具有预设时间收敛的系统的广义 Filippov 解

Richard Seeber [a]

[a] *Christian Doppler Laboratory for Model Based Control of Complex Test Bed Systems, Institute of Automation and Control, Graz University of Technology, Graz, Austria*

arXiv:2303.03133v2 [eess.SY] 7 Jun 2023

摘要

具有预设时间收敛特性的动力系统，其右端有时会在预设收敛时刻出现奇异点。在该奇异点的某个开邻域内，经典绝对连续 Filippov 解可能不存在，从而无法将此类解无限期延拓。本文基于受限意义下的广义绝对连续性概念，提出一种广义 Filippov 解的定义。文中给出了此类广义解具有可延拓性的条件，并特别证明，对于具有吸引平衡点（无论是否在预设时间内吸引）的系统，其广义 Filippov 解总能无限期延拓。最后，将这些结果应用于受扰二阶积分器链的预设时间控制器，以展示其适用性。

Key words: Filippov 解；预设时间系统；无界右端项；时变系统

1 引言

将动力系统的状态调节至原点是控制理论中的一个重要课题。在这方面，状态的收敛类型尤为重要。线性控制能够实现指数收敛，而齐次控制器、滑模控制器或观测器等更先进的方法，则能够实现有限时间收敛（Roxin，1966；Levant，2005）或固定时间收敛（Polyakov，2011）。近年来，Song 等人（2017年）；Holloway 和 Krstic（2019）提出了利用时变增益实现所谓预设时间收敛的方法，这些增益会在预设的收敛时刻趋于无穷大。并非所有预设时间方法都采用此类无界增益，例如（Zhou 等人，2022年）；此后，还出现了若干基于可能无界的时变增益的预设时间方法，例如 Espitia 和 Perruquetti（2021年）；Zhou 和 Shi（2021年）；Aldana-L´opez 等人（2022年）。

在 Song 等人（2017年）及许多其他研究中，只考虑收敛时刻 T 之前的轨迹，即，在形式为 $[t_0, T)$ 的时间区间上。在某些情形下，人们希望在收敛时刻之后继续轨迹，例如在收敛时刻之后切换到滑模方法。从理论角度来看，这引出了 Filippov（1988）所定义的解的可延拓性问题。

本文指出，具有预设时间收敛特性的系统，其 Filippov 解在收敛时刻之后可能确实不再存在。为此，本文提出了一种广义 Filippov 解定义，以消除这一问题。具体而言，研究表明，采用广义解定义后，预设时间系统的轨迹始终可以无限期延续，即延续至时间区间 $[t_0, \infty)$，从而为预设时间系统与其他控制方法的理论可靠组合铺平道路。

第2节介绍 Filippov 解后，第3节通过两个示例阐释相关讨论的动机。第4节随后定义广义 Filippov 解并讨论其性质。第5节中的主要定理5.2和5.7给出了此类解可延续性的正式结果，第6节则通过一个控制设计示例加以应用。第7节总结全文。

记号： $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{\geq 0}$、$\mathbb{R}_{>0}$和 $\mathbb{N}$ 分别表示实数、非负实数、正实数和正整数。集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的凸闭包和勒贝格测度分别记为

⋆ 谨此感谢 Christian Doppler 研究协会、奥地利联邦数字化与经济事务部以及国家研究、技术与发展基金会提供的经费支持。*Email address:* richard.seeber@tugraz.at（Richard Seeber）。

co $\mathcal{S}$ 和 $\mu(\mathcal{S})$。区间是满足 $\mu(\mathcal{I}) \neq 0$的任意连通集 $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$。对于定义域为$\mathcal{I}$ 且满足 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$的函数 f， $f|_{\mathcal{J}}$ 表示将 f 限制在定义域$\mathcal{J}$上。对于 $y \in \mathbb{R}$， $\lfloor y \rfloor$ 和 $\lceil y \rceil$ 分别是小于或等于以及大于或等于 y的最大整数和最小整数。集合 $\mathcal{S}$ 的所有子集构成的集合记为 $2^{\mathcal{S}}$。

2 Filippov 解

本公报研究了以下形式微分方程的解的定义与存在性

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

其中 $\mathbf{f}$： $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ 可能在 $\mathbf{x}$ 中不连续，并且还可能在 t处表现出奇异性。此类系统通常出现在预设时间系统的背景下，例如参见 Song 等人（2017年）；Holloway 和 Krstic（2019）；Zhou 和 Shi（2021年），具体表现为时变增益在预设时刻 $T \in \mathbb{R}_{>0}$ 处出现奇异性。

方程（1）的解可以通过相关的微分包含来研究

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

其中 $\mathcal{F}$： $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 通过对（1）右端应用 Filippov 过程获得，参见（Filippov，1988）；具体而言，

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \bigcap_{\delta \in \mathbb{R}_{>0}} \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \\ \mu(\mathcal{S})=0}} \overline{\text{co}} \{\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, t) : \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_\delta(\mathbf{x}) \setminus \mathcal{S}\} \tag{3}$$

其中 $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{x}) = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \delta\}$。方程（1）的 Filippov 解的定义基于（局部）绝对连续性的概念。

定义2.1。 函数$\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 称为

a)绝对连续 （AC）于闭区间$\mathcal{I}$上，若对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得$\sum_{i=1}^m \|\mathbf{g}(b_i) - \mathbf{g}(a_i)\| < \varepsilon$对于满足 $\sum_{i=1}^m |b_i - a_i| < \delta$的每个有限个互不相交区间 $[a_i, b_i] \subseteq \mathcal{I}$、$i = 1 \ldots m$ 、、均成立；b) 局部绝对连续 （LAC）于区间 $\mathcal{I}$上，若其在每个紧区间$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$上均绝对连续。

还值得回顾的是，一个函数绝对连续，当且仅当它连续、具有有界变差，并满足 Lusin 的 N 性质（Gordon，1994）。根据 Filippov（1988），方程 (1) 的解——下文称为经典 Filippov 解——通常定义如下。

定义 2.2. 设 $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个区间。若函数$\mathbf{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ 在 $\mathcal{I}$ 上为 LAC，且几乎处处满足方程 (2)，则称其为方程 (2) 的经典解 或方程 (1) 的经典 *Filippov* 解 。

3 动机示例

为引出相关讨论，考虑由式（1）给出的预设时间微分器的误差动力学，其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} -h_1(x_1, t) + x_2 \\ -h_2(x_1, t) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

校正函数 h_1， h_2： $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h_1(x_1, t) = \begin{cases} \frac{4}{T-t} x_1 & t \in [0, T) \\ k_1 \sqrt{|x_1|} \operatorname{sign}(x_1) & t \in [T, \infty) \end{cases} \tag{5a}$$

$$h_2(x_1, t) = \begin{cases} \frac{2}{(T-t)^2} x_1 + \frac{1}{(T-t)^4} x_1 & t \in [0, T) \\ k_2 \operatorname{sign}(x_1) & t \in [T, \infty), \end{cases} \tag{5b}$$

以及正实常数 k_1， k_2， $T \in \mathbb{R}_{>0}$。在时间区间 $[0, T)$上，这些误差动力学对应于具有类似结构的线性时变微分器 [1]，与 Holloway 和 Krstic（2019）提出的观测器类似；该观测器在 $t = T$ 时切换为 Levant（1998）提出的鲁棒精确超扭转微分器。下一个示例表明，除与 Holloway 和 Krstic（2019）中的系统形式相似之外，该系统确实具有预设时间收敛性，但经典 Filippov 解在预设收敛时刻 T的任意（双侧）邻域内均不存在，其中$\mathbf{f}$ （从而 $\mathcal{F}$也）表现出奇异点。

例 3.1。 考虑系统 (1)，其右端由前文定义为 (4)–(5)。注意，$\mathbf{f}(\cdot, t)$ 在 $[0, T)$ 的每个紧子集上都是全局 Lipschitz 连续的。因此，对于每个 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$和 $t_0 \in [0, T)$，由 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}(T-t)\mathbf{M}(T-t_0)^{-1}\mathbf{x}_0$给出的函数 $\mathbf{x}: [t_0, T) \to \mathbb{R}^2$具有

$$\mathbf{M}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau^3 \sin \frac{1}{\tau} & \tau^3 \cos \frac{1}{\tau} \\ \tau^2 \sin \frac{1}{\tau} + \tau \cos \frac{1}{\tau} & \tau^2 \cos \frac{1}{\tau} - \tau \sin \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \tag{6}$$

是满足$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$的唯一经典解；对于$T = 1$，它如图 1 所示。然而，它在 $[t_0, T]$ 上的唯一连续延拓（满足 $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$）并非绝对连续，因为它不具有有界变差。事实上，项 $g(\tau) = \tau \cos \frac{1}{\tau}$ 的全变差 –

[1] 请注意，该例是 (Holloway 和 Krstic, 2019) 中观测器的 *not* 一个特例，但仍对应于一个具有预设时间收敛的观测器。

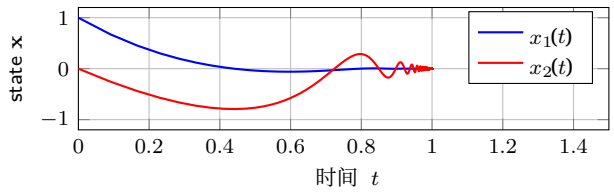


图 1. 例 3.1 中的经典 Filippov 解，其中 $T = 1$ 以及初始条件 $t_0 = 0$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$。

例如，对于 $\tau = T - t \in (0,\ T - t_0]$，其下界为

$$\sum_{i=I}^{\infty} \left| g\left(\frac{1}{i\pi}\right) - g\left(\frac{1}{(i+1)\pi}\right) \right| = \sum_{i=I}^{\infty} \left| \frac{(-1)^i}{i\pi} - \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)\pi} \right| \geq \sum_{i=I}^{\infty} \frac{2}{(i+1)\pi} = \infty, \quad (7)$$

其中 $I = \lceil \frac{1}{(T-t_0)\pi} \rceil$。因此，在满足 $\varepsilon > 0$、且几乎处处满足相应包含关系 (2) 的条件下，定义在 $(T-\varepsilon,\ T+\varepsilon)$ 上的每个（非平凡）连续函数都不是局部绝对连续的。因此，在这类区间上不存在非平凡的经典解，即经典解无法越过 T 处的奇异点继续延拓。△

下一个例子表明，对于不具有预设时间收敛特性的系统，有界解的可延拓性可能会因另一个问题而失效。

例3.2。 考虑系统 (1)，其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{A}(T-t)\mathbf{x} & t \in [0, T) \\ \mathbf{A}(T)\mathbf{x} & t \in [T, \infty), \end{cases} \quad \mathbf{A}(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $T \in \mathbb{R}_{>0}$。对于 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2, t_0 \in [0, T)$，唯一的（且有界的）经典解为 $\mathbf{x}\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}^2$，定义为 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}(T-t)\mathbf{M}(T-t_0)^{-1}\mathbf{x}_0$，其中

$$\mathbf{M}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau \sin \ln \tau & \tau \cos \ln \tau \\ -\cos \ln \tau & \sin \ln \tau \end{bmatrix}. \quad (9)$$

图 2 以 $T = 1$为例进行了说明。由于当$\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$时，$\lim_{t \to T} \mathbf{x}(t)$ 不存在，因此，在区间（$T-\varepsilon$，$T+\varepsilon$）上几乎处处满足（1）的任何非平凡函数，只要$\varepsilon > 0$，就在 $t = T$处不连续。因此，在此类区间上不存在非平凡的经典解。△

再次回顾，绝对连续等价于同时满足连续性、变差有界性和 Lusin 的 N 性质。Lusin 性质显然不可能丧失，而在例 3.1 中，由于缺乏有界变差，且在例3.2 中，由于

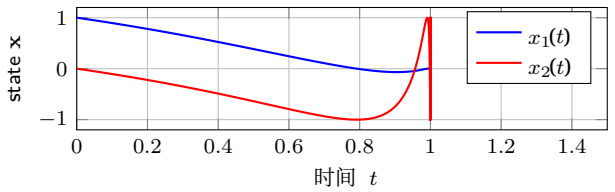


图 2. 例3.2 中的经典 Filippov 解，其中$T = 1$，初始条件为 $t_0 = 0$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$。

缺乏连续性，{v1} 附近的解无法存在。显然，在后一个例子中，任何试图连续延拓解的尝试都必然失败。然而，直观上，前一个例子中的解应当可以通过零解延拓。

本文通过提出广义 Filippov 解定义来解决这一问题，该定义在非常宽松的条件下保证解的存在性和可延拓性。特别是，本文将证明，对于原点具有吸引性的系统，无论是否在预设时间内具有吸引性，所提出的广义 Filippov 解都可以延拓至区间 $[t_0, \infty)$。

4 广义 Filippov 解

下面基于广义受限意义下绝对连续（ACG$_*$）函数类，引入 Filippov 类型系统的广义解定义。该函数类最初由 Lusin（1912）提出，参见（Saks，1937）。

定义4.1 （（Gordon，1994，定义6.1））。 函数 $\mathbf{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 称为

a) 在集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ 上受限意义下绝对连续 （AC$_*$），如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得 $\sum_{i=1}^{m} \sup_{a,\ b \in [a_i, b_i]} \|\mathbf{g}(b) - \mathbf{g}(a)\| < \varepsilon$ 对满足，和；的每个有限个互不重叠区间 $[a_i, b_i]$, $i = 1 \ldots m$ $a_i\ b_i \in \mathcal{S}$ $\sum_{i=1}^{m} |b_i - ,,$均成立; $a_i| < \delta$

b) 在集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ 上广义受限意义下绝对连续 （ACG$_*$），如果$\mathbf{g}|_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathcal{S}$ 上连续，并且 $\mathcal{S}$ 可以表示为可数多个集合的并，且$\mathbf{g}$ 在每个集合上均为 AC$_*$。

4.1 广义解的定义

与 LAC 函数一样，ACG$_*$ 函数也几乎处处可微，参见（Gordon，1994，推论 6.19）。由此得到以下定义。

定义4.2。 设 $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个区间。若函数$\mathbf{x}$： $\mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ 在 $\mathcal{I}$上为 ACG$_*$，并且在 $\mathcal{I}$上几乎处处满足（2），则称其为（2）的广义解，或（1）的广义 *Filippov* 解。

注4.3。 所提出的定义也可以扩展到不连续系统的其他解定义，例如乌特金解或 Aizerman-Pyatnitskii 解；关于综述，参见（Polyakov 和 Fridman，2014）。具体而言，可将这些定义中的绝对连续性要求类似地放宽为受限意义下的广义绝对连续性。

值得注意的是，虽然 LAC 函数与勒贝格积分相关联，但 ACG_* 函数与丹乔伊积分[2]相关联。具体而言，函数$\mathbf{h}:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 可进行丹乔伊积分，当且仅当存在一个 ACG_*函数$\mathbf{g}:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$，使得 $\dot{\mathbf{g}}(t)=\mathbf{h}(t)$几乎处处成立于 $\mathcal{I}$上，参见例如（Gordon，1994，定义 7.1）。

Kurzweil 和 Schwabik（1990）采用佩龙积分研究了常微分方程$ordinary\ \ differentialequations$的类似解定义，他们还研究了此类解存在性的一些一般判据，参见 Schwabik （ 1990 ）及其中的参考文献。本文在预设时间系统的背景下研究菲利波夫系统的上述广义解定义，主要结果是给出此类所有系统的广义解具有可延拓性的条件。

4.2 广义解的性质

以下引理在附录中证明，展示了不同函数类之间的一些联系（另见 Gordon，1994）。

引理 4.4。 考虑一个区间 $\mathcal{I}$、一个连续函数 $\mathbf{g}:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$，以及一个可数区间族$(\mathcal{I}_j),\ j\in\mathbb{N}$，满足 $\mathcal{I}=\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{I}_j$。那么，以下陈述成立[3]：

a) 对于闭的 $\mathcal{I}$，$\mathbf{g}$ 在 $\mathcal{I}$上绝对连续，当且仅当它在 $\mathcal{I}$上绝对连续$_*$；*b)* 若$\mathbf{g}$ 在 $\mathcal{I}$上局部绝对连续，则它在 $\mathcal{I}$上绝对连续可数集$_*$；*c)* 若 $\mathbf{g}$ 在 $\mathcal{I}$上绝对连续$_*$，则它在 $\mathcal{I}$上局部绝对连续；*d)* 若$\mathbf{g}$ 在每个 $\mathcal{I}_j$ 上绝对连续可数集$_*$，则它在 $\mathcal{I}$上绝对连续可数集$_*$。

由 (b) 可知，以下命题显然成立。

命题 4.5。 (2) 的每个经典解也都是广义解。

下一个命题说明，如何利用条目 (c) 从广义解中恢复经典解。

命题 4.6。 设$\mathbf{x}:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 是(2)的一个广义解。那么，对于每个区间 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$，都存在一个开区间 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{J}$，使得$\mathbf{x}|_{\mathcal{H}}$ 是一个经典解。

[2] 或者等价的 Perron 或 Henstock-Kurzweil 积分。[3] 请注意，除非集合 $(\mathcal{I}_j)$ 是有限的，否则条目 (d) 需要选择公理。

证明。 设 $\mathcal{J}$ 是包含于 $\mathcal{J}$中的一个闭区间。由于$\mathcal{J}$ 是一个完美集，它包含一个开子区间 $\mathcal{H}$，在该子区间上$\mathbf{x}$ 是绝对连续的$_*$，根据（Gordon，1994，定理 6.1）。因此，根据引理 4.4 的 (c) 项，$\mathbf{x}|_{\mathcal{H}}$ 是 LAC，因而是一个经典解。 □

条目 (d) 表明，将可数多个广义解拼接起来仍会得到一个广义解。

命题 *4.7*。设 $(\mathcal{I}_j)$、(x_j)、 $j\in\mathbb{N}$ 是一组可数的区间及其对应的经典解或广义解 $x_j:\ \mathcal{I}_j\to\mathbb{R}^n$，它们是方程 *(2)* 的解，并满足以下性质：$\mathcal{I}=\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{I}_j$ 是一个区间；且对每一对整数 i、$j\in\mathbb{N}$，当 $\tau\in co\,\mathcal{I}_i\cap co\,\mathcal{I}_j$ 时，$lim_{t\to\tau}[x_j(t)-x_i(t)]=0$。那么，定义 $x:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$，使得对 $\tau\in\mathcal{I}_j$ 有 $x(\tau)=x_j(\tau)$，则 x 是方程 *(2)* 的广义解。

证明。 显然，$\mathbf{x}$ 由构造可知定义良好且连续。此外，根据命题 4.5，每个 $\mathbf{x}_j$ 都是广义解，因此在 $\mathcal{I}_j$ 上是 ACG_*。因此，根据引理 4.4 的 (d) 项，$\mathbf{x}$ 在 $\mathcal{I}$ 上是 ACG_*。由于它还在每个 $\mathcal{I}_j$上几乎处处满足包含关系，因此它是方程 (2) 的广义解。 □

5 广义解的可延拓性

现给出广义 Filippov 解可延拓性的形式条件。首先，考虑在某一时刻 $T\in\mathbb{R}_{>0}$ 存在奇异点的一般系统。随后讨论预设时间系统，并证明对于具有吸引平衡点的系统，广义解可以无限期延拓。

5.1 存在奇异点的一般系统

定义 5.1。 若不存在解 $\bar{\mathbf{x}}:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 满足 $\mathcal{I}\cap\bar{\mathcal{I}}\neq\{\}$，且 $\sup\mathcal{I}>\sup\bar{\mathcal{I}}$，并且对所有 $t\in\mathcal{I}\cap\bar{\mathcal{I}}$ 均有 $\mathbf{x}(t)=\bar{\mathbf{x}}(t)$，则称解$\mathbf{x}:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 为极大。

下一个定理表明，在某个时刻 T于奇异点处连续的广义解，可以在 T之后继续延拓，但须满足通常的 Filippov 条件，参见 Filippov（1988）。

定理 5.2。 设 $T,\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$，并考虑包含式 (2)。假设 $\mathcal{F}:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_{\geq 0}\to 2^{\mathbb{R}^n}$ 在 $\mathcal{G}=\mathbb{R}^n\times[T,T+\varepsilon)$的每个紧子集上都是上半连续的，并且对于所有 $(\mathbf{x}\ t)\in\mathcal{G}$，集合 $\mathcal{F}(\mathbf{x}\ t)$ 非空、紧且凸。设 $\mathbf{x}:\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 是 (2)的一个极大广义解。若 $\sup\mathcal{I}\geq T$ 且 $\mathbf{x}(t)$的 $\lim_{t\to T}$ 存在，则存在 $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$使得 $\sup\mathcal{I}\geq T+\delta$。

注5.3。 注意，该定理仅在奇异点之后对 $\mathcal{F}$ 施加条件，并且只要求广义解在奇异点处连续，且之前存在（但参见例3.2）。

证明。 反设 $\sup \mathcal{I} = T$，并令$\bar{\mathbf{x}}_0 = \lim_{t\to T}\mathbf{x}(t)$。根据（Filippov，1988，定理7.1），存在一个经典解 $\bar{\mathbf{x}}:[T,T+\delta]\to\mathbb{R}^n$，满足 $\bar{\mathbf{x}}(T) = \bar{\mathbf{x}}_0$ 以及某个 $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$。由命题4.7，因而存在一个定义在 $\mathcal{I}\cup[T,T+\delta]$ 上的广义解，该解在 $\mathcal{I}$上与$\mathbf{x}$ 一致。这与$\mathbf{x}$ 是极大的这一事实相矛盾。

□

定理 5.2 已表明，例 3.1 中的解局部可延拓。对于具有吸引平衡点的系统，下一节将给出一个更强的结果，证明解可以无限期延拓。

5.2 具有吸引平衡点的系统

定义5.4。 若包含关系 (2) 的原点满足 $\mathbf{0}\in\mathcal{F}(\mathbf{0},t)$ 对几乎所有 $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ 成立，且所有极大经典（广义）解 $\mathbf{x}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 都满足 $\lim_{t\to\sup\mathcal{I}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$，则称原点在经典（广义）意义下是吸引平衡点 。

为了确立与预设时间系统的联系，首先证明：若零解唯一，则这类系统总是具有吸引平衡点。

命题5.5。 考虑包含关系 (2)。假设对于所有 $t_0\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，满足 $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0}$ 的唯一经典（广义）解 $\bar{\mathbf{x}}$ 满足 $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ 对所有 $t\geq t_0$ 成立，并且每个极大经典（广义）解 $\mathbf{x}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 对某个 $T\in\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ 满足 $\lim_{t\to T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$。那么，原点在经典（广义）意义下是吸引平衡点。

证明。 由于零解 $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ 是一个解，因此包含关系 $\mathbf{0}\in\mathcal{F}(\mathbf{0},t)$ 对几乎所有 $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ 都成立。现在考虑任意一个满足假设条件 $\lim_{t\to T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 的极大解 $\mathbf{x}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$。如果 $T = \sup\mathcal{I}$，则无需证明。否则，$T\in\mathcal{I}$ 有限，并且根据$\mathbf{x}$ 的连续性，$\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ 成立。由于零解唯一，因此对所有 $t\in[T,\infty)\cap\mathcal{I}$，$\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 均成立，这意味着 $\lim_{t\to\sup\mathcal{I}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$。

□

将 $\mathcal{D}$ 记为 (2) 出现奇异点的时间点集合，即 $\mathcal{F}$不是局部有界的点[4]。将证明，如果 $\mathcal{D}$ 没有聚点，那么具有吸引平衡点的系统在广义 意义下的解，在经典 意义下总是可以无限延拓的。此外，如果 $\mathcal{D}$ 是有限集，则将证明经典意义和广义意义下的吸引平衡点等价。为此，将使用以下辅助引理，该引理已在附录中证明。

[4] 注意，若对所有 $\mathbf{y}\in\mathcal{G}$，均存在常数 $\varepsilon, M\in\mathbb{R}_{>0}$，使得对所有满足 $\|\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}\|<\varepsilon$的 $\bar{\mathbf{y}}\in\mathcal{G}$，都有 $\sup_{\mathbf{z}\in\mathcal{F}(\bar{\mathbf{y}})}\|\mathbf{z}\|\leq M$，则称集值函数 $\mathcal{F}$ 在集合 $\mathcal{G}$ 上局部有界。

引理 5.6. 设 $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}_{\geq 0}$，并考虑包含关系(2)。假设 $\mathcal{D}$ 没有聚点，且 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_{\geq 0}\setminus\mathcal{D})$上局部有界。令 $\mathbf{x}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$为一个极大广义解。那么，若$\sup\mathcal{I}$ 或$\sup\mathcal{D}$有限，则存在一个区间 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$，满足$\sup\mathcal{J} = \sup\mathcal{I}$，使得$\mathbf{x}|_{\mathcal{J}}$是一个极大经典解。

定理 5.7. 设 $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}_{\geq 0}$ 和包含关系 (2) 满足引理 *5.6* 的条件，并假设原点在经典意义下是一个吸引平衡点。那么，每个极大广义解$\mathbf{x}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 都满足$\sup\mathcal{I} = \infty$。此外，若 $\sup\mathcal{D}$ 有限，则原点在广义意义下是一个吸引平衡点。

证明. 设$\mathbf{x}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 是一个极大广义解，并反设 $\sup\mathcal{I} = T$ 有限。由引理 5.6，存在区间 $\mathcal{J}$，使得 $\sup\mathcal{J} = T$，且$\mathbf{x}|_{\mathcal{J}}$ 是一个极大经典解；因此，$\lim_{t\to T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$。但此时，可利用命题 4.7 将广义解$\mathbf{x}$ 与零解拼接后继续延拓，矛盾。因此，$\sup\mathcal{I} = \infty$。此外，若 $\sup\mathcal{D}$ 有限，则由引理 5.6，存在区间 $\mathcal{J}$，使得 $\sup\mathcal{J} = \infty$，且$\mathbf{x}|_{\mathcal{J}}$ 是一个极大经典解。因此，$\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$。

□

6 D设计示例：预设时间控 制

下面针对一个二阶系统设计一类预设时间控制器，该控制器利用了所提出的解的定义。考虑受扰双积分器 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u + w$，其扰动 w根据 $|w(t)| \leq W\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ 有界，且对所有 $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$均满足控制律

$$u(\mathbf{x},t) = \begin{cases} -\left[\frac{\gamma^2}{(T-t)^4} + \frac{6}{(T-t)^2}\right]x_1 - \frac{4}{T-t}x_2 & t < T \\ -k_1\operatorname{sign}(x_1) - k_2\operatorname{sign}(x_2) & t\geq T \end{cases} \tag{10}$$

其预设时间为 $T\in\mathbb{R}_{>0}$，且参数$\gamma, k_1, k_2\in\mathbb{R}_{>0}$均为正。

在无扰动的情况下，即对于 $w(t)\equiv 0$，闭环系统在时间区间$[0,T)$上的一个非平凡 Filippov 解例如为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (T-t)^3\sin\frac{\gamma}{T-t}, \\ x_2(t) &= (T-t)\gamma\cos\frac{\gamma}{T-t} - 3(T-t)^2\sin\frac{\gamma}{T-t}. \end{aligned} \tag{11}$$

与例 3.1 类似，在 T 附近变差有界性不再成立，因此该解无法作为经典 Filippov 解穿越该奇点。尽管如此，以下命题及其证明表明，所考虑的控制律在 $[0,T)$ 上实现预设时间收敛，在 $[T,\infty)$ 上实现有限时间收敛，从而使原点成为经典意义上的吸引平衡点。

命题 6.1. 设 $\gamma, T \in \mathbb{R}_{>0}$, $W \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并假设 $k_1 > k_2 + W > 2W$。考虑由 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u(\mathbf{x}\ t) + w(t)$ 定义的闭环系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}\ t)$，其中 u 按 (10) 定义，且扰动 $w\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to [-W, W]$ 为任意勒贝格可测函数。那么，闭环系统的原点是经典意义上的吸引平衡点。

注 6.2. 利用该命题和带有 $\mathcal{D} = \{T\}$ 的定理 5.7，可以得出：对于受扰闭环系统，广义解具有无限可延拓性，且原点在广义意义下具有吸引性。

证明. 令 $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并考虑满足$t_0 \in \mathcal{I}$的闭环系统的极大经典 Filippov 解$\mathbf{x}$： $\mathcal{I} \to \mathbb{R}$。分情况讨论 $t_0 \geq T$ 和 $t_0 \in [0, T)$。在第一种情况下，由 twisting 算法的有限时间稳定性可得 $\sup \mathcal{I} = \infty$ 和 $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$，参见（Levant，2007）。在第二种情况下，将证明 $[t_0, T) \subseteq \mathcal{I}$ 和 $\lim_{t\to T} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$，即在预设时间$T$内收敛。由于闭环系统是仿射时变系统，并且在每个紧子区间上满足全局 Lipschitz 条件，因此解在 $[t_0, T)$的每个紧子区间上都存在。为证明预设时间收敛，定义缩写 $q(\mathbf{x}\ t) = \frac{3x_1}{(T-t)^2} + \frac{x_2}{T-t}$，并考虑定义为$Q$： $\mathbb{R}^2 \times [0, T) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的函数

$$Q(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma^2 x_1^2}{(T-t)^6} + q(\mathbf{x}, t)^2, \tag{12}$$

其关于时间的导数 $\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} + \frac{\partial Q}{\partial t}$ 沿时间区间 $[0, T)$ 上的闭环轨迹可表示为$\dot{Q}(\mathbf{x}\ t) = \frac{2w(t) q(\mathbf{x}\ t)}{T-t} \cdot$定义 V: $\mathbb{R}^2 \times [0, T) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$为$V(\mathbf{x}\ t) = (T-t) Q(\mathbf{x}\ t)$，其关于时间的导数满足

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}, t) &= -Q(\mathbf{x}, t) + 2w(t) q(\mathbf{x}, t) \\
&\leq -Q(\mathbf{x}, t) + 2w(t) q(\mathbf{x}, t) + \left[2w(t) - \frac{q(\mathbf{x}, t)}{2}\right]^2 \\
&\leq -\frac{3}{4} Q(\mathbf{x}, t) + 4w(t)^2 \leq -\frac{3}{4} \frac{V(\mathbf{x}, t)}{T-t} + 4W^2 \\
&\leq -\frac{3}{4} \frac{V(\mathbf{x}, t)}{T} + 4W^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

因此， V在 $[t_0, T)$上是一致有界的；具体而言，对所有 $t \in [t_0, T)$， $V(\mathbf{x}(t)\ t) \leq \max\{V(\mathbf{x}(t_0)\ t_0), \frac{4W^2}{3T}\}$ 成立。现在通过反证法证明命题 $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$。假设存在一个序列 (t_k)，$t_k \in [t_0, T)$ 和一个非零向量 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$，使得 $\lim_{k\to\infty} t_k = T$ 且 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{c}$。由于对每个固定的非零 $\mathbf{c}$，$\lim_{t\to T} V(\mathbf{c}\ t) = \infty$，

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} V(\mathbf{x}(t), t) &\geq \lim_{k\to\infty} V(\mathbf{x}(t_k), t_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} V(\mathbf{c}, t_k) = \infty
\end{aligned} \tag{14}$$

于是得到，这与 $V(\mathbf{x}(t)\ t)$在 $[t_0, T)$上一致有界这一事实相矛盾。 □

注 6.3。 值得注意的是，只要考虑广义 Filippov 解，前述证明中的论证也可用于证明（非一致）李雅普诺夫稳定性。不过，对此进行形式化的详细论证超出了本文的范围。

7 结论

研究表明，在某些情况下，预设时间系统的 Filippov 解可能无法延拓至预设的收敛时刻之后。为克服这一限制，本文引入了广义 Filippov 解的定义。研究还表明，对于具有吸引平衡点的系统，此类广义解具有无限可延拓性，因此，特别是对于所有具有预设时间收敛特性的系统，该结论均成立。这些结果为将新的或现有的预设时间方法与其他控制技术（如滑模控制）进行理论可靠的结合铺平了道路。本文通过为受扰二阶积分器链设计一种预设时间与滑模相结合的控制器，展示了这一点。

证明

引理 4.4 的证明。对于 (a)，注意，若在定义4.1中 $\mathcal{S}$ 是一个闭区间，则 $[a_i, b_i] \subseteq \mathcal{S}$ 当且仅当 $a_i,\ b_i \in \mathcal{S}$。AC$_*$ 蕴含 AC 这一事实可由 $\|\mathrm{g}(b_i) - \mathrm{g}(a_i)\| \leq \sup_{a,\ b\in[a_i,b_i]} \|\mathrm{g}(b) - \mathrm{g}(a)\|$ 得出。反过来，假设 f 是 AC，令 $\varepsilon > 0$，并令 $\delta > 0$ 如定义2.1所述。考虑定义4.1中任意有限个两两不重叠区间组成的集合 $\mathcal{I}_i = [a_i, b_i]$。由于 f 连续且 $\mathcal{I}_i$ 紧，存在 c_i、$d_i \in \mathcal{I}_i \subseteq \mathcal{S}$，使得 $c_i < d_i$，从而 $\sup_{a,\ b\in\mathcal{I}_i} \|\mathrm{g}(b) - \mathrm{g}(a)\| = \|\mathrm{g}(d_i) - \mathrm{g}(c_i)\|$。注意到 $\sum_{i=1}^m |d_i - c_i| \leq \sum_{i=1}^m |b_i - a_i| < \delta$，由定义2.1可得 $\sum_{i=1}^m \sup_{a,\ b\in\mathcal{I}_i} \|\mathrm{g}(b) - \mathrm{g}(a)\| < \varepsilon$。对于 (b)，由于 $\mathcal{I}$ 是一个区间，它可以写成紧区间 $\mathcal{J}_j$ 的可数并，g 在每个区间上都是 AC。由于每个 $\mathcal{J}_j$ 都是闭集，由 (a) 可知，g 为 AC 蕴含 g 在$_*$ 上的 $\mathcal{J}_j$ 为 AC。因此，根据定义，g 在 $\mathcal{I}$ 上为 ACG$_*$。(c) 由以下事实得出：g 在 $\mathcal{I}$的每个子集上都是 AC，因此根据 (a)，g 在 $\mathcal{I}$ 的所有紧子区间上都是 AC。为证明 (d)，对每个 j，定义 $\mathcal{H}_j$ 为根据定义 4.1 构造的集合族的可数集，其并集为 $\mathcal{I}_j = \cup_{\mathcal{S}\in\mathcal{H}_j} \mathcal{S}$，且 g 在其上为 AC$_*$。于是，集合族 $\mathcal{H} = \cup_{j=1}^\infty \mathcal{H}_j$ 是可数集的可数并，因此也是可数的，并且 g 在每个 $\mathcal{S} \in \mathcal{H}$ 上都是 AC$_*$。由于 $\cup_{\mathcal{S}\in\mathcal{H}} \mathcal{S} = \cup_{j=1}^\infty \mathcal{I}_j = \mathcal{I}$，根据定义，g 在 $\mathcal{I}$ 上为 ACG$_*$。

□

引理 *5.6* 的证明。令 $T = \sup \mathcal{I} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$，并选择 $\theta \in \mathcal{I}$ 使得 $\mathcal{D} \cap (\theta,\ T) = \emptyset$。由命题 4.6 可知，存在一个开区间 $\mathcal{H} \subseteq (\theta,\ T)$，使得

$x|_{\mathcal{H}}$ 是经典解。任取 $\tau_1 \in \mathcal{H}$，并取最大的 $\tau_2 \in (\tau_1, T]$，使得 x 在 $\mathcal{J} = [\tau_1, \tau_2$上是 LAC。为证明 $\sup \mathcal{J} = \sup \mathcal{I}$，这也意味着 $x|_{\mathcal{J}}$ 是极大的，因为否则可利用命题 4.7 延拓 x，反设¯有 $\tau_2 < T$。考虑紧区间 $\mathcal{J} = [\tau_1, \tau_2]$，根据构造，x 在该区间上不是绝对连续。于是，$x|_{\bar{\mathcal{J}}}$连续，并且根据（Gor-¯don，1994，定理 6.12）具有 Lusin 的 N 性质，因为 x 在 $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$上是 ACG_*。令 $M = \sup_{t \in \bar{\mathcal{J}}} \|x(t)\|$ 为 x 在$\mathcal{J}$上的一致上界，并令 Q 为 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{G}$的紧¯子集 $\{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \leq M\} \times \mathcal{J}$上的一致上界。那么，x 在 $\mathcal{J}$上的总¯变差至多为 $(\tau_2 - \tau_1)Q$。¯但这意味着 x 在 $\mathcal{J}$上绝对连续，矛盾。 □

参考文献

Aldana-L´opez, R., Seeber, R., G´omez-Guti´errez, D., An- gulo, M.T., Defoort, M., 2022年. 一种通过有界时变增益生成预定义时间微分器的重新设计方法。《国际鲁棒与非线性控制期刊》。Espitia, N., Perruquetti, W., 2021年. 具有输入时滞的线性时不变系统的预测器反馈预定时间镇定。IEEE《自动控制汇刊》67, 2784–2799. Filippov, A.F., 1988. 《不连续右端的微分方程》。Kluwer. Gordon, R.A., 1994. 《Lebesgue、Denjoy、Perron 与 Henstock 积分》。美国数学学会。Holloway, J., Krstic, M., 2019. 观测器规范形线性系统的预设时间观测器。IEEE《自动控制汇刊》64, 3905–3912.ˇ Kurzweil, J., Schwabik, S., 1990. 解为 ACG_*-函数的常微分方程。《数学档案》26, 129–136. Levant, A., 1998. 通过滑模技术实现鲁棒精确微分。Automatica 34, 379–384. Levant, A., 2005. 高阶滑模设计的齐次性方法。Automatica 41, 823–830. Levant, A., 2007. 二阶滑模设计原理。Automatica 43, 576–586. Lusin, N., 1912. 关于可测函数的性质。《巴黎科学院报告》154, 1688–1690. Polyakov, A., 2011. 用于线性控制系统固定时间镇定的非线性反馈设计。IEEE《自动控制汇刊》57, 2106–2110. Polyakov, A., Fridman, L., 2014. 滑模控制系统的稳定性概念与 Lyapunov 函数。《富兰克林研究所期刊》351, 1831–1865. Roxin, E., 1966. 控制系统的有限稳定性。《巴勒莫数学学会会刊》15, 273–282. Saks, S., 1937. 《积分理论》。Hafner 出版公司，纽约，NY，美国。ˇSchwabik, S., 1990. 广义常微分方程——综述，载于：第七届捷克斯洛伐克微分方程及其应用会议论文集，布拉格，捷克共和国。第59–70页。

Song, Y., Wang, Y., Holloway, J., Krstic, M., 2017年. 用于预定有限时间调节正规形非线性系统的时变反馈。Automatica 83, 243–251. Zhou, B., Michiels, W., Chen, J., 2022年. 通过光滑周期时滞反馈实现线性时滞系统的固定时间镇定。IEEE《自动控制汇刊》67, 557–573. Zhou, B., Shi, Y., 2021年. 通过线性时变反馈对一类非线性系统进行预定时间镇定。IEEE《自动控制汇刊》66, 6123–6130.