park, C.; Moghadam, P.; Kim, S.; Sridharan, S.; Fookes, C. 时空相机-激光雷达标定：一种无目标、无结构方法。*IEEE*机器人与自动化快报 **2020**，*5*，1556–1563。https://doi.org/10.1109/LRA.2020.2969164。[S3] Taylor, Z.; Nieto, J. 多模态传感器阵列的基于运动的标定。载于：2015年IEEE国际机器人与自动化会议（ICRA）论文集，2015年，第4843–4850页。https://doi.org/10.1109/ICRA.2015.7139872。 [S4] Zhuang, H.; Qu, Z. 用于机器人手眼标定的新辨识雅可比矩阵。*IEEE*系统、人类与控制论汇刊 **1994**，*24*，1284–1287。https://doi.org/10.1109/21.299711。